ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

ERIC AMAR

Extension de formes $\bar\partial_b$ fermées et solutions de l'équation $\bar\partial_b u = f$

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 7, nº 1 (1980), p. 155-179

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1980_4_7_1_155_0>

Extension de formes $\bar{\partial}_b$ fermées et solutions de l'équation $\bar{\partial}_b u = f$.

ERIC AMAR

Introduction.

Soit D un domaine strictement pseudo-convexe de $\mathbb{C}^n$ défini par la fonction strictement plurisousharmonique r, de classe C^2: $D = \{z \in \mathbb{C}^n, r(z) < 0\}$.

On munit le bord ∂D de D de la pseudo-distance δ de Koranyi-Hörmander [3].

Pour z dans D, z assez proche de ∂D, on note $\pi(z)$ la projection normale de z sur ∂D; celle-ci est bien définie car r est de classe C^2.

On note pour $z_0 \in \partial D$ et $h > 0$: $B(z_0, h) = \{z \in \partial D, \delta(z_0, z) < h\}$

$$Q(z_0, h) = \{z \in D; -h \leqslant r(z) < 0 \text{ et } \pi(z) \in B(z_0, h)\}.$$

Rappelons que si μ est une mesure dans D, on dit que μ est de Carleson [1] si: $\exists C > 0$, $\forall z_0 \in \partial D$, $\forall h > 0$, $|\mu|(Q(z_0, h)) \leqslant C|B(z_0, h)|$ où $|B|$ est la mesure de Lebesgue de B sur ∂D.

On note $V^0(D)$ l'espace des mesures bornées sur D; $V^1(D)$ celui des mesures de Carleson.

On note encore $V^\alpha(D)$ l'espace interpolé faible par la méthode réelle entre $V^0(D)$ et $V^1(D)$ i.e. [1]

$$0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \qquad V^\alpha(D) = [V^0(D), V^1(D)]_{\alpha,\infty}$$

de même pour l'interpolé fort

$$0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \qquad W^\alpha(D) = [V^0(D), V^1(D)]_{\alpha,p} \qquad \text{avec } p = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Pervenuto alla Redazione il 14 Dicembre 1978 ed in forma definitiva il 5 Novembre 1979.

Ces espaces ainsi que leur correspondant pour $\alpha > 1$, ont été caractérisés dans [1].

Rappelons cette caractérisation.

Si Ω est un ouvert de ∂D, on note

$$T(\Omega) = \{z \in D,\ B(\pi(z), -r(z)) \subset \Omega\},$$

$$\mu \in V^\alpha(D) \Leftrightarrow \exists C > 0 \text{ t.q. } |\mu|(T(\Omega)) \leqslant |\Omega|^\alpha \quad \text{pour tout ouvert } \Omega,$$

$$\mu \in W^\alpha(D) \Leftrightarrow \exists \nu \in V^1(D), \quad \exists h \in L^{1/(1-\alpha)}(|\nu|) \text{ t.q. } \mu = h\cdot\nu .$$

Ces espaces de mesures sont tels que la mesure μ de $W^\alpha(D)$ est balayée par de « bons noyaux » en une fonction de $L^p(\partial D)$ avec $p = 1/(1-\alpha)$ pour $0 \leqslant \alpha < 1$ et en une fonction de $BMO(\partial D)$ pour $\alpha = 1$ [1]; en particulier le noyau de H. Skoda [8] étant un bon noyau cela permet de donner de bonnes hypothèses sur f pour que $\bar\partial u = f$ ait une solution u dans $L^p(\partial D)$. (Ces hypothèses sont essentiellement les meilleurs possibles [1]).

Le but de ce travail est d'étudier la « réciproque »: i.e. à quelles conditions une $(0,1)$ forme f définie sur ∂D et $\bar\partial_b f = 0$ est-elle prolongeable dans D en une forme $\tilde f$, $\bar\partial \tilde f = 0$ et $\tilde f$ vérifiant de bonnes estimées.

Si f est une $(0,1)$ forme dans D, on dit que $f \in V^\alpha_{(0,1)}(D)$ (resp. $f \in W^\alpha_{(0,1)}(D)$) si les coefficients de f et de $(f \wedge \bar\partial r)/\sqrt{-r}$ sont dans $V^\alpha(D)$ (resp. $W^\alpha_{(0,1)}(D)$) [1].

Si f est une $(0,1)$ forme définie seulement sur ∂D, on note f_b la restriction de f à l'espace holomorphe tangent en chaque point [8]; utilisant alors les noyaux de H. Skoda [8] on montre dans le § 1 le théorème suivant.

THÉORÈME 1. *Soit f une $(0,1)$ forme sur ∂D, $\bar\partial_b f = 0$, alors il existe une extension $\tilde f$ de f dans D, $\bar\partial \tilde f = 0$, telle que*

i) *si, pour $p \in]1, 2n[$, $f_b \in L^p(\partial D)$ alors $\tilde f \in W^\alpha_{(0,1)}(D)$ avec $\alpha = (2n+1)/2n - 1/p$;*

ii) *$f_b \in L^1(\partial D)$ alors $\tilde f \in V^{1/2n}_{(0,1)}(D)$ et si $f_b \in L^{2n}(\partial D)$, alors $\tilde f \in V^1_{(0,1)}(D)$;*

iii) *si pour $p > 2n$, $f_b \in L^p(D)$ alors $\tilde f \in V^\alpha_{(0,1)}(D)$ avec $\alpha = (2n+1)/2n - 1/p > 1$.*

Pour résoudre le problème $\bar\partial_b u = f$, au sens de la formule de Stokes, où f est donnée directement au bord, on peut commencer par prolonger f dans D grâce au théorème 1 et résoudre l'équation grâce aux formules directes de H. Skoda.

On obtient alors, grâce aux théorèmes 7 et 8 de [1], avec Γ_β l'espace anisotrope introduit par E. Stein [9]:

THÉORÈME 2. *Soit f une $(0,1)$ forme sur ∂D, $\bar\partial_b f = 0$, alors si $f_b \in L^1(\partial D)$ on a qu'il existe une fonction u sur ∂D telle que $\bar\partial_b u = f$ et qui vérifie:*

$$f_b \in L^p, \ pour\ 1 < p < 2n \Rightarrow u \in L^{p'}\ avec\ 1/p' = 1/p - 1/2n$$

$$f_b \in L^1 \Rightarrow u \in L^{2n/(2n-1),\infty}; \qquad f_b \in H^1 \Rightarrow u \in L^{2n/(2n-1)}$$

$$f_b \in L^{2n} \Rightarrow u \in BMO; \qquad f_b \in L^{2n,1} \Rightarrow u \in L^\infty$$

$$f_b \in L^p, \quad pour\ \infty \geqslant p \geqslant 2n \Rightarrow u \in \Gamma_\beta,\ \beta = \tfrac{1}{2} - n/p$$

$$f_b \in \Gamma_\beta \Rightarrow u \in \Gamma_{\beta+1/2}.$$

Les théorèmes 1 et 2 ne sont prouvés que pour la boule de C^2 mais la preuve est identique dans le cas général, comme dans [1]. De même ils valent pour les (p, q) formes, les noyaux de H. Skoda ayant les mêmes singularités que pour les $(0, 1)$ formes.

Cette solution vérifie aussi les estimations fines de Folland et Stein [4]. Pour le prouver au § 2 on utilise la technique des intégrales singulières sur les espaces de nature homogène [3].

On pourrait également utiliser les résultats de [6] ou [4], mais la méthode que nous avons choisie: montrer directement une décomposition presque orthogonale des opérateurs, ne nécessite que la structure d'espace de nature homogène au sens de [3] et pas la structure de groupe qui est fondamentale dans [4].

Ainsi cette partie se généralise-t-elle sans modification au cas strictement pseudo-convexe.

THÉORÈME 3. *Soit f une $(0, 1)$ forme sur le bord S de la boule unité* $\mathbf{B}$ *de* $\mathbf{C}^n$ *t.q.* $\bar\partial_b f = 0$; *la solution u du théorème 2 vérifie alors*:

a) $f_b \in L^p(S) \Rightarrow u \in L^p_{1/2}(S)$;

b) *si Z est un champ holomorphe tangent alors* $f_b \in L^p(S) \Rightarrow Z\cdot u \in L^p$ *pour* $1 < p < +\infty$; $f_b \in H^1(S) \Rightarrow Z\cdot u \in L^1$; $f_b \in L^1 \Rightarrow Z\cdot u \in L^{1,\infty}$; $f_b \in L^\infty \Rightarrow Z\cdot u \in BMO$;

c) $f_b \in L^p_k \Rightarrow Z\cdot u \in L^p_k$.

L'intérêt de ce travail n'est pas les estimations obtenues au théorème 3 qui sont bien connues [4] bien qu'ici on utilise une méthode différente, « plus souple », et que la solution u n'est pas la solution de [4], mais

1) Les estimations fines en termes de mesure de Carleson d'ordre α pour le prolongement d'une $(0, 1)$ forme donnée au bord et

2) Le fait que ce prolongement linéaire ne fait pas perdre de la régularité pour la solution du problème $\bar\partial_b u = f$. C'est en ce sens que le théorème 3 est intéressant. G. M. Henkin a annoncé des résultats analogues

dans [5]. Mais comme la notion de classe V^α et W^α n'y est pas, ses résultats sont moins aisément exploitables.

1. – Prolongement d'une (0, 1) forme.

Soit $\mathbf{B}$ la boule unité de $\mathbf{C}^2$ et $S = \partial B$ la sphère unité.

Soit $f = f_1 d\bar{z}_1 + f_2 d\bar{z}_2$ une $(0,1)$ forme dont les coefficients sont dans $L^1(S)$. On dit que f est $\bar\partial$ fermée au sens de la formule de Stokes si:

$$\forall \varphi \in \mathbf{C}^\infty_{2,0}(\bar{\mathbf{B}})\,, \qquad \bar\partial\varphi = 0 \text{ alors } \int_S f\wedge\varphi = 0\,. \tag{1.1}$$

On veut prolonger f dans $\mathbf{B}$ en une forme $\bar\partial$ fermée au sens habituel. Posons

$$\tilde{f}_i(\zeta) = \int_S \big(K^i_t(z,\zeta) + L^i_t(z,\zeta)\big) f(z)\beta(z)\,; \qquad i = 1, 2 \tag{1.2}$$

où $\beta(z) = dz_1\wedge dz_2$, $\xi = t\zeta$, $\zeta \in S$, $t \in [0, 1[$ et

$$\left\{\begin{array}{l} K^1_t(z,\zeta) = \dfrac{(1-t^2)\bar{z}_2}{D_t(z,\zeta)}\,; \qquad K^2_t(z,\zeta) = -\dfrac{(1-t^2)\bar{z}_1}{D_t(z,\zeta)} \\[2ex] L^1_t(z,\zeta) = \dfrac{\zeta_2(\bar{z}_1\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2\bar{\zeta}_1)}{D_t(z,\zeta)}\,; \qquad L^2_t(z,\zeta) = \dfrac{-\zeta_1(\bar{z}_1\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2\bar{\zeta}_1)}{D_t(z,\zeta)} \\[2ex] \text{avec } D_t(z,\zeta) = (1 - t\bar{\zeta}\cdot z)^2(1 - t\zeta\cdot\bar{z}). \end{array}\right. \tag{1.3}$$

Les noyaux (1.3) ne sont autres que les noyaux introduits par H. Skoda [8].

Posons alors $\tilde{f} = \tilde{f}_1 d\bar{\xi}_1 + \tilde{f}_2 d\bar{\xi}_2$ et $\beta(z) = dz_1\wedge dz_2$, il vient le lemme:

Lemme 1.1. *Soit f une $(0,1)$ forme $\bar\partial$ fermée au sens de la formule de Stokes, alors $\tilde{f}$ (donnée par (1.2)) est une extension de f, au sens de la formule de Stokes, $\bar\partial$ fermée dans $\mathbf{B}$.*

Preuve. Soit $u \in \mathbf{C}^\infty(\bar{\mathbf{B}})$, posons $\omega = \bar\partial u$, il vient:

$$I = \int_{\mathbf{B}} \omega\wedge\tilde{f}\wedge\beta = \int_{\mathbf{B}} (-\,\omega_1\tilde{f}_2 + \omega_2\tilde{f}_1)\,dv$$

où dv est le volume euclidien et $\omega = \omega_1 d\bar{\xi}_1 + \omega_2 d\bar{\xi}_2$.

Explicitons $\tilde{f}_i$:

$$I = \int_{\mathbf{B}} \Big[-\omega_1(\xi) \int_S (K_t^2(z,\zeta) + L_t^2(z,\zeta)) f(z) \wedge \beta(z) + \omega_2(\xi) \int_S (K_t^1 + L_t^1) f \wedge \beta \Big] dv\,.$$

Par Fubini:

$$I = \int_S \Big\{ \int_{\mathbf{B}} K(z,\xi) \wedge \omega(\xi) \Big\} f(z) \wedge \beta(z) \tag{1.4}$$

où on a posé

$$K(z,\xi) = (K_t^1 + L_t^1)\, d\xi_1 \wedge d\xi_2 \wedge d\bar\xi_2 - (K_t^2 + L_t^2)\, d\xi_1 \wedge d\bar\xi_1 \wedge d\xi_2\,.$$

Mais l'accolade dans (1.4) représente la formule de H. Skoda [8], i.e. $u'(z) = \int_{\mathbf{B}} K(z,\xi) \wedge \omega(\xi)$ est une fonction sur S telle que $\bar\partial_b u' = \omega$, c'est-à-dire

$$\forall \varphi \in \mathbb{C}^\infty_{2,1}(\overline{\mathbf{B}})\,, \qquad \bar\partial \varphi = 0\,, \qquad \int_S u' \varphi = \int_{\mathbf{B}} \omega \wedge \varphi\,. \tag{1.5}$$

Mais alors $\bar\partial_b(u' - u) = 0$ et comme f est $\bar\partial_b$ fermée, on a

$$\int_S u f \wedge \beta = \int_S u' f \wedge \beta\,. \tag{1.6}$$

Mais (1.4) donne alors

$$\int_S u'(z) f(z) \wedge \beta(z) = \int_{\mathbf{B}} \omega \wedge f \wedge \beta$$

d'où

$$\int_S f(z) \wedge u(z) \beta(z) = \int_{\mathbf{B}} \omega \wedge \beta \wedge \tilde{f}\,. \tag{1.7}$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que $u\beta$ est la (2, 0) forme la plus générale pour avoir que $\tilde{f}$ est un prolongement, au sens de la formule de Stokes, de f.

Pour voir que $\tilde{f}$ est $\bar\partial$ fermée dans $\mathbf{B}$, prenons $\varphi \in \mathbb{C}^\infty(\overline{\mathbf{B}})$, $\varphi = 0$ hors de la boule B_r de centre 0 et de rayon $r < 1$, il vient grâce à (1.7):

$$\int_S f \wedge \varphi\beta = 0 = \int_{\mathbf{B}} \tilde{f} \wedge \bar\partial\varphi \wedge \beta = \int_{\mathbf{B}_r} \tilde{f} \wedge \bar\partial\varphi \wedge \beta\,.$$

Appliquant Stokes à S_r il vient:

$$\int_{S_r} \tilde{f} \wedge \varphi\beta = \int_{\mathbf{B}_r} (\bar\partial\tilde{f} \wedge \varphi\beta + \tilde{f} \wedge \bar\partial\varphi \wedge \beta)$$

d'où: $\int_{B_r} \bar\partial \tilde f \wedge \varphi\beta = 0$. Comme on peut choisir φ arbitraire dans une boule Br' avec $r' < r$ il vient que $\bar\partial \tilde f = 0$ dans $B_{r'}$, cela valant pour $r' < 1$ quelconque, on a bien que $\tilde f$ est $\bar\partial$ fermée au sens habituel dans $\mathbf{B}$.

REMARQUE 1.1. Les coefficients $\tilde f_i(\xi)$ ne tendent pas vers $f_i(z)$ quand ξ tend vers z; toutefois le noyau K étant une identité approchée sur le complexe tangent, $(\tilde f \wedge \beta)(\xi)$ tend vers $f \wedge \beta(z)$ quand ξ tend vers z de façon admissible (par exemple radiale), dès que $f \wedge \beta$ est dans $L^1(S)$ pour presque tout z.

On a alors le théorème suivant.

THÉORÈME 1.1. *Soit f une $(0, 1)$ forme sur S, $\bar\partial_b f = 0$ et $f_b = f \wedge \beta \in L^p(S)$; alors il existe une extension $\tilde f$ de f dans $\mathbf{B}$, $\bar\partial \tilde f = 0$ et telle que:*

$f_b \in L^1 \Rightarrow \tilde f \in V^{1/4}_{(0,1)}$; *$f_b \in L^p$, pour $1 < p < 4 \Rightarrow \tilde f \in W^{\alpha}_{(0,1)}$ avec $\alpha = 5/4 - 1/p$*

$f_b \in L^4 \Rightarrow \tilde f \in V^1_{(0,1)}$; $\infty \geqslant p > 4$, $f_b \in L^p \Rightarrow \tilde f \in V^{5/4-1/p}_{(0,1)}$.

PREUVE. Il nous faut montrer que $\tilde f_1 dv$, $\tilde f_2 dv$ et $\left((\xi_1 \tilde f_2 - \xi_2 \tilde f_1)/\sqrt{1 - |\xi|^2}\right) dv$ sont dans $W^\alpha(\mathbf{B})$.

On a:

$$\tilde f_1 = \int_S K^1_t(z, \zeta) f \wedge \beta + \int_S L^1_t(z, \zeta) f \wedge \beta$$

$$\tilde f_1 = I_1 + I_2 .$$

Voyons la première intégrale, on a:

$$K^1_t(z, \zeta) = \frac{(1 - t^2)\bar z_2}{D_t(z, \zeta)} .$$

Posant $u = 1 - t$, on a aisément

$$|K^1_t(z, \xi)| \leqslant C \frac{u}{[u + \delta(z, \zeta)]^3} . \tag{1.8}$$

Soit alors $\Omega = \bigcup_{i=1}^N B(z_i, \varrho_i)$ où $B(z_i, \varrho_i)$ est la pseudo-boule de centre z_i et de rayon ϱ_i

$$T(\Omega) = \bigcup_{i=1}^N Q(z_i, \varrho_i) ;$$

pour tester l'appartenance à W^α il suffit de le faire sur les ouverts de cette forme particulière.

Posons encore

$$\tilde{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{N} B(z_i, 2\varrho_i) \qquad \text{et} \qquad F(z) = \int_{T(\Omega)} |K_t^1(z, \zeta)|\, dv(\xi)\,.$$

On a alors:

LEMME 1.2. *La fonction $F(z)$ vérifie:*

$$\|F\|_q \leqslant C|\Omega|^{1/2+1/q}\,. \tag{1.9}$$

Preuve du lemme 1.2. Dans [1, lemme 4] on montre que $|K_t^1(z, \zeta)|$ est un « bon noyau » et [1, Theorème 1] que les « bons noyaux » balayent les mesures de Carleson W^α dans L^q avec $1/q = 1 - \alpha$.

Comme on a:

$$F(z) = \int_{B} |K_t^1(z, \zeta)|\, \chi\big(T(\Omega)\big)\, dv$$

on voit qu'il suffit d'avoir la norme dans $W^\alpha(\mathbf{B})$ de la mesure $\mu = \chi\big(T(\Omega)\big)\, dv$. ($\chi(E)$ est l'indicatrice de E).

Pour cela [1, Prop. 1] il nous faut décomposer μ en $\mu = h\cdot\nu$ où ν est de Carleson V^1 et $h \in L^q(|\nu|)$ et calculer la norme de cette mesure.

Pour cela, puisque $T(\Omega) = \bigcup_{i=1}^{N} Q(z_i, \varrho_i)$, considérons la mesure

$$d\nu = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\varrho_i}\, \chi\big(Q(z_i, \varrho_i)(\xi)\big)\, dv(\xi)\,.$$

C'est une mesure de V^1. En effet,

$$\forall z_0 \in \partial D,\ \forall h > 0, \qquad \int_{Q(z_0,h)} d\nu = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\varrho_i} \operatorname{vol}\big(Q(z_i, \varrho_i) \cap Q(z_0, h)\big)$$

mais les $Q(z_i, \varrho_i)$ sont disjoints et on a:

$$\operatorname{vol}\big(Q(z_i, \varrho_i) \cap Q(z_0, h)\big) \leqslant \varrho_i |B(z_i, \varrho_i) \cap B(z_0, h)|$$

d'où

$$\int_{Q(z_0,h)} d\nu \leqslant \sum_{i=1}^{N} |B(z_i, \varrho_i) \cap B(z_0, h)| \leqslant |B(z_0, h)|\,.$$

De plus, on a

$$\mu = \Big(\sum_{i=1}^{N} \varrho_i \chi(Q(z_i, \varrho_i))\Big) \cdot \nu = h \cdot \nu$$

et la norme de μ dans W^α est exactement celle de h dans $L^q(|\nu|)$ car ν est dans $V^1(\mathbb{B})$ de norme 1.

On a:

$$\|h\|_q^q = \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathbb{B}} \varrho_i^{q-1} \chi(Q_i)\, dv = \sum_{i=1}^{N} \varrho_i^{q+2} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{N} \varrho_i^2\Big)^{q/2+1/2} = |\Omega|^{1+q/2}$$

d'où $\|h\|_q \leqslant |\Omega|^{1/2+1/q}$. Appliquant alors le théorème de balayage, on en déduit la lemme 1.2.

On a:

$$I_1(\xi) = \int_S K_t^1(z, \zeta) f \wedge \beta(z)$$

d'où

$$J_1 = \int_{T(\Omega)} |I_1(\xi)|\, dv(\xi) \leqslant \int_{T(\Omega)} \int_S |K_t^1(z, \zeta)|\, |f\wedge\beta|\, dv(\xi)$$

par Fubini:

$$J_1 \leqslant \int_S |f\wedge\beta|(z) \Big\{ \int_{T(\Omega)} |K_t^1(z,\zeta)|\, dv(\xi)\Big\} = \int_S |f\wedge\beta| F(z)\,.$$

Par (1.9), il vient

$$J_1 \leqslant \|f\wedge\beta\|_p \|F\|_q \leqslant C|\Omega|^{1/2+1/q}. \tag{1.10}$$

Pour étudier I_2, on pose encore

$$G(z) = \int_{T(\Omega)} |L_t^1(z, \zeta)|\, dv(\xi)$$

on voit aisément que $\sqrt{1-t^2}\, L_t^1(z, \zeta)$ est un « bon » noyau et il nous faut donc évaluer la norme W^α de la mesure

$$\mu = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \chi(Q(z_i, \varrho_i))\, dv\,.$$

Pour cela on montre comme dans le lemme 1.2 que la mesure

$$\nu = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{1}{\varrho_i^{1/2}} \chi(Q(z_i, \varrho_i))\, dv$$

est de Carleson V^1 de norme indépendante de $T(\Omega)$ et que $\mu = h\cdot\nu$ avec $h = \sum_{i=1}^{N} \varrho_i^{1/2}\chi(Q(z_i, \varrho_i))$. La norme de h dans $L^q(|\nu|)$ est alors

$$\|h\|_q \leqslant C\cdot|\Omega|^{1/4+1/q}.$$

On en déduit alors, puisque $G(z) = \int_{\mathbf{B}} \sqrt{1-t^2}|L_t^1(z,\zeta)|\mu(\zeta)$ que

$$\|G\|_q \leqslant C|\Omega|^{1/4+1/q}. \tag{1.11}$$

On en tire donc

$$J_2 = \int_{T(\Omega)} |I_2(\xi)|dv(\xi) \leqslant C|\Omega|^{1/4+1/q}. \tag{1.12}$$

Comme (1.12) est plus mauvaise que (1.10):

$$\int_{T(\Omega)} |\tilde{f}_1|dv \leqslant C|\Omega|^{1/4+1/q} \quad \text{i.e. } \tilde{f}_1 dv \in V^{5/4-1/p}. \tag{1.13}$$

De la même manière, on montre que:

$$\tilde{f}_2 dv \in V^{5/4-1/p}. \tag{1.14}$$

Reste à étudier

$$\frac{\tilde{f}_1\xi_2 - \tilde{f}_2\xi_1}{\sqrt{1-|\xi|^2}}\,dv(\xi) = \tilde{f}_3.$$

Mais on a que $\tilde{f}_3$ est donné par:

$$\tilde{f}_3(\xi) = \int_S M_t(z,\zeta) f\wedge\beta \qquad \text{où} \qquad M_t(z,\zeta) = \frac{\zeta_2 K_t^1 - \zeta_1 K_t^2}{(1-t^2)^{1/2}}$$

c'est-à-dire

$$M_t(z,\zeta) = \frac{(1-t^2)^2(\bar{z}\cdot\zeta)}{D_t(z,\zeta)}.$$

On a encore

$$|M_t(z,\zeta)| \leqslant C\,\frac{u^{1/2}}{[u+\delta(z,\zeta)]^3}$$

d'où une singularité analogue à celle de L^1_t et donc, par la même méthode on a que: $\tilde{f}_3 dv \in V^{5/4-1/p}$.

Soit alors

$$p = 1 \Rightarrow \tilde{f} \in V^{5/4-1}_{(0,1)} = V^{1/4}_{(0,1)}$$

$$p = 4 \Rightarrow \tilde{f} \in V^1_{(0,1)}.$$

Par interpolation, on en déduit, utilisant [1]:

$$1 < p < 4 \Rightarrow \tilde{f} \in W^{5/4-1/p}_{(0,1)}.$$

Pour $f \wedge \beta \in L^4 \Rightarrow \tilde{f} \in V^1_{(0,1)}$ i.e. ses coefficients sont des mesures de Carleson. Pour $f \wedge \beta \in L^p$, $p > 4$ alors $\tilde{f} \in V^{\alpha}_{(0,1)}$ avec $\alpha = 5/4 - 1/p > 1$.

Il ne nous reste plus qu'à appliquer les résultats de [1].

THÉORÈME 1.2. *Soit f une $(0, 1)$ forme sur S, $\bar{\partial}_b$ fermée, alors si $f \wedge \beta \in L^p(S)$ on a qu'il existe une solution u au problème $\bar{\partial}_b u = \tilde{f}$ telle que si*

a) $p = 1$, $u \in L^{4/3,\infty}(S)$

$1 < p < 4$, $u \in L^r(S)$ *avec* $1/r = 1/p - 1/4$

$p = 4$, $u \in BMO(S)$

$p > 4$, $u \in \Gamma^{\beta}$ *avec* $\beta = 1/2 - 2/p$

b) $f \wedge \beta \in H^1(S)$, $u \in L^{4/3}(S)$

$f \wedge \beta \in L^{4,1}(S)$, $u \in L^{\infty}(S)$.

Il nous faut prouver le *b*). Pour cela soit T l'opérateur linéaire qui à $f \wedge \beta$ associe u; notons $T(z, z')$ son noyau, on a

$$T(z, z') = \int_{\mathbf{B}} R(z, \xi) K(z', \xi) dv(\xi)$$

où $K(z', \xi)$ est le noyau qui prolonge f en $\tilde{f}$ et où $R(z, \xi)$ est le noyau qui résoud le $\bar{\partial}_b$, [1] et [8].

L'adjoint de T, T^* a pour noyau $T^*(z, z') = T(z', z)$ et, reprenant exactement les mêmes arguments que pour T, l'adjoint T^* vérifie le *a*) du théorème 1.1.

On en déduit, notant $f^{\#}$ la fonction telle que $f \wedge \beta = f^{\#} d\sigma$ sur S, si f est une $(0, 1)$ forme:

$$\int_S Tf^{\#} \cdot g \, d\sigma = \int f^{\#} \cdot T^* g \, d\sigma$$

d'où si $f^\# \in C^\infty$ et $g \in L^4(S)$ on a:

$$\left|\int_S Tf^\# \cdot g\, d\sigma\right| = \left|\int_S f^\# \cdot T^* g\, d\sigma\right|$$

mais $T^* g \in BMO$ à cause du *a*) du théorème 1.1 d'où

$$\left|\int_S Tf^\# \cdot g\, d\sigma\right| \leqslant \|f^\#\|_{H^1} \cdot \|T^* g\|_{BMO} \leqslant C \|f\|_{H^1} \|g\|_{L^4}$$

car BMO est le dual de H^1 [7]. De cette inégalité a priori on déduit que T est borné de H^1 dans $L^{4/3}$.

De même si $g \in L^1(S)$ et $f^\# \in C^\infty$ on a:

$$\left|\int_S Tf^\# g\, d\sigma\right| \leqslant \|f^\#\|_{L^{4,1}(S)} \cdot \|T^* g\|_{L^{4/3,\infty}} \leqslant C \|f^\#\|_{L^{4,1}} \|g\|_{L^1}$$

car le dual de l'espace de Lorentz $L^{4,1}$ est $L^{4/3,\infty}$.

De cette inégalité, on déduit que T est borné de $L^{4,1}$ dans L^∞.

2. – Noyaux intégraux singuliers.

Les noyaux qui prolongent une $(0,1)$ forme f sont:

$$i = 1, 2, \qquad K_t^i(z,\zeta) = (-1)^i \frac{(1-t^2)\bar z_j}{D_t(z,\zeta)}, \quad j \neq i$$

$$i = 1, 2, \qquad L_t^i(z,\zeta) = \zeta_i \frac{(\bar z_1 \bar\zeta_2 - \bar z_2 \bar\zeta_1)}{D_t(z,\zeta)}$$

$$M_t(z,\zeta) = \frac{\zeta_2 K_t^2 + \zeta_1 K_t^1}{(1-t^2)^{1/2}} = \frac{(1-t^2)^{1/2}(\bar z \cdot \zeta)}{D_t(z,\zeta)}$$

où $D_t(z,\zeta) = (1 - t\bar\zeta \cdot z)^2 (1 - t\zeta \cdot \bar z)$ et on a déjà vu que le prolongement de f est:

$$i = 1, 2, \qquad \omega^i(t,z) = \int_S K_t^i(z,\zeta) f(\zeta) \wedge \beta(\zeta) + \int_S L_t^i(z,\zeta) \wedge \beta(\zeta)$$

et

$$\omega^3(t,z) = \int_S M_t(z,\zeta) f(\zeta) \wedge \beta(\zeta)$$

avec

$$\omega(x) = \omega^1 d\bar{x}_1 + \omega^2 d\bar{x}_2 \quad \text{où} \quad x = tz \quad \text{et} \quad \omega^i(x) = \omega^i(t, z)\,.$$

Les noyaux résolvant le $\bar{\partial}$ sont:

$$i = 1, 2, \qquad S_t^i(z, \zeta) = \frac{(1-t^2)\bar{z}_i}{D(z, \zeta)}$$

$$S_t^3(z, \zeta) = (1-t^2)^{1/2} \frac{(\bar{z}_1\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2\bar{\zeta}_1)}{D(z, \zeta)}\,.$$

La solution du problème est donc:

$$u(x) = \sum_{i=1}^{2} S^i \circ (K^i + L^i)(f \wedge \beta) + S^3 \circ M(f \wedge \beta)\,.$$

Posons Z le champ holomorphe tangent à S:

$$Z = \bar{z}_2 \frac{\partial}{\partial z_1} - \bar{z}_1 \frac{\partial}{\partial z_2}\,.$$

On s'intéresse à la régularité de $Z \cdot u$:

$$Z \cdot u = \sum_{i=1}^{2} (Z \cdot S^i) \circ (K^i + L^i)(f \wedge \beta) + (Z \cdot S^3) \circ M(f \wedge \beta)$$

et à celle de $\bar{Z} \cdot u$.

On va montrer que les noyaux:

$$\sum_{i=1}^{2} (Z \cdot S^i) \circ (K^i)\,, \qquad \sum_{i=1}^{2} (Z \cdot S^i) \circ L^i\,, \qquad (ZS^3) \circ M$$

sont des noyaux intégraux singuliers ainsi que ceux obtenus avec $\bar{Z}$ au lieu de Z. On en déduira les estimations voulues au § 3.

a) Calculs des dérivées.

Posons $\Omega(z, \zeta) = z_1\zeta_2 - z_2\zeta_1$, on vérifie aisément que:

$$(2.1) \qquad \begin{cases} Z \cdot S_t^i = \dfrac{2t(1-t^2)\bar{z}_i}{(1-t\zeta\cdot\bar{z})(1-t\bar{\zeta}\cdot z)^3}\, \bar{\Omega}(\zeta, z), \quad i = 1, 2 \\[2ex] Z \cdot S_t^3 = -\dfrac{2t(1-t^2)^{1/2}\, \bar{\Omega}^2(z, \zeta)}{(1-t\zeta\cdot\bar{z})(1-t\bar{\zeta}\cdot z)^3}\,. \end{cases}$$

De même:

$$
(2.2)\quad \begin{cases} i=1,2, & \bar Z\cdot S_t^i = \dfrac{(1-t^2)z_j}{D} + \dfrac{(1-t^2)t\bar z_i \Omega(\zeta, z)}{|1-t\bar\zeta\cdot z|^4}, \quad j\neq i \\ & \bar Z\cdot S_t^3 = (1-t^2)^{1/2}\dfrac{(t-z\cdot\bar\zeta)}{|1-t\bar\zeta\cdot z|^4}. \end{cases}
$$

b) Calcul des moyennes.

On veut calculer

$$
(2.3)\quad \int_S K_t^i(z,\zeta)\,d\sigma(z) = \int_S \frac{z_j(1-t^2)}{(1-t\bar z\cdot\zeta)(1-tz\cdot\bar\zeta)^2}\,d\sigma(z) = t\zeta_j, \quad i=1,2,\ j\neq i,
$$

car $1/(1-tz\cdot\bar\zeta)^2$ est le noyau de Cauchy conjugué.

$$
(2.4)\quad \int_S t_t^i(z,\zeta)\,d\sigma(z) = \int_S \frac{\zeta_i\,\bar\Omega(z,\zeta)\,d\sigma(z)}{(1-t\bar z\cdot\zeta)(1-tz\cdot\bar\zeta)^2} = 0, \quad i=1,2,
$$

pour la même raison

$$
\int_S M_t(z,\zeta)\,d\sigma(z) = (1-t^2)^{1/2}\int_S \frac{\bar z\cdot\zeta}{(1-t\bar z\cdot\zeta)(1-tz\cdot\bar\zeta)^2}\,d\sigma(z) = \frac{t(1-t^2)^{1/2}}{1-t^2}
$$

$$
(2.5)\quad \int_S M_t(z,\zeta)\,d\sigma(z) = \frac{1}{(1-t^2)^{1/2}}.
$$

On en déduit

$$
I^i = \int_S (zS_t^i\circ K_t^i)(x,z)\,d\sigma(z) = \int_S ZS_t^i(x,\zeta)K_t^i(z,\zeta)\,d\sigma(\zeta)\,d\sigma(z).
$$

$$
I^i = \int_S t\bar\zeta_j Z\cdot S_t^i(x,\zeta)\,d\sigma(\zeta) = 2t^2(1-t^2)\,\bar x_i\int_S \frac{\bar\zeta_j\,\bar\Omega(\zeta,x)\,d\sigma(\zeta)}{(1-t\zeta\cdot\bar x)(1-t\bar\zeta\cdot x)^3}.
$$

Faisons le changement de variable unitaire:

$$
\zeta_1' = \zeta\cdot\bar x, \quad \zeta_2' = \Omega(\zeta, x);
$$

$d\sigma$ est invariante et $\bar\zeta_j = f(\zeta')$ avec f antianalytique; il vient alors:

$$
I^i = 2t^2(1-t^2)\,\bar x_i\int_D \frac{d\lambda(\zeta_1')}{(1-t\zeta_1')(1-t\bar\zeta_1')^3}\int_{|\zeta_2'|^2=1-|\zeta_1'|^2=\varrho^2} f(\zeta_1', \varrho e^{i\theta})\varrho e^{-i\theta}\frac{d\theta}{2\pi}
$$

où $d\lambda$ est la mesure de Lebesgue normalisée sur D; f étant anti-analytique le dernier facteur est nul et donc

$$I^i = \int_S (Z \cdot S_t^i \circ K_t^i)(x, z)\, d\sigma(z) = 0 \qquad \forall t \in [0, 1[, \ i = 1, 2 . \tag{2.6}$$

Les relations (2.4) entraînent de suite

$$\int_S (Z \cdot S_t^i \circ L_t^i)(x, z)\, d\sigma(z) = 0 \qquad \forall t \in [0, 1[, \ i = 1, 2 . \tag{2.7}$$

Voyons

$$I^3 = \int_S (Z S_t^3 \circ M_t)(x, z)\, d\sigma(z) = \int_S Z \cdot S_t^3(x, \zeta) \frac{1}{(1 - t^2)^{1/2}}\, d\sigma(\zeta)$$

grâce à (2.5) soit encore

$$I^3 = \frac{1}{(1 - t^2)^{1/2}} (1 - t^2)^{1/2} \int_S \frac{(t - x\bar{\zeta})}{|1 - t\bar{\zeta} \cdot x|^4}\, d\sigma(\zeta)$$

mais $(1 - t^2)^2/|1 - t\zeta \cdot x|^4$ est le noyau de Poisson-Szegö de la boule, d'où $I^3 = 0$ car $(t - x \cdot \zeta)$ est anti-analytique

$$\int_S (Z \cdot S_t^3 M_t)\, d\sigma(z) = 0 \qquad \forall t \in [0, 1[. \tag{2.8}$$

Voyons

$$J = \int_S \sum_{i=1}^{2} (\bar{Z} \cdot S_t^i \circ K_t^i)(x, z)\, d\sigma(z) .$$

Il vient $J = \int_S \sum_{i=1}^{2} \bar{Z} \cdot S_t^i(x, Z) t\bar{\zeta}_i\, d\sigma(\zeta)$ grâce à (2.3) d'où, grâce à (2.2)

$$J = \int_S (1 - t^2) \left\{ \frac{(x_2\bar{\zeta}_2 + x_1\bar{\zeta}_1)}{D(x, \zeta)} - \frac{t|\Omega(x, \zeta)|^2}{D(x, \zeta)(1 - t\bar{x} \cdot \zeta)} \right\} d\sigma(\zeta)$$

soit

$$J = \int_S t(1 - t)^2 \frac{(t - x \cdot \bar{\zeta})}{|1 - t\bar{x} \cdot \zeta|^4}\, d\sigma(\zeta) = 0$$

d'où

$$\int_S \sum_{i=1}^{2} (\bar{Z}\cdot S_t^i) K_t^i(x, z)\, d\sigma(z) = 0 \qquad \forall t \in [0, 1[\,. \tag{2.9}$$

Exactement pour la même raison on a:

$$\int_S \bar{Z}\cdot S_t^3 \circ M_t\, d\sigma = 0 \qquad \forall t \in [0, 1[\,. \tag{2.10}$$

c) *Décomposition presque orthogonale.*

On va montrer la proposition suivante.

PROPOSITION 2.1. *Les noyaux suivants sont des noyaux intégraux singuliers sur* S

$$\int_0^1 \Big(\sum_{i=1}^{2} Z\cdot S_t^i K_t^i\Big) dt\,, \qquad \int_0^1 (Z\cdot S_t^3 M_t)\, dt\,, \qquad \int_0^1 \Big(\sum_{i=1}^{2} \bar{Z}\cdot S_t^i K_t^i\Big) dt,$$

$$\int_0^1 (\bar{Z}\cdot S_t^3 M_t)\, dt\,, \qquad \int_0^1 \Big(\sum_{i=1}^{2} Z\cdot S_t^i L_t^i\Big) dt \quad et \quad \int_0^1 \Big(\sum_{i=1}^{2} \bar{Z}\cdot S_t^i L_t^i\Big) dt.$$

Pour cela on va montrer que ces noyaux admettent une décomposition presque orthogonale au sens de M. Cotlar et on va appliquer les résultats de [3, Chap. VI] pour montrer que ces sont des intégrales singulières. L'avantage de cette méthode est que l'on n'utilise pas du tout le groupe $SU(2)$ et que ces résultats se généralisent aisément au cas strictement pseudoconvexe, comme dans [1].

Voyons le cas le plus difficile, i.e. posons

$$\int_0^{1-\varepsilon} \sum_{i=1}^{2} (Z\cdot S_t^i L_t^i)\, dt = R_\varepsilon(x, z)\,.$$

On a:

$$R_\varepsilon(x, z) = \int_0^{1-\varepsilon} \left\{ \int_S \frac{2t(1-t^2)\, \bar{x}\cdot\zeta \bar{\Omega}(x, \zeta)\, \bar{\Omega}(z, \zeta)\, d\sigma(\zeta)}{(1-t\bar{x}\cdot\zeta)(1-t\bar{\zeta}\cdot x)^3 (1-t\zeta\cdot\bar{z})(1-t\bar{\zeta}\cdot z)^2} \right\} dt.$$

Posons

$$(T_t x, \zeta) = \int_t^1 \frac{2v(1-v^2)\, dv}{(1-v\bar{x}\cdot\zeta)(1-v\bar{\zeta}\cdot x)^3} \cdot (\bar{x}\cdot\zeta)\, \bar{\Omega}(x, \zeta)$$

et

$$L_t(z, \zeta) = \frac{\bar{\Omega}(z, \zeta)}{(1 - t\zeta\cdot\bar{z})(1 - t\bar{\zeta}\cdot z)^2}, \qquad L_t' = \frac{dL_t}{dt}$$

et faisons dans R_ε une intégration par parties:

$$R_\varepsilon(x, z) = -\int_S T_t(x, \zeta)L_t(z, \zeta)\,d\sigma(\zeta)\Big]_{t=0}^{t=1-\varepsilon} + \int_0^{1-\varepsilon}\left\{\int_S T_t(x, \zeta)L_t'(z, \zeta)\,d\sigma(\zeta)\right\}dt\,.$$

Nous allons nous intéresser au 2-ème terme directement pour $\varepsilon = 0$

$$U(x, z) = \int_0^1\left\{\int_S T_t(x, \zeta)L_t'(z, \zeta)\,d\sigma(\zeta)\right\}dt$$

et posons $u = 1 - t$, avec pour simplifier l'écriture $T_u = T_{1-u}$ et $L_u' = L_{1-u}'$. Il vient

$$U(x, z) = \int_0^1\left\{\int_S T_u(x, \zeta)L_u'(z, \zeta)\,d\sigma(\zeta)\right\}du$$

et on va montrer que l'on a une décomposition presque orthogonale comme dans [3, chap. VI]

$$a_r(x, z) = \int_r^{2r}\left\{\int_S T_u(x, \zeta)L_u'(z, \zeta)\,d\sigma(\zeta)\right\}du\,. \tag{2.10}$$

Il nous faut montrer que:

α) $\displaystyle\int_S a_r(x, z)\,d\sigma(z) = 0$

β) $\displaystyle\int_S |a_r(x, z)|\left(1 + \frac{\delta^{1/2}(x, z)}{r^{1/2}}\right)d\sigma(z) < C \qquad \forall r \in\,]0, 1[$

γ) $\displaystyle\int_S |a_r(x, \zeta) - a_r(y, \zeta)|\,d\sigma(\zeta) \leqslant C\frac{\delta^{1/2}(x, y)}{r^{1/2}}$

où $\delta(x, y) = |1 - \bar{x}\cdot y|$ est la pseudo-distance habituelle sur S.

Voyons la condition β). Pour cela nous aurons besoin des estimations suivantes:

$$\sigma\{x \in S;\ \delta(x, y) = h\} \simeq h^2 \tag{2.12}$$

$$T_u(x, \zeta) = \int_0^u \frac{2(1 - v)v(2 - v)\,dv}{[v + (1 - v)(1 - \bar{x}\cdot\zeta)][(v + (1 - v)(1 - x\cdot\bar{\zeta}))]^3}\cdot(\bar{x}\cdot\zeta)\,\bar{\Omega}(x, \zeta)\,.$$

Mais on a:

$$|\Omega(x, \zeta)| \leqslant \delta(x, \zeta)^{1/2}. \tag{2.13}$$

En effet, faisons le changement de variable unitaire

$$\zeta_1' = \Omega(x, \zeta)$$
$$\zeta_2' = \bar{x}\cdot\zeta .$$

Il vient

$$|\zeta_1'|^2 \leqslant 1 - |\zeta_2'|^2 \leqslant |1 - \zeta_2'| = \delta(\mathbf{1}, \zeta')$$

où $\mathbf{1} = (0, 1)$, d'où (2.12) en revenant à ζ.

Portant (2.13) dans l'expression de T_u il vient:

$$|T_u(x, \zeta)| \leqslant C\delta(x, \zeta)^{1/2} \int_0^u \frac{v\,dv}{[v + \partial(x, \zeta)]^4}. \tag{2.14}$$

De même

$$L_u(z, \zeta) = \frac{\bar\Omega(z, \zeta)}{[u + (1-u)(1-\zeta\cdot\bar{x})][u + (1-u)(1-\bar\zeta\cdot z)]^2}$$

d'où

$$|L_u'(z, \zeta)| \leqslant C\,\frac{\delta(z, \zeta)^{1/2}}{[u + \delta(z, \zeta)]^4}. \tag{2.15}$$

On a donc à évaluer

$$I = \int_S \left| \int_r^{2r} \int_S T_u(x, \zeta) L_u'(z, \zeta)\, d\sigma(\zeta)\, du \right| \left(1 + \frac{\delta(x, z)^{1/2}}{r^{1/2}}\right) d\sigma(z).$$

Majorons en entrant les valeurs absolues et échangeons les intégrations grâce à Fubini

$$I \leqslant \int_r^{2r} \left\{ \int_{S^2} |T_u(x, \zeta)||L_u'(z, \zeta)| \left(1 + \frac{\delta(x, z)^{1/2}}{r^{1/2}}\right) d\sigma(\zeta)\, d\sigma(z) \right\} du.$$

Utilisons (2.14) et (2.15):

$$I \leqslant C \int_r^{2r} \left\{ \int_{S^2} \delta(x, \zeta)^{1/2} \left(\int_0^u \frac{v\,dv}{[v + \delta(x, \zeta)]^4} \right) \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \frac{\delta(z, \zeta)^{1/2}}{[u + \delta(z, \zeta)]^4} \left(1 + \frac{\delta(x, z)^{1/2}}{r^{1/2}}\right) d\sigma(\zeta)\, d\sigma(z) \right\} du.$$

Pour intégrer, on va découper en « couronnes »:

x fixé, ζ varie dans $\delta(x,\zeta)\in[2^n u, 2^{n+1}u[$.

x, ζ fixés, z varie dans $\delta(\zeta,z)\in[2^m u, 2^{m+1}u[$, $n, m\in\mathbf{Z}$.

Il vient alors, grâce à (2.12)

$$I\leqslant C\sum_{(n,m)\in\mathbf{Z}^2}\int_r^{2r}2^{n/2}u^{1/2}\left(\int_0^u\frac{v\,dv}{[v+2^n u]^4}\cdot\right)\cdot\frac{2^{m/2}u^{1/2}}{u^4(1+2^m)^4}\left(1+\frac{\delta(x,z)^{1/2}}{r^{1/2}}\right)u^2 2^{2n}u^2 2^{2m}du\,.$$

Mais on a [3, Chap. VI]: $\delta(x,z)^{1/2}\leqslant\delta(x,\zeta)^{1/2}+\delta(\zeta,z)^{1/2}$ et

$$\int_0^u\frac{v\,dv}{[v+2^n u]^4}=\int_0^1\frac{u^2t\,dt}{u^4[t+2^n]^4}=\frac{1}{u^2}\int_0^1\frac{t\,dt}{[t+2^n]^4},$$

d'où en regroupant les termes et avec $u\leqslant 2r$:

$$I\leqslant C\left\{\sum_{n\in\mathbf{Z}}2^{5n/2}\left(\int_0^1\frac{t\,dt}{[t+2^n]^4}\right)(1+2^{n/2})\sum_{m\in\mathbf{Z}}\frac{2^{5m/2}(1+2^{m/2})}{(1+2^m)^4}\right\}\int_r^{2r}\frac{du}{u}$$

car $(1+2^{n/2}+2^{m/2})\leqslant(1+2^{n/2})(1+2^{m/2})$.

Le 2-ème facteur converge visiblement. Pour le 1-er si $n\geqslant 0$, on majore $\int_0^1(t\,dt)/(t+2^{n/4})$ par $1/2^{n/4}$ si $n<0$ une intégration par parties donne $\int_0^1(t\,dt)/(t+a)^4\leqslant(1/6)(1/a^2)$ d'où la convergence de la première série et le fait que β est vérifié.

Voyons γ).

On a

$$I=\int_S\left|\int_r^{2r}\left\{\int_S T_u(x,\zeta)L'_u(z,\zeta)\,d\sigma(\zeta)\right\}du-\int_r^{2r}\left\{\int_S T_u(y,\zeta)L'_u(z,\zeta)\,d\sigma(\zeta)\,du\right\}\right|d\sigma(z)\,.$$

Il nous faut estimer la quantité:

$$|T_u(x,\zeta)-T_u(y,\zeta)|=|\bar{x}\cdot\zeta\bar{\Omega}(x,\zeta)V_u(x,\zeta)-\bar{y}\cdot\zeta\bar{\Omega}(y,\zeta)V_u(y,\zeta)|$$

où

$$V_u(x,\zeta)=\int_0^u \frac{2(1-v)v(2-v)\,dv}{[v+(1-v)(1-\bar x\cdot\zeta)][v+(1-v)(1-x\cdot\bar\zeta)]^3}.$$

Il vient

$$(2.16)\qquad |T_u(x,\zeta)-T_u(y,\zeta)|\leqslant|\bar x\cdot\zeta\bar\Omega(x,\zeta)-\bar y\cdot\zeta\bar\Omega(y,\zeta)||V_u(x,\zeta)| + |\bar y\cdot\zeta\bar\Omega(y,\zeta)||V_u(x,\zeta)-V_u(y,\zeta)|,$$

de même

$$(2.17)\qquad |T_u(x,\zeta)-T_u(y,\zeta)|\leqslant|\bar x\cdot\zeta\bar\Omega(x,\zeta)\bar y\cdot\zeta\bar\Omega(y,\zeta)||V_u(y,\zeta)| + |\bar x\cdot\zeta\bar\Omega(x,\zeta)||V_u(x,\zeta)-V_u(y,\zeta)|.$$

Comme

$$|\Omega(x,\zeta)|\leqslant C\delta(x,\zeta)^{1/2}\leqslant C$$

$$|(x-y)\cdot\bar\zeta|\leqslant|x-y|\leqslant C\delta(x,y)^{1/2}$$

$$|\Omega(x,\zeta)-\Omega(y,\zeta)|\leqslant C\delta(x,y)^{1/2}$$

le 1-er terme du membre de droite de (2.16) et (2.17) se majorent grâce à

$$(2.18)\qquad |\bar x\cdot\zeta\bar\Omega(x,\zeta)-\bar y\cdot\zeta\bar\Omega(y,\zeta)|\leqslant C\delta(x,y)^{1/2}.$$

Pour majorer le 2-ème terme on utilise

$$|V_u(x,\zeta)-V_u(y,\zeta)|\leqslant C|\nabla_x V_u(x',\zeta)||(x-y)\cdot\bar\zeta|,\qquad x'\in[x,y]$$

car V_u ne dépend que de $x\cdot\bar\zeta$.

Mais on a

$$(2.19)\qquad |(x-y)\cdot\bar\zeta|<\delta(x,y)+2\delta(x,y)^{1/2}\delta(y,\zeta)^{1/2}$$

et

$$(2.20)\qquad |(x-y)\cdot\bar\zeta|\leqslant\delta(x,y)+2\delta(x,y)^{1/2}\delta(x,\zeta)^{1/2}$$

en effet:

$$\begin{aligned}(x-y)\cdot\bar\zeta&=(x-y)\bar y+(x-y)\cdot\bar\zeta-(x-y)\cdot\bar y\\&=(x\bar y-1)+(x-y)(\bar\zeta-\bar y)\end{aligned}$$

d'où (2.19); de même pour (2.20).

D'autre part, on a aisément:

$$|\nabla_x V_u(x', \zeta)| \leqslant C\int_0^u \frac{v\,dv}{[v+\delta(x',\zeta)]^5}.$$

Donc, pour α, $1<\alpha$ que l'on choisira, il vient si

$$\zeta \text{ t.q.} \quad \begin{aligned}\delta(x,\zeta) &\geqslant \alpha\delta(x,y)\\ \delta(y,\zeta) &\geqslant \alpha\delta(x,y)\end{aligned}$$

alors

$$|\nabla_x V_u(x', \zeta)| \leqslant C\int_0^u \frac{v\,dv}{[v+\delta(x'',\zeta)]^5} \text{ avec } x''=x \text{ ou } y. \tag{2.21}$$

Pour ζ t.q. $\delta(x,\zeta)<\alpha\delta(x,y)$ ou $\delta(y,\zeta)\leqslant\alpha\delta(x,y)$.

On majore

$$|V_u(x,\zeta)-V_u(y,\zeta)| \leqslant |V_u(x,\zeta)|+|V_u(y,\zeta)|.$$

On a donc:

$$I \leqslant \int_r^{2r}\left\{\int_{S^2}|T_u(x,\zeta)-T_u(y,\zeta)||L'_u(z,\zeta)|\,d\sigma(\zeta)d\sigma(z)\right\}du$$

$$I \leqslant \int_r^{2r}\int_{\delta(x,\zeta)<\alpha\delta(x,y)}\int_S + \int_r^{2r}\int_{\delta(y,\zeta)<\alpha\delta(x,y)}\int_S + \int_r^{2r}\int_{\substack{\delta(x,\zeta)\geqslant\alpha\delta(x,y)\\ \delta(x,\zeta)\geqslant\alpha\delta(x,y)}}\int_S.$$

Soit

$$I \leqslant I_1+I_2+I_3.$$

Voyons I_1.

$$I_1 \leqslant C\int_r^{2r}\int_{\delta(x,\zeta)<\alpha\delta(x,y)}\int_S |L'_u|\{\delta(x,y)^{1/2}|V_u(y,\zeta)|+\delta(x,\zeta)^{1/2}(|V_u(x,\zeta)|+|V_u[y,\zeta)|\}.$$

On a

$$I_1 \leqslant C\delta(x,y)^{1/2}\int_r^{2r}\left\{\int_{S^2}|L'_u(z,\zeta)|(|V_u(y,\zeta)|+|V_u(x,\zeta)|)\right\}du$$

mais

$$|V_u(x,\zeta)| \leqslant C\int_0^u \frac{v\,dv}{[v+\delta(x,\zeta)]^4} = Cu^2\int_0^1 \frac{t\,dt}{[ut+\delta(x,\zeta)]^4}$$

donc en découpant encore en « couronnes » et en utilisant des majorations déjà vues on a avec $\delta(x,\zeta)=2^n u$ et $\delta(\zeta,z)=2^m u$ pour le premier terme et $\delta(y,\zeta)=2^n u$ et $\delta(\zeta,z)=2^m u$ pour le deuxième terme, il vient

$$I_1 \leqslant C\delta(x,y)^{1/2}\int_r^{2r}\frac{du}{u^{3/2}} \leqslant C\left\{\frac{\delta(x,y)}{r}\right\}^{1/2}. \tag{2.22}$$

Voyons I_2. L'estimation est identique

$$I_2 \leqslant C\left\{\frac{\delta(x,y)}{r}\right\}^{1/2}. \tag{2.23}$$

Voyons I_3.

$$I_3 \leqslant C\int_r^{2r}\Bigg\{\int_{\substack{\delta(x,\zeta)\geqslant\alpha\delta(x,y)\\ \delta(x,\zeta)\geqslant\alpha\delta(x,y)}} \big(\delta(x,y)^{1/2}|V_u(x,\zeta)| + \delta(x,\zeta)^{1/2}[\delta(x,y)+2\delta(x,\zeta)^{1/2}\delta(x,y)^{1/2}]|\Delta_x V_u|\big)|L'_u|\Bigg\}du$$

grâce à (2.16), (2.20); le premier terme I'_3 est déjà vu; pour le 2-ème, I'_3, utilisons (2.21):

$$I'_3 \leqslant C\delta(x,y)^{1/2}\int_r^{2r}\Bigg\{\int_{S\times\{\delta(x,\zeta)\geqslant\alpha\delta(x,y)\}}\delta(x,\zeta)^{1/2}[\delta(x,y)^{1/2}+2\delta(x,\zeta)^{1/2}]\cdot u^2\left(\int_0^1\frac{t\,dt}{[tu+\delta(x,\zeta)]^5}\right)|L'_u(z,\zeta)|\Bigg\}du\,.$$

Majorons $\delta(x,y)\leqslant(1/\alpha)\,\delta(x,\zeta)$ dans l'intégrale, il vient:

$$I'_3 \leqslant C\delta(x,y)^{1/2}\int_r^{2r}\left\{\int_{S^2}\delta(x,\zeta)\,u^2\left(\int_0^1\frac{t\,dt}{[tu+\delta(x,\zeta)]^5}\right)\left|\frac{\delta(z,\zeta)^{1/2}}{[\delta(z,\zeta)+u]^4}\right|\right\}du$$

faisant toujours $\delta(x, \zeta) \sim 2^n u$ et $\delta(\zeta, z) \sim 2^m u$ on arrive encore à

$$I_3' \leqslant C\delta(x, y)^{1/2} \int_r^{2r} \frac{du}{u^{3/2}} \leqslant C \left\{ \frac{\delta(x, y)}{r} \right\}^{1/2}$$

d'où

$$I_3' \leqslant C \left\{ \frac{\delta(x, y)}{r} \right\}^{1/2} . \tag{2.24}$$

Ce qui achève la preuve du point γ).

Voyons le point α).

On a vu (2.4) que $\int L_t(z, \zeta)\, d\sigma(z) = 0$. On en déduit que

$$0 = \int_S R_\varepsilon(x, z)\, d\sigma(z) = \int_S \left\{ -\int_S T_t(x, \zeta) L_t(z, \zeta)\, d\sigma(\zeta) \int_0^{1-\varepsilon} \right\} d\sigma(z) + \int_S U_\varepsilon(x, z)\, d\sigma(z) .$$

Mais le 1-er terme du membre de droite est aussi nul grâce à (2.4) pour tout ε donc:

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \int_S \int_0^{1-\varepsilon} \left\{ \int_S T_u(x, \zeta) L_u'(z, \zeta)\, d\sigma(\zeta) \right\} du\, d\sigma(z) = 0 ,$$

par Fubini:

$$\int_S \left\{ \int_S T_u(x, \zeta) L_u'(z, \zeta)\, d\sigma(\zeta) \right\} d\sigma(z) = 0 \qquad \forall u$$

d'où le point α) en réintégrant cette expression entre r et $2r$.

Pour achever de montrer que $\lim_{\varepsilon \to 0} R_\varepsilon$ envoie L^p dans L^p il faut montrer que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_S T_{1-\varepsilon}(x, \zeta) L_{1-\varepsilon}(z, \zeta)\, d\sigma(\zeta)$$

est borné sur L^p. En fait, on va montrer que cette limite est nulle sur L^p.

En effet pour $\varepsilon > 0$ cela correspond à faire d'abord l'opération $\sqrt{\varepsilon}\, L_{1-\varepsilon}(z, \zeta)$ puis $(1/\sqrt{\varepsilon})\, T_{1-\varepsilon}(x, \zeta)$.

Voyons chacun d'eux. Refaisant le changement de variable $t = 1 - u$ il vient

$$\sqrt{\varepsilon} |L_\varepsilon(z, \zeta)| \leqslant C \sqrt{\varepsilon} \frac{\delta(z, \zeta)^{1/2}}{[\varepsilon + \delta(z, \zeta)]^3} .$$

La pseudo-distance δ étant invariante sous l'action de $SU(2)$ il suffit de montrer que le second membre est borné dans $L^1(S)$ indépendamment de ε

$$\sqrt{\varepsilon}\int_S \frac{\delta(z,\zeta)^{1/2}}{[\varepsilon+\delta(z,\zeta)]^3}\,d\sigma(z)\leqslant C\,\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sum_{n\in Z}\frac{2^{n/2}\varepsilon^{1/2}2^{2n}\varepsilon^2}{\varepsilon^3[1+2^n]^3}\leqslant C,$$

en découpant encore en « couronnes » $2^n\varepsilon=\delta(z,\zeta)$.

On en déduit que $\sqrt{\varepsilon}L_\varepsilon$ est borné sur $L^p(S)$ indépendamment de ε car majoré par un opérateur de convolution uniformément dans $L^1(S)$.

D'autre part, on a aisément que $\sqrt{\varepsilon}L_\varepsilon(z,\zeta)\to 0$ quand $\varepsilon\to 0$ sauf pour $z=\zeta$ et que $\int_S\sqrt{\varepsilon}L_\varepsilon(z,\zeta)\,d\sigma(z)=0$. Le paramètre ε joue le rôle d'un paramètre de dilatation et on a que, en appliquant la théorie classique [10]

$$\int_S\sqrt{\varepsilon}L_\varepsilon(z,\zeta)f(z)\,d\sigma(z)\to 0\quad \text{p.p.},\ \zeta\ \text{pour}\ f\in L^p(S)\,.$$

De la même manière on a que

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}|T_\varepsilon(x,\zeta)|\leqslant\varepsilon^{3/2}\int_0^1\delta(x,\zeta)^{1/2}\frac{t\,dt}{[t\varepsilon+\delta(x,\zeta)]^4}$$

il suffit encore d'évaluer la norme L^1 du membre de droite

$$\varepsilon^{3/2}\int_S\int_0^1\delta(x,\zeta)^{1/2}\frac{t\,dt}{[t\varepsilon+\delta(x,\zeta)]^4}\,d\sigma(\zeta)\leqslant C\varepsilon^{3/2}\sum_{n\in Z}\frac{2^{n/2}\varepsilon^{1/2}2^{2n}\varepsilon^2}{\varepsilon^4}\int_0^1\frac{t\,dt}{|t+2^n|^4}$$

et d'utiliser les estimations déjà vues pour $\int_0(t\,dt)/|t+2^n|^4$ pour avoir que $(1/\sqrt{\varepsilon})|T_\varepsilon(x,\zeta)|$ est majoré par un opérateur de convolution uniformément dans $L^1(S)$.

On en déduit que le produit de ces deux opérateurs tend vers 0 dans $L^p(S)$ quand ε tend vers 0.

Les noyaux a_r introduits ne sont pas auto-adjoints mais clairement les estimations faites sont encore valables pour les noyaux adjoints. Il nous reste donc à montrer que les moyennes sont nulles. Cela se fait exactement comme pour le cas direct.

Voyons les autres noyaux.

Pour $\int\limits_0^1 \sum\limits_{i=1}^2 ZS_t^i \circ K_t^i dt$ on pose encore $u = 1 - t$ et $a_r = \int\limits_r^{2r} \sum\limits_{i=1}^2 ZS_{1-u}^i \circ K_{1-u}^i du$ on vérifie exactement par la même méthode (décomposition en couronnes $\delta(x, \zeta) \sim 2^n u$ et $\delta(\zeta, z) \sim 2^m u$) que les a_r vérifient les conditions β) et γ), la condition α) étant trivialement vraie grâce au calcul des moyennes; de même pour l'adjoint $a_r^*(x, z) = \bar{a}_r(z, x)$.

Pour $\int\limits_0^1 ZS_t \circ M_t dt$ comme ci-dessus.

Pour $\int\limits_0^1 \sum\limits_i \bar{Z}S_t^i \circ K_t^i dt$ comme ci-dessus.

Pour $\int\limits_0^1 \bar{Z}S_t^3 \circ M_t dt$ comme ci-dessus.

Reste $\int\limits_0^1 \sum\limits_{i=1}^2 \bar{Z} \cdot S_t^i \circ L_t^i dt$ qui se traite comme $\int\limits_0^1 \sum\limits_{i=1}^2 Z \cdot S_t^i \circ L_t^i dt$.

D'où la proposition 2.1.

3. – Estimations.

On va montrer le théorème suivant où l'on retrouvent certains résultats de [4].

THÉORÈME 3. *Soit* $\mathbf{B}$ *la boule unité de* $\mathbf{C}^n$ *et* f *une* $(0, 1)$ *forme sur* $S = \partial\mathbf{B}$, $\bar{\partial}_b f = 0$; *il existe une fonction* u *sur* $\partial\Omega$ *t.q.* $\bar{\partial}_b u = f$ *et qui vérifie*

a) $f \in L^p \Rightarrow u \in L^p_{1/2}$;

b) *de plus si* Z *est un champ holomorphe tangent alors* $Z \cdot u \in L^p$. *De plus* $f \in H^1 \Rightarrow Z \cdot u \in L^1$; $f \in L^1 \Rightarrow Z \cdot u \in L^{1,\infty}$; $f \in L^\infty \Rightarrow Z \cdot u \in BMO$;

c) $f \in L^p_k \Rightarrow Z \cdot u \in L^p_k$.

Le théorème 3 résulte du § 2; en effet la proposition 2.1 nous affirme que le noyau qui à f associe $Z \cdot u$ est un noyau intégral singulier sur l'espace de nature homogène $S = \partial\mathbf{B}$, on en déduit de suite *b*).

Pour obtenir *a*) il suffit de remarquer que les crochets de champs holomorphes tangents avec leur conjugués complexes engendrent tout l'espace tangent en chaque point de $\partial\mathbf{B}$ à cause de la stricte pseudoconvexité.

Pour obtenir *c*) appelons K le noyau résolvant de $\bar{\partial}_r$ étudié au § 2.

On a

$$v = Z \cdot u = \int_{\partial\mathbf{B}} (Z \cdot K)(x, \zeta) \wedge f(\zeta)$$

si par exemple $f \in L_1^p$ on veut que pour tout champ de vecteur X il vienne $X \cdot v \in L^p$; mais

$$X \cdot v = \int_{\partial D} X_X (Z \cdot K)(x, \zeta) \wedge f(\zeta) .$$

Mais on remarque aisément que

$$X_X(Z \cdot K)(x, \zeta) = Y_\zeta(\widetilde{Z \cdot K})(x, \zeta)$$

où $\widetilde{Z \cdot K}(x, \zeta)$ a la même singularité que $Z \cdot K$ d'où

$$Xv = \int_{\partial \mathbf{B}} \widetilde{Z}K(x, \zeta) \wedge Y_\zeta^* f(\zeta) \in L^p .$$

REFERENCES

[1] E. AMAR - A. BONAMI, *Mesure de Carleson d'ordre α et solutions au bord de l'équation $\bar\partial$,* Bull. Soc. Math. France, **107** (1979), pp. 23-48.

[2] I. BERGH - J. LÖFSTRÖM, *Interpolation spaces*, Grundlehren, Springer-Verlag, **23** (1976).

[3] R. COIFMAN - G. WEISS, *Analyse harmonique non commutative sur certains espaces homogènes*, Springer-Verlag, Lecture Notes 242 (1971).

[4] G. FOLLAND - E. STEIN, *Estimates for the $\bar\partial_b$ complex and analysis on the Heisenberg group*, Comm. Pure Appl. Math., **27** (1974), pp. 429-522.

[5] G. M. HENKIN, *The Levy equation and analysis on pseudo-convex manifolds,* Russian Math. Surveys, **32** (1977), pp. 59-130.

[6] L. HÖRMANDER, *Hypoelliptic second order differential equation,* Acta Math., **119** (1967), pp. 147-171.

[7] Y. MEYER, *Dualité H^1-BMO pour les espaces de nature homogène* (d'après L. Carleson), Sém. Anal. Harm. Orsay (1976).

[8] H. SKODA, *Valeur au bord pour l'opérateur d''*, Bull. Soc. Math. France, **104** (1976), pp. 225-299.

[9] E. STEIN, *Singular integrals and estimates for the Cauchy-Riemann equations,* Bull. Amer. Math. Soc., **79** (1973), pp. 440-445.

[10] E. STEIN, *Singular integrals and differentiability properties of functions,* Princeton University Press (1970).

Université de Paris-Sud
Département de Mathématique
91405 Orsay (France)