ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

HÉLÈNE CHARRIÈRE

Triangulation formelle de certains systèmes de Pfaff complètement intégrables et application à l'étude C^∞ des systèmes non linéaires

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 7, nº 4 (1980), p. 625-714

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1980_4_7_4_625_0>

Triangulation formelle de certains systèmes de Pfaff complètement intégrables et application à l'étude C^∞ des systèmes non linéaires.

HÉLÈNE CHARRIÈRE

Introduction.

Cet article se compose de deux parties (chapitre I, chapitre III). Dans la première partie, on fait l'étude formelle des systèmes de Pfaff complètement intégrables de la forme

$$(1) \qquad d_z = \omega z\,, \qquad \text{où} \qquad \omega = A(x, y)\,\frac{dx}{x^{p+1}} + B(x, y)\,\frac{dy}{y^{q+1}}\,,$$

A et B sont des matrices d'ordre n dont les coefficients sont des séries formelles en (x, y) à coefficients complexes. On montre (théorème p. 2), pour un tel système, l'existence d'une décomposition de Jordan; de plus, on met le système sous une forme canonique qui sépare les variables. Cette décomposition généralise les résultats de A. H. M. Levelt ([2]) et donne en particulier les invariants formels, par transformation méromorphe formelle, ce qui généralise les résultats de W. Balser, W. B. Jurkat et D. A. Lutz (voir par exemple [6]).

L'étude du chapitre I permet d'entreprendre l'étude C^∞ des systèmes de Pfaff complètement intégrables non linéaires de la forme

$$(2) \qquad \begin{cases} x^{p+1}\dfrac{\partial z}{\partial x} = F(x, y, z) \\[2ex] y^{q+1}\dfrac{\partial z}{\partial y} = G(x, y, z) \end{cases}$$

où F et G sont des applications C^∞ d'un voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On démontre en particulier le résultat suivant: si le

Pervenuto alla Redazione il 21 Gennaio 1980.

système (2) a deux solution formelles $H_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(y)x^n$, $H_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x)y^n$, à coefficients C^∞ dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{R}$, si de plus, lorsqu'on remplace les coefficients de ces séries par leur développement de Taylor à l'origine, les séries formelles à deux variables obtenues coïncident, il existe alors (voir théorème p. 53) une solution $u(x, y)$ du système (2), C^∞ dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^2$, dont le développement de Taylor en x (resp. y) est H_1 (resp. H_2).

L'exemple suivant

$$\begin{cases} x^{p+1}\dfrac{\partial z}{\partial x} - z = 0 \\[2ex] y\dfrac{\partial z}{\partial y} - z = \begin{cases} y\exp\left(-\dfrac{1}{px^p}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases} \end{cases}$$

montre que, lorsque p ou q est strictement positif, on ne peut pas espérer, étant donnée une solution série formelle $\hat{u}(x, y) = \sum_{\substack{n \geqslant 0 \\ m \geqslant 0}} a_{nm}x^n y^m$ trouver une vraie solution C^∞ au voisinage de 0, admettant cette série comme développement de Taylor à l'origine. Le théorème ci-dessus est donc le meilleur que l'on puisse obtenir dans cette voie. Il généralise le théorème analogue à une variable de B. Malgrange ([4]).

Dans un article en cours de rédaction, nous donnons deux autres applications importantes de la théorie formelle:

1) l'étude asymptotique des systèmes non linéaires analytiques de la forme (2), ce qui nous donne les invariants analytiques et méromorphes des systèmes analytiques du type (1).

2) l'étude C^∞ de certains systèmes non linéaires à paramètre.

Chapitre I

TRIANGULATION FORMELLE DE CERTAINS SYSTÈMES DE PFAFF

Notations,

On désigne par:

$\hat{\theta} = \mathbf{C}[x_1, x_2]$ l'anneau des séries formelles à coefficients dans $\mathbf{C}$ à deux variables.

$\hat{\theta}_{x_1}$	(resp. $\hat{\theta}_{x_2}$, resp. $\hat{\theta}_{x_1x_2}$) l'anneau localisé de $\hat{\theta}$ par rapport à la partie multiplicativement stable formée par les puissances de x_1 (resp. de x_2, resp. de x_1 et x_2).
α_1, α_2	deux entiers strictement positifs.
$\hat{\theta}' = \mathbf{C}[[t_1, t_2]]$	où $t_1^{\alpha_1} = x_1$, $t_2^{\alpha_2} = x_2$.
$E = \hat{\theta}^n$	où n est un entier strictement positif.
$E' = E \otimes \hat{\theta}'$	
$\tau_i = \hat{\theta} \to \hat{\theta}$	la dérivation $x_i^{p_i+1}(\partial/\partial x_i)$, pour $i = 1, 2$, où p_i est un entier positif ou nul.
$\tau_i' = \hat{\theta}' \to \hat{\theta}'$	l'extension $(1/\alpha_i)t_i^{\alpha_i p_i+1}(\partial/\partial t_i)$ de τ_i à $\hat{\theta}'$.
D_i: $E \to E$	un opérateur différentiel linéaire associé à τ_i, c'est-à-dire une application de E dans E vérifiant:

$$\begin{cases} D_i(v + w) = D_i(v) + D_i(W) \\ D_i(\lambda v) \quad = \tau_i(\lambda)v + \lambda D_i(v) \end{cases}$$

pour tout λ dans $\hat{\theta}$, et tout (v, w) dans E^2.

D_i': $E' \to E'$	l'extension de D_i à E'.
$A(x_1, x_2)$	(resp. $B(x_1, x_2)$) la matrice de D_1 (resp. D_2) dans la base canonique de E.

(S) le système
$$\begin{cases} x_1^{p_1+1}\dfrac{\partial}{\partial x_1} + A(x_1, x_2) \\ x_2^{p_2+1}\dfrac{\partial}{\partial x_2} + B(x_1, x_2) \end{cases}$$

(S') l'extension de (S)
$$\begin{cases} \dfrac{1}{\alpha_1} t_1^{\alpha_1 p_1+1}\dfrac{\partial}{\partial t_1} + A(t_1^{\alpha_1}, t_2^{\alpha_2}) \\ \dfrac{1}{\alpha_2} t_2^{\alpha_2 p_2+1}\dfrac{\partial}{\partial t_2} + B(t_1^{\alpha_1}, t_2^{\alpha_2}) \end{cases}$$

(S^T) le système obtenu à partir de (S) au moyen transformation T de $GL_n(\hat{\theta}_{x_1x_2})$ c'est-à-dire le système

$$\begin{cases} x_1^{p_1+1}\dfrac{\partial}{\partial x_1} + A^T(x_1, x_2) \\ x_2^{p_2+1}\dfrac{\partial}{\partial x_2} + B^T(x_1, x_2) \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} A^T = T^{-1}AT + x_1^{p_1+1}T^{-1}\dfrac{\partial T}{\partial x_1} \\ B^T = T^{-1}BT + x_2^{p_2+1}T^{-1}\dfrac{\partial T}{\partial x_2}. \end{cases}$$

Dans toute la suite, on supposera que D_1 et D_2 forment un système complètement intégrable, c'est-à-dire $D_1D_2 = D_2D_1$, c'est-à-dire encore:

$$x_1^{p_1+1}\frac{\partial B}{\partial x_1} + AB = x_2^{p_2+1}\frac{\partial A}{\partial x_2} + BA\,.$$

THÉORÈME. *Soit le système complètement intégrable*

$$(S): \left\{\begin{array}{l} x_1^{p_1+1}\dfrac{\partial}{\partial x_1} + A(x_1, x_2) \\ x_2^{p_2+1}\dfrac{\partial}{\partial x_2} + B(x_1, x_2) \end{array}\right.$$

avec A et B dans $\mathcal{M}_{n\times n}(\hat{\theta})$.

Il existe deux entiers strictement positifs, α_1 et α_2 et une transformation T dans $GL_n(\hat{\theta}_{t_1t_2})$ qui change le système

$$(S') \quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{\alpha_1} t_1^{\alpha_1 p_1+1}\dfrac{\partial}{\partial t_1} + A(t_1^{\alpha_1}, t_2^{\alpha_2}) \\ \dfrac{1}{\alpha_2} t_2^{\alpha_2 p_2+1}\dfrac{\partial}{\partial t_2} + B(t_1^{\alpha_1}, t_2^{\alpha_2}) \end{array}\right.$$

en le système

$$(S'^T) \quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{\alpha_2} t_1^{\alpha_1 p_1+1}\dfrac{\partial}{\partial t_1} + A'^T(t_1) \\ \dfrac{1}{\alpha_2} t_2^{\alpha_2 p_2+1}\dfrac{\partial}{\partial t_2} + B'^T(t_2) \end{array}\right.$$

où l'on a:

1)

$$A'^T(t_1) = \begin{pmatrix} A'_1(t_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A'_2(t_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & A'_k(t_1) \end{pmatrix}, \qquad B'^T(t_2) = \begin{pmatrix} B'_1(t_2) & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & & B'_2(t_2) \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots\cdots & & B'_k(t_2) \end{pmatrix}$$

où k est un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n$ et où, pour $1 \leqslant i \leqslant k$:

$$\left\{\begin{array}{ll} A'_i(t_1) = a_i(t_1)I_{n_i} + t_1^{\alpha_1 p_1}N_i^1 & \\ B'_i(t_2) = b_i(t_2)I_{n_i} + t_2^{\alpha_2 p_2}N_i^2 & \\ I_{n_i} & \text{matrice identité d'ordre } n_i \\ N_i^1,\ N_i^2 & \text{matrices nilpotentes d'ordre } n_i \text{ à coefficients dans } \mathbf{C}, \\ & \text{triangulaires supérieures,} \\ a_i(t_1) & (\text{resp. } b_i(t_2)) \text{ polynôme à coefficients dans } \mathbf{C} \text{ de degré} \\ & \text{au plus } \alpha_1 p_1 \ (\text{resp. } \alpha_2 p_2); \end{array}\right.$$

de plus, pour $1 \leqslant i \leqslant k-1$, ou bien $a_i - a_{i+1} \notin \mathbb{Z}$, ou bien $b_i - b_{i+1} \notin t_2^{\alpha_2 p_2}\mathbb{Z}$.

2) $$[A'^T(t_1), B'^T(t_2)] = 0\,.$$

3) La transformation T est le produit de transformations du type $\operatorname{diag}(t_1^{k_1}t_2^{k'_1}, t_1^{k_2}t_2^{k'_2}, \ldots, t_1^{k_n}t_2^{k'_n})$ où, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, (k_i, k'_i) appartient à $\mathbb{N}^2$, et de transformations appartenant à $GL_n(\hat{\theta}')$.

REMARQUE 1. La condition $[A'^T(t_1), B'^T(t_2)] = 0$ équivaut à dire que (S'^T) est complètement intégrable. Elle équivaut encore à $[A'_i(t_1), B'_i(t_2)] = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$, c'est-à-dire encore

$$[N_i^1, N_i^2] = 0 \qquad \text{pur } 1 \leqslant i \leqslant k\,.$$

DEFINITION 1. *On dit qu'un élément λ de $\hat{\theta}$ est valeur propre de D_1 s'il existe un vecteur non nul v de E tel que $D_1 v = \lambda v$. On dira que v est un vecteur propre pour D_1 et qu'il est associé à la valeur propre λ.*

On a alors un corollaire immédiat du théorème précédent:

COROLLAIRE 1. *Si (D_1, D_2) est un couple d'opérateurs différentiels linéaires de E dans E qui commutent, il existe, dans une extension E' de E, un vecteur propre commun à D'_1 et D'_2, extensions respectives à E' de D_1 et D_2.*

La démonstration du théorème se fait par récurrence sur la dimension n de E, puis par récurrence sur le plus petit des deux entiers p_1 et p_2.

Le cas $n = 1$. Le système (S) s'écrit:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1^{p_1+1}\dfrac{\partial}{\partial x_1} + a(x_1, x_2) \\[2ex] x_2^{p_2+1}\dfrac{\partial}{\partial x_2} + b(x_1, x_2) \end{array}\right.$$

où a et b sont des séries formelles en x_1 et x_2, qui, du fait de la relation de complète intégrabilité $x_1^{p_1+1}(\partial b/\partial x_1) = x_2^{p_2+1}(\partial a/\partial x_2)$, sont du type suivant:

$$\left\{\begin{array}{l} a(x_1, x_2) = a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_{p_1} x_1^{p_1} + x_1^{p_1+1}\tilde{a}(x_1, x_2) \\[1ex] b(x_1, x_2) = b_0 + b_1 x_2 + \ldots + b_{p_2} x_2^{p_2} + x_2^{p_2+1}\tilde{b}(x_1, x_2) \end{array}\right.$$

où, pour $0 \leqslant i \leqslant p_1$ (resp. $0 \leqslant i \leqslant p_2$) a_i (resp. b_i) est dans $\mathbb{C}$, et $\tilde{a}(x_1, x_2)$, $\tilde{b}(x_1, x_2)$ sont des éléments de θ tels que $\partial\tilde{b}/\partial x_1 = \partial\tilde{a}/\partial x_2$.

La transformation $t_1(x_1, x_2) = \exp\left(-\int_0^{x_1}\tilde{a}(s, x_2)ds\right)$ conduit au système

$$\begin{cases} x_1^{p_1+1}\dfrac{\partial}{\partial x_1} + a^{t_1}(x_1, x_2) \\ x_2^{p_2+1}\dfrac{\partial}{\partial x_2} + b^{t_1}(x_1, x_2) \end{cases}$$

où $a^{t_1}(x_1, x_2) = a_0 + a_1x_1 + \ldots + a_{p_1}x_1^{p_1}$.

Le système (S^{t_1}) est complètement intégrable; on a donc

$$x_1^{p_1+1}\frac{\partial b^{t_1}}{\partial x_1} = x_2^{p_2+1}\frac{\partial a^{t_1}}{\partial x_2}$$

$$x_1^{p_1+1}\frac{\partial b^{t_1}}{\partial x_1} = 0$$

b^{t_1} ne dépend plus de x_1. On peut donc l'écrire:

$$b^{t_1}(x_2) = b_0' + b_1'x_2 + \ldots + b_{p_2}'x_2^{p_2} + x_2^{p_2+1}\tilde{b}'(x_2)$$

avec

$$\begin{cases} b_i' \in \mathbf{C} \quad \text{pour } 0 \leqslant i \leqslant p_2 \\ \tilde{b}'(x_2) \in \mathbf{C}[\![x_2]\!] . \end{cases}$$

La transformation $t_2(x_2) = \exp\left(-\int_0^{x_2}\tilde{b}(s)ds\right)$ change alors le système (S^{t_1}) en

$$\begin{cases} x_1^{p_1+1}\dfrac{\partial}{\partial x_1} + (a_0 + a_1x_1 + \ldots + x_{p_1}x_1^{p_1}) \\ x_2^{p_2+1}\dfrac{\partial}{\partial x_1} + (b_0' + b_1'x_2 + \ldots + b_{p_2}'x_2^{p_2}) . \end{cases}$$

Le cas $n \in \mathbf{N}$, $p_1 = 0$.

$a)$ On cherche une transformation $T \in GL_n(\hat{\theta}_{x_1})$ qui « élimine » la variable x_1. De façon plus précise, on établit la proposition suivante:

PROPOSITION 1. *Soit le système complètement intégrable*

$$(S): \begin{cases} x_1\dfrac{\partial}{\partial x_1} + A(x_1, x_2) \\ x_2^{p_2+1}\dfrac{\partial}{\partial x_2} + B(x_1, x_2) . \end{cases}$$

Il existe une transformation T, produit de transformations de $GL_n(\mathbf{C}[\![x_1, x_2]\!])$ et de transformations du type $\operatorname{Diag}(x_1^{l_1}, \ldots, x_1^{l_n})$ (*où les l_i sont* dans $\mathbf{N}$) *qui change* (S) en

$$(S^T) \begin{cases} x_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + A^T(x_2) \\[2ex] x_2^{p_2+1} \dfrac{\partial}{\partial x_2} + B^T(x_2) \end{cases}$$

où $A^T(x_2)$, $B^T(x_2)$ sont dans $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{C}[\![x_2]\!])$

$$A^T(x_2) = \begin{pmatrix} A_1(x_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_k(x_2) \end{pmatrix}, \qquad B^T(x_2) = \begin{pmatrix} B_1(x_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & B_k(x_2) \end{pmatrix}$$

avec, pour $1 \leqslant i \leqslant k$:

$$\begin{cases} A_i(0) = a_i I_{n_i} + N_i^1 \\ B_i(0) = b_i I_{n_i} + N_i^2 \\ a_i,\ b_i \quad \text{dans } \mathbf{C},\ N_i^1 \text{ matrices nilpotentes de } \mathcal{M}_{n_i\times n_i}(\mathbf{C}) \end{cases}$$

et, pour $1 \leqslant i \leqslant k-1$, ou bien $a_i - a_{i+1} \notin \mathbf{Z}$, ou bien $b_i - b_{i+1} \neq 0$.

On distingue pour cela plusieurs cas:

α) *Les valeurs propres de $A(0,0)$ ne diffèrent pas d'un entier non nul.*

On cherche alors, comme dans le cas d'une variable, une transformation T dans $GL_n(\hat{\theta})$, telle que $A^T = A(0, x_2)$.

Posons
$$T(x_1, x_2) = T_0(x_2) + T_1(x_2)x_1 + \ldots + T_k(x_2)x_1^k + \ldots$$
$$A(x_1, x_2) = A_0(x_2) + A_1(x_2)x_1 + \ldots + A_k(x_2)x_1^k + \ldots$$

avec, pour $k \geqslant 0$, $T_k(x_2)$ et $A_k(x_2)$ dans $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{C}[\![x_2]\!])$

$$\begin{aligned} & A^T = A_0(x_2) \\ \Leftrightarrow\ & T^{-1}AT + x_1 T^{-1}\frac{\partial T}{\partial x_1} = A_0 \\ \Leftrightarrow\ & AT + x_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} = TA_0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_0T_0 - T_0A_0 = 0 \\ (A_0 + I_n)T_1 - T_1A_0 = -A_1T_0 \\ \dots \\ (A_0 + kI_n)T_k - T_nA_0 = -A_1T_{k-1} - A_2T_{k-2} \dots - A_nT_0 \\ \dots \end{cases}$$

La première équation de ce système est vérifiée par $T_0 = I_n$, et, pour $k \geqslant 1$, l'existence et l'unicité d'une solution T_k est assurée, par exemple, par le théorème des fonctions implicites formel, puisque $(A_0 + kI_n)(0)$ et $A_0(0)$ n'ont pas de valeur propre commune.

Il reste à vérifier que B^T ne dépend plus de x_1.

Posons $\quad B^T(x_1, x_2) = B_0(x_2) + B(x_2)x_1 + \dots + B_k(x_2)x_1^k + \dots$

avec, pour $k \geqslant 0$, $B_k(x_2)$ dans $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{C}[\![x_2]\!])$.

Le système (S^T) est complètement intégrable, c'est-à-dire:

$$x_2^{p_2+1}\frac{dA_0(x_2)}{dx_2} + B^TA_0 = x_1\frac{\partial B^T}{\partial x_1} + A_0B^T$$

soit

$$\begin{cases} x_2^{p_2+1}\dfrac{dA_0}{dx_2} + B_0A_0 = A_0B_0 \\ B_1A_0 = (I_n + A_0)B_1 \\ \dots \\ B_kA_0 = (kI_n + A_0)B_k \\ \dots \end{cases}$$

Donc $B_k = 0$ pour $k \geqslant 1$, puisque $(kI_n + A_0(0)$ et $A_0(0)$ n'ont pas de valeur propre commune.

Les remarques qui suivent serviront à établir des théorèmes de triangulation sur d'autres anneaux que $\hat{\theta}$, pour obtenir des théorèmes d'existence de solutions C^∞ sur un voisinage de $(0, 0)$ dans $\mathbf{R}^2$, ou holomorphes dans un produit de secteurs $S_1 \times S_2$ dans $\mathbf{C}^2$. (Voir les chapitres suivants).

On introduit d'abord quelques notations.

Notations.

1) On désigne par $C_V^\infty[\![x_1]\!]$ l'ensemble des séries formelles en x_1, $\sum_{n\geqslant 0} a_n(x_2)x_1^n$, où, pour $n \geqslant 0$, $a_n(x_2)$ est une fonction C^∞ sur V, voisinage

ouvert de 0 dans $\mathbb{R}$, à valeurs complexes, et par $C^\infty[\![x_1]\!]$ la limite inductive

$$\varinjlim_{V \text{ voisinage de } 0} C_V^\infty[\![x_1]\!] .$$

2) On désigne par $S(\theta_1, \theta_2, \varrho)$ le secteur suivant de $\mathbf{C}$:

$$S(\theta_1, \theta_2, \varrho) = \{x \in \mathbf{C}/\theta_1 < \operatorname{Arg} x < \theta_2, |x| < \varrho\}$$

par $\mathcal{A}_{S(\theta_1,\theta_2,\varrho)}[\![x_1]\!]$ l'ensemble des séries formelles en x_1, $\sum_{n\geqslant 0} a_n(x_2)x_1^n$, où, pour $n\geqslant 0$, $a_n(x_2)$ est une fonction holomorphe dans $S(\theta_1, \theta_2, \varrho)$, admettant, quand x_2 tend vers 0 dans $S(\theta_1, \theta_2, \varrho)$ un développement asymptotique, enfin par $\mathcal{A}_{S(\theta_1,\theta_2)}[\![x_1]\!]$ la limite inductive

$$\varinjlim_{\varrho>0} \mathcal{A}_{S(\theta_1,\theta_2,\varrho)}[\![x_1]\!] .$$

REMARQUE 2. Si l'on suppose que les matrices A et B du système (S), au lieu d'appartenir à $\mathcal{M}_{n\times n}(\hat{\theta})$, sont dans $\mathcal{M}_{n\times n}\big(C^\infty[\![x_1]\!]\big)$ (respectivement dans $\mathcal{A}_{S(\theta_1,\theta_2)}[\![x_1]\!]$, et si on est dans le cas α (c'est-à-dire les valeurs propres de $A_0(0)$ ne diffèrent pas d'un entier non nul), il existe alors une transformation T dans $GL_n\big(C^\infty[\![x_1]\!]\big)$ (resp. dans $GL_n\big(\mathcal{A}_{S(\theta_1,\theta_2)}[\![x_1]\!]\big)$ qui « élimine » x_1.

β) *Toutes les valeurs propres de $A(0,0)$ diffèrent deux à deux par un entier non nul.*

Supposons par exemple:

$$A(0,0) =$$

$$= \left(\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a & \varepsilon_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \varepsilon_2 & & \vdots \\ \vdots & & a & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \varepsilon_{k-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} a+1 & \varepsilon_1' & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a+1 & \varepsilon_2' & & \vdots \\ \vdots & & a+1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \varepsilon_{l-1}' \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a+1 \end{pmatrix} \end{array}\right)$$

avec k et l entiers strictement positifs tels que $k + l = n$.

$$\varepsilon_i = 0 \quad \text{ou 1 pour } 1 \leqslant i \leqslant k-1$$
$$\varepsilon_i' = 0 \quad \text{ou 1 pour } 1 \leqslant i \leqslant l-1 .$$

On fait alors sur le système (S) la transformation $\begin{pmatrix} x_1 I_k & 0 \\ 0 & I_l \end{pmatrix}$ qui ramène au cas α.

Pour que cette démonstration soit correcte, il faut supposer que $A(0, x_2)$ et $B(0, x_2)$ ont la forme suivante:

$$A(0, x_2) = \begin{pmatrix} A_{11}(0, x_2) & 0 \\ 0 & A_{22}(0, x_2) \end{pmatrix} \qquad B(0, x_2) = \begin{pmatrix} B_{11}(0, x_2) & 0 \\ 0 & B_{22}(0, x_2) \end{pmatrix}$$

avec $A_{11}(0, x_2)$ et $B_{11}(0, x_2)$ dans $\mathcal{M}_{k\times k}(\mathbf{C}[\![x_2]\!])$, $A_{22}(0, x_2)$ et $B_{22}(0, x_2)$ dans $\mathcal{M}_{l\times l}(\mathbf{C}[\![x_2]\!])$.

Si ce n'est pas le cas, on s'y ramène en effectuant sur le système (S) une transformation $T(x_2)$ appartenant à $GL_n(\mathbf{C}[\![x_2]\!])$. Plus précisément, on cherche $T(x_2)$ de la forme $\begin{pmatrix} I_k & T_{12}(x_2) \\ T_{21}(x_2) & I_l \end{pmatrix}$ telle que $A^T(0, x_2)$ soit de la forme $\begin{pmatrix} A'_{11}(x_2) & 0 \\ 0 & A'_{22}(x_2) \end{pmatrix}$ avec $A'_{11}(x_2)$ dans $\mathcal{M}_{k\times k}(\mathbf{C}[\![x_2]\!])$, $A'_{22}(x_2)$ dans $\mathcal{M}_{l\times l}(\gamma[\![x_2]\!])$, ce qui équivaut, si on pose

$$A(0, x_2) = \begin{pmatrix} A_{11}(x_2) & A_{12}(x_2) \\ A_{21}(x_2) & A_{22}(x_2) \end{pmatrix}$$

à:

$$T^{-1}(x_2) A(0, x_2) T(x_2) = \begin{pmatrix} A'_{11}(x_2) & 0 \\ 0 & A'_{22}(x_2) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{ll} (1) & \begin{cases} A_{21} + A_{22} T_{21} - T_{21} A_{11} - T_{21} A_{12} T_{21} = 0 \\ A_{11} + A_{12} T_{21} = A'_{11} \end{cases} \\ (2) & \begin{cases} A_{12} + A_{11} T_{12} - T_{12} A_{22} - T_{12} A_{21} T_{12} = 0 \\ A_{22} + A_{21} T_{12} = A'_{22} . \end{cases} \end{array} \right.$$

On a $A_{21}(0) = 0$ et $A_{12}(0) = 0$, donc l'équation (1) est satisfaite en $x_2 = 0$ par $T_{21} = 0$. L'existence (et l'unicité) d'une solution $T_{21}(x_2)$ de (1) est donc assurée, puisque $A_{22}(0)$ et $A_{11}(0)$ n'ont pas de valeur propre commune, par exemple par le théorème des fonctions implicites formel.

L'équation (2) est résolue de la même manière.

Il reste à vérifier que si l'on pose

$$B^T(0, x_2) = \begin{pmatrix} B'_{11}(x_2) & B'_{12}(x_2) \\ B'_{21}(x_2) & B'_{21}(x_2) \end{pmatrix}$$

on a bien $B'_{12}(x_2) = 0$ et $B'_{21}(x_2) = 0$, ce qui est une conséquence de la complète intégrabilité de (S^T). En effet:

$$x_2^{p_2+1} \frac{\partial A^T}{\partial x_2} + B^T A^T = x_1 \frac{\partial B^T}{\partial x_1} + A^T B^T$$

$$\Rightarrow \quad x_2^{p_2+1} \frac{dA^T(0, x_2)}{dx_2} + B^T(0, x_2) A^T(0, x_2) = A^T(0, x_2) B^T(0, x_2)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} B'_{12} A'_{22} = A'_{11} B'_{12} \\ B'_{21} A'_{11} = A'_{22} B'_{21} \,. \end{cases}$$

Or $A'_{11}(0) = A_{11}(0)$, $A'_{22}(0) = A_{22}(0)$ puisque $T(0) = I_n$.

Donc $A'_{11}(0)$ et $A'_{22}(0)$ n'ont pas de valeur propre commune et nécessairement on a alors $B'_{12}(x_2) = 0$ et $B'_{21}(x_2) = 0$.

Remarque 3. Si les matrices A et B du système (S) sont dans $\mathcal{M}_{n\times n}(C^\infty[\![x_1]\!])$ (resp. dans $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathcal{A}_{S(\theta_1,\theta_2)}[\![x_1]\!])$), on peut trouver une telle transformation $T(x_2)$, C^∞ inversible au voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$ (c'est-à-dire C^∞, ainsi que son inverse, sur un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$) (respectivement une transformation $T(x_2)$, holomorphe dans un $S(\theta_1, \theta_2, \varrho)$ ainsi que son inverse, et admettant, ainsi que son inverse, un développement asymptotique lorsque x_2 tend vers 0 dans $S(\theta_1, \theta_2, \varrho)$.

γ) *Cas général.*

On raisonne par récurrence sur la dimension n du système:

1) si $A(0, 0)$ a du moins deux valeurs propres réelles qui ne diffèrent pas d'un entier, il existe une transformation dans $GL_n(\hat{\theta})$ qui décompose le système (S) en deux systèmes de dimension strictement inférieure à n (voir [1] p. 264-266);

2) si toutes les valeurs propres de $A(0, 0)$ diffèrent par un entier, on se ramène à les supposer toutes égales, c'est-à-dire au cas α, en raisonnant par récurrence sur le plus grand entier dont elles diffèrent et en utilisant la démonstration de β pour diminuer cet entier.

Remarque 4. Etant donné le système

$$(S): \begin{cases} x_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + A \\[2ex] x_2^{p_2+1} \dfrac{\partial}{\partial x_2} + B \end{cases}$$

où A et B sont dans $\mathcal{M}_{n\times n}(C^\infty[\![x_1]\!])$ $\big($resp. $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathcal{A}_{S(\theta_1,\theta_2)}[\![x_1]\!])\big)$. Il existe alors une transformation T, produit de diag $(x_1^{k_1}, \ldots, x_1^{k_n})$, où les k_i sont dans $\mathbf{N}$, par des transformations de $GL_n(C^\infty[\![x_1]\!])$ $\big($resp. de $GL_n(\mathcal{A}_{S(\theta_1,\theta_2)}[\![x_1]\!])\big)$ telle que le système (S^T) soit de la forme

$$\begin{cases} x_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + A^T(x_2) \\ x_2^{p_2+1} \dfrac{\partial}{\partial x_2} + B^T(x_2) \end{cases}$$

où $A^T(x_2)$ et $B^T(x_2)$ sont des matrices C^∞ de x_2 au voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$ (resp. des matrices holomorphes sur un secteur $S(\theta_1, \theta_2, \varrho)$ de $\mathbf{C}$, admettant, lorsque x_2 tend vers 0 dans $S(\theta_1, \theta_2, \varrho)$, un développement asymptotique). On peut supposer de plus

$$A^T(x_2) = \begin{pmatrix} A_1(x_2) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k(x_2) \end{pmatrix}, \qquad B^T(x_2) = \begin{pmatrix} B_1(x_2) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_k(x_2) \end{pmatrix}$$

où, pour $i \neq j$, les valeurs propres de $A_i(0)$ et de $A_j(0)$, ne diffèrent pas d'un entier.

Ce résultat provient des remarques 2 et 3 pour les cas α et β, et, pour le cas γ, du lemme 3, chapitre II.

b) On est maintenant ramené à un problème à une variable puisque le système (S^T) est de la forme

$$\begin{cases} x_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + A^T(x_2) \\ x_2^{p_2+1} \dfrac{\partial}{\partial x_2} + B^T(x_2) \end{cases}$$

avec $A^T(x_2)$ et $B^T(x_2)$ dans $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{C}[\![x_2]\!])$, (et on peut supposer toute les valeurs propres de $A^T(0)$ égales).

Il existe alors (voir [2]) un entier α_2 strictement positif et une transformation $U(t_2)$, produit de diag $(t_2^{k_1}, \ldots, t_2^{k_n})$ (où les k_i sont dans $\mathbf{N}$) par des transformations de $GL_n(\mathbf{C}[\![t_2]\!])$, et qui change

$$\frac{1}{\alpha_2} t_2^{\alpha_2 p_2+1} \frac{d}{dt_2} + B^T(t_2^{\alpha_2}) \qquad \text{en} \qquad \frac{1}{\alpha_2} t_2^{\alpha_2 p_2+1} \frac{d}{dt_2} + B^{TU}(t_2)$$

avec

$$B^{TU}(t_2) = \begin{pmatrix} B_1(t_2) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_k(t_2) \end{pmatrix}$$

$B_i(t_2) = b_i(t_2) I_{n_i} + t_2^{\alpha_2 p_2} N_i^2$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$

N_i^2 matrice dans $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbf{C})$ nilpotente triangulaire supérieure

$b_i(t_2)$ polynôme à coefficients dans $\mathbf{C}$ de degré au plus $\alpha_2 p_2$

$b_i - b_j \notin t_2^{\alpha_2 p_2} \mathbf{Z}$ pour $1 \leqslant i,\ j \leqslant k,\ i \neq j$.

Il reste à vérifier que $A^{TU}(t_2) = U^{-1}(t_2) A^T(t_2^{\alpha_2}) U(t_2)$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix}$$

où: $A_i = a I_{n_i} + N_i^1$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$.

$a \in \mathbf{C}$, $N_i^1 \in \mathcal{M}_{n_i \times n_i}(\mathbf{C})$ nilpotente triangulaire supérieure, ce qui provient du lemme suivant, dont la démonstration sera donnée en appendice.

LEMME 1. *Soit p_2' un entier naturel et soient B_i et B_j deux matrices de la forme suivante*

$$B_i(t_2) = b_i(t_2) I_{n_i} + t_2^{p_2'} N_i \qquad B_j(t_2) = b_j(t_2) I_{n_j} + t_2^{p_2'} N_j$$

où b_i et b_j sont des polynômes à coefficients complexes de degré au plus p_2', tels que $b_i - b_j \notin t_2^{p_2'} \mathbf{Z}$, I_{n_i} (resp, I_{n_j}) *la matrice identité d'ordre n_i* (resp. n_j), *N_i et N_j des matrices à coefficients complexes nilpotentes triangulaires supérieures*

i) *Si Y est solution dans $\mathcal{M}_{n_i \times n_i}\big(\mathbf{C}((t_2))\big)$ $\big($où $\mathbf{C}((t_2))$ désigne le corps des fractions de $\mathbf{C}[[t_2]]\big)$ de l'équation*

$$t_2^{p_2'+1} \frac{dY}{dt_2} = Y B_j - B_i Y\,, \qquad \textit{alors } Y = 0\,.$$

ii) *Si Y est solution dans $\mathcal{M}_{n_i \times n_i}\big(\mathbf{C}((t_2))\big)$ de l'équation*

$$t_2^{p_2'+1} \frac{dY}{dt_2} = Y B_i - B_i Y$$

alors Y est dans $\mathcal{M}_{n_i \times n_i}(\mathbf{C})$ (et commute avec N_i).

REMARQUE 5. Si on suppose seulement B_i et B_j triangulaires supérieures c'est-à-dire plus précisément:

$$B_i = (b^i_{k,l})_{1\leqslant k,l\leqslant n_i} \qquad B_j = (b^j_{k,l})_{1\leqslant k,l\leqslant n_j}$$

avec

$$\begin{array}{ll} b^i_{k,l} \text{ (resp. } b^j_{k,l}) & \text{dans } \mathcal{M}_{n_i\times n_i}(\mathbf{C}[\![t_2]\!]) \text{ (resp. } \mathcal{M}_{n_j\times n_j}\mathbf{C}[\![t_2]\!]) \\ b^i_{k,k} - b^j_{l,l} \notin t_2^{p'_2}\mathbf{Z} & \text{pour } 1\leqslant k\leqslant n_i,\ 1\leqslant l\leqslant n_j \\ b^i_{k,k} - b^i_{l,l} \in t_2^{p'_2}\mathbf{Z} & \text{pour } 1\leqslant k,\ l\leqslant n_i \\ b^i_{k,k} - b^i_{l,l} \in t_2^{p'_2}\mathbf{Z} & \text{pour } 1\leqslant k,\ l\leqslant n_j \end{array}$$

alors

i) reste vrai

ii) ne l'est plus. On peut seulement mettre simultanément sous forme triangulaire, au moyen d'une transformation de $GL_{n_i}(\mathbf{C}[\![t_2]\!])$, les matrices B_i et Y.

On termine alors la démonstration de b) de la façon suivante:

Posons

$$A^{TU}(t_2) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}\cdots A_{1k} \\ A_{21} & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ A_{2k} & \cdots\cdots\cdots A_{kk} \end{pmatrix} \quad \text{où } A_{ij} \in \mathcal{M}_{n_i\times n_i}\big(\mathbf{C}((t_2))\big)\,.$$

La complète intégrabilité de (S^{TU}) équivaut à:

$$\frac{1}{\alpha_2} t_2^{\alpha_2 p_2+1} \frac{dA^{TU}}{dt_2} + B^{TU}A^{TU} = A^{TU}B^{TU}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\alpha_2} t_2^{\alpha_2 p_2+1} \frac{dA_{ji}}{dt_2} = A_{ij}B_i - B_jA_{ij} \qquad \text{pour } 1\leqslant i,\ j\leqslant k$$

ce qui termine, compte tenu du lemme 1 (et quitte à modifier N_i^2 au moyen d'une transformation constante, pour avoir A_{ii} sous forme triangulaire).

Le théorème est donc démontré lorsque $p_1 = 0$, avec $\alpha_1 = 1$. On a de plus la proposition suivante.

PROPOSITION 2. *Soit le système complètement intégrable*

$$(S):\begin{cases} x_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + A(x_1, x_2) \\ x_2^{p_2+1} \dfrac{\partial}{\partial x_2} + B(x_1, x_2) \end{cases}$$

avec A et B dans $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{C}[\![x_1, x_2]\!])$, p_2 dans $\mathbf{N}$.

Il existe un entier α_2 *et une transformation* U, *produit de transformations* $\operatorname{diag}(x_1^{l_1}, \ldots, x_1^{l_s})$ (*où les* l_i *sont dans* $\mathbf{N}$) *et de transformations de* $GL_n(\mathbf{C}[\![x_1, t_2]\!])$ *qui change* (S) *en* (S^U) *de la forme*

$$\begin{cases} x_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + A^U(t_2) \\ \dfrac{1}{\alpha_2} t_2^{\alpha_2 p_2 + 1} \dfrac{\partial}{\partial t_2} + B^U(t_2) \end{cases}$$

avec

$$A^U(t_2) = \begin{pmatrix} A_1(t_2) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k(t_2) \end{pmatrix} \qquad B^U(t_2) = \begin{pmatrix} B_1(t_2) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_k(t_2) \end{pmatrix}$$

où, pour $1 \leqslant i \leqslant k$, *les matrices* A_i *et* B_i *sont des matrices de polynômes à coefficients complexes, triangulaires supérieures.*

$$A_i(t_2) = a_i I_{n_i} + N_i(t_2)$$

$$B_i(t_2) = \begin{pmatrix} b_{11}^i & b_{12}^i & \cdots & b_{1,n_i}^i \\ 0 & b_{22}^i & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & 0 & b_{n_i,n_i} \end{pmatrix}$$

avec: $a_i \in \mathbf{C}$

I_{n_i} *matrice identité d'ordre* n_i

$N_i(t_2)$ *matrice de polynômes de* $\mathbf{C}[t_2]$, *nilpotente sous forme triangulaire supérieure*

b_{ii}^i *polynôme à coefficients complexes de degré au plus* $\alpha_2 p_2$

$$\begin{cases} b_{ll}^i(0) - b_{jj}^i(0) = 0 & si\ p_2 > 0 \\ b_{ll}^i(0) - b_{jj}^i(0) \in \mathbf{Z} & si\ p_2 = 0 \end{cases} \qquad pour\ 1 \leqslant l,\ j \leqslant n_i$$

De plus, pour $1 \leqslant i \leqslant k-1$:

$$\begin{cases} ou\ bien & a_i - a_{i+1} \notin \mathbf{Z} \\ ou\ bien & \begin{cases} b_{11}^i(0) - b_{11}^{i+1}(0) \neq 0 & si\ p_2 > 0 \\ b_{11}^i(0) - b_{11}^{i+1}(0) \notin \mathbf{Z} & si\ p_2 = 0 . \end{cases} \end{cases}$$

C'est une conséquence immédiate de la remarque 5 de la proposition 1: en effet, une fois effectuée la transformation T de la proposition 1, on met

$$x_2^{p_2+1}\frac{\partial}{\partial x_2}+B^T(x_2) \qquad \text{sous la forme} \qquad \frac{1}{\alpha_2}t_2^{\alpha_2 p_2+1}\frac{\partial}{\partial t_2}+B^U(t_2)$$

indiquée dans la proposition 2 au moyen d'une transformation de $GL_n(\mathbf{C}[\![t_2]\!])$, où $t_2^{\alpha_2}=x_2$ pour un entier α_2 convenable. La complète intégrabilité du système ainsi obtenu et la remarque 5 entraînent que A^U a la forme indiquée dans la proposition 2.

Démonstration du théorème dans le cas $n\in\mathbf{N}$, p_1 et p_2 positifs.

On peut supposer $p_1\leqslant p_2$.

On fait l'hypothèse de récurrence suivante, lorsque $n\geqslant 2$ et $p_1\geqslant 1$:

(H): On suppose le théorème vrai pour tous les systèmes complètement intégrables du type suivant:

$$\begin{cases} x_1^{q_1+1}\dfrac{\partial}{\partial x_1}+A(x_1,x_2) \\[2mm] x_2^{q_2+1}\dfrac{\partial}{\partial x_2}+B(x_1,x_2)\end{cases}$$

avec A, B dans $\mathcal{M}_{m\times m}(\mathbf{C}[\![x_1,x_2]\!])$, q_1 et q_2 dans $\mathbf{N}$, dans les cas suivants:

H_1) $1\leqslant m\leqslant n-1$ et $0\leqslant q_1\leqslant q_2$

H_2) $m=n$ et $0\leqslant q_1\leqslant p_1-1$

a) *Premier cas*: *$A(0,0)$ a au moins deux valeurs propres distinctes.*

Il existe alors une transformation $T\in GL_n(\hat{\theta})$, qui décompose le système (S) en deux systèmes de dimension strictement inférieure à n, et on utilise alors H_1. (voir [1] p. 265).

REMARQUE 6. Ces calculs sont encore valables lorsque $\hat{\theta}$ est remplacé par $C^\infty[\![x_1]\!]$ ou par $\mathcal{A}_{S(\theta_1,\theta_2)}[\![x_1]\!]$.

b) *Deuxième cas*: *$A(0,0)$ a une seule valeur propre $\lambda\in\mathbf{C}$.*

On peut supposer $\lambda=0$. En effet, si le théorème est vrai pour le système $(D_1-\lambda I_n, D_2)$, il est vrai pour le système (D_1, D_2).

On va, à partir de maintenant, utiliser une conséquence de la complète intégrabilité qui n'a jusqu'alors pas servi, le fait que les valeurs propres de $A(0,x_2)$ ne dépendent pas de x_2.

La matrice $A(0, x_2)$ est en effet solution du système

$$x_2^{p_2+1} \frac{dA(0, x_2)}{dx_2} = A(0, x_2)B(0, x_2) - \grave{B}(0, x_2)A(0, x_2)$$

et on peut lui appliquer le lemme suivant, qui est conséquence immédiate du lemme 1.

LEMME 2. *Si* $A(0, x_2)$ *est une solution dans* $\mathcal{M}_{n\times n}\big(\mathbb{C}((x_2))\big)$ *du système*

$$x_2^{p_2+1} \frac{dA(0, x_2)}{dx_2} = [A(0, x_2), B(0, x_2)],$$

où $B(0, x_2)$ *est une matrice de* $\mathcal{M}_{n\times n}\big(\mathbb{C}((x_2))\big)$, *il existe un entier positif* β_2, *une transformation* T *dans* $GL_n\big(\mathbb{C}((t_2))\big)$ (où $t_2^{\beta_2} = x_2$) *et une matrice constante* C *dans* $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ *tels que* $A(0, t_2^{\beta_2}) = T(t_2)CT^{-1}(t_2)$.

(Il suffit de prendre une transformation T qui mette $x_2^{p_2+1}(d/dx_2) + B(0, x_2)$ sous forme de Jordan).

Puisque la seule valeur propre de $A(0, x_2)$ est ici 0, on a $\big(A(0, x_2)\big)^n = 0$ ce qui équivaut à $D_1^n E \subset x_1 E$. (Si on désigne en effet par $\tilde{D}_1\colon E/x_1E \to \to E/x_1E$ l'endomorphisme $\mathbb{C}[\![x_2]\!]$-linéaire du $\mathbb{C}[\![x_2]\!]$-module libre de rang n E/x_1E, la matrice de $\tilde{D}_1$ dans la base de E/x_1E image de la base canonique de E, est $A(0, x_2)$. On a donc $\tilde{D}_1^n(E/x_1E) = 0$, ce qui équivaut à $D_1^n E \subset x_1 E$).

REMARQUE 7. L'inclusion $D_1^n E \subset x_1 E$ entraîne, lorsque on a $p_1 \geqslant 1$, les inclusions

$$D_1^{n(l+1)} \subset x_1^{l+1} E \qquad \forall l \in \mathbb{N},$$

comme on le voit facilement, par récurrence sur l, en utilisant la formule:

$$D_1^m(\lambda v) = \sum_{i=0}^{m} C_m^i \tau_1^{m-i}(\lambda) D^i(v) \qquad \text{pour } (\lambda, v) \in \hat{\theta} \times E,\ m \in \mathbb{N}.$$

Lorsqu'on a $p_1 \geqslant 1$, on peut donc qualifier un opérateur différentiel $D_1\colon E \to E$ vérifiant $D_1^n E \subset x_1 E$, de topologiquement nilpotent (voir [3]).

Par ailleurs, si $D_1\colon E \to E$ vérifie $D_1^n E \subset x_1 E$, et si F est un sous-module libre de E, stable par D_1, tel que $x_1^{k_1} x_2^{k_2} E \subset F \subset E$ pour un couple (k_1, k_2) dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, alors $D_1\colon F \to F$ vérifie aussi $D_1^n F \subset x_1 F$.

$$\begin{aligned} \text{(en effet}\quad & x_2^{k_2} D_1^{n(k_1+1)} F \subset x_2^{k_2} D_1^{n(k_1+1)} E \\ \Rightarrow\quad & x_2^{k_2} D_1^{n(k+1)} F \subset x_2^{k_2} x_1^{k_1+1} E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad x_2^{k_2} D_1^{n(k+1)} F \subset x_1 F \\ &\Rightarrow \quad D_1^{n(k+1)} F \subset x_1 F \quad \text{(puisque } F \text{ est libre et stable par } D_1) \\ &\Rightarrow \quad D_1^n F \subset x_1 F \qquad \text{(puisque } F \text{ est de rang } n)\big). \end{aligned}$$

L'inclusion $D_1^n E \subset x_1 E$ peut aussi s'écrire

$$D_1^n E \subset x_1 E + x_1 D_1 E + \ldots + x_1 D_1^{n-1} E .$$

On considère alors l'ensemble S des suites $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ de $\mathbf{N}^n$ vérifiant:

$$1) \begin{cases} 1 \leqslant a_i \leqslant n & \text{pour } 0 \leqslant i \leqslant n-1 \\ a_i - a_{i+j} \leqslant jp_1 + 1 & \text{pour } 0 \leqslant i \leqslant i+j \leqslant n-1 \end{cases}$$

2) Il existe un entier j_0 dans $\mathbf{N}$ tel que

$$x_2^{j_0} D_1^n E \subset x_1^{a_0} E + x_1^{a_1} D_1 E + \ldots + x_1^{a_i} D_1^i E + \ldots + x_1^{a_{n-1}} D_1^{n-1} E .$$

L'ensemble S est non vide, puisqu'il contient la suite $(1, 1, \ldots, 1)$, et fini, donc il existe une suite $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ pour laquelle le nombre rationnel, $\inf\big(a_0/n, a_1/(n-1), \ldots, a_{n-1}/1\big)$ est maximal.

On notera r/s, où r et s sont des entiers strictements positifs et premiers entre eux, ce rationnel maximal, et $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ un élément de S tel que $\inf\big(a_0/(n-1), \ldots, a_{n-1}/1\big) = r/s$.

REMARQUE 8.

1) La condition $a_i - a_{i+j} \leqslant jp_1 + 1$ pour $0 \leqslant i \leqslant i+j \leqslant n-1$ n'est là que pour assurer que l'ensemble $x_1^{a_0} E + x_1^{a_1} D_1 E + \ldots + x_1^{a_i} D_1^i E + \ldots + x_1^{a_{n-1}} D_1^{n-1}$ est un $\hat{\mathcal{O}}$-module (voir le lemme 3) (on pourrait d'ailleurs se limiter aux suites $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ vérifiant $a_i - a_{i+1} = 0$ ou 1 pour $0 \leqslant i < i+1 \leqslant n-1$).

2) L'inclusion $x_2^{j_0} D_1^n E \subset x_1^{a_0} E + x_1^{a_1} D_1 E + \ldots + x_1^{a_i} D_1^i E + \ldots + x_1^{a_{n-1}} D_1^{n-1} E$ jouera, dans le reste de cette démonstration, un rôle analogue à celui joué par le vecteur cyclique dans le cas d'une seule variable, et le rapport r/s sera utilisé comme l'invariant de Katz.

On termine alors la démonstration du théorème comme suit:

— ou bien le rapport r/s est égal à 1; on est alors conduit à un nouveau système où p_1 est remplacé par $p_1 - 1$ et on utilise l'hypothèse de récurrence sur p_1;

— ou bien le rapport r/s est strictement inférieur à 1; on fait alors apparaître un nouveau système en (t_1, x_2) (où $t_1^{\alpha_1} = x_1$) qui vérifie les hypothèses de a) (existence d'au moins deux valeurs propres distinctes pour la première matrice en $(0, 0)$). On utilise alors l'hypothèse de récurrence sur la dimension.

Fin de la démonstration du théoreme.

On aura besoin à plusieurs reprises des lemmes suivants, dont la démonstration sera donnée à la fin.

LEMME 3. *Soit m un entier positif ou nul et soit $b_0, b_1, \ldots, b_m$ une suite d'entiers positifs ou nuls tels que*

$$b_i - b_{i+j} \leqslant jp_1 + 1 \qquad \text{pour } 0 \leqslant i \leqslant i + j \leqslant m\,.$$

Alors $x_1^{b_0}E + x_1^{b_1}D_1E + \ldots + x_1^{b_i}D_1^iE + \ldots + x_1^{b_m}D_1^mE$ est un sous $\hat{\theta}$-module de E, stable par D_1 et D_2.

LEMME 4. *Soient m et α deux entiers positifs ou nuls.*
Soit le $\hat{\theta}$-module $G_{m,\alpha} = x_1^mE + x_1^{m-1}D_1^\alpha E + \ldots + x_1^{m-l}D_1^{\alpha l}E + \ldots + D_1^{\alpha m}$.

Posons $H_{m,\alpha} = \{v \in E / \exists j \in \mathbf{N} \text{ tel que } x_2^j v \in G_{m,\alpha}\}$.

1) *$H_{m,\alpha}$ est un sous $\hat{\theta}$-module libre de rang n de E, stable par D_1 et D_2, tel que $x_2^{j_1}H_{m,\alpha} \subset G_{m,\alpha} \subset H_{m,\alpha}$ pour un certain j_1 de $\mathbf{N}$.*

2) *On passe d'une base de E à une base de $H_{m,\alpha}$ par un produit de tranformations du type* diag $(x_1^{k_1}, \ldots, x_1^{k_n})$ *(où les k_i sont dans* $\mathbf{N}$*) et de transformations de $GL_n(\hat{\theta})$.*

3) *S'il existe l_0, k et i dans* $\mathbf{N}$ *tels que $x_2^{l_0}D_1^k(G_{m,\alpha}) \subset x_1^iG_{m,\alpha}$ alors $D^kH_{m,\alpha} \subset x_1^iH_{m,\alpha}$.*

Premier cas: $r/s = 1$.

On a alors $a_i/(n-i) \geqslant 1$ pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$.
Donc

$$x_2^{j_0}D_1^nE \subset x_1^{a_0}E + x_1^{a_1}D_1E + \ldots + x_1^{a_i}D_1^iE + \ldots + x_1^{a_{n-1}}D_1^{n-1}E \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; x_2^{j_0}D_1^nE \subset x_n^1E + x_1^{n-1}D_1E + \ldots + x_1^{n-i}D_1^iE + \ldots + x_1D_1^{n-1}E\,.$$

Posons alors

$$\begin{cases} G_{n-1} = x_1^{n-1}E + \ldots + x_1^{n-i-1}D_1^iE + \ldots + D_1^{n-1}E \\ H_{n-1} = \{v \in E / \exists j \in \mathbf{N} \quad \text{tel que } x_2^jv \in G_{n-1}\}. \end{cases}$$

L'inclusion $x_2^{j_0}D_1^nE\subset x_1^nE+\ldots+x_1^{n-i}D_1^iE+\ldots+x_1D_1^{n-1}E$ entraîne:

$$\begin{aligned} & x_2^{j_0}D_1(G_{n-1})\subset x_1G_{n-1} \\ \Rightarrow\quad & D_1(H_{n-1})\subset x_1H_{n-1}\quad \text{d'après le lemme 4. 3)}. \end{aligned}$$

D'autre part, d'après le lemme 4. 1), H_{n-1} est un sous $\hat{\theta}$-module libre de E de rang n, stable par D_2.

On applique alors l'hypothèse de récurrence sur p_1 au système

$$\left(\frac{1}{x_1}D_1, D_2\right): H_{n-1}\to H_{n-1}.$$

Deuxième cas: $r/s<1$.

On pose $x_1=t_1^s$, $\hat{\theta}=\mathbf{C}[[t_1, x_2]]$, $E'=E\otimes_{\hat{\theta}}\hat{\theta}'\tau_i'$ l'extension à $\hat{\theta}$ de τ_i, D_i' l'extension à E' de D_i (pour $i=1, 2$).

On a $sa_i\geqslant r(n-i)$ pour $0\leqslant i\leqslant n-1$.

Donc l'inclusion

$$x_2^{j_0}D_1'^nE'\subset x_1^{a_0}E+x_1^{a_1}D_1E+\ldots+x_1^{a_{n-i}}D_1^iE+\ldots+x_1^{a_{n-1}}D_1^{n-1}E$$

entraîne

(i) $\quad x_2^{j_0}D_1'^nE'\subset t_1^{rn}E'+t_1^{r(n-1)}D_1'E'+\ldots+t_1^{r(n-i)}D_1'^iE'+\ldots+t_1^rD_1'^{n-1}E'.$

Posons alors

$$\begin{cases} G'=t_1^{r(n-1)}E'+\ldots+t_1^{r(n-i-1)}D_1'^iE'+\ldots+D_1'^{n-1}E' \\ H'=\{v'\in E',\ \exists j\in\mathbf{N}\quad \text{tel que } x_2^jv'\in G'\}. \end{cases}$$

Admettons pour le moment que H' est un sous $\hat{\theta}$-module libre de rang n de E' et que l'on peut passer d'une base de E' à une base de H' par un produit de transformations du type diag $(t_1^{k_1}, \ldots, t_1^{k_n})$ (où les k_i sont dans $\mathbf{N}$) et de transformations de $GL_n(\hat{\theta}')$.

(ii) $$\begin{aligned} \Rightarrow\quad & x_2^{j_0}D_1'G'\subset t_1^rG' \\ \Rightarrow\quad & x_2^{j_0+j_1}D_1'H'\subset t_1^rH'\quad (\text{où } j_1 \text{ est tel que } x_2^{j_1}H'\subset G') \\ \Rightarrow\quad & D_1'H'\subset t_1^rH'\quad \text{puisque } H' \text{ est libre et stable par } D_1'. \end{aligned}$$

On considère maintenant le système (Δ_1', Δ_2'): $H'\to H'$ où $\Delta_1'=(1/t_1^r)D_1'$.

On va montrer que l'endomorphisme $\mathbf{C}[\![x_2]\!]$ linéaire $\tilde{\Delta}'_1 \colon H'/t_1H' \to H'/t_1H'$ défini à partir de Δ'_1 par passage au quotient, a au moins deux valeurs propres distinctes (on a déjà vu que celles-ci sont dans $\mathbf{C}$) et pour cela que

1) $\tilde{\Delta}'_1$ n'est pas nilpotente

2) la trace de $\tilde{\Delta}'_1$ est nulle.

1) *$\tilde{\Delta}'_1$ n'est pas nilpotente, sinon r/s ne serait pas maximal.*

On montre d'abord:

$$\tilde{\Delta}'_1 \colon H'/t_1H' \to H'/t_1H' \quad \text{nilpotente} \iff t_1^{-nr} D_1'^{n} H' \subset t_1 H'$$

et pour cela, on utilise la formule:

$$(\Delta'_1)^n = \left(\frac{1}{t_1^r} D'_1\right)^n = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j t_1^{(n-j)sp_1 - nr} D_1'^{j}$$

où

$$\begin{cases} \gamma_j \in \mathbf{Q} & \text{pour } 1 \leqslant j \leqslant n \\ \gamma_n = 1 \end{cases}$$

qui se démontre facilement par récurrence sur n.

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}'_1 \text{ nilpotente} &\iff \tilde{\Delta}_1'^{n} = 0 \\ &\iff \tilde{\Delta}_1'^{n} H' \subset t_1 H' \\ &\iff \left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j t_1^{(n-j)sp_1 - nr} D_1'^{j}\right) H' \subset t_1 H' \\ &\iff t_1^{-nr} D_1'^{n}(H') \subset t_1 H' \end{aligned}$$

puisque, pour tout j de $\mathbf{N}$,

$$D_1'^{j} H' \subset t_1^{jr} H'$$

donc pour $1 \leqslant j \leqslant n-1$

$$t_1^{(n-j)sp_1 - nr} D_1'^{j} H' \subset t_1^{(n-j)(sp_1 - r)} H' \subset t_1 H$$

dès que $r/s < p_1$.

On utilise ensuite:

$$\begin{cases} x_2^{j_1} H' \subset G' \subset H' & \text{pour un } j_1 \text{ dans } \mathbf{N} \\ t_1^{r(n-1)} E' \subset G' \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Delta}'_1 \text{ nilpotente } &\Rightarrow D_1'^n H' \subset t_1^{nr+1} H' \\
&\Rightarrow D_1'^n G' \subset t_1^{nr+1} H' \\
&\Rightarrow x_2^{j_1} D_1'^n G' \subset t_1^{nr+1} G' \\
&\Rightarrow x_2^{j_1} D_1'^n (t_1^{r(n-1)} E') \subset \\
&\qquad\qquad \subset t_1^{nr+1}(t_1^{r(n-1)} E' + \ldots + t_1^{r(n-i-1)} D_1'^i E' + \ldots + D_1^{1n-1} E') \\
&\Rightarrow x_2^{j_1} t_1^{r(n-1)} D_1'^n E' \subset \\
&\qquad\qquad \subset t_1^{nr+1}(t_1^{r(n-1)} E' + \ldots + t_1^{r(n-i-1)} D_1'^i E' + \ldots + D_1'^{n-1} E') \\
&\Rightarrow x_2^{j_1} D_1'^n E' \subset t_1^{nr+1} E' + \ldots + t_1^{r(n-i)+1} D_1'^i E' + \ldots + t_1^{r+1} D_1'^{r+1} E'.
\end{aligned}
$$

On utilise maintenant le fait que E' est somme directe de s copies de E.

Il est pratique de l'écrire de la façon suivante:

$$E' = E \oplus t_1 E \oplus \ldots \oplus t_1^{s-1} E.$$

Pour tout v' de E', il existe $v_0, v_1, \ldots, v_{s-1}$ dans E uniques tels que:

$$v' = v_0 + t_1 v_1 + \ldots + t_1^{s-1} v_{s-1}$$

(on identifie E à son image dans E' par l'injection $E \simeq E' = E \underset{\hat{\theta}}{\otimes} \hat{\theta}'$ et on peut donc confondre D_1'/E et D_1).

On avait obtenu l'implication:

$$\tilde{\Delta}'_1 \text{ nilpotente } \Rightarrow x_2^{j_1} D_n^1 E \subset t_1^{rn+1} E' + \ldots + t_1^{r(n-i)+1} D_1'^i E' + \ldots + t_1^{r+1} D_1'^{n-1} E'.$$

Donc, pour tout élément v de E, il existe n éléments $\omega'^0, \omega'^1, \ldots, \omega'^{n-1}$ de E' tels que:

$$x_2^{j_1} D_1^n v = t_1^{rn+1} \omega'_0 + \ldots + t_1^{r(n-i)+1} D_1'^i(\omega'^i) + \ldots + t_1^{r+1} D_1'^{n-1}(\omega'^{n-1}).$$

Posons

$$\omega'^i = \omega_0^i + t_1 \omega_1^i + \ldots + t_1^{s-1} \omega_{s-1}^i$$

où, pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$ et $0 \leqslant k \leqslant s-1$, ω_k^i est dans E on a:

$$D_1'^i(\omega'^i) = \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant i \\ 0 \leqslant l \leqslant s-1}} \alpha_{kl}^i t_1^{(i-k)sp_1+l} D_1^k(\omega_l^i)$$

où, pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$, $0 \leqslant k \leqslant i$, α_{kl}^i est un entier.

Donc

$$x_2^{j_1} D_1^n v = \sum_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant 1i \\ 0 \leqslant l \leqslant s-1}} \alpha_{kl}^i t_1^{(i-k)sp_1 + l + r(n-i)+1} D_k^1(\omega_l^i) =$$

$$= \sum_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \sum_{\substack{k \leqslant i \leqslant n-1 \\ 0 \leqslant l \leqslant s-1}} \alpha_{kl}^i t^{(i-k)sp_1 + l + r(n-i)+1} D_1^k(\omega_l^i) .$$

Pour chaque entier i tel que $0 \leqslant i \leqslant n-1$, il existe un entier unique l_i tel que

$$\begin{cases} 0 \leqslant l_i \leqslant s-1 \\ r(n-i) + 1 + l_i = sb_i \quad \text{où } b_i \text{ est un entier strictement positif} \end{cases}$$

(de $0 \leqslant l_i \leqslant s-1$ et $r < s$, on déduit facilement que $b_{i+1} - b_i = 0$ ou -1).

Donc

$$x_2^{j_1} D_1^n v = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \sum_{k \leqslant i \leqslant n-1} \alpha_{kl_i}^i t_1^{(i-k)sp_1 + l_i + r(n-i)+1} D_1^k(\omega_{l_i}^i)$$

$$= \sum_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \sum_{k \leqslant i \leqslant n-1} \alpha_{kl_i}^i t_1^{(i-k)sp_1 + sb_i} D_1^k(\omega_{l_i}^i)$$

$$= \sum_{k \leqslant i \leqslant n-1} \sum_{k \leqslant i \leqslant n-1} \alpha_{kl_i}^i x_1^{b_i + p_1(i-k)} D_1^k(\omega_{l_i}^i) .$$

Or, on montre facilement, par récurrence sur $i-k$ et en utilisant que $b_{i+1} - b_i = 0$ ou -1, que, pour $i \geqslant k$, on a: $b_i + p_1(i-k) \geqslant b_k$.

Donc

$$x_2^{j_1} D_1^n E \subset x_1^{b_0} E + \dots + x_1^{b_k} D_1^k E + \dots + x_1^{b_{n-1}} D_1^{n-1} E$$

or

$$\frac{b_i}{n-i} = \frac{r(n-i) + 1 + l_i}{s(n-i)} = \frac{r}{s} + \frac{s + l_i}{s(n-1)}$$

donc

$$\inf\left(\frac{b_0}{n}, \frac{b_1}{n-1}, \dots, \frac{b_{n-1}}{1}\right) > \frac{r}{s},$$

d'où la contradiction avec la maximalité de r/s.

2) Montrons que la trace de $\tilde{\Delta}_1'$ est nulle.

Il est pratique d'introduire les notations suivantes:
On désigne par π_k la surjection canonique $\hat{\theta} \to \hat{\theta}/x_1^k\hat{\theta}$.

Si $A_{\mathcal{B}}$ est la matrice de D_1 dans la $\hat{\theta}$-base $\mathcal{B}$ de E on pose

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Tr}(D_1, E, \mathcal{B}) = \operatorname{Tr}(A_{\mathcal{B}})\\
&\operatorname{Tr}(D_1, E, k) \ = \pi_k(\operatorname{Tr} A_{\mathcal{B}}) \quad \text{pour } 1 \leqslant k \leqslant p_1 + 1\\
&\operatorname{Tr}(D_1, E, k) \quad \text{ne dépend pas de la } \hat{\theta}\text{-base } \mathcal{B} \text{ choisie}.
\end{aligned}$$

On vérifie facilement, que pour tout sous-module F de E, stable par D_1, et se déduisant de E par un produit de transformations du type diag $(x_1^{k_1}, \ldots, x_1^{k_n})$ (où les k_i sont dans $\mathbf{N}$) et de transformations dans $GL_n(\hat{\theta})$, on a:

$$\operatorname{Tr}(D_1, F, k) = \operatorname{Tr}(D_1, E, k) \quad \text{pour } 1 \leqslant k \leqslant p_1 .$$

(on a même, de façon plus précise,

$$\operatorname{Tr}(D_1, F, p_1+1) - \operatorname{Tr}(D_1, E, p_1+1) \in \pi_{p_1+1}(\mathbf{Z}x_1^{p_1})) .$$

On termine alors de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Tr}(D_1, E, 1) = 0\\
\Rightarrow\ &\operatorname{Tr}(D_1', E', s) = 0\\
\Rightarrow\ &\operatorname{Tr}(D_1', H', sp_1) = 0\\
\Rightarrow\ &\operatorname{Tr}(t_1^r \Delta_1', H', sp_1) = 0 \qquad (\text{puisque } t_1^r \Delta_1' = D_1')\\
\Rightarrow\ &\operatorname{Tr}(\Delta_1', H', sp_1 - r) = 0\\
\Rightarrow\ &\operatorname{Tr}(\Delta_1', H', 1) = 0 \qquad \text{puisque } sp_1 - r \geqslant 1
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Il reste encore à montrer que H' est libre et que l'on peut passer d'une base de E' à une base de H' par un produit de transformations du type diag $(t_1^{k_1}, \ldots, t_1^{k_n})$ (où les k_i sont dans $\mathbf{N}$) et de transformations de $GL_n(\hat{\theta})$.

* Si $r = 1$, on a immédiatement le résultat avec le lemme 4.

* Supposons $r > 1$

$$\text{soit}\quad \begin{cases}
G_1' = t_1^{n-1}E + \ldots + t_1^{n-k-1}D_1'^{k}E' + \ldots + D_1'^{n-1}E,\\
\ldots\\
G_i' = t_1^{i(n-1)}E' + \ldots + t_1^{i(n-k-1)}D_1'^{k}E' + \ldots + D_1'^{n-1}E'\\
\ldots\\
G_r' = G' = t_1^{r(n-1)}E' + \ldots + t_1^{r(n-k-1)}D_1'^{k}E' + \ldots + D_1'^{n-1}E' .
\end{cases}$$

Les G'_i sont des sous-$\hat{\theta}'$-modules de E', stables par D'_1 et D'_2, et vérifiant, du fait de l'inclusion (i), $x_2^{j_0} D'_1 G'_i \subset t_1^i G'_i$.

Première étape d'une construction par récurrence, on pose:

$$H'_1 = \{v' \in E' / \exists j \in \mathbf{N} \text{ tel que } x_2^j v' \in G'_1\}$$

a) H'_1 est un $\hat{\theta}'$-module libre de rang n, stable par D'_2 et D'_1,

$$\text{vérifiant} \begin{cases} x_2^{j_1} H'_1 \subset G'_1 \subset H'_1 & \text{pour un certain } j_1 \text{ dans } \mathbf{N} \\ D'_1 H'_1 \subset t_1 H'_1 & \text{(d'après le lemme 4)}. \end{cases}$$

b) On pose alors

$$K'_2 = t_1^{n-1} H'_1 + \ldots + t_1^{n-k-1} \left(\frac{D'_1}{t_1}\right)^k H'_1 + \ldots + \left(\frac{D'_1}{t_1}\right)^{n-1} H'_1$$

$$F'_2 = t_1^{n-1} G'_1 + \ldots + t_1^{n-k-1} \left(\frac{D'_1}{t_1}\right)^k G'_1 + \ldots + \left(\frac{D'_1}{t_1}\right)^{n-1} G'_1 .$$

On a, de façon immédiate

$$x_2^{j_1} K'_2 \subset F'_2 \subset K'_2 .$$

Montrons d'autre part que:

$$x_2^{(n-1)j_0} F'_2 \subset G'_2 \subset F'_2$$

α) $$x_2^{(n-1)j_0} F'_2 \subset G'_2$$

par récurrence sur l et dérivation de l'inclusion (i) on a:
pour $l \geqslant 0$:

$$x_2^{(l+1)j_0} D_1'^{n+l} E' \subset t_1^{r(n+l)} E' + \ldots + t_1^{r(n-k+l)} D_1'^k E' + \ldots + t_1^{r(l+1)} D_1'^{n-1} E' .$$

D'autre part, on démontre facilement, par récurrence sur k, la formule:

$$\left(\frac{D'_1}{t_1^l}\right)^k = \alpha_1^{l,k} t_1^{(k-1)sp_1 - kl} D'_1 + \ldots + \alpha_j^{l,k} t_1^{(k-j)sp_1 - kl} D_1'^j + \ldots + \alpha_k^{l,k} t_1^{-kl} D_1'^k$$

où

$$\begin{cases} \alpha_j^{l,k} \in \mathbf{Q} & \text{pour } 1 \leqslant j \leqslant k \\ \alpha_k^{l,k} = 1 . \end{cases}$$

En particulier

$$\left(\frac{D_1'}{t_1}\right)^k = \alpha_1^k t_1^{(k-1)sp_1-k} D_1' + \dots +$$
$$+ \alpha_j^k t_1^{(k-j)sp_1-k} D_1'^j + \dots + \alpha_{k-1}^k t_1^{sp_1-k} D_1'^{k-1} + t_1^{-k} D_1'^k .$$

Or, l'inclusion $x_2^{(n-1)j_0} F_2' \subset G_2'$ équivaut à:

$$x_2^{(n-1)j_0} t_1^{n-k-1} \left(\frac{D_1'}{t_1}\right)^k (t_1^{n-i-1} D_1'^i E') \subset G_2' \qquad \text{pour } 0 \leqslant k,\ i \leqslant n-1$$

ce qui se vérifie alors facilement.

$$\beta) \qquad G_2' \subset F_2' .$$

On montre, par récurrence sur k, pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$, que:

$$t_1^{2(n-k-1)} D_1'^k E' \subset t_1^{n-1} G_1' + t_1^{n-2} \left(\frac{D_1'}{t_1}\right) G_1' + \dots + t_1^{n-k-1} \left(\frac{D_1'}{t_1}\right)^k G_1' .$$

Supposons la formule vraie jusqu'à k et montrons-la pour $k+1$.

$$t_1^{2(n-k-2)} D_1'^{k+1} = t_1^{2n-k-3} t_1^{-k-1} D_1'^{k+1} =$$
$$= t_1^{2n-k-3} \left(\left(\frac{D_1'}{t_1}\right)^{k+1} - \alpha_k^{k+1} t_1^{sp_1-k-1} D_1'^k - \dots - \alpha_j^{k+1} t_1^{(k+1-j)sp_1-k-1} D_1'^j - \dots - \right.$$
$$\left. - \alpha_1^{k+1} t^{ksp_1-k-1} D_1' \right) .$$

Il suffit alors de montrer, en utilisant l'hypothèse de récurrence et le fait que $sp_1 - 2$ est positif ou nul que:

$$t_1^{2n-k-3} \left(\frac{D_1'}{t_1}\right)^{k+1} E' \subset t_1^{n-1} G_1' + \dots + t_1^{n-k-2} \left(\frac{D_1'}{t_1}\right)^{k+1} G_1'$$

ce que l'on vérifie facilement.

Si on pose alors

$$H_2' = \{v' \in E' / \exists j \in \mathbf{N} / x_2^j v' \in G_2'\}$$

on a immédiatement

$$H_2' = \{v' \in E' / \exists j \in \mathbf{N} / x_2^j v' \in F_2'\}$$
$$= \{v' \in E' / \exists j \in \mathbf{N} / x_2^j v' \in K_2'\} .$$

On peut alors appliquer le lemme 4 pour conclure que H_2' est un $\hat{\theta}'$-module libre de rang n stable par D_1' et D_2', vérifiant

$$\begin{cases} x_2^{j_1} H_2' \subset G_2' \subset H_2' \\ D_1' H_2' \subset t_1^2 H_2' . \end{cases}$$

De plus, on passe de H_1' à H_2' par un produit de transformations du type Diag $(t_1^{k_1}, \dots, t_1^{k_n})$ et de transformations dans $GL_n(\hat{\theta}')$.

Plus généralement, supposons construits, pour $1 \leqslant l \leqslant r-1$, les l modules libres $H_1', \dots, H_l'$ stables par D_1' et D_2' vérifiant:

1) pour $1 \leqslant i \leqslant l$ $\begin{cases} x_2^{j_i} H_i' \subset G_i' \subset H_i' \\ H_i' = \{v' \in E' / \exists j \in \mathbf{N} \text{ tel que } x_2^j v' \in G_i'\} \\ D_1' H_i' \subset t_i^1 H_i' \end{cases}$

2) pour $1 \leqslant i < i+1 \leqslant l$, on passe d'une base de H_i' à une base de H_{i+1}' par un produit de transformations du type diag $(t_1^{k_1}, \dots, t_1^{k_n})$ et de transformations de $GL_n(\hat{\theta}')$.

On pose alors

$$\begin{cases} K_{l+1}' = t_1^{n-1} H_l' + \dots + t_1^{n-k-1} \left(\dfrac{D_1'}{t_1^l}\right)^k H_l' + \dots + \left(\dfrac{D_1'}{t_1^l}\right)^{n-1} H_l' \\ F'_{+1} = t_1^{n-1} G_l' + \dots + t_1^{n-k-1} \left(\dfrac{D_1'}{t_1^l}\right)^k G_l' + \dots + \left(\dfrac{D_1'}{t_1^l}\right)^{n-1} G_l' . \end{cases}$$

On a de façon immédiate

$$x_2^{j_l} K_{l+1}' \subset G_{l+1}' \subset F_{l+1}' .$$

D'autre part, une démonstration analogue à celle faite pour $l = 1$ donne

$$x_2^{(n-1)j_0} F_{l+1}' \subset G_{l+1}' \subset F_{l+1}' .$$

Si on pose alors $H_{l+1}' = \{v' \in E' / \exists j \in \mathbf{N} \text{ tel que } x_2^j v' \in G_{l+1}'\}$, on a immédiatement

$$\begin{aligned} H_{l+1}' &= \{v' \in E' / \exists j \in \mathbf{N} / x_2^j v' \in F_{l+1}'\} \\ &= \{v' \in E' / \exists j \in \mathbf{N} / x_2^j v' \in K_{l+1}'\} . \end{aligned}$$

Sous cette dernière forme et par application du lemme 4, H'_{l+1} apparaît comme un sous $\hat{\theta}'$-module libre de rang n de E' stable par D'_1 et D'_2, et vérifiant

$$\left\{\begin{array}{l} x_2^{j_{l+1}} H'_{l+1} \subset G'_{l+1} \subset H'_{l+1} \quad \text{pour un } j_{l+1} \text{ de } \mathbf{N} \\ D'_1 H'_{l+1} \subset t_1^{l+1} H'_{l+1} \\ \text{on passe d'une base de } H'_l \text{ à une base de } H'_{l+1} \text{ par une transfor-} \\ \text{mation produit de transformations dans } GL_n(\hat{\theta}') \text{ et de transforma-} \\ \text{tions du type } (t_1^{l_1}, \ldots, t_1^{l_n}) \text{ où les } l_i \text{ sont dans } \mathbf{N}\,. \end{array}\right.$$

D'où le résultat cherché sur $H' = H'_r$, par récurrence sur l.

Démonstration des lemmes 3 *et* 4.

1) Lemme 3. Par récurrence sur m, on montre facilement que $x_1^{b_0}E + \ldots + x_1^{b_i}D_1^iE + \ldots + x_1^{b_m}D_1^mE$ est un $\hat{\theta}$-module; sa stabilité par D_1 et D_2 est immédiate.

2) Lemme 4. Si $m = 0$, $G_{0,\alpha} = E = H_{0,\alpha}$

Si $m = 1$, $G_{1,\alpha} = x_1E + D_1^\alpha E$.

a) Montrons que $H_{1,\alpha}$ est libre.

Soit π l'application canonique: $E \to E/x_1E$. E/x_1E est isomorphe à $\mathbf{C}[\![x_2]\!]^n$, c'est donc un module libre sur l'anneau principal $\mathbf{C}[\![x_2]\!]$. Il existe donc une base $\pi(e_1) \ldots \pi(e_n)$ de E/x_1E, des entiers positifs ou nuls $k_1, k_2, \ldots, k_r$ (où $0 \leqslant r \leqslant n$) tels que $\left(x_2^{k_1}\pi(e_1), x_2^{k_2}\pi(e_2), \ldots, x_2^{k_r}\pi(e_r)\right)$ soit une $\mathbf{C}[\![x_2]\!]$-base du sous - $\mathbf{C}[\![x_2]\!]$-module $\eta(G_{1,\alpha})$ de E/x_1E.

$(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une $\hat{\theta}$-base de E, et $e_1, e_2, \ldots, e_r$ sont dans $H_{1,\alpha}$.

Montrons que $(e_1, e_2, \ldots, e_r, x_1e_{r+1}, \ldots, x_1e_n)$ est une $\hat{\theta}$-base de $H_{1,\alpha}$; pour cela, il suffit de montrer que $e_1, e_2, \ldots, e_r, x_1e_{r+1}, \ldots, x_1e_n$ engendrent $H_{1,\alpha}$:

Soit v un élément de $H_{1,\alpha}$

$$v \in E \quad \Rightarrow \quad \exists(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \hat{\theta}^n \quad \text{tel que } v = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$$

$$v \in H_{1,\alpha} \quad \Rightarrow \quad \exists j \in \mathbf{N} \quad \text{tel que } x_2^j v \in G_{1,\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad \exists\left(\mu_1(x_2), \ldots, \mu_r(x_2)\right) \in \mathbf{C}[\![x_2]\!]_l$$

$$\text{tel que } \pi(x_2^j v) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x_2) x_2^{k_i} \pi_i(e_i)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{r} \left(x_2^j \lambda_i - \mu_i(x_2) x_2^{k_i}\right) e_i + \sum_{i=r+1}^{n} x_2^j \lambda_i e_i \in x_1 E$$

$$\Rightarrow \text{pour } r+1 \leqslant i \leqslant n, \ \lambda_i \in x_1 \hat{\theta}.$$

b) Le fait que $G_{m,\alpha} \subset H_{m,\alpha}$ est évident (pour m, α quelconque dans N) quant à l'inclusion $x_2^j H_{m,\alpha} \subset G_{m,\alpha}$ pour un certain j de N, elle résulte immédiatement de la définition de $H_{m,\alpha}$ et du fait que $H_{m,\alpha}$ est de type fini puisque $\hat{\theta}$ est noetherien.

c) On démontre facilement que, pour tout $m \geqslant 0$, on a:

$$G_{m+1,\alpha} = x_1 G_{m,\alpha} + D_1^\alpha G_{m,\alpha}.$$

On peut alors vérifier que l'on a, toujours pour $m \geqslant 0$:

$$H_{m+1,\alpha} = \{v \in H_{m,\alpha} / \exists j \in \mathrm{N} \text{ tel que } x_2^j v \in x_1 H_{m,\alpha} + D_1^\alpha H_{\alpha,m}\}.$$

Par récurrence sur m, on obtient que $H_{m+1,\alpha}$ est un $\hat{\theta}$-module libre de rang n, et qu'il existe une $\hat{\theta}$-base $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de $H_{m,\alpha}$ et n entiers k_i valant 0 ou 1 tels que $x_1^{k_1}\varepsilon_1, \ldots, x_1^{k_n}\varepsilon_n)$ soit une $\hat{\theta}$-base de $H_{m,\alpha}$.

d) Montrons que $H_{m,\alpha}$ est stable par D_1 et D_2.

$$v \in H_{m,\alpha} \Rightarrow \exists j \in \mathrm{N}/x_2^j v \in G_{m,\alpha}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2^j D_1 v \in G_{m,\alpha} \\ j x_2^{j+p_2} v + x_2^j D_2 v \in G_{m,\alpha} \end{cases} \quad \text{puisque } G_{m,\alpha} \text{ est stable par } D_1 \text{ et } D_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2^j D_1 v \in G_{m,\alpha} \\ x_2^j D_2 v \in G_{m,\alpha} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_1 v \in H_{m,\alpha} \\ D_2 v \in H_{m,\alpha}. \end{cases}$$

e) Supposons que $x_2^{l_0} D_1^k(G_{m,\alpha}) \subset x_1^i G_{m,\alpha}$ pour l_0, k, i dans N.

On a vu qu'il existe j dans N tel que $x_2^j H_{m,\alpha} \subset G_{m,\alpha} \subset H_{m,\alpha}$ donc $x_2^{l_0+j} D_1^k H_{m,\alpha} \subset x_1^i H_{m,\alpha}$.

Or $D_k^1 H_{m,\alpha}$ est contenu dans $H_{m,\alpha}$.

On utilise alors que, si F est un $\hat{\theta}$-module libre, l'égalité $x_2^l v = x_1^i w$, où v et w sont dans F, entraîne $v \in x_1^i F$ pour conclure que: $D_1^k H_{m,\alpha} \subset x_1^i H_{m,\alpha}$.

En modifiant de façon convenable l'hypothèse de récurrence, et en utilisant les propositions 1 et 2, on a les deux résultats intermédiaires suivants:

PROPOSITION 3. *Soit le système complètement intégrable*

$$(S):\begin{cases} x_1^{p_1+1}\dfrac{\partial}{\partial x_1}+A(x_1,x_2) \\ x_2^{p_2+1}\dfrac{\partial}{\partial x_2}+B(x_1,x_2)\,. \end{cases}$$

Il existe un entier α_1 strictement positif et une transformation T, produit de transformations du type $\operatorname{diag}(t_1^{k_1},\dots,t_1^{k_n})$ *(où $t_1^{\alpha_1}=x_1$ et $k_1,k_2,\dots,k_n$ sont dans $\mathbf{N}$) et de transformations dans $GL_n(\mathbf{C}[\![t_1,x_2]\!])$ qui change (S) en*

$$(S^T):\begin{cases} \dfrac{1}{\alpha_1}t_1^{\alpha_1p_1+1}\dfrac{\partial}{\partial t_1}+A^T(t_1,x_2) \\ x_2^{p_2+1}\dfrac{\partial}{\partial x_2}+B^T(x_2) \end{cases}$$

avec:

$$A^T(t_1,x_2)=\begin{pmatrix} A_1(t_1,x_2) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k(t_1,x_2)\end{pmatrix},\qquad B^T(x_2)=\begin{pmatrix} B_1(x_2) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_k(x_2)\end{pmatrix}$$

$A^T(t_1,x_2)$ *dans* $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{C}[\![t_2]\!][t_1])$, $B^T(x_2)$ *dans* $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{C}[\![x_2]\!])$

$B_i(0)=b_0^iI_{n_i}+N_i$ *où b_0^i est dans $\mathbf{C}$, N_i dans $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{C})$ et nilpotente*

$A_i(t_1,t_2)=a_i(t_1)I_{n_i}+N_i'(x_2)t_1^{\alpha_1p_1}$,

où I_{n_i} *est la matrice identité d'ordre n_i, $a_i(t_1)$ est dans $\mathbf{C}[t_1]$ et de degré au plus α_1p_1.*

$N_i'(x_2)$ *est une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{C}[\![x_2]\!])$ et pour $1\leqslant i\leqslant k-1$:*
ou bien $a_i(t_1)-a_{i+1}(t_1)\notin t_1^{\alpha_1p_1}\mathbf{Z}$

ou bien $\begin{cases} b_0^i-b_0^{i+1}\neq 0 & si\ p_2>0 \\ b_0^i-b_0^{i+1}\notin\mathbf{Z} & si\ p_2=0\,. \end{cases}$

PROPOSITION 4. *Soit le système complètement intégrable*

$$(S):\begin{cases} x_1^{p_1+1}\dfrac{\partial}{\partial x_1}+A(x_1,x_2) \\ x_2^{p_2+1}\dfrac{\partial}{\partial x_2}+B(x_1,x_2) \end{cases}$$

où A et B sont dans $\mathcal{M}_{n\times n}([\![x_1,x_2]\!])$, p_1 et p_2 dans $\mathbf{N}$.

Il existe deux entiers strictement positifs α_1 *et* α_2 *et une transformation* T, *produit de transformations du type* $\operatorname{diag}(t_1^{k_1}, \ldots, t_1^{k_n})$ (*où les* k_i *sont dans* $\mathbf{N}$) *et de transformations de* $GL_n(\mathbf{C}[[t_1, t_2]])$ (*où* $t_1^{\alpha_1} = x_1$, $t_2^{\alpha_2} = x_2$) *qui change*

$$(S) \text{ en } (S^T): \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha_1} t_1^{\alpha_1 p_1 + 1} \dfrac{\partial}{\partial x_1} + A^T(t_1, t_2) \\ \dfrac{1}{\alpha_2} t_2^{\alpha_2 p_2 + 1} \dfrac{\partial}{\partial t_2} + B^T(t_2) \end{cases}$$

où

$$A^T(t_1, t_2) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbf{C}[t_1, t_2]), \qquad B^T(t_2) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbf{C}[t_2])$$

$$A^T(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} A_1(t_1, t_2) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k(t_1, t_2) \end{pmatrix}, \qquad B^T(t_2) = \begin{pmatrix} B_1(t_2) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_k(t_2) \end{pmatrix}$$

$$A_i(t_1, t_2) = a_i(t_1) I_{n_i} + N_i(t) t_1^{\alpha_1 p_1}$$

$$B_i(t_2) = \begin{pmatrix} b_{11}^i & \cdots\cdots & b_{1,n_i}^i \\ 0 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots \\ 0 & \cdots\ 0 & b_{n_i,n_i}^i \end{pmatrix}$$

avec: $a_i(t_1)$ *polynôme en* t_1 *à coefficients complexes, de degré au plus* $\alpha_1 p_1$

I_{n_i} *matrice identité d'ordre* n_i

$N_i(t_2)$ *matrice de polynômes de* $\mathbf{C}[t_2]$, *nilpotente triangulaire supérieure.*

b_{ll}^i *polynôme de degré au plus* $\alpha_2 p_2$, *à coefficients dans* $\mathbf{C}$, *pour* $1 \leqslant l \leqslant n_i$

$$\text{de plus, pour } 1 \leqslant l, k \leqslant n_i \quad \begin{cases} b_{ll}^i(0) - b_{kk}^i(0) = 0 & \text{si } p_2 > 0 \\ b_{ll}^i(0) - b_{kk}^i(0) \in \mathbf{Z} & \text{si } p_2 = 0 \end{cases}$$

et, pour $1 \leqslant i \leqslant k-1$:

$$\left| \begin{array}{ll} \text{ou bien} & a_i(t_1) - a_{i+1}(t_1) \notin t_1^{\alpha_1 p_1}\mathbf{Z} \\ \text{ou bien} & \begin{cases} b_{11}^i(0) - b_{11}^{i+1}(0) \neq 0 & \text{si } p_2 > 0 \\ b_{11}^i(0) - b_{11}^{i+1}(0) \notin \mathbf{Z} & \text{si } p_2 = 0 \,. \end{cases} \end{array} \right.$$

Appendice 1. – Quelques lemmes sur certaines équations matricielles.

On désigne par $\mathbb{C}[[t_2]]$ l'anneau des séries formelles en t_2 à coefficients dans $\mathbb{C}$, par $\mathbb{C}((t_2))$ le corps des fractions de $\mathbb{C}[[t_2]]$.

LEMME 1. *Soit p_2' un entier naturel et soient B_i et B_j deux matrices de la forme suivante:*

$$B_i(t_2) = b_i(t_2)I_{n_i} + t_2^{p_2'}N_i \qquad B_j(t_2) = b_j(t_2)I_{n_j} + t_2^{p_2'}N_j$$

où b_i et b_j sont des polynômes à coefficients complexes de degré au plus p_2', tels que $b_i - b_j \notin t_2^{p_2'}\mathbb{Z}$, I_{n_i} (resp. I_{n_j}) est la matrice identité d'ordre n_i (resp. n_j), N_i (resp. N_j) est une matrice dans $\mathcal{M}_{n_i\times n_i}(\mathbb{C})$ (resp. $\mathcal{M}_{n_j\times n_j}(\mathbb{C})$) nilpotente triangulaire supérieure.

i) *Si Y est solution dans $\mathcal{M}_{n_i\times n_j}(\mathbb{C}((t_2)))$ de l'équation $t_2^{p_2'+1}(dY/dt_2) = YB_j - B_iY$, alors $Y = 0$;*

ii) *Si Y est solution dans $\mathcal{M}_{n_i\times n_i}(\mathbb{C}((t_2)))$ de l'équation $t_2^{p_2'+1}(dY/dt_2) = YB_i - B_iY$ alors Y est dans $\mathcal{M}_{n_i\times n_i}(\mathbb{C})$ (et commute avec N_i).*

DÉMONSTRATION.

i) On pose

$$Y = (y_{kl})_{1\leqslant k\leqslant n_i, 1\leqslant l\leqslant n_j}, \qquad N_i = (\nu^i_{k,l})_{1\leqslant k,\, l\leqslant n_i}, \qquad N_j = (\nu^j_{k,l})_{1\leqslant k,\, l\leqslant n_j}$$

$$t_2^{p_2'+1}\frac{dY}{dt_2} = YB_j - B_iY \Leftrightarrow t_2^{p_2'+1}\frac{dy_{l,m}}{dt_2} = (b_j - b_i)y_{l,m} - \sum_{k\geqslant l+1} t_2^{p_2'}\nu^i_{l,k}y_{k,m} + \sum_{k\leqslant m-1}\nu^j_{k,m}y_{l,k}$$

$$\text{pour } \begin{cases} 1\leqslant l \leqslant m_i \\ 1\leqslant m\leqslant n_j \end{cases}$$

* en particulier pour $l = n_i$, $m = 1$ on a:

$$t_2^{p_2'+1}\frac{dy_{n_j,1}}{dt_2} = (b_j - b_i)y_{n_i,1}$$

et, puisque $b_i - b_j \notin t_2^{p_2'}\mathbb{Z}$, la seule solution dans $\mathbb{C}((t_2))$ de cette équation différentielle est 0.

* On a immédiatement, par récurrence sur l, $y_{n_i-l,1}=0$ pour $0\leqslant l\leqslant n_i-1$.

* On a de même, par récurrence sur m, puis par récurrence sur l, $y_{n_i-l,m}=0$ pour $0\leqslant l\leqslant n_i-1$, $1\leqslant m\leqslant n_j$.

ii) $t_2^{p_2'+1}\dfrac{dY}{dt_2}=YB_i-B_iY \iff t_2^{p_2'+1}\dfrac{dY}{dt_2}=t_2^{p_2'}(YN_i-N_iY)$

$$\iff t_2\frac{dY}{dt_2}=YN_i-N_iY\ .$$

Posons $Y=t_2^{-k}\tilde{Y}$ avec

$$\left|\begin{array}{ll} k & \text{dans } \mathbf{Z} \\ \tilde{Y} & \text{dans } \mathcal{M}_{n_i\times n_i}(\mathbf{C}[\![t_2]\!]) \\ \tilde{Y}(0)\neq 0 & \end{array}\right.$$

(c'est toujours possible si Y n'est pas la solution nulle).

Alors:

$$t_2\frac{dY}{dt_2}=YN_i-N_iY \iff t_2\frac{d\tilde{Y}}{dt_2}=\tilde{Y}(kI_{n_i}+N_i)-N_i\tilde{Y}$$

en particulier, si $t_2=0$, on a: $\tilde{Y}(0)(kI_{n_i}+N_i)-N_i\tilde{Y}(0)=0$, ce qui n'est possible que si $k=0$, puisque on a $\tilde{Y}(0)\neq 0$. Donc Y est dans $\mathcal{M}_{n_i\times n_i}(\mathbf{C}[\![t_2]\!])$. Le même raisonnement montre alors que Y est dans $\mathcal{M}_{n_i\times n_i}(\mathbf{C})$.

Lemme 2. *Toute solution Y dans $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{C}((t_2)))$ l'équation*

$$t_2^{p_2'+1}\frac{dY}{dt_2}=[Y,B] \qquad \textit{où } B \textit{ est de la forme } \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_k \end{pmatrix}$$

$$\textit{avec} \left\{\begin{array}{lll} B_j=\lambda_j(t_2)I_{n_j}+t_2^{p_2'}N_j & & \textit{pour } 1\leqslant j\leqslant k \\ \lambda_j(t_2) & \textit{dans } \mathbf{C}[t_2] & \\ N_j & \textit{dans } \mathcal{M}_{n_j\times n_j}(\mathbf{C}) & \textit{nilpotente triangulaire supérieure} \\ \lambda_j-\lambda_k\notin t_2^{p_2'}\mathbf{Z} & & \textit{pour } j\neq k \end{array}\right.$$

$$\textit{est en fait dans } \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{C}) \left(\textit{et de la forme } \begin{pmatrix} Y_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & Y_k \end{pmatrix}\right.$$

$$\left.\textit{avec} \left\{\begin{array}{l} Y_j\in\mathcal{M}_{n_j\times n_j}(\mathbf{C}) \\ [Y_j,N_j]=0 \end{array}\right. \quad \textit{pour } 1\leqslant j\leqslant k\right).$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du lemme précédent.

Chapitre II

QUELQUES LEMMES D'EXISTENCE DE SOLUTION FORMELLE POUR CERTAINS SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

1. – Existence de solutions formelles pour certaines équations à paramètre.

Soit l'équation

$$(E)\ x_1^{p_1+1}\frac{\partial y}{\partial x_1} = f(x_1, x_2, y)$$

où:

$$\begin{cases} f\colon \mathcal{U}\subset \mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n \text{ est } C^\infty \text{ sur un voisinage ouvert } \mathcal{U} \text{ de } 0 \text{ dans } \mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^n \\ f(0,0,0) = 0 \\ p_1 \text{ est un entier positif ou nul.} \end{cases}$$

Definition 1. *On dira que la série formelle en* x_1, $H_{x_2}(x_1) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(x_2)x_1^m$ $\Big($*respectivement la série formelle en* x_2, $H_{x_1}(x_2) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(x_1)x_2^m\Big)$ *où les* $a_m(x_2)$ $\big($*resp.* $b_m(x_1)\big)$ *sont des fonctions* C^∞ *de* x_2 (*resp.* x_1) *sur un même voisinage de* 0 *dans* $\mathbf{R}$, *à valeurs dans* $\mathbf{R}^n$, *et où* $a_0(0) = 0$ $\big($*resp.* $b_0(0) = 0\big)$, *est solution formelle de l'équation* $x_1^{p_1+1}(\partial y/\partial x_1) = f(x_1, x_2, y)$ *si:*

a) $f\big(0, x_2, a_0(x_2)\big) = 0$ $\big($*resp.* $x_2^{p_1+1}(db_0/dx_1) = f(x_1, 0, b_0)\big)$;

b) si l'on considère l'équation (E') *obtenue à partir de* (E) *en posant* $y = z + a_0(x_2)$ $\big($*resp.* $y = z + b_0(x_1)\big)$ *c'est-à-dire:*

$$(E')\colon x_1^{p_1+1}\frac{\partial z}{\partial x_1} = F(x_1, x_2, z) \quad \textit{où} \quad F(x_1, x_2, z) = f\big(x_1, x_2, z + a_0(x_2)\big)$$

$$\left(\textit{resp.}\ F(x_1, x_2, z) = f\big(x_1, v_2, z + b_0(x_1)\big) - x_1^{p_1+1}\frac{db_0}{dx_1}\right)$$

alors l'équation « formelle en x_1 *» obtenue en remplaçant dans* (E') $F(x_1, x_2, z)$ *par son développement de Taylor par rapport aux variables* x_1 *et* z (*resp.* x_2 *et* z) *au voisinage de* $(x_1, z) = (0, 0)$ $\big($*resp.* $(x_2, z) = (0, 0)\big)$ *est vérifiée par*

$$z = \sum_{m=1}^{\infty} a_m(x_2)x_1^m \quad \left(\text{resp. } z = \sum_{m=1}^{\infty} b_m(x_1)x_2^m\right).$$

DEFINITION 2. *On dira que la série formelle à deux variables* $H(x_1, x_2) = \sum_{l\geqslant 0,\, m\geqslant 0} a_{l,m} x_1^l x_2^m$, *où* $a_{l,m} \in \mathbf{R}^n$, $a_{00} = 0$, *est solution formelle de* (E), *si l'équation «formelle en* (x_1, x_2)*», obtenue en remplaçant dans* (E) $f(x_1, x_2, y)$ *par son développement de Taylor au voisinage de* $(x_1, x_2, y) = (0, 0, 0)$ *par rapport aux trois variables* x_1, x_2 *et* y, *est vérifiée par* $y = H(x_1, x_2)$.

Les lemmes qui suivent donnent des exemples de conditions suffisantes d'existence de solution formelle à une variable pour (E).

LEMME 1. *Si* $p_1 = 0$ *et si* $(\partial f/\partial y)(0, 0, 0)$ *n'a pas de valeur propre entière positive ou nulle, (resp. si* $p_1 > 0$ *et si* $(\partial f/\partial y)(0, 0, 0)$ *est inversible), l'équation* $x_1^{p_1+1}\partial y/\partial x_1 = f(x_1, x_2, y)$ *admet une solution formelle unique en* x_1, $H_{x_2}(x_1) = \sum_{m=0} a_m(x_2) x_1^m$, *où les* $a_m(x_2)$ *sont des fonctions* C^∞ *sur un voisinage de* 0 *dans* $\mathbf{R}$ *indépendant de* m, *à valeurs dans* $\mathbf{R}^n$ *et où* $a_0(0) = 0$.

DÉMONSTRATION.

a) On détermine d'abord $a_0(x_2)$ en appliquant à la fonction $f(0, x_2, y)$ le théorème des fonctions implicites, dont les conditions sont remplies puisque on a: $f(0, 0, 0) = 0$, $(\partial f/\partial y)(0, 0, 0)$ inversible.

b) Après translation par $a_0(x_2)$, on est ramené au cas où $f(0, x_2, 0) = 0$. On désigne par $\bar{f}(x_1, x_2, y)$ la série formelle en x_1 et y, à coefficients C^∞ de x_2, que constitue le développement de Taylor par rapport à x_1 et y de f, au voisinage de $(x_1, y) = (0, 0)$ et par $(\bar{E})$ l'équation formelle en x_1: $x_1^{p_1+1}(\partial y/\partial x_1) = \bar{f}(x_1, x_2, y)$.

Dire que $H_{x_2}(x_1) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(x_2) x_1^m$ est solution de $(\bar{E})$ équivaut à:

$$x_1^{p_1+1}\frac{\partial H_{x_2}}{\partial x_1} = \bar{f}(x_1, x_2, H_{x_2}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1^{p_1+1}[a_1(x_2) + \ldots + m a_m(x_2) x_1^{m-1} + \ldots] = \frac{\partial f}{\partial x_1}(0, (x_2, 0) x_1 +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial y}(0, x_2, 0) H_{x_2} + \ldots + \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!\,(m-k)!}\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m-k}\partial y_k}(0, x_2, 0) x_1^{m-k} H_{x_2}^k + \ldots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (m-p_1) a_{m-p_1} = \frac{\partial f}{\partial y}(0, x_2, 0) a_m + P_m(a_1, \ldots, a_{m-1}) \qquad \forall m \geqslant 1$$

(avec la convention $a_{m-p_1} = 0$ si $m \leqslant p_1$), où $P_m(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1})$ est «connu» lorsque $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ le sont, et est C^∞ comme fonction de x_2 sur tout voisinage de 0 où $a_1, \dots, a_{m-1}$ le sont. On distingue maintenant deux cas:

1) $p_1 = 0$.

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m(x_2)x_1^m \quad \text{solution de} \quad (\bar{E}) \Leftrightarrow \forall m \geqslant 1$$

$$\left[mI_n - \frac{\partial f}{\partial y}(0, x_2, 0)\right] \quad a_m = P_m(a_1, \dots, a_{m-1})$$

où I_n est la matrice identité d'ordre n.

Par hypothèse $(\partial f/\partial y)(0, 0, 0)$ n'a pas de valeur propre entière et la matrice $(\partial f/\partial y)(0, x_2, 0)$ est une matrice de fonctions continues au voisinage de 0. Il existe donc un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}$, indépendant de m, tel que:

$$\forall m \geqslant 1, \qquad \forall x_2 \in V, \qquad \left(mI_n - \frac{\partial f}{\partial y}(0, x_2, 0)\right) \quad \text{est inversible}.$$

Les fonctions $a_m(x_2)$ sont donc déterminées de façon unique, par récurrence sur m, et elles sont C^∞ de x_2 sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ indépendant de m.

2) $p_1 > 0$.

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m(x_2)x_1^m \quad \text{solution de} \quad (\bar{E}) \Leftrightarrow \forall m \geqslant 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, x_2, 0)a_m = (m - p_1)a_{m-p_1} - P_m(a_1, \dots, a_{m-1}).$$

Par hypothèse $(\partial f/\partial y)(0, 0, 0)$ est inversible, donc il existe un voisinage W de 0 dans $\mathbb{R}$ tel que $(\partial f/\partial y)(0, x_2, 0)$ soit inversible pour $x_2 \in W$. Les $a_m(x_2)$ sont donc déterminées de façon unique, par récurrence sur m, et sont C^∞ de x_2 sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ indépendant de m.

LEMME 2. *Si l'équation $x_1^{p_1+1}(\partial y/\partial x_1) = f(x_1, x_2, y)$ admet une solution formelle à deux variables $H(x_1, x_2) = \sum_{l \geqslant 0, m \geqslant 0} a_{lm}x_1^l x_2^m$, où $a_{lm} \in \mathbb{R}^n$, $a_{00} = 0$, alors elle admet une solution formelle en x_2, $H_{x_1}(x_2) = \sum_{m \geqslant 0} b_m(x_1)x_2^m$, où $b_m(x_1)$ est une fonction C^∞ de x_1 sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ indépendant de m, dont le développement de Taylor en $x_1 = 0$ est $\sum_{l \geqslant 0} a_{lm}x_1^l$.*

De plus, si $p_1 = 0$, $H_{x_1}(x_2)$ est déterminé de façon unique par $H(x_1, x_2)$.

DÉMONSTRATION.

a) détermination de $b_0(x_1)$.

On cherche b_0, C^∞ au voisinage de 0, telle que $x_1^{p_1+1}(db_0/dx_1) = f(x_1, 0, b_0)$. Par hypothèse l'équation $x_1^{p_1+1}(du/dx_1) = f(x_1, 0, u)$ a $\sum_{l\geq 0} a_{l0}x_1^l$ comme solution formelle. Donc (voir (4)) cette équation a une solution C^∞ sur un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$, $b_0(x_1)$, admettant $\sum_{l\geq 0} a_{l0}x_1^l$ comme développement de Taylor à l'origine.

b) On considère maintenant l'équation (E') obtenue à partir de (E) en posant $y = z + b_0(x_1)$, c'est-à-dire:

$$(E'): x_1^{p_1+1}\frac{\partial z}{\partial x_1} = F(x_1, x_2, z)$$

où

$$F(x_1, x_2, z) = f\big(x_1, x_2, z + b_0(x_1)\big) - x_1^{p_1+1}\frac{db_0}{dx_1}$$

(E') admet comme solution formelle à deux variables $\sum_{l\geq 0, m\geq 1} a_{lm}x_1^l x_2^m$.

Soit $\overline{\overline{F}}(x_1, x_2, z)$ le développement de Taylor par rapport à x_2 et z de F au voisinage de $(x_2, z) = (0, 0)$.

Dire que $H_{x_1}(x_2) = \sum_{m\geq 0}^{\infty} b_m(x_1)x_2^m$ est solution formelle en x_2 de (E') équivaut à:

$$x_1^{p_1+1}\frac{\partial H_{x_1}}{\partial x_1} = \overline{\overline{F}}(x_1, x_2, H_{x_1}) \iff x_1^{p_1+1}\left[\frac{db_1}{dx_1}x_2 + \ldots + \frac{db_m}{dx_1}x_2^m + \ldots\right] =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1, 0, 0)x_2 + \frac{\partial F}{\partial z}(x_1, 0, 0)H_{x_1} + \ldots +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(m-k)!\,k!}\,\frac{\partial x_2^{m-k}\partial z^k}{\partial^m F}(x_1, 0, 0)x_2^{m-k}H_{x_1}^k + \ldots \iff$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x_1^{p_1+1}\dfrac{db_1}{dx_1} = \dfrac{\partial F}{\partial z}(x_1, 0, 0)b_1 + \dfrac{\partial F}{\partial x_2}(x, 0, 0) \\ x_1^{p_1+1}\dfrac{db_2}{dx_1} = \dfrac{\partial F}{\partial z}(x_1, 0, 0)b_2 + \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{2!}\left[\dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2}(x_1, 0, 0)(b_1, b_1) + 2\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2\partial z}(x_1, 0, 0)b_1 + \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}(x_1, 0, 0)\right] \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_1^{p_1+1}\dfrac{db_m}{dx_1} = \dfrac{\partial F}{\partial z}(x_1, 0, 0)b_m + Q_m(b_1, b_2, \ldots, b_{m-1}) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{array}\right.$$

où $Q_m(b_1, b_2, \dots, b_{m-1})$ est « connu » en fonction de $b_1, b_2, \dots, b_{m-1}$, et est C^∞ comme fonction de x_1 sur tout voisinage de 0 où $b_1, b_2, \dots, b_{m-1}$ le sont. Donc pour tout entier $m \geqslant 1$ $b_m(x_1)$ doit être solution d'une équation du type $x_1^{p_1+1}(dY/dx_1) = A(x_1)Y + B_m(x_1)$, où $A(x_1)$ (resp. $B_m(x_1)$ est) une matrice (resp. un vecteur colonne) de fonctions C^∞ sur un voisinage de 0, indépendant de m, équation admettant $\sum_{l \geqslant 0} a_{lm} x_1^l$ comme solution formelle.

D'après (4), chacune de ces équations a une solution $b_m(x_1)$, C^∞ sur un voisinage de 0 indépendant de m puisque la partie linéaire $x_1^{p_1+1}(dY/dx_1) - A(x_1)Y$ est la même pour tout m et que, par récurrence sur m, le second membre $B_m(x_2)$ est C^∞ sur un voisinage de 0 indépendant de m. De plus $b_m(x_1)$ admet $\sum_{l \geqslant 0} a_{lm} x_1^l$ comme développement de Taylor à l'origine.

Par ailleurs, si $p_1 = 0$, $b_0(x_1)$ et $b_m(x_1)$ pour $m \geqslant 1$ sont déterminées de façon unique par leur développement de Taylor $\sum_{l \geqslant 0} a_{lm} x_1^l$.

2. – Existence de solutions formelles pour certains systèmes de Pfaff complètement intégrables.

Soit le système

$$(S): \begin{cases} x_1^{p_1+1} \dfrac{\partial y}{\partial x_1} = f_1(x_1, x_2, y) \\ x_2^{p_2+1} \dfrac{\partial y}{\partial x_2} = f_2(x_1, x_2, y) \end{cases}$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} 1)\ p_1 \text{ et } p_2 \text{ sont des entiers positifs ou nuls.} \\ 2)\ f_i = \mathcal{U} \subset \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n \text{ est } C^\infty \text{ sur un voisinage ouvert } \mathcal{U} \text{ de 0 dans} \\ \qquad \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^n, \text{ pour } i = 1, 2 \\ 3)\ f_1(0, 0, 0) = f_2(0, 0, 0) = 0\,. \end{array} \right.$$

La condition de complète intégrabilité sur $\mathcal{U}$ est:

$$x_2^{p_2+1} \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2, y) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_1, x_2, y) f_2(x_1, x_2, y) = \\ = x_1^{p_1+1} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2, y) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_1, x_2, y) f_1(x_1, x_2, y)\,.$$

On notera (E_i) l'équation différentielle $x_i^{p_i+1}(\partial y/\partial x_i) = f_i(x_1, x_2, y)$ pour $i = 1, 2$.

DEFINITION 3. *On dira que la série formelle en* x_1, $H_{x_2}(x_1) = \sum_{m\geq 0} a_m(x_2)x_1^m$, $\Big($*respectivement la série formelle en* x_2, $H_{x_1}(x_2) = \sum_{m\geq 0} b_m(x_1)x_2^m\Big)$ *où les* $a_m(x_2)$ $\big($*resp.* $b_m(x_1)\big)$ *sont des fonctions* C^∞ *sur un même voisinage de* 0, *à valeurs dans* $\mathbf{R}^n$, *et où* $a_0(0) = 0$ $\big($*resp.* $b_0(0) = 0\big)$, *est solution formelle du système* (S) *si elle est solution formelle de chacune des deux équations de* (S) *au sens de la définition* 1.

LEMME 3. *Si* $p_1 = 0$ *et si* $(\partial f_1/\partial y)(0, 0, 0)$ *n'a pas de valeur propre entière positive ou nulle* $\big($*resp. si* $p_1 > 0$ *et si* $(\partial f_1/\partial y)(0, 0, 0)$ *est inversible*$\big)$, *alors* (S) *admet une solution formelle en* x_1 *unique.*

DÉMONSTRATION. Soit $H_{x_2}(x_1) = \sum_{m\geq 0} a_m(x_2)x_1^m$ la solution formelle unique de l'équation (E_1) donnée par le lemme 1.

On va montrer que H_{x_2} est solution formelle de (E_2).

a) montrons que $x_2^{p_2+1}(da_0/dx_2) = f_2\big(0, x_2, a_0(x_2)\big)$.

La complète intégrabilité en $x_1 = 0$ et $y = a_0(x_2)$ s'écrit

$$(1):\quad x_2^{p_2+1}\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\big(0, x_2, a_0(x_2)\big) + \frac{\partial f_1}{\partial y}\big(0, x_2, a_0(x_2)\big) f_2\big(0, x_2, a_0(x_2)\big) = \\ = \frac{\partial f_2}{\partial y}\big(0, x_2, a_0(x_2)\big) f_1\big(0, x_2, a_0(x_2)\big)\,.$$

Or $f_1\big(0, x_2, a_0(x_2)\big) = 0$, d'où, par dérivation:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\big(0, x_2, a_0(x_2)\big) + \frac{\partial f_1}{\partial y}\big(0, x_2, a_0(x_2)\big)\frac{da_0}{dx_2} = 0$$

$$\begin{aligned}(1) \iff x_2^{p_2+1}\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\big(0, x_2, a_0(x_2)\big) &= -\frac{\partial f_1}{\partial y}\big(0, x_2, a_0(x_2) f_2\big(0, x_2, a_0(x_2)\big) \\ &= -\frac{\partial f_1}{\partial y}\big(0, x_2, a_0(x_2)\big) x_2^{p_2+1}\frac{da_0}{dx_2}\,.\end{aligned}$$

Or $(\partial f_1/\partial y)(0, 0, 0)$ est inversible par hypothèse, donc $(\partial f_1/\partial y)\big(0, x_2, a_0(x_2)\big)$ l'est pour x_2 dans un voisinage de 0, donc $x_2^{p_2+1}(da_0/dx_2) = f_2\big(0, x_2, a_0(x_2)\big)$ sur un voisinage de 0.

b) Par translation par $a_0(x_2)$, on est ramené au cas $a_0(x_2) = 0 = f_i(0, x_2, 0)$ pour $i = 1, 2$.

Soit $\bar{f}_i(x_1, x_2, y)$ la série formelle en x_1 et y, à coefficients C^∞ de x_2, que constitue le développement de Taylor de f_i, par rapport à x_1 et y, au voisinage de $(x_1, y) = (0, 0)$. On doit vérifier que l'on a:

$$x_2^{p_2+1}\frac{\partial H_{x_2}}{\partial x_2} = \bar{f}_2(x_1, x_2, H_{x_2}).$$

En écrivant la condition de complète intégrabilité formellement en x_1 et y, en remplaçant y par H_{x_2} et en utilisant que H_{x_2} est solution formelle de (E_1) on obtient

$$(2):\quad x_1^{p_1+1}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\bar{f}_2(x_1, x_2, H_{x_2}) - x_2^{p_2+1}\frac{\partial H_{x_2}}{\partial x_2}\right) =$$
$$= \frac{\partial \bar{f}_1}{\partial y}(x_1, x_2, H_{x_2})\left(\bar{f}_2(x_1, x_2, H_{x_2}) - x_2^{p_2+1}\frac{\partial H_{x_2}}{\partial x_2}\right).$$

Posons:

$$\begin{cases} \bar{f}_2(x_1, x_2, H_{x_2}) - x_2^{p_2+1}\dfrac{\partial H_{x_2}}{\partial x_2} = \sum\limits_{m\geq 1} c_m(x_2)x_1^m \\ \overline{\dfrac{\partial f_1}{\partial y}}(x_1, x_2, H_{x_2}) = \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(0, x_2, 0) + \sum\limits_{m\geq 1} M_m(x_2)x^m \end{cases}$$

où $M_m(x_2)$ (resp. $c_m(x_2)$) est une matrice (resp. un vecteur colonne) de fonctions C^∞ sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ indépendant de m.

$$(2) \iff (m - p_1)c_{m-p_1} = \frac{\partial f_1}{\partial y}(0, x_2, 0)c_m + \sum_{k=1}^{m} M_k c_{m-k} \qquad \forall m \geq 1$$

(avec la convention $c_{m-p_1} = 0$ si $m \leqslant p_1$).

On a deux cas:

1) $p_1 \neq 0$

$$(2) \iff \frac{\partial f_1}{\partial y}(0, x_2, 0)c_m = (m - p_1)c_{m-p_1} - \sum_{k=1}^{m} M_k c_{m-k} \qquad \forall m \geq 1.$$

Or $(\partial f_1/\partial y)(0, x_2, 0)$ est inversible sur un voisinage de 0 donc $c_1 = 0$ et, par récurrence sur m, $c_m = 0$, $\forall m \geq 1$.

2) $p_1 = 0$

$$(2) \iff \left(mI_n - \frac{\partial f_1}{\partial y}(0, x_2, 0)\right)c_m = \sum_{k=1}^{m} M_k c_{m-k} \qquad \forall m \geq 1.$$

D'après une remarque utilisée dans la démonstration du lemme 1,

$mI_m - (\partial f_1/\partial y)(0, x_2, 0)$ est inversible sur un voisinage de 0 indépendant de m, donc $c_1 = 0$, et, par récurrence sur m, $c_m = 0$.

LEMME 4. *Si le système* (S) *avec* $p_1 = 0$ *admet une solution formelle en* x_1 *et* x_2, $H(x_1, x_2) = \sum_{l\geqslant 0, m\geqslant 0} a_{lm}x_1^l x_2^m$ *où* $a_{lm} \in \mathbf{R}^n$, $a_{00} = 0$, *alors il admet une solution formelle unique en* x_2, $H_{x_1}(x_2) = \sum_{m\geqslant 0} b_m(x_1)x_2^m$, *où les* $b_m(x_1)$ *sont* C^∞ *de* x_1 *sur un même voisinage de* 0 *dans* $\mathbf{R}$ *et admettent respectivement* $\sum_{l\geqslant 0} a_{lm}\, x_1^l$ *comme développement de Taylor à l'origine.*

DÉMONSTRATION. (S) s'écrit

$$\begin{cases} x_1 \dfrac{\partial y}{\partial x_1} = f_1(x_1, x_2, y) \\ x_2^{p_2+1} \dfrac{\partial y}{\partial x_2} = f_2(x_1, x_2, y)\,. \end{cases}$$

Soit $H_{x_1}(x_2) = \sum_{m\geqslant 0} b_m(x_1)x_2^m$ la solution formelle unique en x_2 de $x_1(\partial y/\partial x_1) = f_1(x_1, x_2, y)$ donnée par le lemme 2.

On va montrer que H_{x_1} est solution formelle de $x_2^{p_2+1}(\partial y/\partial x_2) = f_2(x_1, x_2, y)$.

a) Montrons d'abord que $0 = f_2(x_1, 0, b_0(x_1))$.

Posons $g(x_1) = f_2(x_1, 0, b_0(x_1))$.

L'égalité $0 = f_2(x_1, 0, b_0(x_1))$ est vérifiée formellement en x_1, donc $g(x_1)$ est plate en $x_1 = 0$ (c'est-à-dire par définition, que le développement de Taylor de g à l'origine est nul).

D'autre part, la complète intégrabilité en $x_2 = 0$ et $y = b_0(x_1)$ s'écrit

$$[3]:\quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_1, 0, b_0) f_2(x_1, 0, b_0) = x_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, 0, b_0) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_1, 0, b_0) f_1(x_1, 0, b_0)$$

donc

$$\frac{dg}{dx_1} = \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_1, 0, b_0) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_1, 0, b_0)\frac{db_0}{dx_1} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ x_1 \frac{dg}{dx_1} &= x_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, 0, b_0) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_1, 0, b_0) x_1 \frac{db_0}{dx_1} = \\ &= x_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, 0, b_0) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_1, 0, b_0) f_1(x_1, 0, b_0) = \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_1, 0, b_0) g \qquad \text{d'après (3)}\,. \end{aligned}$$

Or, une équation du type $x_1(dY/dx_1) = A(x_1)Y$ où $A(x_1)$ est une matrice de fonctions C^∞ de x_1 sur un voisinage de 0 n'a pas d'autre solution plate que 0, donc $g = 0$.

b) Par translation par $b_0(x_1)$, on est ramené au cas où $b_0(x_1) = 0 = f_i(x_1, 0, 0)$ pour $i = 1, 2$.

Soit $\bar{\bar{f}}_i(x_1, x_2, y)$ le développement de Taylor par rapport à x_2 et z, au voisinage de $(x_2, z) = (0, 0)$, de f_i.

On doit montrer que:

$$x_2^{p_2+1}\frac{\partial H_{x_1}}{\partial x_2} = \bar{\bar{f}}_2(x_1, x_2, H_{x_1}) .$$

En écrivant la condition de complète intégrabilité formellement en x_2 et y, en remplaçant y par H_{x_1} et en utilisant que H_{x_1} est solution formelle de $x_1(\partial y/\partial x_1) = f_1(x_1, x_2, y)$ on obtient:

$$(4):\quad x_1\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\bar{\bar{f}}_2(x_1, x_2, H_{x_1}) - x_2^{p_2+1}\frac{\partial H_{x_1}}{\partial x_2}\right] = \\ = \frac{\partial \bar{\bar{f}}_1}{\partial y}(x_1, x_2, H_{x_1})\left[\bar{\bar{f}}_2(x_1, x_2, H_{x_1}) - x_2^{p_2+1}\frac{\partial H_{x_1}}{\partial x_2}\right].$$

Posons:

$$\begin{cases} \bar{\bar{f}}_2(x_1, x_2, H_{x_1}) - x_2^{p_2+1}\dfrac{\partial H_{x_1}}{\partial x_2} = \sum\limits_{m\geq 1} e_m(x_1)x_2^m \\ \dfrac{\partial \bar{\bar{f}}_1}{\partial y}(x_1, x_2, H_{x_1}) = \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x_1, 0, 0) + \sum\limits_{m\geq 1} N_m(x_1)x_2^m \end{cases}$$

où $N_m(x_1)$ (resp. $e_m(x_1)$) est une matrice (resp. un vecteur colonne) de fonctions de x_1 C^∞ sur un voisinage de 0 indépendant de m.

$$(4)\quad \Rightarrow\quad x_1\frac{de_m}{dx_1} = \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_1, 0, 0)e_m + \sum_{k=1}^{m-1} N_k e_{m-k} \qquad \forall m \geq 1 .$$

Or, $e_m(x_1)$ est un vecteur colonne de fonctions plates en $x_1 = 0$, puisque, formellement en (x_1, x_2) on a

$$\hat{f}_2(x_1, x_2, H(x_1, x_2)) - x_2^{p_2+1}\frac{\partial H(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0$$

où $\hat{f}_2(x_1, x_2, y)$ désigne le développement de Taylor par rapport aux trois variables x_1, x_2 et y de f_2, au voisinage de $(x_1, x_2, y) = (0, 0, 0)$.

Donc, par un argument déjà utilisé plusieurs fois, $e_1(x_1)$, solution plate en $x_1 = 0$ de $x_1(\partial e_1/\partial x_1) = (\partial f_1/\partial y)\ (x_1, 0, 0)e_1$, est nulle, et par récurrence sur m, $e_m = 0$ pour $m \geqslant 1$.

DEFINITION 4. *On dira que deux séries formelles* $\sum_{m\geqslant 0} a_m(x_2)x_1^m$ *et* $\sum_{m\geqslant 0} b_m(x_1)x_2^m$, *où les* $a_m(x_2)$ (resp. $b_m(x_1)$) *sont des fonctions* C^∞ *sur un même voisinage de* 0 *dans* $\mathbf{R}$, *à valeurs dans* $\mathbf{R}^n$, *sont compatibles, si, lorsqu'on remplace les* a_m *et les* b_m *par leurs développements de Taylor respectifs à l'origine, on obtient la même série formelle à deux variables.*

En regroupant certains résultats précédents, on a le lemme suivant:

LEMME 5. *Le système*

$$(S): \begin{cases} x_1^{p_1+1}\dfrac{\partial y}{\partial x_1} = f_1(x_1, x_2, y) \\[2ex] x_2^{p_2+1}\dfrac{\partial y}{\partial x_2} = f_2(x_1, x_2, y), \end{cases}$$

sous les hypothèses du début de ce paragraphe, admet deux séries formelles compatibles $\sum_{m\geqslant 0} a_m(x_2)x_1^m$ *et* $\sum_{m\geqslant 0} b_m(x_1)x_2^m$ *avec* $a_0(0) = b_0(0) = 0$, *comme solutions formelles, dans les cas suivants*:

1) $p_i > 0$ *et* $(\partial f_i/\partial y)(0, 0, 0)$ *inversible pour* $i = 1, 2$

2) $p_1 = 0$ *et* $(\partial f_1/\partial y)(0, 0, 0)$ *n'a pas de valeur propre entière positive ou nulle*

3) $p_1 = 0$ *et le système* (S) *admet une solution formelle en* x_1

4) $p_1 = p_2 = 0$ *et le système* (S) *admet une solution formelle à deux variables.*

REMARQUE. On est dans le cas 4), par exemple, lorsque $p_1 = p_2 = 0$ et que $(\partial f_1/\partial y)(0, 0, 0)$ où $(\partial f_2/\partial y)(0, 0, 0)$ n'a pas de valeur propre entière strictement positive.

3. – Application à la triangulation formelle de certains systèmes de Pfaff linéaires complètement intégrables.

NOTATIONS. On notera $\mathcal{E}$ l'ensemble des germes de fonctions $f(t_1, t_2)$, C^∞ sur un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^2$ pour $t_1 \geqslant 0$ et $t_2 \geqslant 0$, à valeurs complexes.

On notera $\mathcal{E}_{t_1}$ le localisé de l'anneau $\mathcal{E}$ par rapport à la partie multiplicative formée par les puissances de t_1, $\mathcal{E}_{t_1,t_2}$ le localisé de $\mathcal{E}$ par rapport aux puissances de t_1 et t_2.

Enfin on désignera par $\mathcal{F}_{t_1}$ le sous-ensemble de $\mathcal{E}$ formé des fonctions dont le developpement de Taylor par rapport à la variable t_1 au voisinage de $t_1 = 0$ est nul (c'est-à-dire qui sont «plates» comme fonctions de t_1 au voisinage de $t_1 = 0$). On dira parfois, pour abréger, qu'un élément de $\mathcal{F}_{t_1}$ est une fonction plate de t_1.

Dans tout ce qui suit, on supposera t_1 et t_2 positifs ou nuls.

On a le lemme suivant:

LEMME 6. *Soit le système*

$$(\Sigma): \begin{cases} x_1^{p_1+1}\dfrac{\partial}{\partial x_1} - M_1(x_1, x_2) \\ x_2^{p_2+1}\dfrac{\partial}{\partial x_2} - M_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

où on suppose que M_1 et M_2 sont des matrices $n \times n$ de fonctions C^∞ sur un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^2$, telles que (Σ) soit «formellement en x_1 complètement intégrable» c'est-à-dire vérifiant:

$$x_2^{p_2+1}\frac{\partial M_1}{\partial x_2} + M_1 M_2 - \left(x_1^{p_1+1}\frac{\partial M_2}{\partial x_1} + M_2 M_1\right) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathcal{F}_{x_1}) .$$

On peut alors trouver deux entiers strictement positifs σ_1 et σ_2 pour lesquels, si on pose

$$x_1 = t_1^{\sigma_1}, \quad x_2 = t_2^{\sigma_2}, \quad M_i'(t_1, t_2) = M_i(t_1^{\sigma_1}, t_2^{\sigma_2}),$$

$$(\Sigma'): \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma_1}\, t_1^{\sigma_1 p_1+1}\dfrac{\partial y}{\partial t_1} - M_1'(t_1, t_2)y \\ \dfrac{1}{\sigma_2}\, t_2^{\sigma_2 p_2+1}\dfrac{\partial y}{\partial t_2} - M_2'(t_1, t_2)y \end{cases}$$

on ait le résultat suivant:

Il existe une transformation $T \in GL_n(\mathcal{E}_{t_1,t_2})$ telle que le système (Σ'') dèduit de (Σ') en posant $y = Tz$ ait la forme suivante:

$$\begin{cases} t_1^{p_1'+1}\dfrac{\partial z}{\partial t_1} - \big(A(t_1, t_2) + P_1(t_1, t_2)\big)z \\ t_2^{p_2'+1}\dfrac{\partial z}{\partial t_2} - \big(B(t_1, t_2) + P_2(t_1, t_2)\big)z \end{cases}$$

où l'on a:

p_1' *et* p_2' *sont des entiers naturels*

$$A(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} A_1(t_1, t_2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2(t_1, t_2) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_l(t_1, t_2) \end{pmatrix}$$

$$B(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} B_1(t_2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2(t_2) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & B_l(t_2) \end{pmatrix}$$

$$A_i(t_1, t_2) = a_i(t_1) I_{n_i} + N_{i,1}(t_1, t_2) \qquad \textit{pour } 1 \leqslant i \leqslant l$$

$$B_i(t_2) = \begin{pmatrix} B_{i,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_{i,m_i}(t_2) \end{pmatrix} \qquad \textit{pour } 1 \leqslant i \leqslant l$$

avec

$$B_{ij}(t_2) = b_{ij}(t_2) I_{n_{i,j}} + t^{p_2'} N_{i,j,2} \qquad \textit{pour } 1 \leqslant j \leqslant m_i$$

où $a_i(t_1)$ *est un polynôme à coefficients complexes de degré au plus* p_1'

$b_{i,j}(t_2)$ *est un polynôme à coefficients complexes de degré au plus* p_2'

$N_{i,1}(t_1, t_2)$ *est une matrice triangulaire supérieure de fonctions* C^∞ *au voisinage de* $(0, 0)$, *dont la diagonale ne contient que des* 0

$N_{i,j,2}$ *est une matrice triangulaire supérieure nilpotente constante*

$I_{n_i}, I_{n_{i,j}}$ *sont les matrices identités d'ordres respectivement* n_i *et* $n_{i,j}$

$a_i - a_{i+1} \notin t_1^{p_1'} \mathbf{Z}$ *pour* $1 \leqslant i \leqslant l-1$

$b_{i,j} - b_{i,j+1} \notin t_2^{p_2'} \mathbf{Z}$ *pour* $\begin{cases} 1 \leqslant j \leqslant m_i - 1 \\ 1 \leqslant i \leqslant l \end{cases}$

P_1 *et* P_2 *sont dans* $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathcal{F}_{t_1})$.

DÉMONSTRATION. La démonstration peut se faire directement ou en deux étapes à partir du lemme suivant:

LEMME 7. *Sous les hypothèses et avec les notations du lemme* 6, *on peut trouver deux entiers* σ_1 *et* σ_2 *strictement positifs et une transformation*

$T' \in GL_n(\mathcal{E}_{t_1})$ qui change le système (Σ') en le système (Σ_1') de la forme:

$$(\Sigma_1'): \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma_1} t_1^{p_1'+1} \dfrac{\partial}{\partial t_1} - A'(t_1, t_2) \\ \dfrac{1}{\sigma_2} t_2^{\sigma_2 p_2+1} \dfrac{\partial}{\partial t_2} - \big(B'(t_2) + P_2'(t_1, t_2)\big) \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} p_1' & \textit{est un entier naturel} \\ A'(t_1, t_2) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathcal{E}) & \\ B'(t_2) & \textit{est une matrice triangulaire supérieure de polynômes} \\ & \textit{à coefficients complexes de degré au plus } \sigma_2 p_2 \\ P_2'(t_1, t_2) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathcal{T}_{t_1}) . & \end{cases}$$

Démonstration du lemme 7. D'après la théorie formelle à deux variables (cf. chapitre I, proposition 4) il existe deux entiers σ_1 et σ_2 strictement positifs et une transformation $\hat{\hat{T}} \in GL_n(\hat{\theta}'_{t_1})$ de la forme $\hat{\hat{T}} = \hat{\hat{T}}_1 \Delta_1 \hat{\hat{T}}_2 \Delta_2 \dots \hat{\hat{T}}_n \Delta_m$, où, pour $1 \leqslant i \leqslant m$ $\hat{\hat{T}}_i \in GL_n(\hat{\theta}')$ et Δ_i est une matrice diagonale de puissances de t_1, telle que, si on désigne par $\hat{M}_2'$ la matrice de séries formelles à deux variables que constitue le développement de Taylor de $M_2'(t_1, t_2)$ par rapport aux variables t_1 et t_2 au voisinage de $(0, 0)$, on ait:

$$\hat{\hat{T}}^{-1} \hat{M}_2' \hat{\hat{T}} - \frac{1}{\sigma_2} t_2^{\sigma_2 p_2+1} \hat{\hat{T}}^{-1} \frac{\partial \hat{\hat{T}}}{\partial t_2} = B'(t_2)$$

c'est-à-dire encore

$$\frac{1}{\sigma_2} t_2^{p_2 p_2+1} \frac{\partial \hat{\hat{T}}}{\partial t_2} = \hat{\hat{M}}_2' \hat{\hat{T}} - \hat{\hat{T}} B'$$

où $B'(t_2)$ est une matrice triangulaire supérieure de polynômes en t_2 à coefficients complexes de degré au plus $\sigma_2 p_2$.

On a, en particulier, entre les traces des matrices $\hat{M}_2'$ et B' la relation suivante, qui servira plus loin:

$$\operatorname{tr}(\hat{M}_2') - \operatorname{tr}(B') \in t_2^{\sigma_2 p_2+1} \hat{\theta}' .$$

D'après le lemme 2 de ce chapitre, appliqué à l'équation

$$\frac{1}{\sigma_2} t_2^{\sigma_2 p_2+1} \frac{\partial Y}{\partial t_2} = M_2' Y - Y B' ,$$

vérifiée formellement en (t_1, t_2) par $Y = \hat{\hat{T}}$, il existe une série formelle en t_1,

$\overline{\overline{T}}(t_1) = \sum_{l\geqslant 0} T_l(t_2)t_1^l$, dont les coefficients $T_l(t_2)$ sont des matrices de fonctions C^∞ de t_2 sur un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$ indépendant de l, telle que:

si $\hat{\overline{T}} = \sum_{l\geqslant 0, m\geqslant 0} T_{lm}t_1^l t_2^m$, où $T_{lm} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{C})$, alors $\sum_{m\geqslant 0} T_{lm}t_2^m$ est le développement de Taylor au voisinage de 0 de $T_l(t_2)$;

si $\overline{M}_2'$ est le développement de Taylor de M_2' par rapport à t_1 au voisinage de $t_1 = 0$, on ait:

$$\frac{1}{\sigma_2} t_2^{p_2 p_2+1} \frac{\partial \overline{\overline{T}}}{\partial t_2} = \overline{M}_2' \overline{\overline{T}} - \overline{T}B' .$$

Montrons que le déterminant $\overline{\overline{\delta}}$ de $\overline{\overline{T}}$ est de la forme

$$\overline{\overline{\delta}}(t_1) = t_1^k \sum_{l\geqslant 0} \delta_l(t_2)t_1^l ,$$

où, pour $l \geqslant 0$, $\delta_l(t_2)$ est une fonction C^∞ de t_2 sur un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$ indépendant de l, $\delta_0(0)$ est non nul et k est un entier positif ou nul.

Puisque $\overline{\overline{T}}$ vérifie l'équation

$$\frac{1}{\sigma_2} t_2^{\sigma_2 p_2+1} \frac{\partial \overline{\overline{T}}}{\partial t_2} = \overline{M}_2' \overline{\overline{T}} - \overline{\overline{T}}B' , \qquad \overline{\overline{\delta}} = \det \overline{\overline{T}}$$

vérifie l'équation

$$\frac{1}{\sigma_2} t_2^{\sigma_2 p_2+1} \frac{\partial \overline{\overline{\delta}}}{\partial t_2} = \big(\operatorname{tr}(\overline{M}_2') - \operatorname{tr}(B')\big)\, \overline{\overline{\delta}} .$$

Or $(\operatorname{tr} \overline{M}_2' - \operatorname{tr} B')$ est de la forme $t_2^{\sigma_2 p_2+1} \sum_{l\geqslant 0} \alpha_l(t_2)t_1^l$ où les $\alpha_l(t_2)$ sont des fonctions C^∞ de t_2 sur un voisinage de 0 indépendant de l.

$\overline{\overline{\delta}}$ est donc solution de l'équation

$$\frac{1}{\sigma_2} t_2^{\sigma_2 p_2+1} \frac{\partial \overline{\overline{\delta}}}{\partial t_2} = \Big(\sum_{l=0} \alpha_l(t_2)t_1^l\Big)\, \overline{\overline{\delta}}$$

ce qui équivaut, si on pose $\overline{\overline{\delta}} = \sum_{l\geqslant 0} \delta_l'(t_2)t_1^l$, à:

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{1}{\sigma_2}\dfrac{d\delta_0'}{dt_2} = \alpha_0\delta_0' \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{1}{\sigma_2}\dfrac{d\delta_l'}{dt_2} = \alpha_0\delta_l' + \alpha_1\delta_{l-1}' + \ldots + \alpha_l\delta_0' \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right.$$

ce qui donne le résultat annoncé.

Soit maintenant T' une matrice de fonctions C^∞ au voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbf{R}^2$, admettant $\overline{\overline{T}}$ comme développement de Taylor par rapport à la variable t_1 au voisinage de $t_1=0$. (Une telle matrice existe d'après le lemme 1 de ce chapitre).

Alors det T' est de la forme $t_1^k\delta(t_1,t_2)$, où $\delta(t_1,t_2)$ est une fonction C^∞ au voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbf{R}^2$, telle que $\delta(0,0)\neq 0$ et k un entier positif ou nul, ce qui termine la démonstration du lemme 7.

Démonstration du lemme 6. Il existe (voir (4)) une matrice de transformation $T''(t_2)$ à une variable, appartenant à $GL_n(\mathcal{E}_{t_2})$, et telle que:

$$T''^{-1}(\sigma_2 B')T'' - t_2^{\sigma_2 p_2+1}T''^{-1}\frac{dT''}{dt_2} = B''(t_2), \qquad \text{où } B'(t_2)$$

est la matrice définie dans le lemme 7 et où $B''(t_2)$ a la forme suivante:

$$B''(t_2) = \begin{pmatrix} B_1''(t_2) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_h''(t_2)\end{pmatrix} \qquad \text{où, pour } 1\leqslant i,\ j\leqslant h,$$

on a:

$$\begin{cases} B_i''(t_2) = b_i''(t_2)I_{n_i} + t_2^{\sigma_2 p_2}N_i \\ b_i''(t_2) \quad \text{polynôme à coefficients complexes de degré au plus } \sigma_2 p_2 \\ N_i \quad \text{matrice nilpotente constante} \\ I_{n_i} \quad \text{matrice identité d'ordre } n_i \\ i\neq j \ \Rightarrow\ b_j'' - b_i'' \notin t_2^{\sigma_2 p_2}\mathbf{Z}. \end{cases}$$

Si on pose $T = T'T''$, où T' est la transformation définie dans le lemme 7, le système (Σ') est changé, au moyen de T, en le système (Σ'') suivant:

$$\begin{cases} t_1^{p_1'+1}\dfrac{\partial}{\partial t_1} - \dfrac{1}{t_2^{k_1}}A''(t_1,t_2) \\ t_2^{\sigma_2 p_2+1}\dfrac{\partial}{\partial t_2} - \left(B''(t_2) + \dfrac{1}{t_2^{k_2}}P_2''(t_1,t_2)\right) \end{cases}$$

où:

$$\begin{cases} k_1 \text{ et } k_2 \text{ sont des entiers positifs ou nuls} \\ A''(t_1,t_2)\in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathcal{E}) \\ P_2''(t_1,t_2)\in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathcal{F}_{t_1}) \end{cases}$$

quitte à remplacer $\sigma_2 p_2$ par p_2', on supposera $k_2 = 0$.

On va montrer maintenant que la complète intégrabilité formelle en t_1 entraîne, après un changement eventuel de l'ordre des blocs diagonaux de B'', que A'' est de la forme cherchée.

Désignons par $\sum_{l\geqslant 0} A_l''(t_2)t_1^l$ le développement de Taylor de $(1/t_2^{k_1})A''$ par rapport à la variable t_1 au voisinage de $t_1=0$.

La complète intégrabilité formelle en t_1 équivaut à:

$$t_2^{p_2'+1}\frac{\partial}{\partial t_2}\Big(\sum_{l\geqslant 0} A_l''(t_2)t_1^l\Big)=\Big[B''(t_2),\sum_{l\geqslant 0} A_l''(t_2)\Big]t_1^l \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad t_2^{p_2'+1}d\,\frac{A_l''(t_2)}{dt_2}=[B''(t_2),\,A_l''(t_2)] \qquad \forall l\geqslant 0\,.$$

On est donc amené à étudier les solutions de l'équation différentielle $t_2^{p_2'+1}(dY/dt_2)=[B''(t_2),\,Y]$, où Y est une matrice de fonctions du type $f(t_2)/t_2^r$, avec $f(t_2)$ C^∞ au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, r entier naturel.

On découpe Y en blocs $(Y_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant h}$ correspondant au découpage de $B''(t_2)$. On a alors:

$$t_2^{p_2'+1}\frac{dY}{dt_2}=[B''(t_2),Y] \;\Leftrightarrow\; t_2^{p_2'+1}\frac{dY_{i,j}}{dt_2}=B_i''\,Y_{ij}-Y_{ij}B_j'' \qquad \text{pour } 1\leqslant i,\,j\leqslant h\,.$$

DEFINITION 5.

a) Soit $\Lambda(t_2)=\lambda_0+\lambda_1t_2+\ldots+\lambda_{p_2'}t_2^{p_2'}$ *un polynôme à coefficients complexes. On dira que* $\Lambda(t_2)$ *est plus petit que* 0 (*et on notera* $\Lambda<0$) *si l'on a, en désignant par* Re *la partie réelle*:

ou bien $\mathrm{Re}(\lambda_l)=0$ *quel que soit* l *tel que* $0\leqslant l\leqslant p_2'$,

ou bien il existe l_0 *tal que* $\begin{cases} 0\leqslant l_0\leqslant p_2' \\ \mathrm{Re}(\lambda_{l_0})<0 \\ \mathrm{Re}(\lambda_l)=0 \qquad \textit{pour } 0\leqslant l<l_0\,. \end{cases}$

b) Si $\Lambda_1(t_2)$ et $\Lambda_2(t_2)$ *sont deux polynômes à coefficients complexes, on dira que* $\Lambda_1<\Lambda_2$ *si et seulement si* $\Lambda_1-\Lambda_2<0$.

On a alors le lemme suivant:

LEMME 8. *Soit l'équation différentielle* (e): $t_2^{p_2'+1}(dy/dt_2)=\Lambda(t_2)y$ *où* $\Lambda(t_2)$ *est un polynôme de degré au plus* p_2' *tel que* $\Lambda<0$. *Alors la seule solution de* (e) *de la forme* $f(t_2)/t_2^r$ *où* f *est une fonction* C^∞ *au voisinage de* 0, *et* r *un entier naturel, est* 0.

DÉMONSTRATION. On rappelle que l'on a supposé $t_2 \geqslant 0$.

$$(e) \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{\Lambda(t_2)}{t_2^{p_2'+1}} dt_2 \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \left(\frac{\lambda_0}{t_2^{p_2'+1}} + \frac{\lambda_1}{t_2^{p_2'+1}} + \dots + \frac{\lambda_{p_2'}}{t_2}\right) dt_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = c \exp\left(-\frac{\lambda_0}{p_2' t_2^{p_2'}} - \frac{\lambda_1}{(p_2'^{-1}) t_2^{p_2'-1}} + \dots - \frac{\lambda_{p_2'-1}}{t_2} + \lambda_{p_2'} \operatorname{Log} t_2\right) \qquad \text{où } c \in \mathbf{C}$$

d'où le résultat.

LEMME 9. *Soit p_2' un entier naturel et soient B_i'' et B_j'' deux matrices de la forme suivante:*

$$B_i'' = b_i''(t_2) I_{n_i} + t_2^{p_2'} N_i \qquad B_j'' = b_j''(t_2) I_{n_j} + t_2^{p_2'} N_j$$

où b_i'' *et* b_j'' *sont des polynômes à coefficients complexes de degré au plus* p_2'

N_i *et* N_j *des matrices nilpotentes triangulaires supérieures constantes*

I_{n_i} *(resp.* I_{n_j}*) la matrice identité d'ordre* n_i *(resp.* n_j*)*

a) si $b_i'' < b_j''$ *et si* Y *vérifie l'équation* $t_2^{p_2'+1}(dY/dt_2) = B_i'' Y - Y B_j''$, *où* Y *est une matrice de fonctions de la forme* $f(t_2)/t_2^r$ *(*f *fonction* C^∞ *sur un voisinage de* 0 *dans* $\mathbf{R}$, r *entier naturel) alors* $Y = 0$.

si on ne suppose plus $b_i'' < b_j''$, Y *est alors une matrice de fonctions plates de* t_2 *au voisinage de* 0.

b) Si Y *est une matrice* $n_i \times n_i$ *de fonctions du type* $f(t_2)/t_2^r$ *(*f, C^∞ *au voisinage de* 0, r *entier naturel) et si* Y *vérifie* $t_2^{p_2'+1}(dY/dt_2) = B_i'' Y - Y B_i''$, *alors* Y *est une matrice constante.*

DÉMONSTRATION.

a) On sait déjà, sans supposer $b_i'' < b_j''$ et en utilisant les calculs formels du chapitre I, que Y est nécessairement une matrice de fonctions plates.
Supposons maintenant $b_i'' < b_j''$.
Posons

$$Y = (y_{k,l})_{1 \leqslant k \leqslant n_i,\, 1 \leqslant l \leqslant_j},$$

$$N_i = (\nu_{l,k}^i)_{1 \leqslant k,\, l \leqslant n_i}, \qquad N_j = (\nu_{k,l}^j)_{1 \leqslant k,\, l \leqslant n_j},$$

$$t_2^{p_2'+1} \frac{dY}{dt_2} = B_i'' Y - Y B_j'' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t_2^{p_2'+1} \frac{dy_{lm}}{dt_2} = (b_i'' - b_j'') y_{lm} + \left(\sum_{k \geqslant l+1} \nu_{l,k}^i y_{k,m} - \sum_{k \leqslant m-1} \nu_{k,m}^j y_{l,k}\right) t_2^{p_2'}$$

$$\text{pour } \begin{cases} 1 \leqslant l \leqslant n_i \\ 1 \leqslant m \leqslant n_j. \end{cases}$$

Par récurrence sur l et en appliquant le lemme 8, on vérifie que

$$y_{n_i-l,1} = 0 \quad \text{pour } 0 \leqslant l \leqslant n_i - 1\,.$$

Par récurrence sur m, puis par récurrence sur l, on a de la même façon

$$y_{n_i-l,m} = 0 \quad \text{pour } \begin{cases} 0 \leqslant l \leqslant n_i - 1 \\ 1 \leqslant m \leqslant n_j\,. \end{cases}$$

$$b)\quad t_2^{p_2'+1}\frac{dY}{dt_2} = B_i''Y - YB_i'' \iff t_2\frac{dY}{dt_2} = N_iY - YN_i\,.$$

On a déjà vu dans le chapitre I que cette équation admet comme solution formelle unique une matrice constante, ce qui termine la démonstration puisque ce type d'équation admet une solution C^∞ unique ayant un développement de Taylor donné.

On termine alors la démonstration du lemme 6 de la façon suivante: on peut supposer ordonnés les blocs $B_i''(t_2)$ de $B''(t_2)$ de façon que:

$$b_1 > b_2 > \dots > b_h\,.$$

On déduit alors du lemme 9 (quitte à modifier les matrices nilpotentes constantes N_i) que $(1/t_2^k)A''(t_1, t_2)$ est de la forme $\tilde{A}_1''(t_1, t_2) + P''(t_1, t_2)$, où l'on a

$$A''(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} a_{11}(t_1) & a_{12}(t_1, t_2) & \cdots & a_{1n}(t_1, t_2) \\ & & & \vdots \\ & a_{22}(t_1) & \ddots & a_{n-1\,n}(t_1, t_2) \\ & & & a_{nn}(t_1) \end{pmatrix}$$

avec $a_{ij}(t_1, t_2)$ fonction C^∞ sur un voisinage de $(0, 0)$ dans $\mathbf{R}^2$ pour $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$

$a_{ii}(t_1)$ fonction C^∞ de t_1 sur un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$

$P_1''(t_1, t_2) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathcal{T}_{t_1})$.

On obtient alors la forme plus précise du lemme 6 par récurrence sur la dimension n, puis sur l'entier p_1'. (cf. chapitre I remarques 2, 3, 4, 6).

Remarque. Le fait que les variables t_1 et t_2 ne se « séparent pas formellement en t_1 » est lié au fait que la demi-droite des $t_2 \geqslant 0$ peut être rayon de Stokes pour l'équation différentielle $t_2^{p_2'+1}(d/dt_2) - B''(t_2)$. Par exemple le système

$$\begin{cases} x_1 \dfrac{\partial y}{\partial x_1} - \begin{pmatrix} 1 & \exp(-1/x_2^2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y \\ x_2^3 \dfrac{\partial y}{\partial x_2} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} y . \end{cases}$$

Chapitre III

EXISTENCE DE SOLUTIONS C^∞ POUR CERTAINS SYSTÈMES DE PFAFF AU VOISINAGE D'UNE SINGULARITÉ

On considère le système

$$(S): \begin{cases} x_1^{p_1+1} \dfrac{\partial y}{\partial x_1} = F_1(x_1, x_2, y) \\ x_2^{p_2+1} \dfrac{\partial y}{\partial x_2} = F_2(x_1, x_2, y) \end{cases}$$

sur lequel on fait les hypothèses suivantes:

h_1) p_1 et p_2 sont des entiers positifs ou nuls.

h_2) $F_i\colon \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est C^∞ sur un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de 0 dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^n$, pour $i = 1, 2$.

h_3) $F_1(0, 0, 0) = F_2(0, 0, 0) = 0$.

h_4) (S) est complètement intégrable, c'est-à-dire qu'on a, identiquement sur $\mathcal{U}$:

$$x_2^{p_2+1} \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x_1, x_2, y) + \frac{\partial F_1}{\partial y}(x_1, x_2, y) F_2(x_1, x_2, y) = \\ = x_1^{p_1+1} \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x_1, x_2, y) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x_1, x_2, y) F_1(x_1, x_2, y)$$

h_5) Il existe deux série formelles compatibles (au sens de la définition 4 du chapitre II) $H_{x_2}(x_1) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(x_2) x_1^m$ et $H_{x_1}(x_2) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(x_1) x_2^m$, à coefficients C^∞ sur un voisinage de 0 ne dépendant pas de m, qui sont solution formelle, en x_1 et x_2 respectivement, du système (S) (au sens de la définition 3 du chapitre II).

On a alors le théorème suivant:

THÉORÈME. *Sous les hypothèses précédentes, il existe une fonction* $u(x_1, x_2)$, C^∞ *sur un voisinage de* 0 *dans* $\mathbf{R}^2$, *à valeurs dans* $\mathbf{R}^n$, *solution du système* (S), *et dont les développements de Taylor, comme fonction de* x_1, *au voisinage de* $x_1 = 0$ *et comme fonction de* x_2 *au voisinage de* $x_2 = 0$ *sont respectivement* $H_{x_2}(x_1)$ *et* $H_{x_1}(x_2)$.

Avant de commencer la démonstration de ce théorème, donnons un exemple de systèmes pour lesquels la condition h_5 n'est pas vérifiée:

$$\left\{\begin{array}{lll} x_1^{p_1+1}\dfrac{\partial y}{\partial x_1} - y = 0 & & \text{avec } p_1 \text{ entier strictement positif} \\ x_2\dfrac{\partial y}{\partial x_2} - y & = & \left\{\begin{array}{ll} x_2 \exp\left(-\dfrac{1}{p_1 x_1^{p_1}}\right) & \text{si } x_1 \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x_1 < 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Un tel système admet 0 comme unique solution formelle en x_1.

La solution générale

$$y = \left\{\begin{array}{ll} x_2(\operatorname{Log}|x_2| + c)\exp\left(-\dfrac{1}{p_1 x_1^{p_1}}\right) & \text{si } x_1 \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x_1 < 0 \end{array}\right.$$

où c est une constante, est seulement continue.

Démonstration du théorème.

I) On se ramène, par translation, à chercher une solution $v(x_1, x_2)$ dont les développements de Taylor par rapport à x_1 et par rapport à x_2 sont nuls, c'est-à-dire au cas où le système (S) est vérifié formellement en x_1 et formellement en x_2 par $y = 0$, c'est-à-dire encore au cas où $F_i(x_1, x_2, 0)$ est une fonction plate de x_1 en $x_1 = 0$ et plate de x_2 en $x_2 = 0$ pour $i = 1, 2$.

Notations. On rappelle (voir chapitre II, § 2, notations) qu'on désigne par $\mathcal{T}_{x_1}$ (resp. $\mathcal{T}_{x_2}$) l'ensemble des germes de fonctions $f(x_1, x_2)$ C^∞ au voisinage de $(0, 0)$ dans $\mathbf{R}^2$ à valeurs dans $\mathbf{R}$ (ou éventuellement $\mathbf{C}$) et dont le développement de Taylor comme fonction de x_1 (resp. x_2) au voisinage de $x_1 = 0$ (resp. $x_2 = 0$) est nul.

On utilise le lemme suivant:

LEMME 1. *Soient* $G_{x_2}(x_1) = \sum_{m\geq 0} \alpha_m(x_2)x_1^m$ *et* $G_{x_1}(x_2) = \sum_{m\geq 0} \beta_m(x_1)x_2^m$ *deux séries formelles compatibles, au sens de la définition 4 du chapitre II. Il existe une fonction* $g(x_1, x_2)$, C^∞ *au voisinage de* $(0, 0)$ *dans* $\mathbf{R}^2$, *à valeurs dans* $\mathbf{R}$, *dont le développement de Taylor comme fonction de* x_1 *(resp.* x_2*) au voisinage de* $x_1 = 0$ *(resp.* $x_2 = 0$*) est* $G_{x_2}(x_1)$ *(resp.* $G_{x_1}(x_2)$*).*

DÉMONSTRATION. Soit a un réel strictement positif tel que les $\alpha_m(x_2)$ et $\beta_m(x_1)$ soient C^∞ sur $[-a, +a]$, et K le compact $[-a, +a]\times\{0\} \cup \{0\}\times \times[-a, +a]$. On considère sur le compact K de $\mathbf{R}^2$ le jet d'ordre infini suivant: $G = (g^{(k_1,k_2)})(k_1, k_2) \in \mathbf{N}^2$ où $g^{(k_1,k_2)}$ est la fonction continue sur K définie par

$$\begin{cases} g^{(k_1,k_2)}(0, x_2) = \dfrac{d^{k_2}\alpha_{k_1}(x_2)}{dx_2^{k_2}} & \text{pour } x_2 \in [-a, +a] \\ g^{(k_1,k_2)}(x_1, 0) = \dfrac{d^{k_1}\beta_{k_2}(x_1)}{dx_1^{k_1}} & \text{pour } x_1 \in [-a, +a]. \end{cases}$$

L'hypothèse de compatibilité, faite dans le lemme entre G_{x_2} et G_{x_1} entraîne que $G^{(k_1,k_2)}$ est bien définie et continue sur K et que de plus, puisque les α_i et β_i sont C^∞ au voisinage de 0, G est indéfiniment différentiable au sens de Whitney sur K.

D'après le théorème d'extension de Whitney (voir 5)), il existe une fonction C^∞ sur $\mathbf{R}^2$, $g(x_1, x_2)$, vérifiant:

$$\frac{\partial^{k_1+k_2}g}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}}\Big/K = g^{(k_1,k_2)}$$

d'où le résultat.

On considère alors le système (S') obtenu à partir de (S) en posant $y = z + h(x_1, x_2)$, où $h(x_1, x_2)$ est une fonction C^∞ au voisinage de $(0, 0)$ dans $\mathbf{R}^2$, à valeurs dans $\mathbf{R}^n$, dont les développements de Taylor comme fonction de x_1 au voisinage de $x_1 = 0$ et comme fonction de x_2 au voisinage de $x_2 = 0$ sont respectivement $H_{x_2}(x_1)$ et $H_{x_1}(x_2)$:

$$(S'): \begin{cases} x_1^{p_1+1}\dfrac{\partial z}{\partial x_1} = F_1'(x_1, x_2, z) \\ x_2^{p_2+1}\dfrac{\partial z}{\partial x_2} = F_2'(x_1, x_2, z) \end{cases}$$

avec $F_i'(x_1, x_2, z) = F_i(x_1, x_2, z + h) - x_i^{p_i+1}(\partial h/\partial x_i)$ pour $i = 1, 2$.

Le système (S') vérifie les hypothèses h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 avec de plus, dans h_5, $H_{x_2}(x_1) = 0$ et $H_{x_1}(x_2) = 0$, c'est-à-dire encore:

$$F'_i(x_1, x_2, 0) \text{ appartient à } (\mathcal{T}_{x_1} \cap \mathcal{T}_{x_2})^n \quad \text{pour } i = 1, 2 .$$

REMARQUE 1. Puisqu'on cherche une solution à (S) dans $(\mathcal{T}_{x_1} \cap \mathcal{T}_{x_2})^n$, il suffit de le faire pour $x_1 \geqslant 0$ et $x_2 \geqslant 0$; on n'aura en effet pas de problème de recollement.

Dans toute la suite de ce chapitre, et sauf mention du contraire, on supposera $x_1 \geqslant 0$ et $x_2 \geqslant 0$.

REMARQUE 2. Considérons le système obtenu à partir de (S) en posant $x_1 = t_1^{\sigma_1}$, $x_2 = t_2^{\sigma_2}$ où σ_1 et σ_2 sont des entiers strictement positifs:

$$(S''): \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma_1} t_1^{\sigma_1 p_1 + 1} \dfrac{\partial y}{\partial t_1} = F''_1(t_1, t_2, y) \\[2mm] \dfrac{1}{\sigma_2} t_2^{\sigma_2 p_2 + 1} \dfrac{\partial y}{\partial t_2} = F''_2(t_1, t_2, y) \end{cases}$$

avec

$$F''_i(t_1, t_2, y) = F_i(t_1^{\sigma_1}, t_2^{\sigma_2}, y) .$$

Alors, si $w(t_1, t_2)$ est solution dans $(\mathcal{T}_{t_1} \cap \mathcal{T}_{t_2})^n$ de (S''), la fonction

$$v(x_1, x_2) = w(x_1^{1/\sigma_1}, x_2^{1/\sigma_2}) \quad \text{est solution de } (S) \text{ dans } (\mathcal{T}_{x_1} \cap \mathcal{T}_{x_2})^n .$$

REMARQUE 3. Soit f une fonction C^∞ sur $[-a, +a]^2$, à valeurs dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, où a est un réel strictement positif

a) $f \in \mathcal{T}_{x_1} \Leftrightarrow \forall k \in \tilde{A}, \quad \exists M_k \in \mathbf{R} / |f(x_1, x_2)| \leqslant M_k |x_1|^k \ \forall (x_1, x_2) \in [-a, +a]^2$
$\Leftrightarrow \exists k_0 \in \mathbf{N} / \forall k \geqslant k_0, \ \exists M_k \in \mathbf{R} / |f(x_1, x_2) \leqslant M_k |x_1|^k \ \forall (x_1, x_2) \in [-a, +a]^2$

b) $f \in \mathcal{T}_{x_1} \Leftrightarrow \forall k \in \mathbf{Z}, \ x_1^k f \in \mathcal{T}_{x_1}$

c) $f \in \mathcal{T}_{x_1} \cap \mathcal{T}_{x_2} \Leftrightarrow \forall (n_1, n_2) \in \mathbf{N}^2, \ \exists M_{n_1, n_2} \in \mathbf{R} / |f(x_1, x_2) \leqslant$
$\leqslant M_{n_1, n_2} |x_1^{n_1}| |x_2^{n_2}| \ \forall (x_1, x_2) \in [-a, +a]^2.$

II) *Etude du système linéaire associé à (S).*

On pose

$$F_i(x_1, x_2, y) = F_i(x_1, x_2, 0) + \frac{\partial F_i}{\partial y}(x_1, x_2, 0) y + R_i(x_1, x_2, y)(y, y)$$

$$M_i(x_1, x_2) = \frac{\partial F_i}{\partial y}(x_1, x_2, 0) \qquad \text{pour } i = 1, 2 .$$

Le système (S) équivaut à:

$$\begin{cases} x_1^{p_1+1}\dfrac{\partial y}{\partial x_1} - M_1(x_1, x_2)y = F_1(x_1, x_2, 0) + R_1(x_1, x_2, y)(y, y) \\ x_2^{p_2+1}\dfrac{\partial y}{\partial x_2} - M_2(x_1, x_2)y = F_2(x_1, x_2, 0) + R_2(x_1, x_2, y)(y, y)\,. \end{cases}$$

LEMME 2. *Le système linéaire*

$$\begin{cases} x_1^{p_1+1}\dfrac{\partial}{\partial x_1} - M_1(x_1, x_2) \\ x_2^{p_2+1}\dfrac{\partial}{\partial x_2} - M_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

est formellement en x_1 et formellement en x_2 complètement intégrable.

DÉMONSTRATION. La complète intégrabilité de (S) entraîne:

$$x_2^{p_2+1}\frac{\partial M_1}{\partial x_2} + M_1 M_2 - \left(x_1^{p_1+1}\frac{\partial M_2}{\partial x_1}\right) + M_2 M_1 =$$
$$= \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2}(x_1, x_2, 0)F_1(x_1, x_2, 0) - \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2}(x_1, x_2, 0)F_2(x_1, x_2, 0)\,.$$

Le second membre de cette égalité est une matrice dont les éléments appartiennent à $\mathcal{T}_{x_1} \cap \mathcal{T}_{x_2}$ puisque $F_1(x_1, x_2, 0)$ et $F_2(x_1, x_2, 0)$ sont dans $(\mathcal{T}_{x_1} \cap \mathcal{T}_{x_2})^n$.

On étudie maintenant les solutions de l'équation affine $x_1^{p_1+1}(\partial v/\partial x_1) - M_1(x_1, x_2)v = G(x_1, x_2)$ lorsque le second membre $G(x_1, x_2)$ décrit des espaces de fonctions que l'on précisera, et le comportement de ces solutions vis-à-vis de l'opérateur différentiel $x_2^{p_2+1}(\partial/\partial x_2) - M_2(x_1, x_2)$.

Dans toute la suite de la démonstration, on supposera qu'on a déjà fait dans (S) le changement de variables $x_1 = t_1^{\sigma_1}$, $x_2 = t_2^{\sigma_2}$ qui permet de mettre le système

$$\begin{cases} x_1^{p_1+1}\dfrac{\partial}{\partial x_1} - M_1(x_1, x_l) \\ x_2^{p_2+1}\dfrac{\partial}{\partial x_2} - M_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

sous la forme triangulaire décrite dans le lemme 6 *du chapitre* II (voir remarque 2 de ce chapitre).

Notations. Soit a un réel strictement positif, n_1 un entier, n_2 un entier positif ou nul. On pose

$C_{00}(n_1, n_2, a)$ = l'ensemble des fonctions $f(x_1, x_2)$ définies et continues sur $[0, a]^2$ (resp. sur $]0, a]\times[0, a]$) si $n_1 \geqslant 0$ (resp. $n_1 < 0$), à valeurs dans $\mathbf{C}$, et telles que $|f(x_1, x_2)|/(x_1^{n_1}x_2^{n_2})$ soit borné sur $]0, a]^2$.

$C_{10}(n_1, n_2, a) = \{f \in C_{00}(n_1, n_2, a)$ telles que $\partial f/\partial x_1$ appartienne à $C_{00}(n_1-1, n_2, a)\}$

$C_{01}(n_1, n_2, a) = \{f \in C_{00}(n_1, n_2, a)$ telles que $\partial f/\partial x_2$ appartienne à $C_{00}(n_1, n_2-1, a)\}$ si $n_2 \geqslant 1$

$C_{01}(n_1, 0, a) = \{f \in C_{00}(n_1, 0, a)$ telles que $\partial f/\partial x_2$ appartienne à $C_{00}(n_1, 0, a)\}$

$C_0(n_2, a)$ = l'ensemble des fonctions $f(x_2)$ définies et continues sur $[0, a]$, à valeurs dans $\mathbf{C}$, telles que $|f(x_2)|/x_2^{n_2}$ soit borné sur $]0, a]$.

$C_1(n_2, a) = \{f \in C_0(n_2, a)$ telles que $\partial f/\partial x_1 \in C_0(n_2-1, a)$ lorsque $n_2 \geqslant 1\}$.

On met sur ces espaces les normes suivantes:

$$\forall f \in C_{00}(n_1, n_2, a), \qquad \|f\|_{0,0,n_1,n_2,a} = \sup_{(x_1,x_2)\in]0,a]^2} \left|\frac{f(x_1, x_2)}{x_1^{n_1}x_2^{n_2}}\right|$$

$$\forall f \in C_{10}(n_1, n_2, a), \qquad \|f\|_{1,0,n_1,n_2,a} = \sup\left(\|f\|_{00,n_1,n_2,a}, \left\|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right\|_{0,n_1-1,n_2,a}\right)$$

$$\forall f \in C_{01}(n_1, n_2, a), \qquad \|f\|_{0,1,n_1,n_2,a} =$$

$$= \begin{cases} \sup\left(\|f\|_{00,n_1,n_2,a}, \left\|\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right\|_{0,n_1,n_2-1,a}\right) & \text{si } n_2 \geqslant 1 \\ \sup\left(\|f\|_{00,n_1,0,a}, \left\|\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right\|_{00,n_1,0,a}\right) & \text{si } n_2 = 0 \end{cases}$$

$$\forall f \in C_0(n_2, a), \qquad \|f\|_{0,n_2,a} = \sup_{x_2\in]0,a]} \frac{|f(x_2)|}{x_2^{n_2}}$$

$$\forall f \in C_1(n_2, a), \qquad \|f\|_{1,n_2,a} = \sup\left(\|f\|_{0,n_2,a}, \left\|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right\|_{0,n_2-1,a}\right).$$

Pour les normes correspondantes, les espaces que l'on vient de définir sont des espaces complets.

Par abus de notation, on écrira de la même façon les normes produit sur les espaces $C_{00}^n(n_1, n_2, a)$ etc.

La démonstration du théorème est basée sur le lemme suivant, dont on rappelle qu'il est vrai en fait après changement de variable du type $x_1 = t_1^{\sigma_1}$, $x_2 = t_2^{\sigma_2}$.

LEMME 3. *Soit D_i, pour $i = 1, 2$ l'opérateur différentiel $x_i^{p_i+1}(\partial/\partial x_i) - M_i(x_1, x_2)$ et soit*

$$\Delta(x_1, x_2) = x_2^{p_2+1}\frac{\partial M_1}{\partial x_2} - M_2 M_1 - \left(x_1^{p_1+1}\frac{\partial M_2}{\partial x_1} - M_1 M_2\right).$$

L_1) *Il existe des entiers positifs N_1, N_2, l_1, l_2, un réel positif a_0 et pour tout réel a tel que $0 < a \leqslant a_0$ une application linéaire continue*

$$K_1\colon C^n_{00}(N_1, N_2, a) \to C^n_{00}(N_1 - l_1, N_2 - l_2, a)$$

inverse à droite de D_1, ayant les propriétés suivantes:

a) pour tout couple d'entiers (n_1, n_2) tels que $n_1 \geqslant N_1$ et $n_2 \geqslant N_2$, les applications restrictions suivantes de K_1 sont continues:

$$K_1\colon C^n_{00}(n_1, n_2, a) \to C^n_{00}(n_1 - l_1, n_2 - l_2, a)$$

$$C^n_{01}(n_1, n_2, a) \to C^n_{01}(n_1 - l_1, n_2 - l_2, a)$$

et les normes de ces applications sont bornées par une constante, indépendante de a et n_2 (dépendant de n_1).

b) $\forall f \in C^n_{00}(N_1, N_2, a)$ $K_1[f]$ et continûment dérivable par rapport à x_1 sur $]0, a]^2$ et on a: $(D_1K_1)[f] = f$ sur $]0, a]^2$.

c) $\forall f(x_1, x_2) \in C^n_{00}(N_1, N_2, a)$, $\forall \lambda(x_2) \in C_0(0, a)$ $K_1[\lambda f] = \lambda K_1[f]$.

L_2) *Il existe une matrice $Q(x_1, x_2) = Q_1(x_1, x_2)/(x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2})$ où Q_1 est une matrice de fonctions C^∞ sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^2$, β_1 et β_2 des entiers, telle que:*

$$D_2K_1 - K_1D_2 = K_1\Delta K_1 + (K_1D_1 - I)QK_1$$

sur $C^n_{01}(n_1, n_2, a)$ dès que n_1 et n_2 sont assez grands pour que les deux membres soient définis, et a tel que $0 < a \leqslant a_0$ (Q ne dépend pas de a).

L_3) *Il existe pour a tel que $0 < a \leqslant a_0$ une matrice*

$$\mathcal{N}_a(x_1, x_2) = \frac{\mathcal{N}_{1a}(x_1, x_2)}{x_2^{\alpha_2}},$$

où $\mathcal{N}_{1a}(x_1, x_2)$ est une matrice de fonctions C^∞ sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^2$, plates comme fonctions de x_1 en $x_1 = 0$, α_2 un entier naturel, telle que:

a) $D_1[\mathcal{N}_a] = 0$

b) $\forall f \in C_{10}^m(N_1, N_2, a) \ (K_1 D_1 - I)[f] = \mathcal{N}_a \chi[f]$

où χ *désigne l'application continue*: $C_{00}^m(N_1, N_2, a) \to C_0^m(N_2, a)$

$$f(x_1, x_2) \mapsto f(a, x_2)$$

c) Pour tout entier naturel m, *il existe un réel strictement positif* a_m' *et une constante* C_m *telle que, pour* $0 < a \leqslant a_m'$ *on ait*:

$$\max\left(\sup_{(x_1,x_2)\in]0,a]^2} \frac{\|\mathcal{N}_{1a}(x_1, x_2)\|}{x_1^m}, \quad \sup_{(x_1,x_2)\in]0,a]^2} \frac{\|\partial\mathcal{N}_{1a}/\partial x_2(x_1, x_2)\|}{x_1^m}\right) \leqslant \frac{C_m}{a^m}$$

d) $D_2[\mathcal{N}_a] = \mathcal{N}_a M_3 + K_1[\Delta\, \mathcal{N}_a]$

où $M_3(x_2)$ *est de la forme* $(1/\gamma_2) M_3^1(x_2)$ *avec* $M_3^1(x_2)$ *matrice de fonctions* C^∞ *au voisinage de* 0 *dans* $\mathbf{R}$, γ_2 *entier naturel.*

Remarque sur les notations employées.

— un vecteur (respectivement une matrice) image par D_1, D_2, K_1, χ d'un vecteur (resp. une matrice) est noté avec un crochet

par exemple: $K_1[f]$, $D_1[\mathcal{N}_a]$

— quand on écrit $K_1 \Delta K_1$ ou $(K_1 D_1 - I) Q K_1$, Δ (resp. Q) désigne par abus de langage l'application linéaire de matrice Δ (resp. Q) dans la base canonique de $C_{00}^m(n_1, n_2, a)$.

(I désigne l'application identique).

REMARQUE 4. Dans L_3, *b)* est équivalent à:

$$\forall f \in C_{10}^m(N_1, N_2, a) \quad D_1[f] = 0 \Leftrightarrow f = -\mathcal{N}_a \chi[f] .$$

III) *Démonstration du théorème à partir du lemme* 3.

Posons

$$D_3 = x_2^{p_2+1} \frac{d}{dx_2} + M_3 .$$

On a le lemme suivant (voir (4)).

LEMME 4. *Il existe des entiers* N_3 *et* l_3, *un réel positif* a_0'' *et pour tout réel* a *tel que* $0 < a \leqslant a_0''$ *une application linéaire continue*

$$K_3\colon C_0^m(N_3, a) \to C_0^m(N_3 - l_3, a)$$

telle que

1) *pour* $n_3 \geqslant N_3$ *les applications restrictions suivantes de* K_3 *sont continues*:

$$K_3\colon C_0^n(n_3, a) \to C_0^n(n_3 - l_3, a)$$

et leur norme est bornée par une constante indépendante de a.

2) $\forall f \in C_0^n(N_3, a)$ $K_3[f]$ *est dérivable sur* $]0, a]$ *et on a*: $D_3K_3[f] = f$ *sur* $]0, a]$.

REMARQUE. On vérifie facilement que K_3 est continue de $C_0^n(n_3, a)$ dans $C_1^n(n_3 - l_3 - p_2, a)$.

Notation. Pour $0 \leqslant i,\ j \leqslant 1$; on notera $RC_{ij}^n(n_1, n_2, a)$ le sous-espace vectoriel réel de $C_{i,j}^n(n_1, n_2, a)$ formé des fonctions à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ et on désignera par $BRC_{ij}^n(n_1, v_2, a)$ la boule unité (fermée) de $RC_{ij}^n(n_1, n_2, a)$.

α) On pose, pour $v \in BRC_{01}^n(n_1, n_2, a)$.

$$\begin{aligned}
\psi_1[v] &= F_1(x_1, x_2, 0) + R_i(x_1, x_2, v)(v, v)\\
\psi_2[v] &= F_2(x_1, x_2, 0) + R_2(x_1, x_2, v)(v, v)\\
\psi_3[v] &= \psi_2[v] + QK_1\psi_1[v]\\
L_a[v] &= K_1\psi_1[v] - \mathcal{N}_aK_3\,\chi[\psi_3[v]]\\
\mathbf{R}L_a[v] &= \text{partie réelle de } L_a[v]
\end{aligned}$$

où, pour le moment, n_1 et n_2 sont assez grands pour que L_a soit définie, et a tel que $0 < a \leqslant a_0''$.

(On devrait noter L_{a,n_1,n_2} mais la suppression de n_1 et n_2 n'est pas gênante).

On cherche à déterminer un réel strictement positif a_0''' et à fixer n_1 et n_2 de façon que, pour $0 < a \leqslant a_0'''$, l'application $v \mapsto RL_a[v]$ soit contractante de $BRC_{01}^n(n_1, n_2, a)$ dans elle-même.

On a:

$$\begin{aligned}
v \in RC_{01}^n(n_1, n_2, a) &\Rightarrow \psi_1[v] \in C_{01}^n(2n_1, 2n_2, a) \Rightarrow\\
&\Rightarrow K_1\psi_1[v] \in C_{01}^n(2n_1 - l_1, 2n_2 - l_2, a)\\
v \in RC_{01}^n(n_1, n_2, a) &\Rightarrow \psi_3[v] = \psi_2[v] + QK_1\psi_1[v] \in\\
&\qquad \in C_{01}^n(2n_1 - l_1 - \beta_1, 2n_2 - l_2 - \beta_2, a)\\
&\Rightarrow \chi\psi_3[v] \in C_0^n(2n_2 - l_2 - \beta_2, a)\\
&\Rightarrow K_3\chi\psi_3[v] \in C_1^n(2n_2 - l_2 - \beta_2 - p_2 - l_3, a)\\
&\Rightarrow \mathcal{N}_aK_3\chi\psi_3[v] \in C_{01}^n(2n_1 - l_1, 2n_2 - l_2 - \beta_2 - p_2 - l_3 - \alpha_2, a)
\end{aligned}$$

Donc

$$v \in RC^n_{01}(n_1, n_2, a) \Rightarrow \mathbf{R}L_a[v] \in C^n_{01}(2n_1 - l_1, 2n_2 - l_2 - l_3 - p_2 - \alpha_2 - \beta_2, a).$$

On pose:

$$q = \sup_{(x_1,x_2)\in[0,a_0]^2} \|Q_1(x_1, x_2)\| + \sup_{(x_1,x_2)\in[0,a_0]^2} \left\| \frac{\partial Q_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right\|$$

$\varkappa_1$ une constante indépendante de a qui majore la norme de K_1:

$$C^n_{01}(2n_1, 2n_2, a) \to C^n_{01}(2n_1 - l_1, 2n_2 - l_2, a)$$

$\|\chi\|$ la norme de χ:

$$C^n_{00}(2n_1 - l_1 - \beta_1, 2n_2 - l_2 - \beta_2, a) \to C^n_0(2n_2 - l_2 - \beta_2, a) \quad (\text{on a } \|\chi\| \leqslant a^{2n_1 - l_1 - \beta_1})$$

$\varkappa_3$ une constante indépendante de a, qui majore la norme de K_3:

$$C^n_0(2n_2 - l_2 - \beta_2, a) \Rightarrow C^n_1(2n_2 - l_2 - \beta_2 - l_3 - p_2, a)$$

ν une constante indépendante de a telle que, pour $0 \leqslant a \leqslant a'_{2n_1 - l_1}$, on ait

$$\max\left(\sup_{(x_1,x_2)\in]0,a]^2} \frac{\|\mathcal{N}_{1,a}(x_1, x_2)\|}{x_1^{2n_1 - l_1}}, \quad \sup_{(x_1,x_2)\in]0,a]^2} \frac{\|\partial \mathcal{N}_{1,a}/\partial x_2\|}{x_1^{2n_1 - l_1}} \right) \leqslant \frac{\nu}{a^{2n_1 - l_1}}.$$

(Toutes ces « constantes » dépendent en général de n_1 et n_2).

Soit $v \in BRC^n_{01}(n_1, n_2, a)$. On a:

$$\|\psi_i[v]\|_{0,1,2n_1,2n_2,a} \leqslant \lambda_i \qquad \text{pour } i = 1, 2$$

où λ_i ne dépend pas de a, mais dépend de la borne supérieure, sur un voisinage fixé de 0 dans $\mathbf{R}^2$, des fonctions

$$\frac{\|F_i(x_1, x_2, 0)\|}{x_1^{2n_1} x_2^{2n_2}}, \quad \frac{\|\partial F_i/\partial x_2(x_1, x_2, 0)\|}{x_1^{2n_1} x_2^{2n_2}},$$

$$\|R_i(x_1, x_2, z)\|, \quad \left\|\frac{\partial R_i}{\partial x_2}(x_1, x_2, z)\right\|, \quad \left\|\frac{\partial R_i}{\partial z}(x_1, x_2, z)\right\|.$$

On a donc d'une part:

$$\|K_1 \psi_1[v]\|_{0,1,2n_1 - l_1, 2n_2 - l_2, a} \leqslant \varkappa_1 \lambda_1$$

$$\Rightarrow \|K_1 \psi_1[v]\|_{0,1,n_1,n_2,a} \leqslant a^{n_1 - l_1 + n_2 - l_2} \varkappa_1 \lambda_1.$$

D'autre part

$$\|\psi_2[v]\|_{0,0,2n_1-l_1-\beta_1,2n_2-l_2-\beta_2,a} =$$
$$= \|\psi_2[v] + QK_1\psi_1[v]\|_{0,0,2n_1-l_1-\beta_1,2n_2-l_2-\beta_2,a} \leqslant a^{n_1-l_1-\beta_1+n_2-l_2-\beta_2}\lambda_2 + q\varkappa_1\lambda_1 \leqslant$$
$$\leqslant \lambda_2 + q\varkappa_1\lambda_1 \quad \text{si on suppose} \begin{cases} a \leqslant 1 \\ n_1 - l_1 - \beta_1 + n_2 - l_2 - \beta_2 \geqslant 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \quad \|\chi\psi_3[v]\|_{0,2n_2-l_2,a} \leqslant \|\chi\|(\lambda_2 + q\varkappa_1\lambda_1) \leqslant a^{2n_1-l_1-\beta_1}(\lambda_2 + q\varkappa_1\lambda_1)$$
$$\Rightarrow \quad \|K_3\chi\psi_3[v]\|_{1,2n_2-l_2-l_3-\beta_2-p_2,a} \leqslant a^{2n_1-l_1-\beta_1}\varkappa_3(\lambda_2 + q\varkappa_1\lambda_1)$$
$$\Rightarrow \quad \|\mathcal{N}_aK_3\chi\psi_3[v]\|_{0,1,2n_1-l_1,2n_2-l_2-l_3-\beta_2-p_2-\alpha_2,a} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\nu}{a^{2n_1-l_1}}a^{2n_1-l_1-\beta_1}\varkappa_3(\lambda_2 + q\varkappa_1\lambda_1) \leqslant a^{-\beta_1}\nu\varkappa_3(\lambda_2 + q\varkappa_1\lambda_1)$$
$$\Rightarrow \quad \|\mathcal{N}_aK_3\chi\psi_3[v]\|_{0,1,n_1,n_2,a} \leqslant a^{n_1-l_1+n_2-l_2-l_3-p_2-\beta_1-\beta_2-\alpha_2}\nu\varkappa_3(\lambda_2 + q\varkappa_1\lambda_1)$$

Donc

$$v \in BRC_{01}^n(n_1, n_2, a) \Rightarrow \|\mathbf{R}L_a[v]\|_{0,1,n_1,n_2,a} \leqslant$$
$$\leqslant a^{n_1+n_2-(l_1+l_2+l_3+p_2+\beta_1+\beta_2+\alpha_2)}[\nu\varkappa_3(\lambda_2 + q\varkappa_1\lambda_1) + \varkappa_1\lambda_1].$$

On fixe alors n_1 et n_2 de façon à avoir $n_1 + n_2 > l_1 + l_2 + l_3 + p_2 + \beta_1 + \beta_2 + \alpha_2$.

On a alors

$$\|\mathbf{R}L_a[v]\|_{0,1,n_1,n_2,a} \leqslant a[\nu\varkappa_3(\lambda_2 + q\varkappa_1\lambda_1) + \varkappa_1\lambda_1]$$

et si on choisit a_0''' de façon que $a_0'''[\nu\varkappa_3(\lambda_2 + q\varkappa_1\lambda_1) + \varkappa_1\lambda_1] \leqslant 1$, on voit que, pour a tel que $0 < a \leqslant a_0'''$, $\mathbf{R}L_a$ envoie $BRC_{01}^n(n_1, n_2, a)$ dans elle-même.

On peut maintenant choisir a_0''' de façon que, pour $0 < a \leqslant a_0'''$, $\mathbf{R}L_a$ soit contractante de $BRC_{01}^n(n_1, n_2, a)$ dans elle-même.

En effet, on a:

$$\forall (v_1, v_2) \in BRC_{01}^n(n_1, n_2, a), \quad \|\psi_i[v_1] - \psi_i[v_2]\|_{0,1,2n_1,2n_2,a} \leqslant$$
$$\leqslant \lambda_i'\|v_1 - v_2\|_{0,1,n_1,n_2,a} \quad \text{pour } i = 1,2$$

où λ_i' ne dépend pas de a, mais dépend de la borne supérieure, sur un voisinage fixé de 0 dans $\mathbf{R}^2$, des fonctions

$$\|R_i(x_1, x_2, z)\|, \quad \left\|\frac{\partial R_i}{\partial x_2}(x_1, x_2, z)\right\|,$$

$$\left\|\frac{\partial^2 R_i(x_1, x_2, z)}{\partial x_2 \partial z}\right\|, \quad \left\|\frac{\partial R_i}{\partial z}(x_1, x_2, z)\right\|, \quad \left\|\frac{\partial^2 R_i}{\partial z^2}(x_1, x_2, z)\right\|.$$

Le même calcul que celui fait précédemment (où l'on remplace simplement λ_i par $\lambda_i'\|v_1 - v_2\|_{0,1,n_1,n_2,a}$) donne alors:

$$\|\mathbf{R}L_a[v_1] - \mathbf{R}L_a[v_2]\|_{0,1,n_1,n_2,a} \leqslant a\|v_1 - v_2\|_{0,1,n_1,n_2,a}[\nu\varkappa_3(\lambda_2' + q\varkappa_1\lambda_1') + \varkappa_1\lambda_1']$$

ce qui termine la démonstration.

Donc pour $0 < a \leqslant a_0'''$ l'application $\mathbf{R}L_a$ a un point fixe unique v_a dans $BRC_{01}^n(n_1, n_2, a)$.

Si de plus on choisit n_1 et n_2 de façon que

$$\begin{cases} 2n_1 - l_1 > n_1 \\ \text{et} \\ 2n_2 - l_2 - l_3 - p_2 - \alpha_2 - \beta_2 > n_2 \end{cases}$$

alors, pour tout couple d'entiers (r, s) tels que $r \geqslant n_1$ et $s \geqslant n_2$ on a:

$$v_a \in RC_{01}^n(r, s, a)$$

en effet, on a

$$\begin{cases} v_a = RL_a[v_a] \\ \text{et} \\ v_a \in RC_{01}^n(r, s, a) \Rightarrow RL_a[v_a] \in RC_{01}^n(2r - l_1, 2s - l_2 - l_3 - p_2 - \alpha_2 - \beta_2) \subset \\ \qquad \subset RC_{01}^n(r+1, s+1, a). \end{cases}$$

β) Montrons que V_a est solution de la première équation du système (S) c'est-à-dire que l'on a $D_1[v_a] = \psi_1[v_a]$.

Dans toute la suite, on mettra $\mathbf{R}$ pour partie réelle de

$$\begin{aligned} v_a = \mathbf{R}L_a[v_a] \Rightarrow D_1[v_a] &= D_1\mathbf{R}L_a[v_a] \\ &= \mathbf{R}D_1L_a[v_a] \end{aligned}$$

$$= \mathbb{R}D_1[K_1\psi_1[v_a] - \mathcal{N}_a K_3 \chi\psi_3[v_a]]$$

$$= \mathbb{R}\psi_1[v_a] \qquad \text{d'après lemme 3, } L_1 \text{ et } L_3,\ a)$$

$$= \psi_1[v_a]\,.$$

γ) Montrons que, si a est assez petit, v_a est solution de la deuxième équation de (S) c'est-à-dire $D_2[v_a] = \psi_2[v_a]$.

Calculons $D_2[v_a]$:

$$D_2[v_a] = D_2\mathbb{R}L_a[v_a]$$

$$= \mathbb{R}D_2L_a[v_a]\,.$$

Calculons $D_2L_a[v_a]$:

$$D_2L_a[v_a] = D_2K_1\psi_1[v_a] - D_2[\mathcal{N}_a K_3\chi\psi_3[v_a]] =$$

$$= D_2K_1\psi_1[v_a] - D_2[\mathcal{N}_a]K_3\chi\psi_3[v_a] - \mathcal{N}_a x_2^{p_2+1}\frac{d}{dx_2}\,(K_3\chi\psi_3[v_a])$$

d'après la formule de Leibniz

$$D_2L_a[v_a] = D_2K_1\psi_1[v_a] - D_2[\mathcal{N}_a]K_3\chi_3[v_a] - \mathcal{N}_a(-M_3K_3\chi\psi_3[v_a] + \chi\psi_3[v_a])$$

d'après le lemme 4

$$= D_2K_1\psi_1[v_a] - (\mathcal{N}_a M_3 + K_1[\Delta\mathcal{N}_a])K_3\chi\psi_3[v_a] -$$

$$- \mathcal{N}_a(-M_3K_3\chi\psi_3[v_a] + \chi\psi_3[v_a])$$

d'après le lemme 3, L_3, d)

$$= D_2K_1\psi_1[v_a] - K_1[\Delta\mathcal{N}_a]K_3\chi\psi_3[v_a] - \mathcal{N}_a\chi\psi_3[v_a]$$

$$= D_2K_1\psi_1[v_a] - K_1[\Delta\mathcal{N}_a K_3\chi\psi_3[v_a]] - \mathcal{N}_a\chi\psi_3[v_a]$$

d'après le lemme 3, L_1, c)

$$= D_2K_1\psi_1[v_a] - K_1\Delta[K_1\psi_1[v_a] - v_a] - \mathcal{N}_a\chi\psi_3[v_a]$$

$$= (K_1D_2 + K_1\Delta K_1 + (K_1D_1 - I)QK_1)[\psi_1[v_a]] -$$

$$- K_1\Delta[K_1\psi_1[v_a] - v_a] - \mathcal{N}_a\chi\psi_3[v_a]$$

d'après le lemme 3, L_2

$$= (K_1 D_2 + (K_1 D_1 - I) Q K_1) \psi_1[v_a] + K_1 \Delta[v_a] - (K_1 D_1 - I)[\psi_3[v_a]]$$

d'après lemme 3, L_3, b)

$$= (K_1 D_2 + (K_1 D_1 - I) Q K_1) \psi_1[v_a] + K_1 \Delta[v_a] - \\ - (K_1 D_1 - I)[\psi_2[v_a] + Q K_1 \psi_1[v_a]]$$

$$= K_1[D_2 \psi_1[v_a] - D_1 \psi_2[v_a] + \Delta v_a] + \psi_2[v_a]$$

donc

$$D_2[v_a] - \psi_2[v_a] = \mathrm{R} K_1[D_2 \psi_1[v_a] - D_1 \psi_2[v_a] + \Delta v_a].$$

On utilise maintenant la complète intégrabilité du système initial, c'est-à-dire:

$$(\text{C.I.})\ x_2^{p_2+1} \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x_1, x_2, y) + \frac{\partial F_1}{\partial y}(x_1, x_2, y) F_2(x_1, x_2, y) = \\ = x_1^{p_1+1} \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x_1, x_2, y) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x_1, x_2, y) F_1(x_1, x_2, y).$$

Un calcul donne, en utilisant (C.I.), le fait que v_a est dérivable par rapport à x_1 et x_2 sur $]0, a]^2$ et le fait que $\psi_i[v_a] = F_i(x_1, x_2, v_a) - M_i(x_1, x_2) v_a$:

$$D_2 \psi_1[v_a] - D_1 \psi_2[v_a] + \Delta v_a = \left[\frac{\partial F_1}{\partial y}(x_1, x_2, v_a) - M_1(x_1, x_2)\right](D_2[v_a] - \psi_2[v_a]) - \\ - \left[\frac{\partial F_2}{\partial y}(x_1, x_2, v_a) - M_2(x_1, x_2)\right](D_1[v_a] - \psi_1[v_a]).$$

Or

$$D_1[v_a] = \psi_1[v_a]$$

donc

$$D_2 \psi_1[v_a] - D_1 \psi_2[v_a] + \Delta v_a = \left[\frac{\partial F_1}{\partial y}(x_1, x_2, v_a) - M_1(x_1, x_2)\right](D_2[v_a] - \psi_2[v_a])$$

donc

$$D_2[v_a] - \psi_2[v_a] = \mathrm{R} K_1\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}(x_1, x_2, v_a) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x_1, x_2, 0)\right)(D_2[v_a] - \psi_2[v_a]).$$

Or, on peut choisir a assez petit pour que la norme de l'application

$$\mathrm{R} K_1\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}(x_1, x_2, v_a) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x_1, x_2, 0)\right) : RC_{00}^n(n_1, n_2, a) \to RC_{00}^n(n_1, n_2, a)$$

soit strictement inférieure à 1, donc

$$D_2[v_a] = \psi_2[v_a].$$

δ) Montrons que v_a est C^∞ de (x_1, x_2) au voisinage de $(0, 0)$.

En utilisant que v_a appartient à $C^n_{00}(r, s, a)$ pour des entiers r et s, aussi grands que l'on veut, et que v_a est solution de

$$\begin{cases} x_1^{p_1+1}\dfrac{\partial v_a}{\partial x_1} - M_1 v_a = \psi_1[v_a] \\ x_2^{p_2+1}\dfrac{\partial v_a}{\partial x_2} - M_2 v_a = \psi_2[v_a] \end{cases}$$

on montre, par récurrence sur i et j, que $(\partial^{i+j} v_a)/\partial x_1^i \partial x_2^j)$ appartient à $C^n_{00}(r, s, a)$ pour r et s aussi grands que l'on veut.

Donc $v_a \in (\mathcal{T}_{x_1} \cap \mathcal{T}_{x_2})^n$ ce qui termine la démonstration du théorème.

Pour terminer, il reste donc à démontrer le lemme 3, ce qui se fera en plusieurs étapes, d'abord lorsque la dimension n du système (S) est 1 puis lorsque la matrice M_1 est sous forme triangulaire.

IV) *Démonstration du lemme* 3 *lorsque la dimension* n *du système est* 1.

On fera, à plusieurs reprises, usage du lemme suivant.

LEMME 5. 1) *si le lemme* 3, L_1 *est vrai pour l'opérateur différentiel* D_1: $x_1^{p_1+1}(\partial/\partial x_1) - M_1(x_1, x_2)$ *avec les entiers* N_1, N_2, l_1, 0, *alors il est vrai pour l'opérateur différentiel*

$$\tilde{D}_1 = x_1^{p_1+1}\frac{\partial}{\partial x_1} - \tilde{M}_1(x_1, x_2), \quad \text{où} \quad \tilde{M}_1(x_1, x_2) = M_1(x_1, x_2) + x_1^{l_1+1}\tilde{N}_1(x_1, x_2)$$

($\tilde{N}_1(x_1, x_2)$ *matrice de fonctions* C^∞ *au voisinage de* 0 *dans* $\mathbf{R}^2$) *avec les entiers* $N_1, N_2, l_1, 0$;

2) *si de plus l'inverse à droite* K_1 *de* D_1 *vérifie*

$$\forall f \in C^n_{01}(N_1, N_2, a) \qquad \frac{\partial K_1[f]}{\partial x_2} = K_1\left[\frac{\partial f}{\partial x_2}\right] + K_1\frac{\partial M_1}{\partial x_2}K_1[f]$$

alors l'inverse à droite $\tilde{K}_1$ *de* $\tilde{D}_1$ *vérifie*

$$\forall f \in C^n_{01}(N_1, N_2, a) \qquad \frac{\partial \tilde{K}_1[f]}{\partial x_2} = \tilde{K}_1\left[\frac{\partial f}{\partial x_2}\right] + \tilde{K}_1\frac{\partial \tilde{M}_1}{\partial x_2}\tilde{K}_1[f].$$

DÉMONSTRATION.

1) *a*) Définition de $\tilde{K}_1$.

Considérons les applications **C**-linéaires suivantes:

$$x_1^{l_1+1}\tilde{N}_1K_1\colon\ C_{00}^n(N_1, n_2, a) \to C_{00}^n(N_1, n_2, a)$$
$$C_{01}^n(N_1, n_2, a) \to C_{01}^n(N_1, n_2, a)$$
$$K_1x_1^{l_1+1}\tilde{N}_1\colon\ C_{00}^n(N_1 - l_1, n_2, a) \to C_{00}^n(N_1 - l_1, n_2, a)$$
$$C_{01}^n(N_1 - l_1, n_2, a) \to (N_1 - l_1, n_2, a)$$

où $n_2 \geqslant N_2$.

En réduisant éventuellement a_0, on peut supposer que pour $0 < a \leqslant a_0$ les normes de ces applications sont strictement inférieures à 1. (On utilise ici que la norme de K_1 est bornée par une constante indépendante de a et n_2).

On peut alors poser

$$\tilde{K}_1 = K_1(I - x_1^{l_1+1}\tilde{N}_1K_1)^{-1}$$

et on vérifie facilement que

$$\tilde{K}_1 = (I - K_1x_1^{l_1+1}\tilde{N}_1)^{-1}K_1$$

$\tilde{K}_1$ est continue de $C_{00}^n(N_1, n_2, a)$ dans $C_{00}^n(N_1 - l_1, n_2, a)$ et de $C_{01}^n(N_1, n_2, a)$ dans $C_{01}^n(N_1 - l_1, n_2, a)$, pour $n_2 \geqslant N_2$ et pour $0 < a \leqslant a_0$ (et sa norme est bornée par une constante indépendante de a et n_2).

(Remarquons que cette définition de $\tilde{K}_1$ n'est plus possible si l'entier l_2 associé à l'opérateur différentiel D_1 est non nul).

Montrons, par récurrence sur n_1, que pour $n_1 \geqslant N_1$, $\tilde{K}_1$ est continu de $C_{00}^n(n_1, n_2, a)$ dans $C_{00}^n(n_1 - l_1, n_2, a)$ (avec toujours $n_2 \geqslant N_2$ et $0 < a \leqslant a_0$).

Soit $f \in C_{00}^n(n_1 + 1, n_2, a)$ et soit $g = \tilde{K}_1[f]$

$$\begin{aligned} & \tilde{K}_1[f] = g \\ \Leftrightarrow\ & (I - K_1x_1^{l_1+1}\tilde{N}_1)^{-1}K_1[f] = g \\ \Leftrightarrow\ & K_1[f] = g - K_1[x_1^{l_1+1}\tilde{N}_1g]\,. \end{aligned}$$

Lorsque f parcourt un borné de $C_{00}^n(n_1 + 1, n_2, a)$, f parcourt un borné de $C_{00}^n(n_1, n_2, a)$ et donc, d'après l'hypothèse de récurrence, $\tilde{K}_1[f] = g$ parcourt un borné de $C_{00}^n(n_1 - l_1, n_2, a)$, donc $x_1^{l_1+1}\tilde{N}_1g$ un borné de $C_{00}^n(n_1 + 1, n_2, a)$ donc $K_1[x_1^{l_1+1}\tilde{N}_1g)$ un borné de $C_{00}^n(n_1 + 1 - l_1, n_2, a)$, et puisque $K_1[f]$ parcourt aussi un borné de $C_{00}^n(n_1 + 1 - l_1, n_2, a)$, il en est alors de même pour g.

On montre de la même façon que $\tilde{K}_1$ est continue de $C_{01}^n(n_1, n_2, a)$ dans $C_{01}^n(n_1 - l_1, n_2, a)$ pour $n_1 \geqslant N_1$, $n_2 \geqslant N_2$ et $0 < a \leqslant a_0$.

On montre de la même façon, par récurrence sur n_1, que la norme de toutes ces applications continues est bornée par une constante indépendante de a et n_2.

b) Montrons que si $f \in C^n_{00}(N_1, N_2, a)$, $\tilde{K}_1(f)$ est dérivable par rapport à x_1 sur $]0, a]^2$ et que $\tilde{D}_1\tilde{K}_1(f) = f$

$$\tilde{K}_1[f] = g$$

$$\Leftrightarrow \quad K_1[f] = g - K_1[x_1^{l_1+1}\tilde{N}_1 g]$$

donc g est dérivable par rapport à x_1 sur $]0, a]^2$.

D'autre part

$$\begin{aligned}\tilde{D}_1[g] &= (D_1 - x_1^{l_1+1}\tilde{N}_1)[g] \\ &= D_1[g] - x_1^{l_1+1}\tilde{N}_1 g \\ &= D_1 K_1[f + x_1^{l_1+1}\tilde{N}_1 g] - x_1^{l_1+1}\tilde{N}_1 g \\ &= f\,.\end{aligned}$$

c) Reste à montrer: $\forall \lambda \in C^n_0(0, a)$, $\forall f \in C^n_{00}(N_1, N_2, a)$, $\tilde{K}_1[\lambda f] = \lambda \tilde{K}_1[f]$ ce qui est évident.

2) Soit $f \in C^n_{01}(N_1, N_2, a)$ et $g = \tilde{K}_1[f]$.

On veut montrer que $\dfrac{\partial g}{\partial x_2} = \tilde{K}_1\left[\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right] + \tilde{K}_1 \dfrac{\partial \tilde{M}_1}{\partial x_2}\tilde{K}_1[f]$

$$g = \tilde{K}_1[f] \;\Rightarrow\; g = K_1[f + x_1^{l_1+1}\tilde{N}_1 g] \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{\partial g}{\partial x_2} = K_1\left[\frac{\partial f}{\partial x_2} + x_1^{l_1+1}\frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial x_2} g + x_1^{l_1+1}\tilde{N}_1\frac{\partial g}{\partial x_2}\right] + K_1\frac{\partial M_1}{\partial x_2}K_1[f + x_1^{l_1+1}\tilde{N}_1 g] \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; (I - K_1 x_1^{l_1+1}\tilde{N}_1)\frac{\partial g}{\partial x_2} = K_1\left[\frac{\partial f}{\partial x_2}\right] + K_1\left(x_1^{l_1+1}\frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial M_1}{\partial x_2}\right)g \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; (I - K_1 x_1^{l_1+1}\tilde{N}_1)\frac{\partial g}{\partial x_2} = K_1\left[\frac{\partial f}{\partial x_2}\right] + K_1\frac{\partial \tilde{M}_1}{\partial x_2}\tilde{K}_1[f] \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{\partial g}{\partial x_2} = \tilde{K}_1\left[\frac{\partial f}{\partial x_2}\right] + \tilde{K}_1\frac{\partial \tilde{M}_1}{\partial x_2}\tilde{K}_1[f]\,.$$

Dans le cas de dimension 1, le lemme 3 prend la forme plus particulière suivante:

LEMME 6. *Soit*

$$d = x_1^{p_1+1}\frac{\partial}{\partial x_1} - (\mu_0 + \mu_1 x_1 + \dots + \mu_{p_1} x_1^{p_1}), \quad \text{où } \mu(x) = \mu_0 + \mu_1 x_1 + \dots + \mu_{p_1} x_1^{p_1}$$

est un polynôme à coefficients complexes.

Il existe alors des entiers N_1, l_1 *(*N_1 *non nécessairement positif,* $0 \leqslant l_1 \leqslant p_1$*) un réel positif* a_0*, et pour tout réel* a *tel que* $0 < a \leqslant a_0$ *une application linéaire continue* k: $C_{00}(N_1, 0, a) \to C_{00}(N_1 - l_1, 0, a)$ *vérifiant*:

1) *a*) pour tout couple d'entiers (n_1, n_2) tels que $n_1 \geqslant N_1$ et $n_2 \geqslant 0$ les applications restrictions de k suivantes sont continues:

$$k\colon C_{00}(n_1, n_2, a) \to C_{00}(n_1 - l_1, n_2, a)$$
$$C_{01}(n_1, n_2, a) \to C_{01}(n_1 - l_1, n_2, a)$$

et leur norme est bornée une constante indépendante de a et n_2.

b) $\forall f \in C_{00}(N_1, 0, a)$ $k[f]$ est dérivable par rapport à x_1 sur $]0, a] \times [0, a]$ et on a: $dk[f] = f$ sur $]0, a] \times [0, a]$.

c) $\forall f \in C_{00}(N_1, 0, a)$, $\forall \lambda \in C_0(0, a)$ $k[\lambda f] = \lambda k[f]$.

2) $\forall f \in C_{01}(N_1, 0, a)$ $\quad \dfrac{\partial k[f]}{\partial x_2} = k\left[\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right]$ $\quad$ sur $]0, a] \times [0, a]$.

3) Il existe une fonction $\nu_a(x_1)$, C^∞ de x_1 sur un voisinage de 0, telle que

a) $d[\nu_a] = 0$

b) $\forall f \in C_{10}(N_1, 0, a)$ $(kd - 1)[f]$ $(x_1, x_2) = \nu_a(x_1) f(a, x_2)$

pour $(x_1, x_2) \in]0, a] \times [0, a]$.

c) Pour tout entier naturel m il existe un réel strictement positif a'_m et une constante C_m tels que pour $0 < a \leqslant a'_m$ on ait:

$$\sup_{x_1 \in]0,a]} \frac{\nu_a(x_1)}{x_1^m} \leqslant \frac{C^m}{a^m}$$

d) $\forall f \in C_{00}(N_1, 0, a)$ $\nu_a(x_1) \times k[f](a, x_2) = 0$.

REMARQUE 6. On a deux conséquences immédiates des parties 1 et 2 de ce lemme.

1) si $f \in C_{00}(N_1, 0, a)$ est C^∞ de (x_1, x_2) sur $]0, a] \times [0, a]$ alors $k[f]$ l'est aussi;

2) si $f \in C_{00}(N_1, 0, a)$ est C^∞ de (x_1, x_2) sur $[0, a]^2$ et plate comme fonction de x_1 en $x_1 = 0$, alors $k[f]$ l'est aussi.

Démonstration du lemme 6.

Premier cas: $p_1 = 0$, $d = x_1(\partial/\partial x_1) - \mu_0$.

Soit $f \in C_{00}(n_1, n_2, a)$ (où on admet pour n_1 des valeurs négatives, n_2 étant $\geqslant 0$). On pose:

$$k[f] = x_1^{\mu_0}\int_0^{x_1} t^{-\mu_0 - 1} f(t, x_2)\, dt \qquad \text{pour } (x_1, x_2) \in]0, a] \times [0, a]$$

1) définition et continuité de k (on prend par exemple $a_0 = 1$).

a) On a:

$$\forall (t, x_2) \in]0, a] \times [0, a] \ \ |f(t, x_2)| \leqslant \|f\|_{0,0,n_1,n_2,a} |t|^{n_1} |x_2|^{n_2} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{k[f]}{x_1^{n_1} x_2^{n_2}}\right| \leqslant \|f\|_{0,0,n_1,n_2,a}\, x_1^{\mathrm{Re}(\mu_0) - n_1} x_2^{-n_2} \int_0^{x_1} t^{-\mathrm{Re}(\mu_0) + n_1 - 1} x_2^{n_2}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|f\|_{0,0,n_1,n_2,a}}{n_1 - \mathrm{Re}(\mu_0)} \qquad \text{si } n_1 - \mathrm{Re}(\mu_0) > 0$$

donc

$$\|k[f]\|_{0,0,n_1,n_2,a} \leqslant \frac{1}{n_1 - \mathrm{Re}(\mu_0)} \|f\|_{0,0,n_1,n_2,a}\,.$$

b) On a $\forall f \in C_{00}(n_1, 0, a)$ $dk[f] = f$ sur $]0, a] \times [0, a]$.

c) $\forall \lambda \in C_0(0, a)$ $\forall f \in C_{00}(n_1, 0, a)$ $k[\lambda f] = \lambda k[f]$.

2) On a de façon evidente:

$$\forall f \in C_{01}(n_1, 0, a) \qquad \frac{\partial k[f]}{\partial x_2} = k\left[\frac{\partial f}{\partial x_2}\right].$$

On en déduit, avec a, la continuité de k: $C_{01}(n_1, 0, a) \to C_{01}(n_1, 0, a)$

3) $\forall f \in C_{10}(n_1, 0, a)$ $(kd - 1)[f] = 0$ (donc $\nu(x_1) = 0$).

En effet:

$$f \in C_{10}(n_1, n_2, a) \ \Rightarrow\ df = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} - \mu_0 f \in C_{00}(n_1, n_2, a) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ kd[f] = x_1^{\mu_0}\int_0^{x_1}\left(t^{-\mu_0}\frac{\partial f}{\partial t} - \mu_0 t^{-\mu_0-1} f\right)(t, x_2)\,dt =$$

$$= x_1^{\mu_0}[t^{-\mu_0} f(t, x_2)]_{t=0}^{t=x_1} + x_1^{\mu_0}\int_0^{x_1}\mu_0 t^{-\mu_0-1} f(t, x_2)dt - x_1^{\mu_0}\int_0^{x_1} t^{-\mu_0-1} f(t, x_2)dt =$$

$$= f(x_1, x_2)\,.$$

REMARQUE 7. Dans le cas $p_1 = 0$, on pourra rendre l'entier N_1 aussi petit que l'on veut si l'on peut rendre $\mathrm{Re}\,(\mu_0)$ aussi petite que l'on veut.

Deuxième cas: $p_1 > 0$.

A) *Inversion de* $d_0 = x_1^{p_1+1}(\partial/\partial x_1) - \mu_0$ *lorsque* $\mathrm{Re}\,(\mu_0) \neq 0$.

α) $\mathrm{Re}\,(\mu_0) < 0$.

On pose, pour $f \in C_{00}(n_1, n_2, a)$, où $n_1 \in \mathbf{Z}$, $n_2 \in \mathbf{N}$, $0 < a \leqslant a_0$ (par exemple $a_0 = 1$)

$$k_0[f] = \exp\left(-\frac{\mu_0}{p_1 x_1^{p_1}}\right)\int_0^{x_1}\exp\left(\frac{\mu_0}{p_1 t^{p_1}}\right)\frac{f(t, x_2)}{t^{p_1+1}}\,dt \qquad \text{pour } (x_1, x_2) \in\,]0, a]\times[0, a]\,.$$

1) a) Définition et continuité de k_0.

$$f \in C_{00}(n_1, n_2, a) \ \Rightarrow\ \forall (t, x_2) \in\,]0, a]\times[0, a] \qquad |f(t, x_2)| \leqslant t^{n_1} x_2^{n_2} \|f\|_{0,0,n_1,n_2,a} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left|\frac{k_0[f]}{x_1^{n_1} x_2^{n_2}}\right| \leqslant \|f\|_{0,0,n_1,n_2,a}\, x_2^{n_2}\,\frac{\exp\left(-\dfrac{\mathrm{Re}\,(\mu_0)}{p_1 x_1^{p_1}}\right)}{x_1^{n_1} x_2^{n_2}}\int_0^{x_1}\exp\left(-\frac{\mathrm{Re}\,(\mu_0)}{p_1 t_1^{p_1}}\right) t^{n_1-p_1-1}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_{0,0,n_1,n_2,a}\,\frac{\exp\left(-\dfrac{\mathrm{Re}\,(\mu_0)}{p_1 x_1^{p_1}}\right)}{x_1^{n_1}}\left\{-\frac{1}{\mathrm{Re}\,(\mu_0)}\left[\exp\left(\frac{\mathrm{Re}\,(\mu_0)}{p_1 t_1^{p_1}}\right) t^{n_1}\right]_{t=0}^{t=x_1} +\right.$$

$$\left. + \frac{n_1}{\mathrm{Re}\,(\mu_0)}\int_0^{x_1}\exp\left(\frac{\mathrm{Re}\,(\mu_0)}{p_1 t^{p_1}}\right) t^{n_1-1}\,dt\right\} \leqslant \left(-\frac{1}{\mathrm{Re}\,(\mu_0)}\right)\|f\|_{0,0,n_1,n_2,a}$$

donc

$$\|k_0[f]\|_{0,0,n_1,n_2,a} \leqslant \left(-\frac{1}{\mathrm{Re}\,(\mu_0)}\right)\|f\|_{0,0,n_1,n_2,a}$$

donc k_0 est continue de $C_{00}(n_1, n_2, a)$ dans lui-même (avec d'ailleurs n_1, n_2, a quelconques).

$b)$ On a $\forall f \in C_{00}(n_1, n_2, a)$ $d_0 k_0 f = f$

$c)$ $\forall \lambda \in C_0(0, a)$ $\forall f \in C_{00}(n_1, n_2, a)$ $k_0[\lambda f] = \lambda k_0[f]$.

2) $\forall f \in C_{01}(n_1, n_2, a)$ $\qquad \dfrac{\partial k_0[f]}{\partial x_2} = k_0\left[\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right]$

d'où la continuité de k_0: $C_{01}(n_1, n_2, a) \to C_{01}(n_1, n_2, a)$.

3) $\forall f \in C_{10}(n_1, n_2, a)$ $(k_0 d_0 - 1)(f) = 0$

en effet:

$$k_0 d_0[f] = \exp\left(-\frac{\mu_0}{p_1 x_1^{p_1}}\right)\int_0^{x_1} \frac{\exp\left(\dfrac{\mu_0}{p_1 t^{p_1}}\right)}{t^{p_1+1}}\left(t^{p_1+1}\frac{\partial f}{\partial t}(t, x_2) - \mu_0 f(t, x_2)\right) dt =$$

$$= \exp\left(-\frac{\mu_0}{p_1 x_1^{p_1}}\right)\left\{\left[\exp\left(\frac{\mu_0}{p_1 t^{p_1}}\right) f(t, x_2)\right]_{t=0}^{t=x_1} + \right.$$

$$\left. + \mu_0 \int_0^{x_1} \frac{\exp\left(\dfrac{p_1 t^{p_1}}{\mu_0}\right)}{t^{p_1+1}} f(t, x_2)\, dt - \mu_0 \int_0^{x_1} \frac{\exp\left(\dfrac{\mu_0}{p_1 t^{p_1}}\right)}{t^{p_1+1}} f(t, x_2)\, dt\right\} = f(x_1, x_2).$$

$\beta)$ $\operatorname{Re}(\mu_0) > 0$.

On pose, pour $f \in C_{00}(n_1, n_2, a)$, où $n_1 \in \mathbf{Z}$, $n_2 \in \mathbf{N}$, $0 < a \leqslant a_0$

$$k_0[f] = \exp\left(-\frac{\mu_0}{p_1 x_1^{p_1}}\right)\int_a^{x_1} \frac{\exp\left(\dfrac{\mu_0}{p_1 t_1^{p_1}}\right)}{t^{p_1+1}} f(t, x_2)\, dt \qquad \text{pour } (x_1, x_2) \in [0, a] \times [0, a].$$

1) $a)$ continuité de k_0.

$$f \in C_{00}(n_1, n_2, a) \Rightarrow \forall (t, x_2) \in]0, a] \times [0, a] \quad |f(t, x_2)| \leqslant t^{n_1} x_2^{n_2} \|f\|_{0,0,n_1,n_2,a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{k_0[f]}{x_1^{n_1} x_2^{n_2}}\right| \leqslant \|f\|_{0,0,n_1,n_2,a} \frac{\exp\left(-\dfrac{\operatorname{Re}(\mu_0)}{p_1 x_1^{p_1}}\right)}{x_1^{n_1}} \int_{x_1}^{a} \exp\left(\frac{\operatorname{Re}(\mu_0)}{p_1 t^{p_1}}\right) t^{n_1 - p_1 - 1}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_{0,0,n_1,n_2,a} \frac{\exp\left(-\dfrac{\operatorname{Re}(\mu_0)}{p_1 x_1^{p_1}}\right)}{x_1^{n_1}} \left\{\frac{-1}{\operatorname{Re}(\mu_0)}\left[\exp\left(\frac{\operatorname{Re}(\mu_0)}{p_1 t^{p_1}}\right) t^{n_1}\right]_{t=x_1}^{t=a} + \right.$$

$$+\frac{n_1}{\mathrm{Re}\,(\mu_0)}\int_{x_1}^{a}\exp\left(\frac{\mathrm{Re}\,(\mu_0)}{p_1 t^{p_1}}\right)t^{n_1-1}\,dt\Bigg\}\leqslant \|f\|_{0,0,n_1,n_2,a}\frac{\exp\left(-\dfrac{\mathrm{Re}\,(\mu_0)}{p_1x_1^{p_1}}\right)}{x_1^{n_1}}\cdot$$

$$\cdot\left\{\frac{1}{\mathrm{Re}\,(\mu_0)}\exp\left(\frac{\mathrm{Re}\,(\mu_0)}{p_1x_1^{p_1}}\right)x_1^{n_1}+\frac{n_1}{\mathrm{Re}\,(\mu_0)}\int_{x_1}^{a}\exp\left(\frac{\mathrm{Re}\,(\mu_0)}{p_1t^{p_1}}\right)t^{n_1-1}dt\right\}$$

* si $n_1\leqslant 0$ on a:

$$\left|\frac{k_0[f]}{x_1^{n_1}x_2^{n_2}}\right|\leqslant\frac{1}{\mathrm{Re}\,(\mu_0)}\,\|f\|_{0,0,n_1,n_2,a}$$

* si $n_1>0$ on écrit:

$$\int_{x_1}^{a}n_1\exp\left(\frac{\mathrm{Re}\,(\mu_0)}{p_1t^{p_1}}\right)t^{n_1-1}\,dt=\int_{x_1}^{2x_1}n_1\exp\left(\frac{\mathrm{Re}\,(\mu_0)}{p_1t^{p_1}}\right)t^{n_1-1}\,dt+\int_{x_1}^{a}n_1\exp\left(\frac{\mathrm{Re}\,(\mu_0)}{p_1t^{p_1}}\right)dt$$

pour $x_1\leqslant a/2$:

$$\left|\begin{array}{l}\displaystyle\int_{x_1}^{2x_1}n_1\exp\left(\frac{\mathrm{Re}\,(\mu_0)}{p_1t^{p_1}}\right)t^{n_1-1}dt\leqslant\exp\left(\frac{\mathrm{Re}\,(\mu_0)}{p_1x_1^{p_1}}\right)\int_{x_1}^{2x_1}n_1\,t^{n_1-1}dt\leqslant\exp\left(\frac{\mathrm{Re}\,(\mu_0)}{p_1x_1^{p_1}}\right)2^{n_1}x_1^{n_1}\\ \displaystyle\int_{2x_1}^{a}n_1\exp\left(\frac{\mathrm{Re}\,(\mu_0)}{p_1t^{p_1}}\right)t^{n_1-1}dt\leqslant\exp\left(\frac{\mathrm{Re}\,(\mu_0)}{p_1(2x_1)^{p_1}}\right)\int_{2x_1}^{a}n_1\,t^{n_1-1}dt\leqslant\exp\left(\frac{\mathrm{Re}\,(\mu_0)}{2^{p_1}p_1x_1^{p_1}}\right)a_0^{n_1}\end{array}\right.$$

pour $x_1\geqslant a/2$:

$$\int_{x_1}n_1\exp\left(\frac{\mathrm{Re}\,(\mu_0)}{p_1t^{p_1}}\right)t^{n_1-1}\,dt\leqslant\exp\left(\frac{\mathrm{Re}\,(\mu_0)}{p_1x_1^{p_1}}\right)\int_{x_1}n_1\,t^{n_1-1}dt\leqslant\exp\left(\frac{\mathrm{Re}\,(\mu_0)}{p_1x^{p_1}}\right)a^{n_1}\leqslant$$

$$\leqslant 2^{n_1}x_1^{n_1}\exp\left(\frac{\mathrm{Re}\,(\mu_0)}{p_1x_1^{p_1}}\right)$$

donc

$$\left|\frac{k_0[f]}{x_1^{n_1}x_2^{n_2}}\right|\leqslant\|f\|_{0,0,n_1,n_2,a}\frac{1}{\mathrm{Re}\,(\mu_0)}\frac{\exp\left(-\dfrac{\mathrm{Re}\,(\mu_0)}{p_1x_1^{a_1}}\right)}{x_1^{n_1}}\left\{(2^{n_1}+1)x_1^{n_1}\exp\left(\frac{\mathrm{Re}\,(\mu_0)}{p_1x_1^{p_1}}\right)+\right.$$

$$\left.+\exp\left(\frac{\mathrm{Re}\,(\mu_0)}{2^{p_1}p_1x_1^{p_1}}\right)a_0^{n_1}\right\}\leqslant\|f\|_{0,0,n_1,n_2,a}\frac{1}{\mathrm{Re}\,(\mu_0)}\cdot$$

$$\cdot\left[2^{n_1}+1+a_0^{n_1}x_{x_1}^{-n_1}\exp\left(-\frac{\mathrm{Re}\,(\mu_0)}{p_1x_1^{p_1}}\left(1-\frac{1}{2^{p_1}}\right)\right)\right].$$

Or la fonction

$$x_1^{-n_1}\exp\left(-\frac{\operatorname{Re}(\mu_0)}{p_1x_1^{p_1}}\left(1-\frac{1}{2^{p_1}}\right)\right)$$

est bornée sur $]0, a_0]$ par une constante C_{n_1}, donc

$$\|k_0[f]\|_{0,0,n_1,n_2,a}\leqslant\frac{2^{n_1}+1+a_0^{n_1}C_{n_1}}{\operatorname{Re}(\mu_0)}\|f\|_{0,0,n_1,n_2,a}\,.$$

Donc k_0 est continue de $C_{00}(n_1, n_2, a)$ dans lui-même, pour $n_1\in\mathbf{Z}$, $n_2\in\mathbf{N}$, $0<a\leqslant a_0$.

2) $\forall f\in C_{01}(n_1, n_2, a)\ \dfrac{\partial k_0[f]}{\partial x_2}=k_0\left[\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right].$

3) *a*) Soit $f\in C_{10}(n_1, n_2, a)$.

Montrons que l'on a:

$$(k_0d_0-1)[f]=-\exp\left(-\frac{\mu_0}{p_1x_1^{p_1}}+\frac{\mu_0}{p_1a^{p_1}}\right)f(a, x_2)\,.$$

En effet:

$$(k_0d_0-1)[f]=\exp\left(-\frac{\mu_0}{p_1x_1^{p_1}}\right)\int_a^{x_1}\frac{\exp\left(\dfrac{\mu_0}{p_1t^{p_1}}\right)}{t^{p_1+1}}\left(t^{p_1+1}\frac{\partial f}{\partial t}(t, x_2)-\mu_0f(t, x_2)\right)dt-$$

$$-f(x_1, x_2)=\exp\left(-\frac{\mu_0}{p_1x_1^{p_1}}\right)\left[\frac{\exp\left(\dfrac{\mu_0}{p_1t^{p_1}}\right)}{t^{p_1+1}}f(t, x_2)\right]_{t=0}^{t=x_1}-f(x_1, x_2)=$$

$$=-\exp\left(-\frac{\mu_0}{p_1x_1^{p_1}}+\frac{\mu_0}{p_1a^{p_1}}\right)f(a, x_2)\,.$$

Posons

$$v_{0,a}(x_1)=-\exp\left(-\frac{\mu_0}{p_1x_1^{p_1}}+\frac{\mu_0}{p_1a^{p_1}}\right).$$

En faisant $f=1$ dans l'égalité précédente, on a:

$$v_{0,a}(x_1)=(k_0d_0-1)[1]=-k_0[\mu_0]-1.$$

On a bien

$$d_0[v_{0,a}]=0$$

et $v_{0,a}(x_1)$ est une fonction C^∞ plate de x_1.

b) $\nu_{0,a}$ vérifie la propriété suivante:

pour tout entier naturel m, il existe un réel strictement positif a'_m tel que, pour $0 < a \leqslant a'_m$, on ait:

$$\sup_{x_1 \in]0,a]} \frac{|V^{0,a}(x_1)|}{x} \leqslant \frac{1}{a^m}$$

c) $\forall f \in C_{00}(n_1, n_2, a)$ $k_0[f](a, x_1) = 0$

donc

$$\nu_{0,a}(x_1) \times k_0[f](a, x_2) = 0 .$$

(on peut aussi le déduire de a puisque

$$\begin{aligned}\nu_{0,a}(x_1) \times k_0[f](a, x_2) &= (k_0 d_0 - 1)[k_0[f]] \\ &= 0) .\end{aligned}$$

B) *Inversion de* $d = x_1^{p_1+1}(\partial/\partial x_1) - (\mu_0 + \ldots + \mu_{p_1} x_1^{p_1})$ *lorsque* $\operatorname{Re}(\mu_0) \neq 0$.

On pose $\mu_1 x_1 + \ldots + \mu_{p_1} x_1^{p_1} = x_1 \tilde{\mu}(x_1)$ et on applique le lemme 5.

On pose donc $k = k_0(1 - x_1 \tilde{\mu} k_0)^{-1} = (1 - k_0 x_1 \tilde{\mu})^{-1} k_0$.

On a: 1) *a*) k:

$$C_{00}(n_1, n_2, a) \to C_{00}(n_1, n_2, a)$$

$$C_{01}(n_1, n_2, a) \to C_{01}(n_1, n_2, a)$$

sont des applications continues pour $n_1 \in \mathbb{Z}$, $n_2 \in \mathbb{N}$, $0 < a \leqslant a_0$.

(On peut en effet supposer $n_1 \in \mathbb{Z}$ puisque la norme de k_0: $C_{00}(n_1, n_2, a) \to$ $\to C_{00}(n_1, n_2, a)$ est bornée, pour $n_1 \leqslant 0$, par une constante ne dépendant ni de n_2, ni de a, ni de n_1).

b) $\forall f \in C_{00}(n_1, n_2, a)$ $dkf = f$

c) $\forall \lambda \in C_0(n_2, a)$ $\forall f \in C_{00}(n_1, n_2, a)$ $k[\lambda f] = \lambda k[f]$.

2) D'après le lemme 5, on a encore:

$$\forall f \in C_{01}(n_1, n_2, a) \qquad \frac{\partial k[f]}{\partial x_2} = k\left[\frac{\partial f}{\partial x_2}\right]$$

3) Soit $f \in C_{10}(n_1, n_2, a)$. Calculons $(kd - 1)[f]$.

$$\begin{aligned} kd - 1 &= (1 - k_0 x_1 \tilde{\mu})^{-1} k_0 (d_0 - x_1 \tilde{\mu}) - 1 \\ &= (1 - k_0 x_1 \tilde{\mu})^{-1} \big(k_0 (d_0 - x_1 \tilde{\mu}) - (1 - k_0 x_1 \tilde{\mu})\big) \\ &= (1 - k_0 x_1 \tilde{\mu})^{-1} (k_0 d_0 - 1) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}(kd-1)[f] &= (1-k_0x_1\tilde{\mu})^{-1}(k_0d_0-1)[f]\\ &= (1-k_0x_1\tilde{\mu})^{-1}[\nu_{0,a}(x_1)f(a, x_2)]\\ &= (1-k_0x_1\tilde{\mu})^{-1}[\nu_{0,a}(x_1)]\times f(a, x_2)\\ &= \nu_a(x_1)\times f(a, x_2)\end{aligned}$$

où l'on pose $\qquad \nu_a(x_1) = (1-k_0x_1\tilde{\mu})^{-1}[\nu_{0,a}(x_1)]$.

On a, comme précédemment $\nu_a(x_1) = (kd-1)[1] = -k[\mu]-1$ et donc $d[\nu_a] = 0$.

Montrons $\nu_a(x_1)$ est une fonction C^∞ plate de x_1:

— d'après la remarque 6. 1), $\nu_a(x_1)$ est C^∞ de x_1 sur $]0, a]$ puisque $\nu_a = -k[\mu]-1$;

— il reste à montrer que $\nu_a(x_1)$ est plate en $x_1 = 0$, ce qui sera une conséquence de la propriété plus précise suivante:

Pour tout entier $m \geqslant 0$, il existe un réel positif a'_m et une constante C_m tels que, pour $0 < a \leqslant a'_m$ on ait $\sup |\nu_a(x_1)|/x_1^m \leqslant C_m/a^m$.

C'est vrai si $m = 0$ puisque $\nu_a = -k[\mu]-1$ et que k envoie $C_{00}(0, 0, a)$ dans lui-même.

Supposons que c'est vrai pour m et montrons-le pour $m+1$.

On a

$$\nu_a(x_1) = (1-k_0x_1\tilde{\mu})^{-1}[\nu_{0,a}] \;\Rightarrow\; (1-k_0x_1\tilde{\mu})[\nu_a] = \nu_{0,a} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \nu_a = \nu_{0,a} + k_0x_1\tilde{\mu}[\nu_a] \;\Rightarrow\; \frac{\nu_a(x_1)}{x_1^{m+1}} = \frac{\nu_{0,a}(x_1)}{x_1^{m+1}} + \frac{1}{x_1^{m+1}}k_0[x_1\tilde{\mu}\nu_a] .$$

On sait qu'il existe a''_{m+1} tel que, pour $0 < a \leqslant a''_{m+1}$

$$\sup_{x_1\in]0,a]} \frac{|\nu_{0,a}(x_1)|}{x_1^{m+1}} \leqslant \frac{1}{a^{m+1}} .$$

D'autre part, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe a'_m et une constante C_m tels que, pour $0 < a \leqslant a'_m$ on ait $|\nu_a(x_1)|/x_1^m \leqslant C_m/a^m$ pour $x_1 \in]0, a]$; donc pour $0 < a \leqslant a'_m$ et $x_1 \in]0, a]$,

$$\left|\frac{x_1\tilde{\mu}\nu_a}{x_1^{m+1}}\right| \leqslant \sup_{x_1\in[0,a]} |\tilde{\mu}(x_1)| \frac{C_m}{a^m} \;\Rightarrow\; \frac{1}{x_1^{m+1}}|k_0[x_1\tilde{\mu}\nu_a]| \leqslant \|k_0\|_{0,0,m+1,0,a} \sup_{x_1\in[0,a]} |\tilde{\mu}(x_1)| \frac{C_m}{a^m} .$$

Si on pose alors $a'_{m+1} = \inf(a'_m, a''_{m+1})$ on aura, pour $0 < a \leqslant a'_{m+1}$ et $x_1 \in]0, a]$:

$$\left|\frac{\nu_a(x_1)}{x_1^{m+1}}\right| \leqslant \frac{1}{a^{m+1}} \Big(1 + a\|k_0\|_{0,0,m+1,0,a} \sup_{x_1 \in [0,a]} |\tilde{\mu}(x_1)|\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_{m+1}}{a^{m+1}} \qquad \text{où } C_{m+1} \text{ ne dépend pas de } a.$$

Il reste à montrer que:

$$\forall f \in C_{00}(n_1, n_2, a) \qquad \nu_a(x_1) \times k[f](a, x_2) = 0$$

or

$$\nu_a(x_1) \times k[f](a, x_2) = (kd - 1)[k[f]] = k[f] - k[f] = 0 \,.$$

C) *Inversion de* $d = x_1^{p_1+1}(\partial/\partial x_1) - (\mu_0 + \ldots + \mu_{p_1} x_1^{p_1})$ *lorsque* $\mathrm{Re}(\mu_0) = 0$. Posons

$$d_1 = \frac{1}{x_1}[d + \mu_0] = x_1^{p_1}\frac{\partial}{\partial x_1} - (\mu_1 + \mu_2 x_1 + \ldots + \mu_{p_1} x_1^{p_1 - 1}) \,.$$

Soit k_1 l'inverse à droite de d_1 construit précédemment

$$\big(\text{on suppose que l'on } a, \text{ ou bien } p_1 > 1 \text{ et } \mathrm{Re}(\mu_1) \neq 0 \text{ ou bien } p_1 = 1\big) \,.$$

1) On pose, pour $f \in C_{00}(n_1, n_2, a)$,

$$k[f] = \exp\left(-\frac{\mu_0}{p_1 x_1^{p_1}}\right) k_1 \left[\frac{\exp\left(\dfrac{\mu_0}{p_1 x_1^{p_1}}\right)}{x_1} f\right]$$

(on supposera donc $n_1 \geqslant N_1 + 1$, où N_1 est l'entier « associé » à l'inverse k_1 et $n_2 \geqslant 0$).

Les applications suivantes sont continues

$$k\colon\ C_{00}(n_1, n_2, a) \to C_{00}(n_1 - 1, n_2, a)$$
$$C_{01}(n_1, n_2, a) \to C_{01}(n_1 - 1, n_2, a)$$

de plus, pour tout f dans $C_{00}(n_1, n_2, a)$, $k[f]$ est dérivable par rapport à x_1 sur $]0, a] \times [0, a]$ et on a:

$$dk[f] = f \qquad \text{sur }]0, a] \times [0, a] \,.$$

2) On a de façon évidente

$$\forall f \in C_{01}(n_1, n_2, a), \qquad k\left[\frac{\partial f}{\partial x_2}\right] = \frac{\partial k[f]}{\partial x_2}.$$

3) Soit $f \in C_{10}(n_1, n_2, a)$. Calculons $(kd-1)[f]$.

$$kd - 1 = \left(\exp\left(-\frac{\mu_0}{p_1 x_1^{p_1}}\right) k_1 \frac{\exp\left(\frac{\mu_0}{p_1 x_1^{p_1}}\right)}{x_1}\right)(x_1 d_1 - \mu_0) - 1 =$$

$$= \exp\left(-\frac{\mu_0}{p_1 x_1^{p_1}}\right) k_1 \exp\left(\frac{\mu_0}{p_1 x_1^{p_1}}\right) d_1 - \mu_0 \exp\left(-\frac{\mu_0}{p_1 x_1^{p_1}}\right) k_1 \frac{\exp\left(\frac{\mu_0}{p_1 x_1^{p_1}}\right)}{x_1} - 1.$$

Or

$$\exp\left(\frac{\mu_0}{p_1 x_1^{p_1}}\right) d_1 = d_1 \exp\left(\frac{\mu_0}{p_1 x_1^{p_1}}\right) + \frac{\mu_0}{x_1} \exp\left(\frac{\mu_0}{p_1 x_1^{p_1}}\right)$$

d'après la formule de Leibniz, donc

$$kd - 1 = \exp\left(-\frac{\mu_0}{p_1 x_1^{p_1}}\right)(k_1 d_1 - 1) \exp\left(\frac{\mu_0}{p_1 x_1^{p_1}}\right)$$

donc

$$(kd-1)[f] = \exp\left(-\frac{\mu_0}{p_1 x_1^{p_1}}\right)(k_1 d_1 - 1)\left[\exp\left(\frac{\mu_0}{p_1 x_1^{p_1}}\right) f\right]$$

$$= \exp\left(-\frac{\mu_0}{p_1 x_1^{p_1}}\right) \nu_{1,a}(x_1) \times \exp\left(\frac{\mu_0}{p_1 a^{p_1}}\right) f(a, x_2)$$

(où $\nu_{1,a}(x_1)$ désigne la fonction plate « associée » à d_1 et k_1)

$$= \exp\left(\frac{\mu_0}{p_1 a^{p_1}} - \frac{\mu_0}{p_1 x_1^{p_1}}\right) \nu_{1,a}(x_1) f(a, x_2)$$

on pose

$$\nu_a(x_1) = \exp\left(\frac{\mu_0}{p_1 a^{p_1}} - \frac{\mu_0}{p_1 x_1^{p_1}}\right) \nu_{1,a}(x_1)$$

et ν_a vérifie de façon évidente les conditions imposées dans le lemme.

Si $\mathrm{Re}\,(\mu_1) = 0$ on réitère le procédé (ou encore on construit k par récurrence sur p_1).

REMARQUE 7. Soient d, k, N_1, ν_a comme dans le lemme 6.

Si $f \in C_{10}(n_1, 0, a)$ (avec $n_1 \geqslant 0$ et $n_1 \geqslant N_1$) et si $\nu_a \equiv 0$, on peut aussi écrire

$$(kd-1)[f](x_1, x_2) = \nu_a(x_1, x_2) f(0, x_2) \qquad \text{pour } (x_1, x_2) \in]0, a] \times [0, a].$$

V) *Démonstration du lemme 3 dans le cas de matrices triangulaires.*

LEMME 7. *Soit l'opérateur différentiel* $D'_1 = x_1^{p_1+1}(\partial/\partial x_1) - A(x_1, x_2)$, *où*

$$A(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} a_{11}(x_1) & a_{12}(x_1, x_2) & \cdots & a_{1,n}(x_1, x_2) \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{22}(x_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,n}(x_1, x_2) \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}(x_1) \end{pmatrix}$$

avec $a_{ij}(x_1, x_2)$ *fonction* C^∞ *de* (x_1, x_2) *au voisinage de* $(0, 0)$ *dans* $\mathbf{R}^2$ *à valeurs complexes, pour* i *et* j *tels que* $1 \leqslant i < j \leqslant n$;

$a_{ii}(x_1)$ *polynôme en* x_1, *à coefficients complexes, de degré au plus* p_1 *on supposera de plus, si* $a_{ii}(x_1) = a_i^0 + a_i^1 x_1 + \ldots + a_i^{p_1} x_1^{p_1}$, *que* $-2p_1 > \operatorname{Re}(a_i^{p_1})$.

On a alors:

1) *Il existe un entier positif ou nul* l_1, *un réel positif* a_0 *et pour tout réel* a *tel que* $0 < a \leqslant a_0$ *une application linéaire continue*

$$K'_1 \colon C^n_{00}(-p_1, 0, a) \to C^n_{00}(-l_1 - p_1, 0, a)$$

vérifiant:

a) *Pour* $(n_1, n_2) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ *avec* $n_1 \geqslant -p_1$ *les applications rectrictions de* K'_1 *suivantes sont continues*:

$$K'_1 \colon C^n_{00}(n_1, n_2, a) \to C^n_{00}(n_1 - l_1, n_2, a)$$
$$C^n_{01}(n_1, n_2, a) \to C^n_{01}(n_1 - l_1, n_2, a)$$

et leur norme est bornée par une constante indépendante de a *et de* n_2.

b) $\forall f \in C^n_{00}(-p_1, 0, a)$, $K'_1[f]$ *est dérivable par rapport à* x_1 *sur* $]0, a] \times \times [0, a]$ *et on a* $D'_1 K'_1[f] = f$ *sur* $]0, a] \times [0, a]$

c) $\forall f \in C^n_{00}(-p_1, 0, a)$, $\forall \lambda \in C_0(0, a)$ $K'_1[\lambda f] = \lambda K'_1[f]$

2) $\forall f \in C^n_{01}(-p_1, 0, a)$, $\qquad \dfrac{\partial K'_1[f]}{\partial x_2} = K'_1\left[\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right] + \left(K'_1 \dfrac{\partial A}{\partial x_2} K'_1\right)[f]$.

2) *Il existe une matrice* $\mathcal{N}'_a(x_1, x_2)$ *de fonctions* C^∞ *de* (x_1, x_2) *au voisinage de* $(0, 0)$ *dans* $\mathbf{R}^2$, *plates comme fonctions de* x_1 *en* $x_1 = 0$ *telle que*:

a) $D'_1[\mathcal{N}'_a] = 0$

b) $\forall f \in C^n_{10}(-p_1, 0, a)(K'_1 D'_1 - I)[f](x_1, x_2) = \mathcal{N}'_a(x_1, x_2) f(a, x_2)$

c) *Pour tout entier positif ou nul m, il existe un réel a'_m strictement positif et une constante C_m tels que, pour $0 < a \leqslant a'_m$ on ait:*

$$\max\left(\sup_{(x_1,x_2)\in]0,a]\times[0,a]} \frac{\|\mathcal{N}'_a(x_1, x_2)\|}{x_1^m}, \quad \sup_{(x_1,x_2)\in]0,a]\times[0,a]} \frac{\|\partial\mathcal{N}'_1(x_1, x_2)/\partial x_2\|}{x_1^m}\right) \leqslant \frac{C_m}{a^m}.$$

REMARQUE 8. La condition imposée sur les $a_{ii}(x_1)$ au début du lemme 7 n'est pas très restrictive, puisqu'on peut toujours s'y ramener, en posant dans le système différentiel $x_1^{p_1+1}(\partial y/\partial x_1) - A(x_1, x_2)y$, $y = x_1^r z$, avec r entier suffisamment grand.

DÉMONSTRATION.

1) On pose $d_i = x_1^{p_1+1}(\partial/\partial x_1) - a_{ii}(x_1)$

k_i l'opérateur inverse à droite de x_i construit dans le lemme 6

$v_{a,i}(x_1, x_2)$ la fonction C^∞ plate de x_1, associée à d_i (voir lemme 6, 3) (avec l'hypothèse faite au début du lemme 7 sur $\operatorname{Re}(a_i^{p_1})$, les k_i sont définis sur $C_{00}(-p_1, 0, a)$).

Soit

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \in C_{00}^n(-p_1, 0, a).$$

On définit K'_1 de la façon suivante:

$$K'_1[f] = \begin{bmatrix} k'_1[f] \\ \vdots \\ k'_{n-1}[f] \\ \vdots \\ k'_n[f] \end{bmatrix}$$

où les $k'_{n-i}[f]$ sont définis par récurrence sur i par:

$$\begin{cases} k'_n[f] = k_n[f_n] \\ k'_{n-1}[f] = k^{n-1}[f_{n-1} + a_{n-1,n}k'_n[f]] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ k'_{n-i}[f] = k_{n-i}\left[f_{n-i} + \sum_{j=1}^{i} a_{n-1,n-i+j}k'_{n-i+j}[f]\right] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ k'_1[f] = k_1\left[f_1 + \sum_{j=1}^{n-1} a_{1.1+j}k'_{1+j}[f]\right]. \end{cases}$$

La propriété 1 du lemme 7 est immédiate.

2) Soit

$$f=\begin{bmatrix} f_1\\ \vdots\\ f_n\end{bmatrix}\in C^n_{00}(-p_1,0,a)\,.$$

Montrons que

$$\frac{\partial K'_1[f]}{\partial x_2}=K'_1\left[\frac{\partial f}{\partial x_2}\right]+\left(K'_1\frac{\partial A}{\partial x_2}K'_1\right)[f].$$

Posons

$$g=\begin{bmatrix} g_1\\ \vdots\\ g_n\end{bmatrix}=\frac{\partial A}{\partial x_2}K'_1[f]\,.$$

On a donc, pour $0\leqslant i\leqslant n-1$,

$$g_{n-i}=\sum_{n-i\leqslant j\leqslant n}\frac{\partial a_{n-i,j}k'_j}{\partial x_2}[f]=\sum_{n-i+1\leqslant j\leqslant n}\frac{\partial a_{n-i,j}}{\partial x_2}k'_j[f]\,.$$

On a à montrer, pour $0\leqslant i\leqslant n-1$, l'égalité suivante:

$$(E_{n-i})\colon\frac{\partial k'_{n-i}[f]}{\partial x_2}=k'_{n-i}\left[\frac{\partial f}{\partial x_2}+g\right]$$

ce qui se fait par récurrence sur i.

* $i=0$

$$(E_n)\Leftrightarrow\frac{\partial k_n[f_n]}{\partial x_2}=k_n\left[\frac{\partial f_n}{\partial x_2}\right]$$

ce qui est vrai d'après le lemme 6, 2).

* Supposons vraies (E_n), (E_{n-1}), ..., (E_{n-i}) et montrons (E_{n-i-1}):

$$(E_{n-i-1})\Leftrightarrow\frac{\partial k'_{n-i-1}[f]}{\partial x_2}=k'_{n-i-1}\left[\frac{\partial f}{\partial x_2}+g\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\partial}{\partial x_2}k_{n-i-1}\left[f_{n-i-1}+\sum_{j=1}^{i+1}a_{n-i-1,\,n-i-1+j}k'_{n-i-1+j}[f]\right]=$$

$$=k_{n-i-1}\left[\frac{\partial f_{n-i-1}}{\partial x_2}+\sum_{j=1}^{i+1}a_{n-i-1,\,n-i-1+j}k'_{n-i-1+j}\left[\frac{\partial f}{\partial x_2}\right]+\right.$$

$$\left.+\sum_{n-i\leqslant j\leqslant n}\frac{\partial a_{n-i-1,j}}{\partial x_2}k'_j[f]\right]+\sum_{j=1}^{i+1}a_{n-i-1,n-i-1+j}k'_{n-i-1+j}[g]\,.$$

$\Leftrightarrow$ (d'après le lemme 6, 2))

$$k_{n-i-1}\left[\frac{\partial f_{n-i-1}}{\partial x_2}+\sum_{j=1}^{i+1}\frac{\partial a_{n-i-1,n-i-1+j}}{\partial x_2}k'_{n-i-1+j}[f]+\right.$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{i+1}a_{n-i-1,n-i-1+j}\frac{\partial}{\partial x_2}k'_{n-i-1+j}[f]\right]=k_{n-i-1}\left[\frac{\partial f_{n-i-1}}{\partial x_2}+\right.$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{i+1}a_{n-i-1,n-i-1+j}k'_{n-i-1+j}\left[\frac{\partial f}{\partial x_2}+g\right]+\sum_{n-i\leqslant j\leqslant n}\frac{\partial a_{n-i-1,j}}{\partial x_2}k'_j[f]\right]$$

ce qui est vrai, puisque d'après l'hypothèse de récurrence, on a, pour $1\leqslant j\leqslant i+1$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}k'_{n-i-1+j}[f]=k'_{n-i-1+j}\left[\frac{\partial f}{\partial x_2}+g\right].$$

3) *a*) Posons $-K'_1[A]-I=(K'_1D'_1-I)[-I]=\mathcal{N}'_a(x_1,x_2)$ et montrons que

$$\forall f\in C^n_{10}(-p_1,0,a)\qquad (K'_1D'_1-I)[f](x_1,x_2)=\mathcal{N}^n_a(x_1,x_2)f(a,x_2)$$
$$\text{pour } (x_1,x_2)\in\,]0,a]\times[0,a]\,.$$

REMARQUE 9. Posons

$$a_{(i)}=\begin{cases}0 & \text{si } \nu_{a,i}\equiv 0\\ a & \text{si } \nu_{a,i}\not\equiv 0\end{cases}\qquad \text{pour } 1\leqslant i\leqslant n$$

soit χ_i l'application:

$$C_{00}(0,0,a)\to C_0(0,a)$$
$$f(x_1,x_2)\mapsto f(a_{(i)},x_2),$$

et soit χ' l'application:

$$C^n_{00}(0,0,a)\to C^n_0(0,a)$$
$$(f_1,\dots,f_n)\ \mapsto\big(\chi_1[f_1]\dots\chi_i[f_i]\dots\chi_n[f_n]\big)\,.$$

On a, (voir remarque 7), pour $1\leqslant i\leqslant n$, $(k_id_i-1)[f]=\nu_{a,i}\chi_i[f]$ pour $f\in C_{10}(0,0,a)$.

On montre, dans ce qui suit, que:

$$\begin{cases}\forall f\in C^n_{10}(0,0,a)(K'_1D'_1-I)[f]=\mathcal{N}'_a\chi'[f] & \text{sur }]0,a]\times[0,a]\\ \chi'[\mathcal{N}'_a]=-E \text{ où } E=\operatorname{diag}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n) & \text{avec } \varepsilon_i=0 \text{ ou } 1\,.\end{cases}$$

Posons $\mathcal{N}'_a = (\nu'_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Les coefficients $\nu'_{i,j}$ de la matrice $\mathcal{N}'_a$ sont liés par la relation de récurrence suivante sur i, qui permet de les calculer:

$$\left\{\begin{array}{l}
* \quad \forall(i,l) \text{ tels que } 1\leqslant i\leqslant n-1,\ 1\leqslant l\leqslant n \\[1ex]
\nu'_{n-i-1,l} = (k_{n-i-1}d_{n-i-1}-1)[\delta_{n-i-1,l}] + \\[1ex]
\qquad\qquad + k_{n-i-1}\left[\sum_{j=1}^{i+1} a_{n-i-1,n-i-1+j}\nu'_{n-i-1+j,l}\right] = \\[1ex]
\qquad\qquad = \nu_{a,n-i-1}\delta_{n-i-1,l} + k_{n-i-1}\left[\sum_{j=1}^{i+1} a_{n-i-1,n-i-1+j}\nu'_{n-i-1+j,l}\right] \\[1ex]
\qquad\qquad\qquad\qquad \text{où } \delta_{n-i-1,l} \text{ désigne le symbole de Kronecker.} \\[1ex]
* \quad \nu'_{n,l} = (k_n d_n - 1)[\delta_{n,l}] = \nu_{a,n}\delta_{n,l} \text{ pour } 1\leqslant l\leqslant n.
\end{array}\right.$$

Posons

$$h = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_i \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = D'_1[f] \quad \text{où} \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \in C^n_{10}(0, 0, a)$$

on a, pour $0\leqslant i\leqslant n-1$:

$$h_{n-i} = x_1^{p_1+1}\frac{\partial f_{n-i}}{\partial x_1} - \sum_{j\geqslant n-i} a_{n-i,j}f_j = d_{n-i}[f_{n-i}] - \sum_{j>n-i} a_{n-i,j}f_j$$

et on a à montrer, pour $0\leqslant i\leqslant n-1$, les égalités:

$$(E)_{n-i}\colon k'_{n-i}[h] - f_{n-i} = \sum_{l=1}^{n} \nu'_{n-i,l}\chi_l[f_l]$$

* $i = 0$

$$\begin{aligned}(E_n) \ &\Leftrightarrow\ k'_n[h] - f_n = \sum_{l=1}^{n} \nu'_{n,l}\chi_l[f_l] \\ &\Leftrightarrow\ k_n d_n[f_n] - f_n = \nu_{a,n}\chi_n[f_n]\end{aligned}$$

ce qui est vrai, (voir remarque 9).

* Supposons montrées (E_n), $(E_{n-1}) \dots (E_{n-i})$ et montrons (E_{n-i-1})

$$
\begin{aligned}
(E_{n-i-1}) \Leftrightarrow\ & k'_{n-i-1}[h] - f_{n-i-1} = \sum_{l=1}^{n} \nu'_{n-i-1,l}\chi_l[f_l] \\
\Leftrightarrow\ & k_{n-i-1}\Big[h_{n-i-1} + \sum_{j=1}^{i+1} a_{n-i-1,\,n-i-1+j} k'_{n-i-1+j}[h]\Big] - \\
& \qquad\qquad - f_{n-i-1} = \sum_{l=1}^{n} \nu'_{n-i-1,l}\chi_l[f_l] \\
\Leftrightarrow\ & k_{n-i-1} d_{n-i-1}[f_{n-i-1}] - f_{n-i-1} + k_{n-i-1}\Big[-\sum_{j>n-i} a_{n-i,j} f + \\
& \qquad + \sum_{j=1}^{i+1} a_{n-i-1,\,n-i-1+j} k'_{n-i-1+j}[h]\Big] = \sum_{l=1}^{n} \nu'_{n-i-1,l}\chi_l[f_l] \\
\Leftrightarrow\ & \nu_{a,n-i-1}\chi_{n-i-1}[f_{n-i-1}] + k_{n-i-1}\Big[\sum_{j=1}^{i+1} a_{n-i-1,\,n-i-1+j}\big(k'_{n-i-1+j}[h] - \\
& \qquad - f_{n-i-1+j}\big)\Big] = \sum_{l=1}^{n} \nu'_{n-i-1,l}\chi_l[f_l], \quad \text{d'après la remarque 9} \\
\Leftrightarrow\ & \nu_{a,n-i-1}\chi_{n-i-1}[f_{n-i-1}] + k_{n-i-1}\Big[\sum_{j=1}^{i+1} a_{n-i-1,\,n-i-1+j}\big(k'_{n-i-1+j}[h] - \\
& \qquad - f_{n-i-1+j}\big)\Big] = \sum_{l=1}^{n} \nu_{a,n-i-1}\Big\{\delta_{n-i-1,l} + \\
& \qquad + k_{n-i-1}\Big[\sum_{j=1}^{i+1} a_{n-i-1,\,n-i-1+j}\nu'_{n-i-1+j,l}\Big]\Big\}\chi_l[f_l]
\end{aligned}
$$

ce qui est vrai d'après l'hypothèse de récurrence.

La démonstration de: $\forall f \in C^n_{10}(-p_1, 0, a)$ $(K'_1D'_1 - I)[f] = \mathcal{N}'_a f(a, x_2)$ est la même: on remplace simplement χ_l par χ.

b) Reste à montrer que $\mathcal{N}'_a$ est une matrice de fonctions C^∞ au voisinage de $(0, 0)$ vérifiant la condition 3, c, ce qui se fait par récurrence sur i, en utilisant:

$$
\left\{
\begin{aligned}
& \nu'_{n-i-1,l} = \nu_{a,n-i-1}\delta_{n-i-1,l} + k_{n-i-1}\Big[\sum_{j=1}^{i+1} a_{n-i-1,\,n-i-1+j}\nu'_{n-i-1+j,l}\Big] \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant n-1 \quad 1 \leqslant l \leqslant n \\
& \nu'_{n,l} = \nu_{a,n}\delta_{n,l} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{pour } 1 \leqslant l \leqslant n
\end{aligned}
\right.
$$

en utilisant aussi le lemme 6, 1) a) et 3) c) ainsi que la remarque 6.

c) Pour montrer que $\chi'[\mathcal{N}'_a] = -E$, il suffit de remarquer que $\chi_i \circ k_i = 0$ sur $C_{00}(p_1, 0, a)$, ce qui provient de l'égalité $k_i d_i - 1 = \nu_{a,i} \circ \chi_i$ (vraie sur $C_{00}(0, 0, a)$) et que $\chi_i[\nu_{a,i}] = -1$ ou 0, ce que l'on vérifie facilement.

V) *Démonstration du lemme* 3.

On utilisera pour la démonstration du lemme 3, le lemme suivant:

LEMME 8. *Soit le système différentiel*

$$\begin{cases} \tilde{D}_1 = x_1^{p_1+1} \dfrac{\partial}{\partial x_1} - \tilde{A}(x_1, x_2) \\ \tilde{D}_2 = x_2^{p_2+1} \dfrac{\partial}{\partial x_2} - \tilde{B}(x_1, x_l) \end{cases}$$

où $\tilde{A}(x_1, x_2) = A(x_1, x_2) + P_1(x_1, x_2)$

A comme dans le lemme 7

P_1 matrice de fonctions appartenant à $\mathcal{T}_{x_1}$

$\tilde{B}(x_1, x_2)$ matrice de fonctions C^∞ au voisinage de $(0, 0)$ *dant* $\mathbf{R}^2$.
Alors le lemme 7 *est vrai pour l'opérateur différentiel $\tilde{D}_1$ (où l'on remplace dans* 1, 2, 3 *K_1' par $\tilde{K}_1$, A par $\tilde{A}$, D_1' par $\tilde{D}_1$, $\mathcal{N}_a'$ par $\tilde{\mathcal{N}}_a$); de plus, on a*:

4) *Sur $C_{01}^m(0, 0, a)$ est vraie l'égalité suivante*:

$$\tilde{D}_2\tilde{K}_1 - \tilde{K}_1\tilde{D}_2 = \tilde{K}_1\tilde{\Delta}\tilde{K}_1 + (\tilde{K}_1\tilde{D}_1 - I)\tilde{B}\tilde{K}_1$$

$$\text{où} \quad \tilde{\Delta} = x_2^{p_2+1}\frac{\partial \tilde{A}}{\partial x_2} - \tilde{B}\tilde{A} - \left(x_1^{p_1+1}\frac{\partial \tilde{B}}{\partial x_1} - \tilde{A}\tilde{B}\right)$$
$$= \tilde{D}_2[\tilde{A}] - \tilde{D}_1[\tilde{B}].$$

5) $\tilde{D}_2[\tilde{\mathcal{N}}_a] = \tilde{\mathcal{N}}_a\chi[-\tilde{B}\tilde{E}] + \tilde{K}_1[\tilde{\Delta}\tilde{\mathcal{N}}_a]$

où $\tilde{E}$ est une matrice $n \times n$ de fonctions de x_2, C^∞ au voisinage de 0.

DÉMONSTRATION. On construit $\tilde{K}_1$ à partir du K_1' du lemme 7 comme indiqué dans le lemme 5 (puisque $P_1(x_1, x_2)$ peut s'écrire $x_1^{l_1+1}\tilde{P}(x_1, x_2)$, où $\tilde{P}$ est C^∞ au voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^2$, où l_1 est l'entier associé à K_1' dans le lemme 7).

Les propriétés 1 et 2 du lemme 7 sont donc immédiatement vérifiées par $\tilde{K}_1$.

La propriété 3 se démontre exactement comme dans le lemme 6 (démonstration B) 3)).

De plus, on a $\tilde{\mathcal{N}}_a = (I - K_1'x_1^{l_1+1}\tilde{P})^{-1}[\tilde{\mathcal{N}}_a']$

$$= (I - K_1'x_1^{l_1+1}\tilde{P})^{-1}[(K_1'D_1' - I)[I]]$$

$$= (\tilde{K}_1\tilde{D}_1 - I)[I]$$
$$(= -\tilde{K}_1[\tilde{A}] - I).$$

Montrons 4).

$$(\tilde{K}_1\tilde{D}_1 - I)\tilde{B}\tilde{K}_1 = \tilde{K}_1\tilde{D}_1\tilde{B}\tilde{K}_1 - \tilde{B}\tilde{K}_1 =$$
$$= \tilde{K}_1\tilde{D}_1[\tilde{B}]\tilde{K}_1 + \tilde{K}_1 B x_1^{p_1+1}\frac{\partial \tilde{K}_1}{\partial x_1} - \tilde{B}\tilde{K}_1 \quad \text{(d'après la formule de Leibniz)}$$
$$= \tilde{K}_1\tilde{D}_1[\tilde{B}]\tilde{K}_1 + \tilde{K}_1\tilde{B}(\tilde{A}\tilde{K}_1 + I) - \tilde{B}\tilde{K}_1$$
$$= \tilde{K}_1\tilde{D}_1[\tilde{B}]\tilde{K}_1 + \tilde{K}_1\tilde{B}\tilde{A}\tilde{K}_1 + \tilde{K}_1 + \tilde{K}_1\tilde{B} - \tilde{B}\tilde{K}_1$$
$$= \tilde{K}_1(\tilde{D}_1[\tilde{B}] + \tilde{B}\tilde{A})\tilde{K}_1 + \tilde{K}_1\tilde{B} - \tilde{B}\tilde{K}_1 .$$

Donc

$$\tilde{D}_2\tilde{K}_1 - \tilde{K}_1\tilde{D}_2 = x_2^{p_2+1}\frac{\partial \tilde{K}_1}{\partial x_2} - \tilde{B}\tilde{K}_1 - \tilde{K}_1 x_2^{p_2+1}\frac{\partial}{\partial x_2} + \tilde{K}_1\tilde{B}$$
$$= x_2^{p_2+1}\frac{\partial \tilde{K}_1}{\partial x_2} - \tilde{K}_1 x_2^{p_2+1}\frac{\partial}{\partial x_2} +$$
$$+ (\tilde{K}_1\tilde{D}_1 - I)\tilde{B}\tilde{K}_1 - \tilde{K}_1(\tilde{D}_1[\tilde{B}] + \tilde{B}\tilde{A})\tilde{K}_1$$
$$= x_2^{p_2+1}\tilde{K}_1\frac{\partial \tilde{A}}{\partial x_2}\tilde{K}_1 + (\tilde{K}_1\tilde{D}_1 - I)\tilde{B}\tilde{K}_1 - \tilde{K}_1(\tilde{D}_1[\tilde{B}] + \tilde{B}\tilde{A})\tilde{K}_1$$
$$= \tilde{K}_1(\tilde{D}_2[\tilde{A}] - \tilde{D}_1[\tilde{B}])\tilde{K}_1 + (\tilde{K}_1\tilde{D}_1 - I)\tilde{B}\tilde{K}_1$$
$$= \tilde{K}_1\tilde{\Delta}\tilde{K}_1 + (\tilde{K}_1\tilde{D}_1 - I)\tilde{B}\tilde{K}_1 .$$

Montrons 5):

On a vu un peu plus haut que $\mathcal{N}_a = -\tilde{K}_1[\tilde{A}] - I$.

Donc $$\tilde{D}_2[\mathcal{N}_a] = -\tilde{D}_2\tilde{K}_1[\tilde{A}] - \tilde{D}_2[I]$$
$$= -\tilde{D}_2\tilde{K}_1[\tilde{A}] + \tilde{B} .$$

Or, d'après 4, on a:

$$\tilde{D}_2\tilde{K}_1 - \tilde{K}_1\tilde{D}_2 = (\tilde{K}_1\tilde{\Delta}\tilde{K}_1 + (\tilde{K}_1\tilde{D}_1 - I)\tilde{B}\tilde{K}_1)[\tilde{A}] + \tilde{B}$$

donc

$$D_2[\mathcal{N}_a] = -(\tilde{K}_1\tilde{D}_2 + \tilde{K}_1\tilde{\Delta}\tilde{K}_1 + (\tilde{K}_1\tilde{D}_1 - I)\tilde{B}\tilde{K}_1)[\tilde{A}] + \tilde{B}$$
$$= -\tilde{K}_1[\tilde{D}_2[\tilde{A}]] - (\tilde{K}_1\tilde{\Delta}\tilde{K}_1)[\tilde{A}] + \tilde{B} - (\tilde{K}_1\tilde{D}_1 - I)\tilde{B}\tilde{K}_1[\tilde{A}]$$
$$= -\tilde{K}_1[\tilde{\Delta} + \tilde{D}_1[\tilde{B}]] - \tilde{K}_1\tilde{\Delta}\tilde{K}_1[\tilde{A}] + \tilde{B} - (\tilde{K}_1\tilde{D}_1 - I)\tilde{B}\tilde{K}_1[\tilde{A}]$$
$$= \tilde{K}_1[-\tilde{\Delta}(I + \tilde{K}_1[\tilde{A}])] - (\tilde{K}_1\tilde{D}_1 - I)[\tilde{B}(\tilde{K}_1[\tilde{A}] + I)]$$
$$= \tilde{K}_1[\tilde{\Delta}\mathcal{N}_a] + (\tilde{K}_1\tilde{D}_1 - I)[\tilde{B}\mathcal{N}_a]$$

$$
\begin{aligned}
(\tilde{K}_1\tilde{D}_1 - I)[\tilde{B}\mathcal{N}_a] &= \mathcal{N}_a\chi[\tilde{B}\mathcal{N}_a] \\
&= \mathcal{N}_a\chi[\tilde{B}]\chi[\mathcal{N}_a] \\
&= -\mathcal{N}_a\chi[\tilde{B}]\tilde{E}
\end{aligned}
$$

où $\tilde{E} = \chi[\mathcal{N}_a]$.

Donc

$$\tilde{D}_2\mathcal{N}_a = [\mathcal{N}_a]\chi[-\tilde{B}\tilde{E}] + \tilde{K}_1[\tilde{A}\mathcal{N}_a]\,.$$

Démonstration du lemme 3.

On a vu (chapitre II, lemme 6) qu'il existait une transformation $T(x_1, x_2)$, C^∞ au voisinage de $(0, 0)$ dans $\mathbb{R}^2$, dont l'inverse est de la forme $\left(1/(x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2})\right)T_1(x_1, x_2)$ (α_1 et α_2 entiers positifs ou nuls, $T_1(x_1, x_2)$ matrice C^∞ au voisinage de $(0, 0)$ dans $\mathbb{R}^2$), telle que, si on pose $v = Tw$, le système

$$
\left\{
\begin{aligned}
& x_1^{p_1+1}\frac{\partial v}{\partial x_1} - M_1(x_1, x_2)v \\
& x_2^{p_2+1}\frac{\partial v}{\partial x_2} - M_2(x_1, x_2)v
\end{aligned}
\right.
$$

soit changé en

$$
\left\{
\begin{aligned}
& x_1^{p_1+1}\frac{\partial w}{\partial x_1} - \tilde{A}(x_1, x_2)w \\
& x_2^{p_2+1}\frac{\partial w}{\partial x_2} - \tilde{B}(x_1, x_2)w
\end{aligned}
\right.
$$

où $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ ont la forme indiquée dans le lemme 8.

On pose alors (avec les notations du lemme 8)

$$K_1 = T\tilde{K}_1T^{-1}\,.$$

Montrons que L_1, L_2 et L_3 sont vérifiés:

L_1) est évident (avec $N_1 = \alpha_1 - p_1$, $N_2 = \alpha_2$, $l_1 = \tilde{l}_1 + \alpha_1$, $l_2 = \alpha_2$)

L_2):

$$
\begin{aligned}
D_2K_1 - K_1D_2 &= (T\tilde{D}_2T^{-1})(T\tilde{K}_1T^{-1}) - (T\tilde{K}_1T^{-1})T\tilde{D}_2T^{-1}) \\
&= T(\tilde{D}_2\tilde{K}_1 - \tilde{K}_1\tilde{D}_2)T^{-1} \\
&= T(\tilde{K}_1\tilde{A}\tilde{K}_1 + (\tilde{K}_1\tilde{D}_1 - I)\tilde{B}\tilde{K}_1)T^{-1} \qquad \text{(d'après le lemme 8, 4)}
\end{aligned}
$$

$$= T\tilde{K}_1 T^{-1}(T\tilde{\Delta}T^{-1})T\tilde{K}_1 T^{-1} + T(\tilde{K}_1\tilde{D}_1 - I)T^{-1}(T\tilde{B}T^{-1})T\tilde{K}_1 T^{-1}$$
$$= K_1 \Delta K_1 + (K_1 D_1 - I)(T\tilde{B}T^{-1})K_1$$

$$D_2K_1 - K_1D_2 = K_1\Delta K_1 + (K_1D_1 - I)\left(M_2 - x_2^{p_2+1}\frac{\partial T}{\partial x_2}T^{-1}\right)K_1$$
$$= K_1\Delta K_1 + (K_1D_1 - I)QK_1$$

où $Q(x_1, x_2) = M_2(x_1, x_2) - x_2^{p_2+1}(\partial T/\partial x_2)T^{-1}$ a la forme indiquée dans le lemme.

L_3) Posons:

$$\mathcal{N}_a(x_1, x_2) = T(x_1, x_2)\tilde{\mathcal{N}}_a(x_1, x_2)T^{-1}(a, x_2)$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{N}_a = T\tilde{\mathcal{N}}_a\chi(T^{-1})$$

on a:

$$\mathcal{N}_a = T(x_1, x_2)\tilde{\mathcal{N}}_a(x_1, x_2)\frac{1}{a^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}}T_1(a, x_2) = \frac{1}{x_2^{\alpha_2}}\mathcal{N}'_a(x_1, x_2)$$

où $\mathcal{N}'_a(x_1, x_2) = (1/a^{\alpha_1})T(x_1, x_2)\tilde{\mathcal{N}}_a(x_1, x_2)T_1(a, x_2)$ est une matrice de fonctions C^∞ sur un voisinage de $(0, 0)$ dans $\mathbb{R}^2$ et plates comme fonction de x_1 en $x_1 = 0$.

a) Montrons $D_1[\mathcal{N}_a] = 0$

$$\begin{aligned} D_1[\mathcal{N}_a] &= D_1[T\tilde{\mathcal{N}}_a\chi[T^{-1}]] \\ &= D_1[T\tilde{\mathcal{N}}_a]\chi[T^{-1}] \\ &= D_1T[\tilde{\mathcal{N}}_a]\chi[T^{-1}] \\ &= T\tilde{D}_1[\tilde{\mathcal{N}}_a]\chi[T^{-1}] \\ &= 0 \qquad \text{puisque } \tilde{D}_1[\tilde{\mathcal{N}}_a] = 0 \end{aligned}$$

b) Montrons que, pour $f \in C_{10}^n(N_1, \alpha_2, a)$ on a:

$$(K_1D_1 - I)[f] = \mathcal{N}_a\chi[f]$$

$$\begin{aligned} (K_1D_1 - I)[f] &= \big((T\tilde{K}_1T^{-1})(T\tilde{D}_1T^{-1}) - I\big)[f] \\ &= (T\tilde{K}_1\tilde{D}_1T^{-1} - I)[f] \\ &= \big(T(\tilde{K}_1\tilde{D}_1 - I)T^{-1}\big)[f] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(K_1D_1 - I)[f] &= T(\tilde{K}_1\tilde{D}_1 - I)[T^{-1}[f]] \\ &= T\tilde{\mathcal{N}}_a\chi[T^{-1}[f]] \\ &= T\tilde{\mathcal{N}}_a\chi[T^{-1}]\chi[f] \\ &= \mathcal{N}_a\chi[f]\end{aligned}$$

c) est évident.

$$\begin{aligned} d)\quad D_2[\mathcal{N}_a] &= D_2[T\tilde{\mathcal{N}}_a\chi[T^{-1}]] \\ &= D_2T[\tilde{\mathcal{N}}_a\chi[T^{-1}]] \\ &= T\tilde{D}_2[\tilde{\mathcal{N}}_a\chi[T^{-1}]] \\ &= T\left[\tilde{D}_2[\tilde{\mathcal{N}}_a]\chi[T^{-1}] + \tilde{\mathcal{N}}_a x_2^{p_2+1}\frac{\partial}{\partial x_2}\chi[T^{-1}]\right] \\ &= T\Big[\tilde{\mathcal{N}}_a\chi[-\tilde{B}\tilde{E}]\chi[T^{-1}] + \tilde{K}_1[\tilde{\Delta}\tilde{\mathcal{N}}_a]\chi[T^{-1}] + \\ &\qquad\qquad + \tilde{\mathcal{N}}_a x_2^{p_2+1}\frac{\partial}{\partial x_2}\chi[T^{-1}]\Big]\end{aligned}$$

(d'après le lemme 8, 5)

$$\begin{aligned} &= \mathcal{N}_a\chi[-T\tilde{B}\tilde{E}T^{-1}] + K_1T[\tilde{\Delta}\tilde{\mathcal{N}}_a]\chi[T^{-1}] + \\ &\qquad\qquad + \mathcal{N}_a\chi\left[Tx_2^{p_2+1}\frac{\partial T^{-1}}{\partial x_2}\right] = \\ &= \mathcal{N}_a\chi\left[-M_2T\tilde{E}T^{-1} - x_2^{p_2+1}T\frac{\partial T}{\partial x_2}(T\tilde{E}T^{-1} - I)\right] + \\ &\qquad\qquad + K_1[\Delta\mathcal{N}_a] \\ &= \mathcal{N}_aM_3 + K_1[\Delta\mathcal{N}_a]\end{aligned}$$

où M_3 a la forme indiquée dans le lemme 3.

Ce qui termine la démonstration du théorème.

REMARQUE. On doit pouvoir montrer que le système non linéaire donné au début de ce chapitre,

$$(S):\begin{cases} x_1^{p_1+1}\dfrac{\partial y}{\partial x_1} = F_1(x_1, x_2, y) \\ x_2^{p_2+1}\dfrac{\partial y}{\partial x_2} = F_2(x_1, x_2, y)\end{cases}$$

a, lorsque p_1 ou p_2 est strictement positif, une infinité de solutions.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. GERARD - Y. SIBUYA, *Etude de certains systèmes de Pfaff avec singularités*, Lecture Notes in Math. no. 712, Springer-Verlag.

[2] A. H. M. LEVELT, *Jordan decomposition for a class of singular differential operators* Ark. Mat., **13** (1975), pp. 1-27.

[3] R. GERARD - A. H. M. LEVELT, *Sur les connexions à singularités régulières dans le cas de plusieurs variables*, Funkcial. Ekvac., **19** (1976), pp. 149-173.

[4] B. MALGRANGE, *Sur les points singuliers des équations différentielles*, Enseignement Math., **20** (1974), pp. 147-176.

[5] B. MALGRANGE, *Ideal of differentiable functions*, Oxford University Press 1966, pp. 1-12.

[6] W. B. JURKAT, *Meromorphe Differentialgleichungen*, Lecture Notes in Math. no. 637, Springer-Verlag.

Institut de Recherche Mathématique Avancée
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg, France.