FERRUCCIO COLOMBINI
ENNIO DE GIORGI
SERGIO SPAGNOLO

Sur les équations hyperboliques avec des coefficients qui ne dépendent que du temps

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 6, nº 3 (1979), p. 511-559
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1979_4_6_3_511_0>

Sur les équations hyperboliques avec des coefficients qui ne dépendent que du temps (*) (**).

FERRUCCIO COLOMBINI - ENNIO DE GIORGI
SERGIO SPAGNOLO (***)

Introduction.

L'équation hyperbolique du second ordre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i,j}^{1,n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = f(x, t)$$

sur $\mathbb{R}^n_x \times [0, T]$, n'a été en général étudiée que lorsque les coefficients a_{ij}, outre à vérifier les hypothèses habituelles de symétrie et de coercivité, sont des fonctions mesurables et bornées en x et lipschitziennes par rapport à la variable t.

Sous cette hypothèse, le problème de Cauchy associé à l'équation ci-dessus considérée a été étudié par des nombreux auteurs qui ont obtenu (cf. Lions [5], Lions et Magenes [6], Hurd et Sattinger [4]) des résultats d'existence et unicité des solutions dans des convenables espaces de Sobolev. Une hypothèse un peu plus faible que la lipschitzianité en t des coefficients a été considérée par De Simon et Torelli ([2]) qui ont prouvé un théorème d'existence et unicité dans le cas où les coefficients $a_{ij}(x, t)$ sont à variation bornée sur $[0, T]$ en tant que fonctions de t à valeurs dans l'espace de Banach $L^\infty(\mathbb{R}^n_x)$.

On pourrait d'ailleurs chercher à résoudre le problème de Cauchy en question même lorsque les coefficients $a_{ij}(x, t)$ sont simplement des fonctions localement intégrables sur $\mathbb{R}^n_x \times [0, T]$. Mais un très simple exemple ([4], où

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. (C.N.R.).

(**) Une note présentant les résultats de ce papier, est parue dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, t. 286 Série A (1978).

(***) Scuola Normale Superiore - Pisa.

Pervenuto alla Redazione il 19 Luglio 1978.

les coefficients sont du type $a(x,t)=\alpha(x-t)$ avec $\alpha(\xi)$ égale à α_1 si $\xi<0$, et à α_2 si $\xi>0$, où $0<\alpha_2<1<\alpha_1$) montre qu'on ne peut pas en général espérer d'avoir l'existence de solutions, même dans l'espace des distributions.

Tout de même, on peut penser de compenser l'irrégularité en t des coefficients par une convenable régularité en x, et donc d'obtenir l'existence et l'unicité des solutions pour des coefficients même discontinus en t mais très réguliers en x.

Le cas plus simple qu'on peut envisager est celui où les a_{ij} ne dépendent que de la variable t: à ce cas est consacré l'article présent.

On considérera donc dans la suite le problème suivant

PROBLÈME. Soient $a_{ij}(t)$ des fonctions réelles et intégrables sur $[0,T]$ qui vérifient l'hypothèse de coercivité

$$\sum_{i,j}^{1,n} a_{ij}(t)\xi_i\xi_j \geqslant \lambda_0|\xi|^2 \qquad (\lambda_0>0)\,, \quad \forall\xi\in\mathbb{R}^n\,.$$

Etant données des fonctions (ou des fonctionnelles) $\varphi(x)$, $\psi(x)$ et $f(x,t)$, trouver $u(x,t)$ telle que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\sum_{i,j}^{1,n} a_{ij}(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}=f(x,t) \qquad \text{dans } \mathbb{R}^n\times[0,T]\,, \tag{1}$$

$$u(x,0)=\varphi(x) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x) \qquad \text{dans } \mathbb{R}^n\,. \tag{2}$$

Les données $\varphi(x)$, $\psi(x)$ et $f(x,t)$ seront choisies dans X_1, X_2 et $L^1([0,T],X_3)$ respectivement, où X_1, X_2 et X_3 sont des espaces d'ultradistributions de Gevrey sur $\mathbb{R}^n$ ou de fonctionnelles holomorphes avec des inclusions continues $X_1\subsetneqq X_2\subsetneqq X_3$, tels que les dérivations $\partial/\partial x_j$, $j=1,\dots,n$, appliquent X_1 dans X_2 et X_2 dans X_3 avec continuité.

La solution u est alors cherchée dans l'espace $L^\infty([0,T],X_1)$ et l'équation (1) est entendue au sens des distributions vectorielles, à valeurs dans X_3, sur l'intervalle $]0,T[$. On peut d'ailleurs voir, d'après l'équation (1), que la solution u appartient de fait à l'espace $C^1([0,T],X_3)$, de sorte que les conditions initiales (2) ont un sens.

Pour la plupart des cas considérés dans cet article, les trois espaces X_1, X_2 et X_3 seront coïncidents.

Or, on prouvera des résultats d'existence et unicité pour le problème $\{(1),(2)\}$ même si les coefficients $a_{ij}(t)$ sont très irréguliers, notamment s'ils sont simplement des fonctions intégrables sur $[0,T]$. Bien entendu, les solutions ne seront pas en général que des fonctionnelles, à moins que les données φ, ψ et f ne soient très régulières.

Plus exactement, on verra (th. 3) que si $\varphi(x)$, $\psi(x)$ et $f(x, t)$ sont des fonctionnelles analytiques réelles sur $\mathbf{R}^n_x$ (par exemple, s'ils sont des fonctions intégrables à support compact) alors le problème $\{(1), (2)\}$ a une et une seule solution $u(x, t)$ fonctionnelle analytique réelle en x pour tout t, tandis que (th. 4) si $\varphi(x)$, $\psi(x)$ et $f(x, t)$ sont des fonctions analytiques réelles en x, alors il existe une et une seule solution $u(x, t)$ analytique réelle en x, pour tout t.

On peut donc résoudre le problème $\{(1), (2)\}$, soit dans la classe X des fonctions analytiques réelles sur $\mathbf{R}^n$ que dans la classe X' des fonctionnelles linéaires et continues sur X.

Si les coefficients $a_{ij}(t)$ sont un peu plus réguliers on a encore le même phenomène, en plus cette fois-ci on peut prendre X égale à une convenable classe de fonctions indéfiniment différentiables sur $\mathbf{R}^n$ qui contient la classe des fonctions analytiques réelles (de sorte que la « distance » entre X et X' se réduit).

Par exemple, si les a_{ij} sont hölderiens d'exposant α et si $1 \leqslant s < 1/(1-\alpha)$ on a (th. 4) une solution $u(x, t)$ ultradistribution de Gevrey d'ordre s en x, pourvu que les données soient des ultradistributions d'ordre s en x; tandis que, lorsque les données sont des fonctions de Gevrey d'ordre s en x, alors la solution est elle aussi une fonction de Gevrey (du même ordre) en x.

Encore, si les a_{ij} vérifient la condition

$$|a_{ij}(t+\tau) - a_{ij}(t)| \leqslant A|\tau|\Big(\big|\log|\tau|\big| + 1\Big)$$

avec A costante, on a (th. 4) une solution $u(x, t)$ distribution en x pourvu que les données soient des distributions en x; tandis que, lorsque les données sont des fonctions de classe C^∞ en x, alors la solution est elle aussi de classe C^∞ en x.

Des contre-exemples (th.10) montrent enfin qu'on ne peut pas améliorer les théorèmes précedents. En particulier on ne peut pas en général résoudre le problème de Cauchy $\{(1), (2)\}$ dans les espaces de Sobolev si les coefficients ne sont pas à variation bornée.

Outre à l'existence, on prouve aussi des estimations à priori sur la solution. Ces estimations se révèlent utiles lorsqu'on considère une suite de problèmes du type $\{(1), (2)\}$ avec des coefficients $a_{ij,k}(t)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, non uniformément réguliers, qui convergent vers $a_{ij}(t)$ pour $k \to \infty$, et l'on veut prouver la convergence des solutions corrispondentes.

On prouvera en effet (th. 8) que, si $\{a_{ij,k}\} \to a_{ij}$ dans L^1 et si les données sont des fonctionnelles analytiques (resp. des fonctions analytiques) réelles en x, alors les solutions convergent au sens des fonctionnelles analytiques (resp. des fonctions analytiques) réelles en x.

Si, de plus, les $a_{ij,k}$ sont des fonctions équi-hölderiennes, alors les solutions convergent dans l'espace des ultradistributions (ou des fonctions) de Gevrey en x, pourvu que les données soient des ultradistributions (ou des fonctions) de Gevrey en x.

La démonstration de l'existence des solutions s'articule dans les étapes suivantes:

1) On prouve un théorème d'existence dans l'espace des fonctionnelles holomorphes, ou dans l'espace des fonctions analytiques entières, sans aucune hypothèse de coercivité ou de régularité des coefficients (ce théorème, qui est très proche à celui de Cauchy-Kovalevski, est bien connu (voir [11], ou [1]); on en donnera quand même une démonstration dans l'Appendice).

2) On considère le cas où les données $\varphi(x)$, $\psi(x)$ et $f(x,t)$ sont nulles pour $|x| \geqslant r$: on se sert dans ce cas de la transformation de Fourier-Laplace par rapport à la variable x (qui devient la variable $\zeta \in \mathbb{C}^n$) pour réduire le problème $\{(1), (2)\}$ à une famille, dépendant du paramètre ζ, d'équations différentielles ordinaires.

3) On estime la croissance en $\zeta(|\zeta| \to \infty)$ des solutions des problèmes transformés, en utilisant un résultat (Lemme 1) relatif aux équations ordinaires du second ordre; grâce à ces estimations et au théorème de Paley-Wiener, on voit que la solution, trouvée dans un premier temps dans l'espace des fonctionnelles holomorphes, est de fait bien plus régulière.

4) On élimine, à l'aide d'un procedé de dualité, l'hypothèse que les données φ, ψ et f soient à support compact en x.

Observons en conclusion que pour des données périodiques en x on peut aussi utiliser le développement en séries de Fourier. Le procédé devient alors beaucoup plus simple et, pour cette raison, on le présentera ici de façon indépendante (§ 3) bien qu'il soit un cas particulier des résultats exposés aux paragraphes successifs.

On peut enfin remarquer que l'hypothèse de coercivité sur la forme quadratique des coefficients n'est pas nécessaire, et peut être substituée par l'hypothèse plus faible de non-negativité, si l'on se borne à considérer le cas de solutions fonctions (ou fonctionnelles) analytiques réelles (§ 7).

1. – Notations et rappels.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On utilisera les suivants espaces vectoriels topologiques sur le corps complexe $\mathbb{C}$.

$\mathscr{H}$ fonctions entières sur $\mathbb{R}^n$.

$\mathscr{A}(\Omega)$ fonctions analytiques sur Ω.

$\mathscr{E}_s(\Omega)$ fonctions de Gevrey d'ordre s sur Ω $(s \geqslant 1)$.
$\mathscr{D}_s(\Omega)$ fonctions de Gevrey d'ordre s, à support compact dans Ω.
$\mathscr{E}(\Omega)$ fonctions indéfiniment différentiables sur Ω.
$\mathscr{D}(\Omega)$ fonctions indéfiniment différentiables, à support compact dans Ω.
$\mathscr{H}'$ fonctionnelles holomorphes sur $\mathbf{C}^n$.
$\mathscr{A}'(\Omega)$ fonctionnelles analytiques réelles sur Ω.
$\mathscr{D}'_s(\Omega)$ ultradistributions de Gevrey d'ordre s sur Ω $(s \geqslant 1)$.
$\mathscr{E}'_s(\Omega)$ ultradistributions de Gevrey d'ordre s, à support compact dans Ω.

Lorsque Ω coïncide avec $\mathbf{R}^n$, on écrira simplement $\mathscr{A}$, $\mathscr{E}_s$, $\mathscr{D}_s$, $\mathscr{E}$, $\mathscr{D}$, $\mathscr{A}'$, $\mathscr{D}'_s$, $\mathscr{E}'_s$ au lieu de $\mathscr{A}(\Omega)$, $\mathscr{E}_s(\Omega)$, $\mathscr{D}_s(\Omega)$, ...

Pour ce qui concerne la topologie et les principales proprietés de ces espaces, on renvoie à Lions-Magenes ([6]), Gelfand-Shilov ([3]), Roumieu ([9], [10]) et Martineau ([7]). On rappelle quand même les faits suivants:

Une fonction sur $\mathbf{R}^n$ (à valeurs complexes) se dit *entière* si elle est prolongeable à une fonction holomorphe sur tout $\mathbf{C}^n$.

Une fonction u, indéfiniment différentiable sur Ω, se dit *de Gevrey d'ordre s* (s réel $\geqslant 1$) si pour tout $K \subset\subset \Omega$ il existe M et A tels que

$$|D^r u(x)| \leqslant M A^{|r|} |r|^{s|r|}, \quad \forall x \in K, \quad \forall r.$$

Pour $s = 1$ on a $\mathscr{E}_s(\Omega) = \mathscr{A}(\Omega)$ et $\mathscr{E}'_s(\Omega) = \mathscr{A}'(\Omega)$ tandis que $\mathscr{D}_s(\Omega) = \mathscr{D}'_s(\Omega) = \{0\}$.

Soit $w \in \mathscr{A}'(\Omega)$ et $K \subset\subset \Omega$. On dit que le *support* de w est contenu dans K $(\operatorname{supp}(w) \subseteq K)$ si, $\forall \{u_k\} \subseteq \mathscr{A}(\Omega)$ telle que $\{u_k\} \to 0$ dans $\mathscr{A}(U)$ pour quelque voisinage ouvert U de K, on a $\{\langle w, u_k\rangle\} \to 0$ $(k \to \infty)$.

Chacun des espaces vectoriels topologiques considérés ci-dessus est complet, reflexif et *de Montel*, au sens que toute suite bornée admet une sous-suite qui converge.

On utilisera aussi les espaces de Sobolev $H^s(\Omega) \equiv H^{s,2}(\Omega)$ (s réel quelconque) et les espaces

$$H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega) = \{u \in \mathscr{D}'(\Omega) : \varphi u \in H^s(\Omega),\ \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)\}$$

$$H^s_c(\Omega) = \{u \in H^s(\Omega) : \operatorname{supp}(u) \text{ est compact dans } \Omega\}.$$

Dans les équations d'évolution on rencontre souvent des fonctions (ou des fonctionnelles) $u(x, t)$ qui dépendent des $n+1$ variables $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$ et $t \in [0, T]$, où T est un nombre réel > 0.

Une telle $u(x, t)$ sera considérée, en général, comme une fonction définie sur $[0, T]$ et à valeurs dans un convenable espace X de fonctions (ou de fonctionnelles) sur Ω.

Soit donc X un espace localement convexe complet et soit $u\colon [0, T] \to X$. On dit que u est *intégrable* sur $[0, T]$ s'il existe une suite $\{u_k\}$ de fonctions sur $[0, T]$, à valeurs dans X, constantes sur chaque élément d'une partition finie de $[0, T]$ en parties mesurables, et telles que, si $k \to \infty$,

$$\{u_k(t)\} \to u(t) \quad \text{dans } X\,, \qquad \text{p.p. sur } [0, T]\,,$$

et

$$\int_0^T \mu\big(u_k(t) - u(t)\big)\,dt \to 0, \quad \forall \mu \text{ semi-norme sur } X\,.$$

Si u est intégrable sur $[0, T]$, on pose

$$\int_0^T u(t)\,dt = \lim_{k\to\infty} \int_0^T u_k(t)\,dt\,.$$

On désigne par $L^1([0, T], X)$ l'espace vectoriel topologique des fonctions, à valeurs dans X, intégrables sur $[0, T]$, muni des semi-normes

$$\Big\{u \mapsto \int_0^T \mu\big(u(t)\big)\,dt\colon \mu \text{ semi-norme sur } X\Big\}\,.$$

On définit de façon analogue l'espace $L^p([0, T], X)$, avec p réel $\geqslant 1$ ou bien $p = \infty$, formé par les fonctions $u\colon [0, T] \to X$ intégrables sur $[0, T]$ et telles que $t \to \mu(u(t))$ appartienne à $L^p([0, T])$, pour chaque semi-norme μ sur X.

Soit u dans $L^1([0, T], X)$. On peut alors considérer les dérivées $u', u'', \ldots$ de u au sens des distributions (vectorielles) à valeurs dans X.

On considérera aussi les espaces

$$H^{k,1}([0, T], X) = \{u \in L^1([0, T], X)\colon u', u'', \ldots, u^{(k)} \in L^1([0, T], X)\}\,,$$

$$C([0, T], X) \quad = \{u\colon [0, T] \to X\colon u \text{ continue sur } [0, T]\}\,,$$

$$C^k([0, T], X) \quad = \{u \in C([0, T], X)\colon u', u'', \ldots, u^{(k)} \in C([0, T], X)\}\,,$$

où k est un entier $\geqslant 1$.

Remarquons enfin que, si X est un sous-espace de $\mathscr{D}'(\Omega)$ ou de $\mathscr{D}'_s(\Omega)$ pour $s > 1$, chaque u dans $L^1([0, T], X)$ peut être considérée aussi comme une distribution, ou une ultradistribution, sur le cylindre $\Omega \times]0, T[$. On écrira donc $\partial u/\partial t$ au lieu de u'.

Théorème de Paley-Wiener. Pour toute $w \in \mathscr{H}'$, on définit la *transformation de Fourier* de w, par la formule

$$w(\zeta) = \langle w, h_\zeta \rangle \qquad (\zeta = \xi + i\eta \in \mathbf{C}^n)$$

où

$$h_\zeta(z) = \exp\left(-i(\zeta, z)\right) \qquad (z \in \mathbf{C}^n) .$$

On écrira aussi, pour $u \in L^1([0, T], \mathscr{H}')$,

$$\hat{u}(\zeta, t) = \langle u(t), h_\zeta \rangle .$$

On sait que $\hat{w}(\zeta)$ est une fonction entière à croissance exponentielle. On a en outre les résultats suivants.

I) *Soit w dans $\mathscr{H}'$.*

i) *w est dans $\mathscr{A}'$*, avec support contenu dans la boule de $\mathbf{R}^n$, $\{|x| \leqslant \varrho\}$, si et seulement si, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists C_\varepsilon$ tel que

$$|\hat{w}(\xi + i\eta)| \leqslant C_\varepsilon \exp\left(\varepsilon|\xi| + (\varrho + \varepsilon)|\eta|\right) , \qquad \forall \zeta \in \mathbf{C}^n ,\ |\zeta| \geqslant 1 .$$

ii) *w est dans $\mathscr{E}'_s$* $(s \geqslant 1)$ si et seulement si, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists C_\varepsilon$ tel que

$$|\hat{w}(\xi)| \leqslant C_\varepsilon \exp\left(\varepsilon|\xi|^{1/s}\right) , \qquad \forall \xi \in \mathbf{R}^n ,\ |\xi| \geqslant 1 .$$

iii) *w est dans $\mathscr{E}'$* si et seulement si $\exists k$, $\exists C$, tels que

$$|\hat{w}(\xi)| \leqslant C(1 + |\xi|^2)^{k/2}, \qquad \forall \xi \in \mathbf{R}^n ,\ |\xi| \geqslant 1 .$$

iv) *w est dans H^s_c* (s réel) si et seulement s'il existe $\gamma \in L^2(\mathbf{R}^n)$ tel que

$$|\hat{w}(\xi)| \leqslant \gamma(\xi)(1 + |\xi|^2)^{-s/2} , \qquad \forall \xi \in \mathbf{R}^n ,\ |\xi| \geqslant 1 .$$

v) *w est dans $\mathscr{D}$* si et seulement si, $\forall k > 0$, $\exists C_k$ tel que

$$|\hat{w}(\xi)| \leqslant C_k(1 + |\xi|^2)^{-k/2} , \qquad \forall \xi \in \mathbf{R}^n ,\ |\xi| \geqslant 1 .$$

vi) *w est dans* $\mathscr{D}_s$ $(s > 1)$ si et seulement si $\exists a > 0$, $\exists C$, tels que

$$|\hat{w}(\xi)| \leqslant C \exp(-a|\xi|^{1/s}), \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \; |\xi| \geqslant 1 .$$

II) Soit $\{w_\nu\}$ *une partie de* $\mathscr{H}'$: $\{w_\nu\}$ est bornée dans $\mathscr{A}'$ si et seulement si chaque $\hat{w}_\nu$ vérifie l'inégalité de I-(i), uniformément par rapport à ν.

Soit $\{w_\nu\}$ *une partie bornée de* $\mathscr{A}'$: $\{w_\nu\}$ est bornée dans $\mathscr{E}'_s$ (resp. dans $\mathscr{E}'$, ...) si et seulement si chaque $\hat{w}_\nu$ vérifie l'inégalité de I-(ii) (resp. (iii), ...) uniformément par rapport à ν.

III)

i) Soit *u dans* $L^1([0, T], \mathscr{A}')$. Alors $\exists \varrho > 0$ tel que, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists C_\varepsilon$ tel que

$$\int_0^T |\hat{u}(\xi + i\eta, t)| \, dt \leqslant C_\varepsilon \exp(\varepsilon|\xi| + (\varrho + \varepsilon)|\eta|), \qquad \forall \zeta \in \mathbb{C}^n .$$

ii) Si *u appartient à* $L^1([0, T], \mathscr{A}'(B_r))$ où B_r désigne la boule $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$, alors $\hat{u}$ vérifie l'inégalité de (i) avec $\varrho = r$.

iii) Si *u appartient à* $L^1([0, T], \mathscr{E}'_s)$ (resp. à $L^1([0, T], \mathscr{E}')$, ...) alors $\hat{u}$ vérifie une inégalité analogue à celle de (i) mais du type I-(ii) (resp. du type I-(iii), ...)

iv) Si $\{u_\nu\}$ *est une partie bornée de* $L^1([0, T], \mathscr{A}')$, alors chaque $\{\hat{u}_\nu\}$ vérifie l'inégalité de (i) uniformément par rapport à ν.

[Pour une démonstration de la partie III on renvoie à l'Appendice, partie A].

Rappelons maintenant un résultat d'existence et unicité des solutions du problème $\{(1), (2)\}$ dans le domaine des fonctionnelles holomorphes ou des fonctions entières. On remarquera qu'on ne fait ici aucune hypothèse de hyperbolicité sur l'équation. [Pour une démonstration de ce théorème on renvoie à l'Appendice, partie B].

THÉORÈME 1 (cfr. [11], [1]).

Considérons le problème $\{(1), (2)\}$ *avec des coefficients* $a_{ij}(t)$ *dans* $L^1([0, T])$.

i) *Si* φ *et* ψ *sont données dans* $\mathscr{H}'$ *et* f *dans* $L^1([0, T], \mathscr{H}')$, *alors le problème a une et une seule solution* u *dans* $H^{2,1}([0, T], \mathscr{H}')$.

ii) *Si* φ *et* ψ *sont données dans* $\mathscr{H}$ *et* f *dans* $L^1([0, T], \mathscr{H})$, *alors le problème a une et une seule solution* u *dans* $H^{2,1}([0, T], \mathscr{H})$.

2. – Un résultat sur les équations ordinaires.

Grâce à la transformation de Fourier, ou bien (dans le cas de données périodiques) au développement en série de Fourier, l'étude des solutions du problème $\{(1), (2)\}$ se réconduit à l'étude des solutions d'une famille d'équations ordinaires du type suivant:

$$v''(t) + \alpha(t)v(t) = g(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant T)\,, \tag{3}$$

avec $\alpha(t)$ et $g(t)$ fonctions intégrables sur $[0, T]$.

Plus exactement, on cherche à estimer toute solution $v(t)$ de l'équation (3) en termes des valeurs initiales $v(0)$ et $v'(0)$, de la donnée $g(t)$ et du coefficient $\alpha(t)$.

L'estimation plus directe s'obtient en réduisant l'équation (3) à un système du premier ordre et an appliquant le lemme de Gronwall:

$$|v(t)| \leqslant \left(|v(0)| + |v'(0)| + \int_0^T |g(s)|\,ds\right) \exp\left(\int_0^t (1 + |\alpha(s)|)\,ds\right). \tag{4}$$

Dans le cas où $\alpha(t)$ est lipschitzienne et strictement positive, on peut obtenir une estimation différente; il suffit en effet d'étudier le comportement de l'*énergie* associée à la solution v, pour avoir:

$$|v(t)| \leqslant \left(\sqrt{\alpha(0)}\,|v(0)| + |v'(0)| + \int_0^T |g(s)|\,ds\right) \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t \frac{|\alpha'(s)|}{\alpha(s)}\,ds\right).$$

Dans la suite, nous aurons besoin d'une estimation plus générale des deux précedentes qui est valable sans aucune hypothèse de positivé ou de lipschitzianité du coefficient $\alpha(t)$.

LEMME 1. *Considérons l'équation* (3) *avec* $\alpha(t)$ *et* $g(t)$ *fonctions intégrables sur* $[0, T]$ *et supposons que*:

$$\alpha(t) = \beta(t) + \gamma(t)$$

où $\beta(t)$ *est une fonction réelle appartenant à l'espace* $H^{1,1}([0, T])$ *et vérifiant l'inégalité*:

$$\beta(t) > 0\,, \qquad \forall t \in [0, T]\,.$$

Soit $v(t)$ une solution de (3) dans $H^{2,1}([0,T])$ et soit:

$$E(t) = \beta(t)|v(t)|^2 + |v'(t)|^2 \tag{5}$$

la « β-énergie » associée à v. On a alors:

$$\sqrt{E(t)} \leqslant \left(\sqrt{E(0)} + \int_0^T |g(s)|\,ds\right)\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t \frac{|\beta'(s)|}{\beta(s)}\,ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{|\gamma(s)|}{\sqrt{\beta(s)}}\,ds\right). \tag{6}$$

DÉMONSTRATION. Puisque $v(t)$ est dans $H^{2,1}([0,T])$, on voit que $E(t)$ est dans $H^{1,1}([0,T])$; par dérivation on a alors:

$$E'(t) = \beta'(t)|v(t)|^2 + 2\beta(t)\,\mathrm{Re}\,\big(\overline{v(t)}v'(t)\big) + 2\,\mathrm{Re}\,\big(\overline{v'(t)}v''(t)\big)\,.$$

En substituant $v''(t)$ par $g(t) - \beta(t)v(t) - \gamma(t)v(t)$, on déduit l'égalité:

$$E'(t) = \beta'(t)|v(t)|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\big(\gamma(t)\,\overline{v'(t)}v(t)\big) + 2\,\mathrm{Re}\,\big(\overline{v'(t)}g(t)\big)\,,$$

d'où:

$$E' \leqslant \frac{|\beta'|}{\beta}\,\beta|v|^2 + \frac{|\gamma|}{\sqrt{\beta}}\,(\beta|v|^2 + |v'|^2) + 2|v'||g|$$

et donc:

$$E' \leqslant \left(\frac{|\beta'|}{\beta} + \frac{|\gamma|}{\sqrt{\beta}}\right)E + 2|g|\sqrt{E}\,.$$

Grâce au lemme de Gronwall, on obtient alors la (6). //

REMARQUE. Dans la suite on devra estimer les solutions d'une famille d'équations du type (3) avec des coefficients $\alpha(t) \equiv \alpha(\xi, t)$ qui dépendent (au moins dans le cas unidimensionnelle $n = 1$) d'un paramètre réel ξ. Plus exactement, on aura:

$$\alpha(\xi, t) = a(t)\xi^2$$

où $a(t)$ est une fonction en général seulement intégrable et telle que $a(t) \geqslant \lambda_0 > 0$, et on cherchera à estimer la croissance de la solution $v(\xi, t)$ pour $|\xi| \to \infty$.

Or, si l'on se contente d'utiliser la (4) on obtient:

$$|v(\xi, t)| \leqslant K \exp\,(c|\xi|^2)$$

qui est une estimation trop faible pour nos propos.

D'autre part, puisque $a(t)$ est dans $L^1([0, T])$, on peut construire pour tout $\varepsilon > 0$ une fonction lipschitzienne $b_\varepsilon(t) \geq \lambda_0$ telle que $\|a - b_\varepsilon\|_{L^1([0,T])} \leq \varepsilon$. On peut donc appliquer le lemme 1 avec $\beta(t) = b_\varepsilon(t)\xi^2$ et l'on obtient l'estimation suivante:

$$|v(\xi, t)| \leq K_\varepsilon \exp(\varepsilon|\xi|) , \qquad \forall \xi > 0 , \ \forall \varepsilon > 0 .$$

3. – Solutions périodiques en x.

Dans ce paragraphe, on résoudra le problème $\{(1), (2)\}$ dans le cas particulièrement simple où le nombre n des variables d'espace est égal à 1, la donnée $f(x, t)$ est égale à zéro et les données initiales $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont des fonctions 2π-périodiques sur la droite réelle:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{dans } \mathbb{R}\times[0, T] , \tag{7}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) \qquad \text{dans } \mathbb{R} . \tag{8}$$

Le coefficient $a(t)$ est une fonction intégrable sur $[0, T]$ telle que

$$a(t) \geq \lambda_0 > 0 \qquad \forall t \in [0, T] . \tag{9}$$

On se bornera ici à chercher les solutions $u(x, t)$ de ce problème qui sont périodiques en x, $\forall t \in [0, T]$. On verra d'ailleurs dans les paragraphes successifs que le problème a une seule solution.

THÉORÈME 2. *Considérons le problème* $\{(7), (8)\}$ *avec* $a(t)$ *fonction intégrable sur* $[0, T]$ *et vérifiant* (9) *et avec des données* $\varphi(x)$ *et* $\psi(x)$ *2π-périodiques sur* $\mathbb{R}$.

i) *Si* $\varphi(x)$ *et* $\psi(x)$ *sont des fonctions analytiques sur* $\mathbb{R}$, *il existe une et une seule solution* $u(x, t)$ *de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}\times[0, T]$, *2π-périodique et analytique par rapport à* x *pour tout* $t \in [0, T]$.

ii) *Supposons que* $a(t)$ *soit höldérienne d'exposant* α *sur* $[0, T]$, *où* $0 < \alpha < 1$, *et soit* $1 \leq s < 1/(1-\alpha)$. *Si* $\varphi(x)$ *et* $\psi(x)$ *sont des fonctions de Gevrey sur* $\mathbb{R}$ *d'ordre* s, *il existe une et une seule solution* $u(x, t)$ *de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}\times[0, T]$, *2π-périodique et de Gevrey d'ordre* s *par rapport à* x *pour tout* $t \in [0, T]$.

iii) *Supposons que*

$$|a(t+\tau)-a(t)|\leqslant L\tau(|\log\tau|+1)\,, \qquad \forall\tau>0\,.$$

Si $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont des fonctions indéfiniment différentiables sur $\mathbb{R}$, il existe une et une seule solution $u(x,t)$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}\times[0,T]$, 2π-périodique et indéfiniment différentiable en x pour tout $t\in[0,T]$.

Démonstration. En développant les données initiales φ et ψ en séries de Fourier on peut écrire

$$\varphi(x)=\sum_{h=-\infty}^{+\infty}A_h\exp(ihx) \quad \text{et} \quad \psi(x)=\sum_{h=-\infty}^{+\infty}B_h\exp(ihx)\,.$$

On cherche les solutions de $\{(7),(8)\}$ du type

$$u(x,t)=\sum_{h=-\infty}^{+\infty}v_h(t)\exp(ihx)\,.$$

La fonction $v_h(t)$ doit donc résoudre le problème

$$\tag{10}\begin{cases} v_h''(t)+h^2a(t)v_h(t)=0 & \text{dans } [0,T] \\ v_h(0)=A_h \quad \text{et } v_h'(0)=B_h\,. \end{cases}$$

Il est bien connu que ce problème admet une et une seule solution de classe C^1 sur $[0,T]$. En particulier on a l'unicité des solutions 2π-périodiques en x du problème $\{(7),(8)\}$. De plus si $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont des fonctionsré elles ($\bar{A}_h=A_{-h}$ et $\bar{B}_h=B_{-h}$) on voit que la solution est réelle.

Pour prouver l'existence d'une solution de $\{(7),(8)\}$, il faudra estimer la croissance de $v_h(t)$ pour $|h|\to\infty$. A ce but, on applique le Lemme 1 aux problèmes (10) avec une décomposition convenable (dépendant de h) de la fonction $a(t)$:

$$a(t)=b_h(t)+c_h(t)\,, \qquad \text{où } b_h(t)>0\,,\ h\neq0\,.$$

Le Lemme 1 donne alors

$$\tag{11}\sqrt{E_h(t)}\leqslant\sqrt{E_h(0)}\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T\frac{|b_h'(s)|}{b_h(s)}\,ds+\frac{|h|}{2}\int_0^T\frac{|c_h(s)|}{\sqrt{b_h(s)}}\,ds\right)$$

où

$$\tag{12}E_h(t)=h^2b_h(t)|v_h(t)|^2+|v_h'(t)|^2\,.$$

Or, on choisit $b_h(t)$ en prenant

$$b_h(t) = (\tilde{a} * \varrho_h)(t)$$

où $\tilde{a}$ est une extension (qui sera choisie dans la suite) de $a(t)$ sur $\mathbb{R}$, tandis que $\varrho_h(t)$ est une fonction indéfiniment différentiable sur $\mathbb{R}$ telle que $0 \leqslant \varrho_h(t) \leqslant c_0|h|$, $\varrho_h(t) \equiv 0$ au déhors de l'intervalle $[-1/|h|, 0]$, et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varrho_h(t)\, dt = 1 \,, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |\varrho_h'(t)|\, dt \leqslant c_0|h| \,.$$

On a alors, pour $|h| \geqslant 1/T$,

$$b_h(t) \geqslant \lambda_0 \,, \qquad |b_h(0)| \leqslant c_0|h| \int_0^T |a(s)|\, ds \,. \tag{13}$$

En outre

$$b_h'(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(\tilde{a}(s-\tau) - \tilde{a}(s)\big)\, \varrho_h'(\tau)\, d\tau \,, \qquad c_h(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(\tilde{a}(s) - \tilde{a}(s-\tau)\big)\, \varrho_h(\tau)\, d\tau \,.$$

Donc

$$\int_0^T \big(|b_h'(s)| + |h||c_h(s)|\big)\, ds \leqslant c_0|h| \sup_{|\tau| \leqslant 1/|h|} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{a}(s-\tau) - \tilde{a}(s)|\, ds \,. \tag{14}$$

En introduisant (12), (13) et (14) dans (11), on obtient, pour $|h| \geqslant 1/T$,

$$\begin{aligned} |v_h(t)| + |v_h'(t)| &\leqslant \\ &\leqslant C(\lambda_0)\Big(|h||A_h| \int_0^T |a|\, ds + |B_h|\Big) \exp\Big(c_0|h| \sup_{|\tau| \leqslant 1/|h|} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{a}(s-\tau) - \tilde{a}(s)|\, ds\Big) \,. \end{aligned} \tag{15}$$

Considérons maintenant le cas (i).

Puisque $a(t)$ est une fonction intégrable sur $[0, T]$, si l'on définit l'extension $\tilde{a}$ de a en prenant $\tilde{a}(t) \equiv \lambda_0$ au déhors de l'intervalle $[0, T]$, on voit que

$$\sup_{|\tau| \leqslant 1/|h|} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{a}(s-\tau) - \tilde{a}(s)|\, ds \to 0 \,, \qquad \text{si } |h| \to \infty \,.$$

D'autre part $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont analytiques, donc (voir le th. 12 de l'Appendice)

$$|A_h| + |B_h| \leqslant M \exp(-\delta|h|) , \qquad \text{avec } \delta > 0 .$$

Par conséquent la (15) donne

$$|v_h(t)| + |v_h'(t)| \leqslant \tilde{M} \exp(-\delta|h|/2) , \qquad \text{pour } |h| \text{ assez grand} ,$$

d'où il vient que $u(x, t)$ est une fonction C^1 sur $\mathbb{R} \times [0, T]$ et (th. 12, partie b) analytique en x pour tout $t \in [0, T]$.

Considérons le cas (ii).

Puisque $a(t)$ est une fonction hölderienne sur $[0, T]$ d'exposant α on peut la prolonger à une fonction hölderienne du même exposant α sur $\mathbb{R}$ en prenant $\tilde{a}(t) = a(0)$ si $t < 0$ et $\tilde{a}(t) = a(T)$ si $t > T$. On a alors

$$\sup_{|\tau| \leqslant 1/|h|} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{a}(s-\tau) - \tilde{a}(s)|\, ds \leqslant L|h|^{-\alpha} .$$

D'autre part, $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont des fonctions de Gevrey d'ordre s et donc (th. 12)

$$|A_h| + |B_h| \leqslant M \exp(-\delta|h|^{1/s}) , \qquad \text{avec } \delta > 0 .$$

Par conséquent, si $1/s$ est plus grand que $1-\alpha$, on a d'après la (15)

$$|v_h(t)| + |v_h'(t)| \leqslant \tilde{M} \exp\left[-\frac{\delta}{2}|h|^{1/s}\right]$$

pour $|h|$ assez grand, d'où (th. 12, partie b) la thèse.

Considérons enfin le cas (iii).

Avec la même définition de $\tilde{a}(t)$ que ci-dessus, on a

$$\sup_{|\tau| \leqslant 1/|h|} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{a}(s-\tau) - \tilde{a}(s)|\, ds \leqslant L|h|^{-1}(\log|h| + 1) .$$

Puisque $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont indéfiniment différentiables, on a (th. 12)

$$|A_h| + |B_h| \leqslant M(p)|h|^{-p} , \qquad \forall p > 0 ,$$

et donc, pour $|h|$ assez grand,

$$|v_h(t)| + |v_h'(t)| \leqslant \tilde{M}(p)|h|^{-p+L+1}, \qquad \forall p > 0,$$

d'où la thèse. //

Nous montrerons plus loin (§ 7) que les hypothèses du th. 1 ne peuvent pas être affaiblies. En particulier il peut arriver que le problème $\{(7), (8)\}$ n'ait pas de solution de type fonction (ou distribution) même si les données initiales φ et ψ sont des fonctions indéfiniment différentiables et le coefficient $a(t)$ est hölderien.

4. – Solutions à support compact.

On passe maintenant à examiner le problème $\{(1), (2)\}$ dans le cas général ($n \geqslant 1$, φ, ψ et f non nécessairement périodiques). Bien entendu on fera tojours, sur les coefficients $a_{ij}(t)$, l'hypothèse qu'ils soient des fonctions réelles et intégrables sur $[0, T]$ telles que

$$\text{(16)} \qquad \begin{cases} a_{ij}(t) = a_{ji}(t) \\ \sum a_{ij}(t)\xi_i\xi_j \geqslant \lambda_0 |\xi|^2, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

avec $\lambda_0 > 0$.

Dans ce paragraphe, on commence par considérer le cas où les données $\varphi(x)$, $\psi(x)$ et $f(x, t)$ sont des fonctions ou des fonctionnelles à support compact en x sur $\mathbb{R}^n$ et où la solution $u(x, t)$ du problème est cherchée à support compact en x.

Au lieu du développement en séries de Fourier on peut cette fois utiliser la transformation de Fourier par rapport à x. Le problème $\{(1), (2)\}$ se transforme alors dans la famille, dépendant du paramètre $\zeta \in \mathbb{C}^n$, de problèmes de Cauchy

$$\text{(17)} \qquad \begin{cases} v''(t) + \left(\sum a_{ij}(t)\zeta_i\zeta_j\right)v(t) = \hat{f}(\zeta, t) & \text{dans } [0, T] \\ v(0) = \hat{\varphi}(\zeta) \quad \text{et } v'(0) = \hat{\psi}(\zeta) \end{cases}$$

où $v(t) = \hat{u}(\zeta, t)$.

En vue du théorème de Paley-Wiener, on doit estimer la croissance de la solution v du problème (17), pour $|\zeta| \to \infty$.

Cela sera fait dans le Lemme suivant, où (grâce au Lemme 1 appliqué au problème (17)) on obtiendra les estimations (19) et (22). Dans ces estimations il présente un interêt particulier la dépendance par la matrice des coefficients

$$a(t) = [a_{ij}(t)]_{i,j=1,\dots,n}\,.$$

Cette dépendance s'exprimera à l'aide de la fonctionnelle

$$\omega(a, \delta) = \operatorname*{Sup}_{0\leqslant\tau\leqslant\delta} \int_0^{T-\tau} |a(t+\tau) - a(t)|\,dt\,, \qquad 0 < \delta < T\,, \tag{18}$$

où $|b|$ désigne la norme d'une matrice b.

Cette fonctionnelle répresente le « module de continuité », pour $\tau \to 0^+$, de l'application $\tau \to a(t+\tau)$ à valeurs dans l'espace $\left[L^1([0, T])\right]^{n^2}$.

On sait que, lorsque $\delta \to 0$, $\omega(a, \delta) \to 0$ uniformément pour $a \in \mathscr{K}$, pour toute partie compacte $\mathscr{K}$ de $\left[L^1([0, T])\right]^{n^2}$.

LEMME 2. *Soit u la solution dans $H^{2,1}([0, T], \mathscr{H}')$ (cf. th. 1) du problème $\{(1), (2)\}$, avec des coefficients a_{ij} réels et intégrables sur $[0, T]$ et des données φ, ψ dans $\mathscr{H}'$ et f dans $L^1([0, T], \mathscr{H}')$.*

Soit $\omega(a, \delta)$ définie par (18) (où $a(t) \equiv [a_{ij}(t)]$) et soient $c_0, c_1, \dots,$ des constantes dépendant de λ_0 et T.

Si les a_{ij} vérifient (16), on a, pour $|\zeta| \geqslant 1$ et $t \in [0, T]$,

$$|\zeta||\hat{u}(\zeta, t)| + \left|\widehat{\frac{\partial u}{\partial t}}(\zeta, t)\right| \leqslant M \exp\left(c_1\omega\left(a, \frac{T}{2|\zeta|}\right)|\zeta| + \int_0^t |a(s)|^{\frac{1}{2}} ds\,|\eta|\right) \tag{19}$$

où

$$M = \exp\left(c_0\int_0^T |a(s)|\,ds\right)\left[\left(|\zeta|\int_0^{T/2|\zeta|} |a(s)|\,ds\right)^{\frac{1}{2}}|\zeta||\hat{\varphi}(\zeta)| + |\hat{\psi}(\zeta)| + \int_0^T |\hat{f}(\zeta, s)|\,ds\right]. \tag{20}$$

On observera que dans le cas particulier où les a_{ij} sont bornés, i.e.

$$\lambda_0\,|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j}^{1,n} a_{ij}(t)\,\xi_i\xi_j \leqslant \Lambda_0\,|\xi|^2 \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}, \tag{21}$$

la (19) devient

$$|\zeta||\hat{u}(\zeta, t)| + \left|\widehat{\frac{\partial u}{\partial t}}(\zeta, t)\right| \leqslant M_1 \exp\left(c_1\omega\left(a, \frac{T}{2|\zeta|}\right)|\zeta| + t\sqrt{\Lambda_0}\,|\eta|\right) \tag{22}$$

où

$$M_1 = \exp\,(c_2\Lambda_0)\left[\sqrt{\Lambda_0}\,|\zeta||\hat{\varphi}(\zeta)| + |\hat{\psi}(\zeta)| + \int_0^T |\hat{f}(\zeta, s)|\,ds\right].$$

DÉMONSTRATION. Soit

$$m_a = \frac{1}{T}\int_0^T a(t)\,dt$$

la moyenne sur $[0, T]$ de la matrice $a(t) \equiv [a_{ij}(t)]_{i,j=1,\dots,n}$ des coefficients.

Introduisons les fonctions lipschitziennes

$$\varrho_\zeta(t) = \begin{cases} 2(\delta - |2t-\delta|)\,\delta^{-2} & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \delta\,, \\ 0 & \text{si } t > \delta\,, \end{cases}$$

où

$$\delta = T(2|\zeta|)^{-1}$$

et $\zeta = \xi + i\eta$ est un élément de $\mathbb{C}^n$ tel que $|\zeta| \neq 0$.

On a alors

$$|\varrho_\zeta(t)| \leqslant \frac{4}{T}|\zeta|\,, \tag{23}$$

$$\int_0^{+\infty} \varrho_\zeta(t)\,dt = 1\,, \quad \int_0^{+\infty} |\varrho'_\zeta(t)|\,dt = \frac{8}{T}|\zeta|\,, \quad \int_0^{+\infty} \varrho'_\zeta(t)\,dt = 0\,. \tag{24}$$

En vue du Lemme 1, on décompose $a(t)$ de la façon suivante

$$a(t) = b(\zeta, t) + c(\zeta, t)$$

où

$$b(\zeta, t) = \int_0^{+\infty} \tilde{a}(t+\tau)\,\varrho_\zeta(\tau)\,d\tau$$

et

$$\tilde{a}(t) = \begin{cases} a(t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant T\,, \\ m_a & \text{si } t > T\,. \end{cases}$$

On voit alors que la matrice $b(\zeta, t)$ est lipschitzienne par rapport à t et que, si les $a_{ij}(t)$ vérifient (16),

$$\big(b(\zeta, t)\mu, \mu\big) \geqslant \lambda_0 |\mu|^2\,, \qquad \forall \mu \in \mathbb{R}^n\,. \tag{25}$$

Cela dit, on applique le Lemme 1 au problème (17), où $v(t) = \hat{u}(\zeta, t)$ et

$$\alpha(t) = \big(a(t)\zeta, \zeta\big) \equiv \sum_{i,j} a_{ij}(t)\,\zeta_i \zeta_j$$

$$\beta(t) = \big(b(\zeta, t)\xi, \xi\big) + \big(b(\zeta, t)\eta, \eta\big)$$

$$\gamma(t) = \alpha(t) - \beta(t) .$$

La thèse du Lemme sera alors una conséquence de (6) et d'une estimation convenable de la fonction

$$\frac{1}{2}\left(\frac{|\beta'(t)|}{\beta(t)} + \frac{|\gamma(t)|}{\sqrt{\beta(t)}}\right) .$$

Au but d'estimer la fonction ci-dessus, on commence par remarquer que $\gamma(t)$ peut être écrite sous la forme

$$\gamma(t) = 2i\big(b(\zeta, t)\xi, \eta\big) - 2\big(b(\zeta, t)\eta, \eta\big) - \big(c(\zeta, t)\zeta, \zeta\big)$$

et que toute matrice symétrique et non negative b vérifie l'inégalité

$$|(b\eta, \eta) - i(b\xi, \eta)|^2 \leqslant |b||\eta|^2[(b\xi, \xi) + (b\eta, \eta)] .$$

On a donc

$$|\gamma(t)| \leqslant 2|b(\zeta, t)|^{\frac{1}{2}}|\eta|\sqrt{\beta(t)} + |(c(\zeta, t)\zeta, \zeta)| .$$

D'autre part on a

$$\beta'(t) = \big(b'(\zeta, t)\xi, \xi\big) + \big(b'(\zeta, t)\eta, \eta\big)$$

où $b'(\zeta, t)$ désigne la dérivée de $b(\zeta, t)$ par rapport à t, et on sait, d'après la (25), que $\beta(t) \geqslant \lambda_0|\zeta|^2$.

En conclusion, on obtient l'inégalité suivante:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{|\beta'(t)|}{\beta(t)} + \frac{|\gamma(t)|}{\sqrt{\beta(t)}}\right) \leqslant \frac{1}{2\lambda_0}|b'(\zeta, t)| + |b(\zeta, t)|^{\frac{1}{2}}|\eta| + \frac{1}{2\sqrt{\lambda_0}}|c(\zeta, t)||\zeta| . \tag{26}$$

En vue de la (6), on va maintenant majorer l'intégral en t du deuxième terme de la (26).

Or, de la définition de $b(\zeta, t)$ et de $c(\zeta, t)$ on déduit, en rappelant la (24),

$$b'(\zeta, t) = -\int_0^{+\infty}\big(\tilde{a}(t) - \tilde{a}(t + \tau)\big)\varrho'_\zeta(\tau)\,d\tau \qquad (0 \leqslant t \leqslant T) \tag{27}$$

$$c(\zeta, t) = \int_0^{+\infty}\big(\tilde{a}(t) - \tilde{a}(t + \tau)\big)\varrho_\zeta(\tau)\,d\tau \qquad (0 \leqslant t \leqslant T) \tag{28}$$

tandis que, de $|b| \leqslant |a| + |c|$, on dérive

$$|b(\zeta, t)|^{\frac{1}{2}} \leqslant |a(t)|^{\frac{1}{2}} + |c(\zeta, t)|\,|b(\zeta, t)|^{-\frac{1}{2}}. \tag{29}$$

Mais

$$\int_0^T |\tilde{a}(t+\tau) - \tilde{a}(t)|\,dt = \int_0^{T-\tau} |a(t+\tau) - a(t)|\,dt + \int_{T-\tau}^T |a(t) - m_a|\,dt$$

et donc (voir l'Appendice, partie D) si $0 \leqslant \delta \leqslant T/2$

$$\sup_{0 \leqslant \tau \leqslant \delta} \int_0^T |\tilde{a}(t+\tau) - \tilde{a}(t)|\,dt \leqslant 2\omega(a, \delta) + 2\,\frac{\delta}{T} \int_0^T |a(t)|\,dt\,.$$

En utilisant cette inégalité avec $\delta = T(2|\zeta|)^{-1}$, et grâce au théorème de Fubini-Tonelli et à la (24), les formules (27) et (28) donnent (pour $|\zeta| \geqslant 1$)

$$\int_0^T |b'(\zeta, t)|\,dt \leqslant \frac{8}{T}|\zeta| \Big(2\omega\,(a, T(2|\zeta|)^{-1}) + |\zeta|^{-1} \int_0^T |a(t)|\,dt\Big), \tag{30}$$

$$\int_0^T |c(\zeta, t)|\,dt \leqslant 2\omega\,(a, T(2|\zeta|)^{-1}) + |\zeta|^{-1} \int_0^T |a(t)|\,dt\,, \tag{31}$$

tandis que la (29) donne, puisque $|b| \geqslant \lambda_0$,

$$\int_0^t |b(\zeta, s)|^{\frac{1}{2}}\,ds \leqslant \int_0^t |a(s)|^{\frac{1}{2}}\,ds + \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}} \Big(2\omega\,(a, T(2|\zeta|)^{-1}) + |\zeta|^{-1} \int_0^T |a(s)|\,ds\Big). \tag{32}$$

On introduit les trois majorations ci-dessus dans la (26) et on applique le Lemme 1. La (6) donne alors, pour $|\zeta| \geqslant 1$,

$$\sqrt{E(t)} \leqslant \Big(\sqrt{E(0)} + \int_0^T |\hat{f}(\zeta, s)|\,ds\Big) \exp\Big(c_0 \int_0^T |a(s)|\,ds\Big) \cdot$$
$$\cdot \exp\Big[c_1 \omega(a, T(2|\zeta|)^{-1})|\zeta| + \int_0^t |a(s)|^{\frac{1}{2}}\,ds\,|\eta|\Big]$$

où

$$E(t) = [(b(\zeta, t)\xi, \xi) + (b(\zeta, t)\,\eta, \eta)]\,|\hat{u}(\zeta, t)|^2 + \left|\widehat{\frac{\partial u}{\partial t}}(\zeta, t)\right|^2.$$

Pour obtenir la (19), et ainsi conclure la démonstration du Lemme, il suffit d'observer que

$$\sqrt{E(t)} \geqslant \sqrt{\lambda_0}\,|\zeta|\,|\hat{u}(\zeta, t)| + \left|\widehat{\frac{\partial u}{\partial t}}(\zeta, t)\right| \tag{33}$$

et

$$\sqrt{E(0)} \leqslant |b(\zeta, 0)|^{\frac{1}{2}}|\zeta|\,|\hat{\varphi}(\zeta)| + |\hat{\psi}(\zeta)|\,.$$

Or on a

$$b(\zeta, 0) = \int_0^{T/2|\zeta|} a(t)\,\varrho_\zeta(t)\,dt$$

d'où (en rappelant la (23))

$$|b(\zeta, 0)| \leqslant \frac{4}{T}\,|\zeta| \int_0^{T/2|\zeta|} |a(t)|\,dt$$

et donc

$$\sqrt{E(0)} \leqslant \frac{2}{\sqrt{T}}\left(|\zeta| \int_0^{T/2|\zeta|} |a(t)|\,dt\right)^{\frac{1}{2}} |\zeta|\,|\hat{\varphi}(\zeta)| + |\hat{\psi}(\zeta)|\,. \tag{34}$$

Compte tenu des (33) et (34) on a alors la (19). //

On peut maintenant prouver le résultat principal du paragraphe.

THÉORÈME 3. *Considérons le problème* $\{(1), (2)\}$, *avec des coefficients* $a_{ij}(t)$ *fonctions réelles et intégrables sur* $[0, T]$, *vérifiant l'hypothèse* (16).

a) *Supposons que les données* φ *et* ψ *appartiennent à l'espace* $\mathscr{A}'$ *des fonctionnelles analytiques réelles et que* f *appartienne à* $L^1([0, T], \mathscr{A}')$.

Alors la solution (*cf. th.* 1) u *du problème appartient à* $H^{2,1}([0, T], \mathscr{A}')$.

De plus, si φ *et* ψ *sont dans* $\mathscr{A}'(B(\varrho))$, *où* $B(\varrho)$ *désigne la boule ouverte de* $\mathbb{R}^n$ *de centre* 0 *et rayon* ϱ, *et* f *est dans* $L^1\big([0, T], \mathscr{A}'(B(\varrho))\big)$, *alors*, $\forall \tau \in]0, T]$, u *appartient à* $H^{2,1}\big([0, \tau], \mathscr{A}'(B(\varrho_\tau))\big)$, *où*:

$$\varrho_\tau = \varrho + \int_0^\tau |a(t)|^{\frac{1}{2}}\,dt\,. \tag{35}$$

En particulier, $\forall t \in [0, T]$, $u(t)$ *a support dans* $B(\varrho_t)$, *ce qu'on peut aussi exprimer en disant que* u *a support contenu dans le conoïde* Γ *de* $\mathbb{R}^n \times [0, T]$, *où*

$$\Gamma = \{(x, t) \colon |x| < \varrho_t\}\,.$$

b) Si les coefficients $a_{ij}(t)$ vérifient des hypothèses supplémentaires de régularité, on a en outre les résultats suivants.

i) *Supposons qu'il existe α $(0<\alpha<1)$ et $A>0$ tels que:*

$$\int_0^{T-\tau}|a(t+\tau)-a(t)|\,dt\leqslant A\tau^\alpha \qquad (0\leqslant\tau\leqslant T/2) \tag{36}$$

et soit:

$$1\leqslant s<\frac{1}{1-\alpha}\,.$$

On a alors:

si φ et ψ sont dans $\mathscr{E}'_s$ et f est dans $L^1([0,T],\mathscr{E}'_s)$, la solution u appartient à $H^{2,1}([0,T],\mathscr{E}'_s)$;

si φ et ψ sont dans $\mathscr{D}_s$ et f est dans $L^1([0,T],\mathscr{D}_s)$, la solution u appartient à $H^{2,1}([0,T],\mathscr{D}_s)$.

ii) *Supposons qu'il existe $A>0$ tel que:*

$$\int_0^{T-\tau}|a(t+\tau)-a(t)|\,dt\leqslant A\tau(|\log\tau|+1) \qquad (0<\tau\leqslant T/2)\,. \tag{37}$$

On a alors:

si φ et ψ sont dans $\mathscr{E}'$ et f est dans $L^1([0,T],\mathscr{E}')$, la solution u appartient à $H^{2,1}([0,T],\mathscr{E}')$;

si φ et ψ sont dans $\mathscr{D}$ et f est dans $L^1([0,T],\mathscr{D})$, la solution u appartient à $H^{2,1}([0,T],\mathscr{D})$.

iii) *Supposons qu'il existe $A>0$ tel que:*

$$\int_0^{T-\tau}|a(t+\tau)-a(t)|\,dt\leqslant A\tau \qquad (0\leqslant\tau\leqslant T/2)\,, \tag{38}$$

c'est-à-dire (cf. [8]) que les a_{ij} sont presque par tout égalesà des fonctions à variation bornée sur $[0,T]$.

Alors, si φ est dans H_c^{s+1}, ψ dans H_c^s et f dans $L^1([0,T],H_c^s)$ pour quelque s réel, la solution u appartient à $L^\infty([0,T],H_c^{s+1})$ tandis que $\partial u/\partial t$ appartient à $L^\infty([0,T],H_c^s)$ et $\partial^2u/\partial t^2$ est dans $L^1([0,T],H_c^{s-1})$.

DÉMONSTRATION.

a) D'après le Lemme 2 on a, pour $|\zeta|\geqslant 1$,

$$|\zeta||\hat{u}(\zeta,t)|+\left|\widehat{\frac{\partial u}{\partial t}}(\zeta,t)\right|\leqslant M(a,\zeta)\exp\left(\int_0^t|a(s)|^{\frac{1}{2}}ds|\eta|\right)\exp\left(\varepsilon_0(a,\zeta)|\zeta|\right) \tag{39}$$

où $M(a,\zeta)$ est définie par la (20) et où l'on a posé:

$$\varepsilon_0(a,\zeta)=c_1\omega(a,T(2|\zeta|)^{-1}). \tag{40}$$

On rappelle que $c_0, c_1, c_2, \ldots$ désignent des constantes dépendant de λ_0, T et que la fonction $\omega(a,\delta)$ est définie par la (18).

Supposons maintenant que φ, ψ soient dans $\mathscr{A}'$ et f dans $L^1([0,T],\mathscr{A}')$. D'après le théorème de Paley-Wiener (partie I-(i) et partie III-(i)) il existe un nombre $\varrho>0$ tel que, $\forall\varepsilon>0$, $\exists C_\varepsilon>0$ de façon que, $\forall\zeta\in\mathbb{C}^n$ $(|\zeta|\geqslant 1)$:

$$\operatorname{Max}\left\{|\hat{\varphi}(\zeta)|,\,|\hat{\psi}(\zeta)|,\,\int_0^T|\hat{f}(\zeta,t)|\,dt\right\}\leqslant C_\varepsilon\exp\left(\varepsilon|\zeta|+\varrho|\eta|\right). \tag{41}$$

En introduisant cette inégalité dans la (20), la (39) donne:

$$\begin{aligned}|\zeta||\hat{u}(\zeta,t)|+\left|\widehat{\frac{\partial u}{\partial t}}(\zeta,t)\right|&\leqslant C_\varepsilon\exp\left(c_0\int_0^T|a(t)|\,dt\right)\cdot\exp\left(\int_0^t|a(s)|^{\frac{1}{2}}ds|\eta|\right)\cdot\\&\quad\cdot\left[2+|\zeta|^{\frac{3}{2}}\left(\int_0^T|a(t)|\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\right]\exp\left[(\varepsilon_0(a,\zeta)+\varepsilon)|\zeta|+\varrho|\eta|\right]\end{aligned} \tag{42}$$

pour tout ζ tel que $|\zeta|\geqslant 1$ et tout $\varepsilon>0$.

On définit maintenant:

$$\begin{aligned}L_\varepsilon(a)&=\\&=\exp\left(c_0\int_0^T|a(t)|\,dt\right)\sup_{|\zeta|\geqslant 1}\left\{\left[2+|\zeta|^{\frac{3}{2}}\left(\int_0^T|a(t)|\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\right]\exp\left[(\varepsilon_0(a,\zeta)-\varepsilon)|\zeta|\right]\right\}.\end{aligned} \tag{43}$$

Puisque les $a_{ij}(t)$ sont des fonctions intégrables sur $[0,T]$, on sait que $\omega(a,\delta)\to 0$ si $\delta\to 0^+$ donc, (cf. la définition (40) de $\varepsilon_0(a,\zeta)$):

$$\varepsilon_0(a,\zeta)\to 0 \quad \text{si } |\zeta|\to\infty,$$

et par conséquent $L_\varepsilon(a)<\infty$.

Cela dit, l'inégalité (42) implique:

$$|\hat{u}(\zeta, t)| + \left|\widehat{\frac{\partial u}{\partial t}}(\zeta, t)\right| \leqslant C_\varepsilon L_\varepsilon(a) \exp\left(2\varepsilon|\zeta| + \left(\int_0^t |a(s)|^{\frac{1}{2}} ds + \varrho\right)|\eta|\right) \tag{44}$$

pout tout $\varepsilon > 0$ et $|\zeta| \geqslant 1$.

L'inégalité (44), grâce au théorème de Paley-Wiener (partie II), assure que les fonctionnelles holomorphes $u(t)$ et $(\partial u/\partial t)(t)$ appartiennent à $\mathscr{A}'$, pour tout t dans $[0, T]$, et, de plus, que u et $\partial u/\partial t$ appartiennent à $C([0, T], \mathscr{A}')$.

D'après l'équation (1) on obtient enfin que $\partial^2 u/\partial t^2$ appartient à $L^1([0, T], \mathscr{A}')$.

Supposons maintenant que φ et ψ soient dans $\mathscr{A}'(B(\varrho))$ et f dans $L^1\big([0, T], \mathscr{A}'(B(\varrho))\big)$. Alors, grâce au théorème de Paley-Wiener (partie I-(i) et partie III-(ii)) on a que $\hat{\varphi}$, $\hat{\psi}$ et $\hat{f}$ vérifient la (41) et donc $\hat{u}$ et $\widehat{\partial u/\partial t}$ vérifient la (44). Par conséquent (théorème de Paley-Wiener, partie II) u et $\partial u/\partial t$ appartiennent à $C\big([0, T], \mathscr{A}(B(\varrho_\tau))\big)$ où ϱ_τ est défini par la (35), $\forall \tau$ dans $]0, T]$. D'après l'équation (1) on obtient enfin que u est dans $H^{2,1}\big([0, \tau], \mathscr{A}'(B(\varrho_\tau))\big)$.

b) En vue du théorème de Paley-Wiener (partie I-(ii), ..., I-(vi)) on peut se borner à considérer la (39) pour $\eta = 0$, donc pour $\zeta \equiv \xi$. La (39) devient alors

$$|\xi||\hat{u}(\xi, t)| + \left|\widehat{\frac{\partial u}{\partial t}}(\xi, t)\right| \leqslant M(a, \xi) \exp\big(\varepsilon_0(a, \xi)|\xi|\big) , \qquad |\xi| \geqslant 1 , \tag{45}$$

où $M(a, \xi)$ et $\varepsilon_0(a, \xi)$ sont définies respectivement par la (20) et la (40).

Considérons maintenant le cas (i).

Si la matrice $a(t)$ des coefficients vérifie l'hypothèse (36), alors la fonction $\omega(a, \delta)$ définie par la (18) est telle que

$$\omega(a, \delta) \leqslant A\delta^\alpha$$

et donc

$$\varepsilon_0(a, \xi) \leqslant c_1(T/2)^\alpha A|\xi|^{-\alpha} . \tag{46}$$

Or, si les données φ et ψ sont dans $\mathscr{E}'_s$ et f est dans $L^1([0, T], \mathscr{E}'_s)$, pour s réel $\geqslant 1$, on a (théorème de Paley-Wiener, parties I-(ii) et III-(iii)) que, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists C'_\varepsilon > 0$ tel que, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\operatorname{Max}\left\{|\hat{\varphi}(\xi)|, |\hat{\psi}(\xi)|, \int_0^T |\hat{f}(\xi, t)| dt\right\} \leqslant C'_\varepsilon \exp\big(\varepsilon|\xi|^{1/s}\big) \qquad (|\xi| \geqslant 1) , \tag{47}$$

d'où, comme pour la partie (a) déjà prouvée, on tire

$$(48) \qquad |\xi||\hat{u}(\xi,t)| + \left|\widehat{\frac{\partial u}{\partial t}}(\xi,t)\right| \leqslant$$

$$\leqslant C'_\varepsilon \exp\left(c_0\int_0^T |a(t)|\,dt\right)\left[2 + |\xi|^{\frac{2}{3}}\left(\int_0^T |a(t)|\,dt\right)^{\frac{1}{3}}\right]\cdot \exp\left[\varepsilon_0(a,\xi)|\xi| + \varepsilon|\xi|^{1/s}\right]$$

pour $|\xi| \geqslant 1$.

Des inégalités (46) et (48), on obtient alors

$$|\hat{u}(\xi,t)| + \left|\widehat{\frac{\partial u}{\partial t}}(\xi,t)\right| \leqslant C'_\varepsilon L'_\varepsilon(a)\exp\left(2\varepsilon|\xi|^{1/s}\right) \qquad (|\xi| \geqslant 1)$$

où

$$L'_\varepsilon(a) =$$

$$= \exp\left(c_0\int_0^T |a(t)|\,dt\right)\sup_{|\xi|\geqslant 1}\left\{\left[2 + |\xi|^{\frac{2}{3}}\left(\int_0^T |a(t)|\,dt\right)^{\frac{1}{3}}\right]\exp\left[c_1(T/2)^\alpha A|\xi|^{1-\alpha} - \varepsilon|\xi|^{1/s}\right]\right\}.$$

Or pour $1 \leqslant s < 1/(1-\alpha)$ on a $L'_\varepsilon(a) < +\infty$.

Cela achève la démonstration de la partie (i) lorsque les données φ et ψ sont dans $\mathscr{E}'_s$ et f est dans $L^1([0,T], \mathscr{E}'_s)$.

Les autres cas considérés dans la partie (b) du théorème se prouvent de façon toute à fait analogue au cas précédent.

Nous nous bornerons à observer que, lorsque les coefficients $a_{ij}(t)$ sont des fonctions bornées sur $[0,T]$ (ce qui arrive si $a(t)$ vérifie l'hypothèse (38)), il est convenable d'utiliser l'inégalité (22) au lieu de la (19). Remarquons enfin que, si $a(t)$ vérifie (38) et (16), alors elle vérifie (21) avec $\Lambda_0 = A + T^{-1}\int_0^T |a(t)|\,dt$. Donc, dans le cas (iii), la (22) donne une estimation de la solution u avec des constantes ne dépendant que des données initiales et de λ_0, A et $\int_0^T |a(t)|\,dt$. //

Remarque 1. Supposons que les données φ et ψ du problème $\{(1), (2)\}$ appartiennent à $\mathscr{E}'_s$ et que f appartient à $C([0,T], \mathscr{E}'_s)$, pour quelque s strictement plus grand que 1, et supposons que les coefficients $a_{ij}(t)$ vérifient l'hypothèse (36) avec $\alpha > 1 - 1/s$.

Alors, si φ, ψ et f sont nulles pour $|x| > \varrho$ la solution u est nulle au dehors du conoïde $\Gamma = \{|x| < \varrho_t\}$ où ϱ_t est défini dans la (35).

Démonstration. Du fait que $f: [0,T] \to \mathscr{E}'_s$ est continue et $f(t)$ appartient à $\mathscr{E}'_s(B(\delta))$, $\forall t \in [0,T]$, $\forall \delta > \varrho$, il suit que f est dans $C\big([0,T], \mathscr{E}'_s(B(\sigma))\big)$ et donc dans $L^1\big([0, T], \mathscr{A}'(B(\sigma))\big)$ $\forall \sigma > \varrho$. On peut alors appliquer la partie (a) du Théorème 3. //

REMARQUE 2. L'hypothèse (36) est vérifiée en particulier si les coefficients $a_{ij}(t)$ sont hölderiens sur $[0, T]$ avec exposant α ou, plus en général, si

$$a_{ij}(t) = a_{ij}^{(1)}(t) + a_{ij}^{(2)}(t) \tag{49}$$

avec $a_{ij}^{(1)}$ hölderien d'exposant α et $a_{ij}^{(2)}$ à variation bornée sur $[0, T]$.

Il existent toutefois des fonctions (e.g. $t^{\alpha-1}$ avec $0 < \alpha < 1$) qui vérifient la (36) mais qui ne sont pas bornées, donc ne sont pas du type (49).

REMARQUE 3. L'hypothèse (38) est vérifiée en particulier lorsque les coefficients $a_{ij}(t)$ sont lipschitziens sur $[0, T]$.

REMARQUE 4. Si les coefficients $a_{ij}(t)$ vérifient l'hypothèse (plus forte que la (36))

$$\lim_{\tau \to 0^+} \tau^{-\alpha} \int_0^{T-\tau} |a(t+\tau) - a(t)|\, dt = 0 \qquad (0 < \alpha < 1)\,, \tag{50}$$

alors la conclusion du théorème 3 (partie b, i)) est valable aussi pour $s = 1/(1-\alpha)$.

On peut remarquer que la (50) pour $\alpha = 0$ est vérifiée par toutes les fonctions intégrables sur $[0, T]$, ce qui redonne la partie a) du théorème.

DÉMONSTRATION. Il suffit d'observer que, sous l'hypothèse (50), la fonction $\varepsilon_0(a, \xi)$ (cf. la (40)) qui figure dans l'inégalité (45) est telle que $\varepsilon_0(a, \xi)|\xi|^\alpha \to 0$ si $|\xi| \to \infty$.

Par conséquent, la fonction $\exp\big(\varepsilon_0(a, \xi)|\xi| - \varepsilon|\xi|^{1/s}\big)$ est bornée sur $\mathbb{R}^n$, $\forall \varepsilon > 0$, non seulement pour $s < 1/(1-\alpha)$ mais aussi pour $s = 1/(1-\alpha)$. //

REMARQUE 5. Plaçons nous dans le cas b, ii), du théorème 3. La constante A qui figure dans l'hypothèse (37) est proportionnelle à la perte de régularité de la solution u par rapport à la régularité des données φ, ψ et f.

Plus exactement, si φ appartient à $H_c^{s+1+\varepsilon}$, pour quelque s réel et $\varepsilon > 0$, et si ψ appartient à H_c^s et f à $L^1([0, T], H_c^s)$, alors la solution u du problème appartient à $L^\infty([0, T], H_c^{s+1-\bar{c}A})$ avec $\bar{c} = \bar{c}(\lambda_0, T)$ tandis que $\partial u/\partial t$ appartient à $L^\infty([0, T], H_c^{s-\bar{c}A})$ et $\partial^2 u/\partial t^2$ appartient à $L^1([0, T], H_c^{s-1-\bar{c}A})$.

Si de plus, outre à verifier la (37), les coefficients $a_{ij}(t)$ sont bornés sur $[0, T]$, alors le résultat précedent est valable aussi pour $\varepsilon = 0$.

DÉMONSTRATION. Sous l'hypothèse (37) l'inégalité (19), avec $\eta = 0$,

$\zeta = \xi$ et $|\xi| \geqslant 1$, donne

$$(51) \qquad |\xi||\hat{u}(\xi, t)| + \left|\widehat{\frac{\partial u}{\partial t}}(\xi, t)\right| \leqslant M(a, \xi)\, \bar{c}^A |\xi|^{\bar{c}A}$$

où $\bar{c} = \bar{c}(\lambda_0, T)$ et $M(a, \xi)$ est définie par la (20).

Pour obtenir une bonne estimation de $M(a, \xi)$, il faut observer (voir l'Appendice, partie D) que

$$|\xi| \int_0^{T/2|\xi|} |a(t)|\,dt \leqslant \int_0^T |a(t)|\,dt + |\xi|\,\omega\big(a, T(2|\xi|)^{-1}\big)$$

si $|\xi| \geqslant 1$. Par conséquent on a, grâce à la (37),

$$(52) \qquad M(a, \xi) \leqslant C\Big[(1 + A \log|\xi|)^{\frac{1}{2}}|\xi||\hat{\varphi}(\xi)| + |\hat{\psi}(\xi)| + \int_0^T |\hat{f}(\xi, t)|\,dt\Big]$$

où la constante C dépend de λ_0, T et de $\int_0^T |a(t)|\,dt$.

On introduit alors la (52) dans la (51).

Enfin, lorsque les $a_{ij}(t)$ sont bornées et donc vérifient la (21), on observe que

$$M(a, \xi) \leqslant C_1\Big(|\xi||\hat{\varphi}(\xi)| + |\hat{\psi}(\xi)| + \int_0^T |\hat{f}(\xi, t)|\,dt\Big)$$

avec $C_1 = C_1(\lambda_0, \Lambda_0, T)$. //

5. – Solutions à support non compact.

On se propose ici d'étendre les résultats du § 4 au cas où les données φ, ψ et f du problème $\{(1), (2)\}$ n'ont pas support compact dans $\mathbb{R}^n$. En particulier on obtiendra un résultat d'existence et d'unicité dans l'espace des fonctions analytiques réelles en x.

THÉORÈME 4 (existence). *Considérons le problème* $\{(1), (2)\}$ *avec des coefficients* $a_{ij}(t)$, *fonctions réelles et intégrables sur* $[0, T]$, *qui vérifient l'hypothèse* (16).

i) *Si les données* φ *et* ψ *sont dans l'éspace* $\mathscr{A}$ *des fonctions analytiques réelles et* f *est dans* $L^1([0, T], \mathscr{A})$, *il existe une solution* u *du problème qui appartient à* $H^{2,1}([0, T], \mathscr{A})$.

ii) *Supposons que les coefficients* $a_{ij}(t)$ *vérifient la* (36) *avec* $0 < \alpha < 1$. *On a alors, pour* $1 \leqslant s < 1/(1-\alpha)$:

si φ et ψ sont dans $\mathscr{E}_s$ et f est dans $L^1([0, T], \mathscr{E}_s)$, il existe une solution u dans $H^{2,1}([0, T], \mathscr{E}_s)$;

si φ et ψ sont dans $\mathscr{D}'_s$ et f est dans $L^1([0, T], \mathscr{D}'_s)$, il existe une solution u dans $H^{2,1}([0, T], \mathscr{D}'_s)$.

iii) *Supposons que les $a_{ij}(t)$ vérifient la* (37). *On a alors:*

si φ et ψ sont dans $\mathscr{E}$ et f est dans $L^1([0, T], \mathscr{E})$, il existe une solutions u dans $H^{2,1}([0, T], \mathscr{E})$;

si φ et ψ sont dans $\mathscr{D}'$ et f est dans $L^1([0, T], \mathscr{D}')$, il existe une solution u dans $H^{2,1}([0, T], \mathscr{D}')$.

iv) *Supposons que les $a_{ij}(t)$ vérifient la* (38) *et soit s un nombre réel. Alors, si φ est dans H^{s+1}_{loc}, ψ est dans H^s_{loc} et f est dans $L^1([0, T], H^s_{\text{loc}})$, il existe une solution u dans $C([0, T], H^{s+1}_{\text{loc}})$; en outre $\partial u/\partial t$ appartient à $L^2([0, T], H^s_{\text{loc}})$ et $\partial^2 u/\partial t^2$ à $L^1([0, T], H^{s-1}_{\text{loc}})$.*

DÉMONSTRATION.

(i) Soient φ et ψ dans $\mathscr{A}$ et f dans $L^1([0, T], \mathscr{A})$.

Il existe alors (voir l'Appendice, partie E) des familles $\{\varphi_\nu\}$ et $\{\psi_\nu\}$ d'éléments de $\mathscr{H}$ et une famille $\{f_\nu\}$ d'éléments de $L^1([0, T], \mathscr{H})$ (où ν parcourt un ensemble ordonné filtrant d'indices) telles que:

$$\left\{\begin{array}{ll} \{\varphi_\nu\} \to \varphi \text{ et } \{\psi_\nu\} \to \psi & \text{dans } \mathscr{A}, \\ \{f_\nu\} \to f & \text{dans } L^1([0, T], \mathscr{A}). \end{array}\right. \tag{53}$$

Grâce au théorème 1, partie (ii), il existe la solution u_ν dans $H^{2,1}([0, T], \mathscr{H})$ du problème:

$$\frac{\partial^2 u_\nu}{\partial t^2} - \sum_{i,j}^{1,n} a_{ij}(t) \frac{\partial^2 u_\nu}{\partial x_i \partial x_j} = f_\nu \qquad \text{dans } \mathbb{R}^n \times [0, T], \tag{54}$$

$$u_\nu(0) = \varphi_\nu \qquad \text{et } \frac{\partial u_\nu}{\partial t}(0) = \psi_\nu \qquad \text{dans } \mathbb{R}^n. \tag{55}$$

Soit g un élément de $L^1([0, T], \mathscr{A}')$ et désignons par v_g la solution (cf. th. 3) dans $H^{2,1}([0, T], \mathscr{A}')$ du problème dual:

$$\frac{\partial^2 v_g}{\partial t^2} - \sum_{i,j}^{1,n} a_{ij}(t) \frac{\partial^2 v_g}{\partial x_i \partial x_j} = g \qquad \text{dans } \mathbb{R}^n \times [0, T], \tag{56}$$

$$v_g(T) = 0 \qquad \text{et } \frac{\partial v_g}{\partial t}(T) = 0 \qquad \text{dans } \mathbb{R}^n. \tag{57}$$

Multiplions (dans la dualité $\langle\, ,\, \rangle$ entre $\mathscr{A}'$ et $\mathscr{A}$) l'équation (54) par v_g et la (56) par u_ν et intégrons sur $[0, T]$. On obtient alors:

$$\int_0^T \langle g(t), u_\nu(t)\rangle\, dt = \int_0^T \langle v_g(t), f_\nu(t)\rangle\, dt + \langle v_g(0), \psi_\nu\rangle - \left\langle \frac{\partial v_g}{\partial t}(0), \varphi_\nu \right\rangle . \tag{58}$$

Or, supposons que la donnée g parcourt une partie bornée $\mathscr{B}$ de $L^1([0, T], \mathscr{A}')$. Grâce à l'inégalité (19) et au théorème de Paley-Wiener (partie II) on voit alors que $v_g(0)$ et $(\partial v_g/\partial t)(0)$ parcourent une partie bornée de $\mathscr{A}'$, tandis que v_g parcourt une partie bornée de $C([0, T], \mathscr{A}')$.

D'après les (53) et (58), on obtient alors que, lorsque $\nu \to \infty$,

$$\left\{ \int_0^T \langle g(t), u_\nu(t)\rangle\, dt \right\} \to \int_0^T \langle v_g(t), f(t)\rangle\, dt + \langle v_g(0), \psi\rangle - \left\langle \frac{\partial v_g}{\partial t}(0), \varphi \right\rangle ,$$

uniformément pour g dans $\mathscr{B}$.

Il existe alors u dans $C([0, T], \mathscr{A})$ tel que, si $\nu \to \infty$,

$$\{u_\nu\} \to u \quad \text{dans } L^\infty([0, T], \mathscr{A}) .$$

De la (54) il résulte aussi que, si $\nu \to \infty$,

$$\left\{ \frac{\partial^2 u_\nu}{\partial t^2} \right\} \to \sum a_{ij}(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} + f \qquad \text{dans } L^1([0, T], \mathscr{A}) .$$

Il en suit que la fonction u appartient à $H^{2,1}([0, T], \mathscr{A})$ et elle est une solution du problème $\{(1), (2)\}$.

(ii)-(iii) La démonstration est tout à fait analogue à celle du cas (i). Il faut simplement choisir g dans $L^1([0, T], \mathscr{E}'_s)$ $\big($ou dans $L^1([0, T], \mathscr{D}_s)\big)$ dans le cas (ii) et g dans $L^1([0, T], \mathscr{E}')$ $\big($ou dans $L^1([0, T], \mathscr{D})\big)$ dans le cas (iii).

(iv) Il faut prendre g dans une partie bornée $\mathscr{B}$ de $L^1([0, T], H_c^{-s-1})$ et appliquer l'inégalité (22) (avec $\eta = 0$) à la solution v_g du problème $\{(56), (57)\}$. Puisque sous l'hypothèse (38) on a $\omega(a, T(2|\zeta|)^{-1}) \leqslant AT(2|\zeta|)^{-1}$ il en suit que $v_g(0)$ parcourt une partie bornée de H_c^{-s} et $(\partial v_g/\partial t)(0)$ une partie bornée de H_c^{-s-1}, tandis que v_g parcourt une partie bornée de $L^\infty([0, T], H_c^{-s})$.

Il suffira donc de choisir $\{\varphi_\nu\}$, $\{\psi_\nu\}$ et $\{f_\nu\}$ de façon que $\{\varphi_\nu\} \to \varphi$ dans H^{s+1}_{loc}, $\{\psi_\nu\} \to \psi$ dans H^s_{loc} et $\{f_\nu\} \to f$ dans $L^1([0, T], H^s_{\text{loc}})$.

On montre ainsi qu'il existe u dans l'espace $C([0, T], H^{s+1}_{\text{loc}})$ tel que $\{u_\nu\} \to u$ dans $C([0, T], H^{s+1}_{\text{loc}})$.

De l'équation (54) il suit alors que:

$$\left\{\frac{\partial^2 u_\nu}{\partial t^2}\right\} \to \sum a_{ij}(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + f \qquad \text{dans } L^1([0, t], H^{s-1}_{\text{loc}}),$$

et donc que u est une solution du problème $\{(1), (2)\}$ et que $\partial^2 u/\partial t^2$ est dans $L^1([0, T], H^{s-1}_{\text{loc}})$. Par interpolation on voit enfin que $\partial u/\partial t$ appartient à $L^2([0, T], H^s_{\text{loc}})$. //

REMARQUE 6. Plaçons nous dans les hypothèses du théorème 3 ou du théorème 4.

Si les données φ, ψ et $f(t)$ sont des fonctionnelles, ou des fonctions, à valeurs réelles, alors la solution $u(t)$ (donnée par le théorème 3 dans le cas de supports compacts, et par le théorème 4 autrement) est elle aussi à valeurs réelles.

DÉMONSTRATION. Rappellons avant tout qu'une fonctionnelle analytique réelle (resp. une ultradistribution de Gevrey) χ est à valeurs réelles si $\langle \chi, w \rangle$ est un nombre réel pour toute fonction réelle w analytique (resp. de Gevrey et à support compact) sur $\mathbb{R}^n$.

Lorsque χ est à support compact cela équivaut à dire que:

$$\hat{\chi}(-\xi) = \overline{\hat{\chi}(\xi)}, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Or, si les données φ, ψ et $f(t)$ sont dans $\mathscr{A}'$ et u est la solution donnée par le théorème 3, on sait que $\hat{u}(\xi, t)$ est la solution du problème (17). Mais si φ, ψ et $f(t)$ ont des valeurs réelles, on obtient que $\overline{\hat{u}(-\xi, t)}$ est une autre solution de (17), d'où la thèse.

Si φ, ψ et $f(t)$ sont des ultradistributions ou des fonctions à support non compact, on accouple le problème $\{(1), (2)\}$ avec le problème $\{(56), (57)\}$, où $g(t)$ est choisie à valeurs réelles. D'après ce qu'on vient de prouver, $v_g(t)$ est alors à valeurs réelles et, par conséquent, (cf. la (58)) $\int_0^T \langle g(t), u(t) \rangle \, dt$ est dans $\mathbb{R}$. Par l'arbitrarieté de g, on a alors que $u(t)$ est à valeurs réelles. //

THÉORÈME 5 (dépendence continue de la solution par les données). *Considérons le problème* $\{(1), (2)\}$ *avec des coefficients* $a_{ij}(t)$, *fonctions réelles et intégrables sur* $[0, T]$, *qui vérifient* (16).

Soit, pour tout ν *dans un ensemble ordonné et filtrant d'indices,* u_ν *une solution du problème avec données* φ_ν, ψ_ν, f_ν (*c'est à dire* u_ν *est une solution du problème* $\{(54), (55)\}$).

Désignons par B^0 une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ avec rayon $\varrho > 0$ et par B^t la boule ouverte avec le même centre que B^0 et rayon $\varrho(t)$ où

$$\varrho(t) = \varrho - \int_0^t |a(s)|^{\frac{1}{2}} ds .$$

i) *Supposons que u_ν appartient à $H^{2,1}([0, T], \mathscr{A})$, $\forall \nu$.*

Si $\{\varphi_\nu\}$ et $\{\psi_\nu\}$ convergent à zéro dans $\mathscr{A}(B^0)$ et $\{f_\nu\} \to 0$ dans $L^1([0, T], \mathscr{A}(B^0))$, pour $\nu \to \infty$, alors

$$\{u_\nu\} \to 0 \qquad dans\ H^{2,1}([0, \tau], \mathscr{A}(B^\tau))$$

pour tout $\tau \in]0, T]$ tel que $\varrho(\tau) > 0$.

ii) *Supposons que les $a_{ij}(t)$ vérifient la* (36) *avec $0 < \alpha < 1$ et que u_ν appartient à $H^{2,1}([0, T], \mathscr{E}_s)$ $\big($resp. à $H^{2,1}([0, T], \mathscr{D}'_s)\big)$ avec $1 < s < 1/(1-\alpha)$, $\forall \nu$.*

Si $\{\varphi_\nu\}$ et $\{\psi_\nu\}$ convergent à zéro dans $\mathscr{E}_s(B^0)$ (resp. dans $\mathscr{D}'_s(B^0)$) et $\{f_\nu\} \to 0$ dans $L^1([0, T]), \mathscr{E}_s(B^0))$ $\big($resp. dans $L^1([0, T], \mathscr{D}'_s(B_0))\big)$, alors, $\forall \tau \in]0, T]$,

$$\{u_\nu\} \to 0 \qquad dans\ H^{2,1}([0, \tau], \mathscr{E}_s(B^\tau))$$

$\big($*resp.* $\{u_\nu\} \to 0$ *dans* $H^{2,1}([0, \tau], \mathscr{D}'_s(B^\tau))\big)$.

iii) *Supposons que les $a_{ij}(t)$ vérifient la* (37) *et que u_ν appartient à $H^{2,1}([0, T], \mathscr{E})$ $\big($resp. à $H^{2,1}([0, T], \mathscr{D}')\big)$, $\forall \nu$.*

Si $\{\varphi_\nu\}$ et $\{\psi_\nu\}$ convergent à zéro dans $\mathscr{E}(B^0)$ (resp. dans $\mathscr{D}'(B^0)$) et $\{f_\nu\} \to 0$ dans $L^1([0, T], \mathscr{E}(B^0))$ $\big($resp. dans $L^1([0, T], \mathscr{D}'(B^0))\big)$, alors, $\forall \tau \in]0, T]$,

$$\{u_\nu\} \to 0 \qquad dans\ H^{2,1}([0, \tau], \mathscr{E}(B^\tau))$$

$\big($*resp.* $\{u_\nu\} \to 0$ *dans* $H^{2,1}([0, \tau], \mathscr{D}'(B^\tau))\big)$.

iv) *Supposons que les $a_{ij}(t)$ vérifient la* (38) *et que u_ν appartient à $H^{2,1}([0, T], H^{s+1}_{\text{loc}})$ avec s réel, $\forall \nu$.*

Si $\{\varphi_\nu\} \to 0$ dans $H^{s+1}_{\text{loc}}(B^0)$, $\{\psi_\nu\} \to 0$ dans $H^s_{\text{loc}}(B^0)$ et $\{f_\nu\} \to 0$ dans $L^1([0, T], H^s_{\text{loc}}(B^0))$, alors, $\forall \tau \in]0, T]$,

$$\{u_\nu\} \to 0 \qquad dans\ L^\infty([0, \tau], H^{s+1}_{\text{loc}}(B^\tau)) ,$$

tandis que $\{(\partial u_\nu/\partial t)\}\to 0$ *dans* $L^2([0,\tau], H^s_{\text{loc}}(B^\tau))$ *et* $\{(\partial^2 u_\nu/\partial t^2)\}\to 0$ *dans* $L^1([0,\tau], H^{s-1}_{\text{loc}}(B^\tau))$.

DÉMONSTRATION.

(i) Fixons τ dans $]0, T]$ tel que $\varrho(\tau)>0$.

Soit g dans $L^1([0,\tau], \mathscr{A}'(B^\tau))$ et désignons par v_g la solution (cf. th. 3) dans $H^{2,1}([0,\tau], \mathscr{A}')$ du problème dual:

$$\frac{\partial^2 v_g}{\partial t^2}-\sum a_{ij}(t)\frac{\partial^2 v_g}{\partial x_i\,\partial x_j}=g \qquad \text{dans } \mathbb{R}^n\times[0\ \tau], \tag{59}$$

$$v_g(\tau)=0 \qquad \text{et } \frac{\partial v_g}{\partial t}(\tau)=0 \qquad \text{dans } \mathbb{R}^n\,. \tag{60}$$

En multipliant l'équation (59) par u_ν et la (54) par v_g et en intégrant sur $[0,\tau]$ on obtient l'égalité:

$$\int_0^\tau\langle g(t), u_\nu(t)\rangle\,dt=\int_0^\tau\langle v_g(t), f_\nu(t)\rangle\,dt+\langle v_g(0),\psi_\nu\rangle-\left\langle\frac{\partial v_g}{\partial t}(0),\varphi_\nu\right\rangle\,. \tag{61}$$

Puisque g a été choisi dans $L^1([0,\tau], \mathscr{A}'(B_\tau))$ le théorème 3, partie a, nous dit que la solution v_g appartient à $H^{2,1}([0,\tau], \mathscr{A}'(B^0))$.

Par conséquent la (61) implique que, pour $\nu\to\infty$,

$$\left\{\int_0^\tau\langle g(t), u_\nu(t)\rangle\,dt\right\}\to 0\,,\qquad \forall g\in L^1([0,\tau], \mathscr{A}'(B^\tau))\,. \tag{62}$$

Or, si g parcourt une partie bornée de $L^1([0,\tau], \mathscr{A}'(B^\tau))$, on sait (cf. la (44)) que v_g parcourt une partie bornée de $H^{2,1}([0,\tau], \mathscr{A}'(B^0))$. Il en suit que la convergence (62) est uniforme par rapport à g.

On a alors que $\{u_\nu\}\to 0$ dans $C([0,\tau], \mathscr{A}'(B^\tau))$ et donc (en rappelant que u_ν vérifie l'équation (1)) que $\{u_\nu\}\to 0$ dans $H^{2,1}([0,\tau], \mathscr{A}'(B^\tau))$.

Les parties (ii), (iii) et (iv) se prouvent de façon analogue. //

REMARQUE 7. Les mêmes résultats du théorème 4 sont encore valables si l'on remplace « famille dépendant de ν qui converge vers zéro lorsque $\nu\to\infty$ » par « famille bornée ».

Du théorème 5 on peut dériver sans difficulté le résultat suivant sur le « domaine de dépendence » des solutions de l'équation (1), qui entraîne l'unicité de la solution du problème $\{(1), (2)\}$.

THÉORÈME 6 (domaine de dépendence et unicité). *Considérons le problème* $\{(1), (2)\}$ *avec des coefficients* $a_{ij}(t)$, *fonctions réelles et intégrables sur* $[0, T]$, *qui vérifient la* (16).

a) Soit u *une solution dans* $H^{2,1}([0, T], \mathscr{A}')$ *et soient* φ, ψ *dans* $\mathscr{A}'$ *et* f *dans* $L^1([0, T], \mathscr{A}')$ *tels que* $\varphi(x) \equiv \psi(x) \equiv f(x, t) \equiv 0$ *pour* $|x - x_0| < \varrho$. *Alors* $u(x, t) \equiv 0$ *pour* $|x - x_0| < \varrho - \int_0^t |a(s)|^{\frac{1}{2}} ds$.

b) Le même résultat est valable (sans autres hypothèses sur les coefficients) lorsque les données φ *et* ψ *appartiennent à* $\mathscr{D}'_s$ *pour quelque* $s > 1$ *et* f *est dans* $L^1([0, T], \mathscr{D}'_s)$, *pourvu que* u *appartienne à* $H^{2,1}([0, T], \mathscr{D}'_s)$.

DÉMONSTRATION.

(a) Soit $\varrho(t) = \varrho - \int_0^t |a(s)|^{\frac{1}{2}} ds$ et soit $\tau \in]0, T]$ tel que $\varrho(\tau) > 0$.

Le fait que la fonctionnelle analytique réelle $u(\tau)$ est égale à zéro sur la boule ouverte $B(x_0, \varrho(\tau))$ de centre x_0 et rayon $\varrho(\tau)$, signifie que

$$\langle u(\tau), w_\nu \rangle \to 0 \qquad (\text{si } \nu \to \infty) \tag{63}$$

pour toute suite $\{w_\nu\}$ de fonctions entières telle que

$$w_\nu \to 0 \qquad \text{dans } \mathscr{A}\Big(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B(x_0, \varrho(\tau) - \varepsilon)}\Big) \tag{64}$$

pour quelque $\varepsilon > 0$.

Or, si $\{w_\nu\}$ est une suite de fonctions entières qui verifie la (64), désignons par v_ν la solution dans $H^{2,1}([0, \tau], \mathscr{A})$ du problème:

$$\frac{\partial^2 v_\nu}{\partial t^2} - \sum a_{ij}(t) \frac{\partial^2 v_\nu}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \qquad \text{dans } \mathbb{R}^n \times [0, \tau], \tag{65}$$

$$v_\nu(\tau) = 0 \qquad \text{et } \frac{\partial v_\nu}{\partial t}(\tau) = w_\nu \qquad \text{dans } \mathbb{R}^n. \tag{66}$$

Le théorème 5, partie (i), donne alors que $\{v_\nu\} \to 0$ dans $H^{2,1}\Big([0, \tau], \mathscr{A}\big(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B(x_0, \varrho - \varepsilon)}\big)\Big)$.

D'autre part, en accouplant le problème $\{(65), (66)\}$ avec le problème $\{(1), (2)\}$, on parvient à l'égalité

$$\langle u(\tau), w_\nu \rangle = \Big\langle \varphi, \frac{\partial v_\nu}{\partial t}(0) \Big\rangle - \langle \psi, v_\nu(0) \rangle - \int_0^\tau \langle f(t), v_\nu(t) \rangle \, dt.$$

Il en suit alors la (63).

(b) Si u est une solution dans $H^{2,1}([0, T], \mathscr{D}'_s)$, où $s > 1$, du problème $\{(1), (2)\}$ avec des données φ et ψ dans $\mathscr{D}'_s$ et f dans $L^1([0, T], \mathscr{D}'_s)$, on peut remplacer u par $\tilde{u} = \eta(x)u$ où $\eta(x)$ est une fonction de Gevrey d'ordre s à support compact dans $\mathbb{R}^n$ telle que $\eta \equiv 1$ sur la boule $B(x_0, \varrho)$. On voit alors que $\tilde{u}$ est solution du problème $\{(1), (2)\}$ avec des données $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\psi}$ et $\tilde{f}$ qui coïncident avec φ, ψ et f (et donc sont nulles) pour $|x - x_0| < \varrho$ et qui appartiennent respectivement à $\mathscr{E}'_s$ (et donc à $\mathscr{A}'$) et à $L^1([0, T], \mathscr{E}'_s)$ $\big($et donc à $L^1([0, T], \mathscr{A}')\big)$.

On s'est ainsi réconduit à la partie déjà prouvée. //

THÉORÈME 7 (existence locale). *Considérons le problème* $\{(1), (2)\}$ *avec des coefficients* $a_{ij}(t)$, *fonctions réelles et intégrables sur* $[0, T]$, *qui vérifient la* (16).

a) *Etant données* φ *et* ψ, *fonctions analytiques sur une boule ouverte* B^0 *de* $\mathbb{R}^n$ *de centre* x_0 *et rayon* ϱ, *et* f *dans* $L^1([0, T], \mathscr{A}(B^0))$, *il existe une et une seule solution* $u(x, t)$ *du problème* $\{(1), (2)\}$ *sur le conoïde* Γ *de* $\mathbb{R}^n \times [0, T]$, *où*

$$\Gamma = \left\{(x, t) \colon |x - x_0| < \varrho - \int_0^t |a(s)|^{\frac{1}{2}} ds\right\},$$

qui appartient à $H^{2,1}([0, \tau], \mathscr{A}(B^\tau))$, $\forall \tau \in]0, T]$, *où* B^τ *est la boule ouverte de centre* x_0 *et rayon* $\varrho(\tau)$ *donné par*

$$\varrho(\tau) = \varrho - \int_0^\tau |a(t)|^{\frac{1}{2}} dt\,.$$

En particulier la fonction $u(x, t)$ *est de classe* C^1 *dans* Γ *et elle est analytique en* x *sur* B^t, $\forall t \in [0, T]$.

b) *Lorsque les coefficients* $a_{ij}(t)$ *vérifient une des hypothèses supplémentaires* (36), (37) *ou* (38), *on a des résultats d'existence* (*et unicité*) *des solutions sur le conoïde* Γ, *qui sont analogues aux précedents résultats d'existence globale* (*cf. th.* 4, *parties* (ii), (iii) *et* (iv)).

DÉMONSTRATION.

(a) Puisque $\mathscr{A}$ est dense dans $\mathscr{A}(B^0)$, et donc (voir l'Appendice partie E) $L^1([0, T], \mathscr{A})$ est dense dans $L^1([0, T], \mathscr{A}(B^0))$, étant données φ, ψ et f, il existent des familles $\{\varphi_\nu\}$, $\{\psi_\nu\}$ dans $\mathscr{A}$ et $\{f_\nu\}$ dans $L^1([0, T], \mathscr{A})$, où ν parcourt un ensemble ordonné filtrant, telles que, si $\nu \to \infty$,

$$\{\varphi_\nu\} \to \varphi \quad \text{et } \{\psi_\nu\} \to \psi \text{ dans } \mathscr{A}(B^0)\,,$$
$$\{f_\nu\} \to f \quad \text{dans } L^1([0, T], \mathscr{A}(B^0))\,.$$

Soit alors u_ν la solution (cf. th. 4) dans $H^{2,1}([0, T], \mathscr{A})$ du problème $\{(1), (2)\}$ avec données $\varphi_\nu, \psi_\nu, f_\nu$.

Grâce au théorème 5 appliqué aux familles (dépendant des indices (ν, μ)) $\{\varphi_\nu - \varphi_\mu\}, \{\psi_\nu - \psi_\mu\}, \{f_\nu - f_\mu\}$, on a que $\{u_\nu\}$ est de Cauchy dans $C([0, \tau], \mathscr{A}(B^\tau))$ pour tout τ dans $]0, T]$ et donc $\{u_\nu\}$ converge vers une solution u du problème $\{(1), (2)\}$ sur Γ.

L'unicité se prouve comme la partie (*b*) du théorème 6.

(*b*) On peut procéder de façon analogue au cas (*a*), ou bien se ramener au théorème d'existence globale en multipliant les données φ, ψ et f par une fonction de Gevrey (d'ordre convenable) avec support compact dans B^0 et égale à 1 pour $|x - x_0| \leqslant \varrho - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ et en utilisant le théorème 6 rélatif au domaine de dépendence. //

6. – Convergence.

Dans ce paragraphe on considère une suite de problèmes du type $\{(1), (2)\}$, à savoir:

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} - \sum_{i,j}^{1,n} a_{ij,k}(t) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} = f_k \qquad \text{dans } \mathbb{R}^n \times [0, T], \tag{67}$$

$$u_k(0) = \varphi_k \qquad \text{et } \frac{\partial u_k}{\partial t}(0) = \psi_k \quad \text{dans } \mathbb{R}^n, \tag{68}$$

où $k = 1, 2, 3, \ldots$, et les $a_{ij,k}$ sont des fonctions réelles et intégrables sur $[0, T]$ qui vérifient la (16) uniformément par rapport à k (c'est-à-dire avec λ_0 indépendant de k).

On peut se demander si, lorsque la suite $\{a_{ij,k}\}$ converge (pour $k \to \infty$) vers a_{ij} dans $L^1([0, T])$, $\forall i, j = 1, \ldots, n$, et les suites $\{\varphi_k\}, \{\psi_k\}$ et $\{f_k\}$ convergent vers φ, ψ et f respectivement, dans un sens à préciser, peut-on dire que $\{u_k\}$ converge vers la solution u du problème limite:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i,j}^{1,n} a_{ij}(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f \qquad \text{dans } \mathbb{R}^n \times [0, T], \tag{69}$$

$$u(0) = \varphi \qquad \text{et } \frac{\partial u}{\partial t}(0) = \psi \qquad \text{dans } \mathbb{R}^n. \tag{70}$$

THÉORÈME 8. *Considérons la suite de problèmes* $\{(67), (68)\}$ *et supposons que les coefficients* $a_{ij,k}(t)$, *réelles et intégrables sur* $[0, T]$, *vérifient la* (16) *uniformément par rapport à k et que,* $\forall i, j = 1, \ldots, n,$

$$\{a_{ij,k}\} \to a_{ij} \quad \textit{dans } L^1([0, T]) \textit{ pour } k \to \infty. \tag{71}$$

Désignons par u_k la solution du problème $\{(67), (68)\}$ *et par u la solution du problème limite* $\{(69), (70)\}$.

Supposons que, pour $k \to \infty$,

$$\{\varphi_k\} \to \varphi \quad \textit{et} \quad \{\psi_k\} \to \psi \quad \textit{dans } \mathscr{A} \ (\textit{resp. dans } \mathscr{A}')$$

et que

$$\{f_k\} \to f \quad \textit{dans } L^1([0, T], \mathscr{A}) \ \big(\textit{resp. dans } L^1([0, T], \mathscr{A}')\big).$$

Alors:

$$\{u_k\} \to u \quad \textit{dans } C^1([0, T], \mathscr{A}) \ \big(\textit{resp. dans } C^1([0, T], \mathscr{A}')\big).$$

ii) *Supposons que les coefficients $a_{ij,k}(t)$ vérifient la* (36) *avec des constantes α et A indépendantes de k et que*

$$\{\varphi_k\} \to \varphi \quad \textit{et} \quad \{\psi_k\} \to \psi \quad \textit{dans } \mathscr{E}_s \ (\textit{resp. dans } \mathscr{D}'_s)$$

et

$$\{f_k\} \to f \quad \textit{dans } L^1([0, T], \mathscr{E}_s) \ \big(\textit{resp. dans } L^1([0, T], \mathscr{D}'_s)\big),$$

où s est un nombre réel tel que $1 \leqslant s < 1/(1-\alpha)$.

Alors:

$$\{u_k\} \to u \quad \textit{dans } C^1([0, T], \mathscr{E}_s) \ \big(\textit{resp. dans } C^1([0, T], \mathscr{D}'_s)\big).$$

iii) *Supposons que les $a_{ij,k}(t)$ vérifient la* (37) *avec une constante A indépendante de k et que*

$$\{\varphi_k\} \to \varphi \quad \textit{et} \quad \{\psi_k\} \to \psi \quad \textit{dans } \mathscr{E} \ (\textit{resp. dans } \mathscr{D}')$$

et

$$\{f_k\} \to f \quad \textit{dans } L^1([0, T], \mathscr{E}) \ \big(\textit{resp. dans } L^1([0, T], \mathscr{D}')\big).$$

Alors:

$$\{u_k\} \to u \quad \textit{dans } C^1([0, T], \mathscr{E}) \ \big(\textit{resp. dans } C^1([0, T], \mathscr{D}')\big)$$

iv) *Supposons que les* $a_{ij,k}(t)$ *vérifient la* (38) *avec une constante* A *qui ne dépend pas de* k *et que*

$$\{\varphi_k\} \to \varphi \quad dans\ H^{s+1}_{\mathrm{loc}}\,, \qquad \{\psi_k\} \to \psi \quad dans\ H^s_{\mathrm{loc}}$$

et

$$\{f_k\} \to f \quad dans\ L^1([0, T], H^s_{\mathrm{loc}})\,,$$

pour quelque s *réel.*

Alors:

$$\{u_k\} \to u \quad dans\ C([0, T], H^s_{\mathrm{loc}})$$

et

$$\left\{\frac{\partial u_k}{\partial t}\right\} \to \frac{\partial u}{\partial t} \quad dans\ C([0, T], H^{s-1}_{\mathrm{loc}})\,.$$

DÉMONSTRATION. Considérons d'abord le cas (i). Si $\{\varphi_k\} \to \varphi$ et $\{\psi_k\} \to \psi$ dans $\mathscr{A}'$ et $\{f_k\} \to f$ dans $L^1([0, T], \mathscr{A}')$, on voit (théorème de Paley-Wiener, partie II) que $\hat{\varphi}_k, \hat{\psi}_k, \hat{f}_k$ vérifient l'inégalité (41) avec des constantes C_ε et ϱ qui ne dépendent pas de k (cf. la démonstration du th. 3, à laquelle on se rapportera dans la suite).

D'ailleurs les $a_{ij,k}$ appartiennent à une partie compacte de $L^1([0, T])$, de sorte que les fonctions

$$\omega(a_k, \delta) \equiv \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant \delta} \int\limits_0^{T-\tau} |a_k(t+\tau) - a_k(t)|\, dt \qquad (0 \leqslant \delta \leqslant T)$$

sont équibornées sur $[0, T]$ et

$$\omega(a_k, \delta) \to 0\,, \qquad \text{si } \delta \to 0^+\,,$$

uniformément par rapport à k.

Par conséquent, la fonction $\varepsilon_0(a_k, \zeta)$ (définie par la (40)) est équibornée pour $|\zeta| \geqslant 1$ et converge à zéro pour $|\zeta| \to \infty$, uniformément par rapport à k. Il en suit que les constantes $L_\varepsilon(a_k)$ définies par la (43) sont bornées par rapport à k, pour tout $\varepsilon > 0$, de sorte que $\hat{u}$ et $\widehat{\partial u/\partial t}$ vérifient la (44) avec des constantes qui ne dépendent pas de k.

Donc (théorème de Paley-Wiener, partie II) les suites $\{u_k\}$ et $\{\partial u_k/\partial t\}$ sont bornées dans $C([0, T], \mathscr{A}')$. D'après l'équation (67) on obtient enfin (en remarquant que les $a_{ij,k}$ sont équi-intégrables sur $[0, T]$, et que les f_k sont équi-intégrables sur $[0, T]$ à valeurs dans $\mathscr{A}'$) que les $\partial^2 u_k/\partial t^2$ sont équi-intégrables sur $[0, T]$ à valeurs dans $\mathscr{A}'$, donc les $\partial u_k/\partial t$ sont équi-continues sur $[0, T]$ à valeurs dans $\mathscr{A}'$.

Mais $\mathscr{A}'$ est un espace de Montel et donc $\{\partial u_k/\partial t\}$ est rélativement compacte dans $C([0, T], \mathscr{A}')$.

En conclusion on a prouvé que $\{u_k\}$ est une suite rélativement compacte dans $C^1([0, T], \mathscr{A}')$. Or, on voit aisément que si u_* est la limite d'une sous-suite de $\{u_k\}$ qui converge dans $C^1([0, T], \mathscr{A}')$ alors u_* est une solution du problème limite $\{(69), (70)\}$.

Mais ce problème n'a que la solution u, donc $u_* = u$; d'où la thèse dans le cas des fonctionnelles analytiques.

Supposons maintenant que $\{\varphi_k\} \to \varphi$ et $\{\psi_k\} \to \psi$ dans $\mathscr{A}$, tandis que $\{f_k\} \to f$ dans $L^1([0, T], \mathscr{A})$.

Introduisons le problème dual (cf. la démonstration du théorème 4)

$$(72) \qquad \frac{\partial^2 v_{g,k}}{\partial t^2} - \sum a_{ij,k}(t) \frac{\partial^2 v_{g,k}}{\partial x_i \partial x_j} = g \qquad \text{dans } \mathbb{R}^n \times [0, T],$$

$$(73) \qquad v_{g,k}(T) = 0 \qquad \text{et } \frac{\partial v_{g,k}}{\partial t}(T) = 0 \qquad \text{dans } \mathbb{R}^n,$$

où g est un élément fixé dans $L^1([0, T], \mathscr{A}')$.

En accouplant le problème $\{(72), (73)\}$ avec le problème $\{(67), (68)\}$ on obtient (cf. la (58)) que $\left\{ \int_0^T \langle g(t), u_k(t) \rangle \, dt \right\}$ est bornée et donc que $\{u_k\}$ est bornée dans $C([0, T], \mathscr{A})$.

D'après l'équation (67) on a en outre que les $\partial^2 u_k / \partial t^2$ son équi-intégrables sur $[0, T]$ à valeurs dans $\mathscr{A}$.

La conclusion est alors la même que dans le cas des fonctionnelles analytiques.

Pour prouver le cas (ii), il est avantageux de traiter d'abord le cas où les données φ_k, ψ_k et f_k ont support en x (en tant que fonctions ou bien fonctionnelles) contenu dans un compact de $\mathbb{R}^n$ qui ne dépend pas de k. Ce cas se prouve de façon tout à fait analogue au cas des fonctionnelles analytiques.

Cela fait on se debarasse de l'hypothèse de compacité des supports à l'aide du procédé usuel de dualité.

Les cas (iii) et (iv) se prouvent de façon analogue. //

7. – Contre-exemples.

THÉORÈME 9 (contre-exemples sur la convergence). *Considérons la suite de problèmes* ($k = 1, 2, 3, \ldots.$)

$$(74) \qquad \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} - a_k(t) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} = 0 \qquad \textit{dans } \mathbb{R} \times [0, T],$$

$$(75) \qquad u_k(x, 0) = 0 \qquad \textit{et } \frac{\partial u_k}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) \qquad \textit{dans } \mathbb{R},$$

où (*cf.* [1])

$$a_k(t) = 1 - 4\varepsilon_k \sin(2kt) - \varepsilon_k^2(1 - \cos(2kt))^2 \tag{76}$$

et

$$\psi(x) = \sum_{h=1}^{\infty} c_h \sin(hx) .$$

(*Les suites* $\{\varepsilon_k\}$ *et* $\{c_h\}$ *seront choisies dans la suite*).

i) *Soient* ε *et* δ *deux nombres* > 0, $\varepsilon \leqslant 1/10$, *et soit*:

$$\varepsilon_k = \varepsilon , \quad \forall k ,$$
$$c_h = \exp[-\delta h] .$$

Alors les coefficients $a_k(t)$ *sont du type*

$$a_k(t) = \alpha(kt) ,$$

et ils parcourent une partie bornée de $L^\infty([0, T])$.

De plus on a, pour $k \to \infty$,

$$\{a_k\} \to 1 - \tfrac{3}{2}\varepsilon^2 , \quad \textit{faiblement dans } L^1([0, T]) .$$

En outre la donnée initiale $\psi(x)$ *est une fonction analytique sur* $\mathbb{R}$.

Toutefois, pour $t > \delta/\varepsilon$ (*à l'exception des* t *qui sont des multiples entiers de* π), *la suite* $\{u_k(t)\}$ *n'est pas bornée dans* $\mathscr{D}'$, *ni dans* $\mathscr{D}'_r$ *quel que soit* $r > 1$.

ii) *Soit*

$$\varepsilon_k = (\log k)^{-1} ,$$
$$c_h = \exp(-h(\log h)^{-2}) .$$

On a alors, pour $k \to \infty$,

$$\{a_k\} \to 1 \quad \textit{dans } L^\infty([0, T]) . \tag{77}$$

En outre la donnée initiale $\psi(x)$ *est une fonction de Gevrey d'ordre* s *pour tout* $s > 1$.

Toutefois la suite $\{u_k(t)\}$ *n'est pas bornée dans* $\mathscr{D}'_r$, *quel que soit* $r > 1$ *et* $t > 0$ ($t \neq \nu\pi$, ν *entier*).

iii) *Soit* $0 < \alpha < 1$ *et soit*

$$\varepsilon_k = k^{-\alpha} ,$$
$$c_h = \exp(-h^{1-\alpha}(\log h)^{-1}) .$$

Alors on a encore la (77). *De plus, les fonctions* $a_k(t)$ *sont équi-hölderiennes d'exposant* α.

En outre $\psi(x)$ *est une fonction de Gevrey d'ordre* s *pour tout* $s > 1/(1-\alpha)$.

Toutefois la suite $\{u_k(t)\}$ *n'est pas bornée dans* $\mathscr{D}'_r$, *quel que soit* $r \geq 1/(1-\alpha)$ *et* $t > 0$ ($t \neq \nu\pi$, ν *entier*).

iv) *Soit*

$$\varepsilon_k = k^{-1}(\log k)^3\,,$$

$$c_h = \exp\left(-(\log h)^2\right).$$

Alors on a encore la (77). *De plus, les fonctions* $a_k(t)$ *sont équi-hölderiennes d'exposant* α, *pour tout* $\alpha < 1$, *et* $\psi(x)$ *est une fonction indéfiniment différentiable.*

Toutefois la suite $\{u_k(t)\}$ *n'est pas bornée dans* $\mathscr{D}'$, *quelque soit* $t > 0$ ($t \neq \nu\pi$, ν *entier*).

DÉMONSTRATION. On développe la solution $u_k(x, t)$ du problème $\{(74), (75)\}$ en série de Fourier du type

$$u_k(x, t) = \sum_{h=1}^{\infty} v_{k,h}(t)\sin(hx)\,.$$

Les coefficients $v_{k,h}(t)$ doivent alors vérifier le problème de Cauchy:

$$\begin{cases} v''_{k,h}(t) + h^2 a_k(t) v_{k,h}(t) = 0 & \text{dans }]0, T[\,, \\ v_{k,h}(0) = 0 \qquad \text{et } v'_{k,h}(0) = c_h\,. \end{cases}$$

Or, si $a_k(t)$ est la fonction définie par la (76), on peut résoudre explicitement ce problème lorsque $k = h$, et on obtient la solution suivante:

$$v_{k,k}(t) = \frac{1}{k} c_k \sin(kt)\cdot\exp\left[\varepsilon_k\left(kt - \frac{1}{2}\sin(2kt)\right)\right].$$

En utilisant le théorème 12 de l'Appendice et en faisant des simples vérifications on achève alors la démonstration. //

THÉORÈME 10 (contre-exemples sur l'existence). *Considérons le problème*:

$$(78) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad dans\ \mathbb{R}\times[0, T]\,.$$

$$(79) \qquad u(x, 0) = \varphi(x) \qquad et\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) \qquad dans\ \mathbb{R}\,,$$

avec $T > 1$.

Considérons la partition suivante de l'intervalle $[0, 1[$:

$$[0, 1[= \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k ,$$

où

$$I_k = [1 - 2^{-k}, 1 - 2^{-k-1}[\qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) .$$

Soit

$$a(t) = \begin{cases} b(\varepsilon_k, \eta_k t) , & si\ t \in I_k , \\ 1 , & si\ t \geqslant 1 \end{cases}$$

où

$$b(\varepsilon, \tau) = 1 - 4\varepsilon \sin 2\tau - \varepsilon^2(1 - \cos 2\tau)^2$$

et

$$\eta_k = 4\pi 4^{k!}$$

(*les nombres réels* ε_k *seront choisis dans la suite*).

i) *Soit*:

$$\varepsilon_k = \frac{1}{8} (\log \eta_k)^{-1} .$$

Alors la fonction $a(t)$ *est continue sur* $[0, T]$; *toutefois on peut trouver* $\varphi(x)$ *et* $\psi(x)$, *fonctions de Gevrey d'ordre* s *pour tout* $s > 1$, *telles que le problème* $\{(78), (79)\}$ *n'ait pas de solutions dans* $H^{2,1}([0, T], \mathscr{D}'_r)$, *quel que soit* $r > 1$.

ii) *Soit*:

$$\varepsilon_k = \frac{1}{8} \eta_k^{-\alpha} , \qquad où\ 0 < \alpha < 1 .$$

Alors $a(t)$ *est hölderienne d'exposant* α *sur* $[0, T]$; *toutefois on peut trouver* $\varphi(x)$ *et* $\psi(x)$, *fonctions de Gevrey d'ordre* s *pour tout* $s > 1/(1 - \alpha)$, *telles que le problème* $\{(78), (79)\}$ *n'ait pas de solutions dans* $H^{2,1}([0, T], \mathscr{D}'_r)$, *quel que soit* $r > 1/(1 - \alpha)$.

iii) *Soit*:

$$\varepsilon_k = \frac{1}{8} \eta_k^{-1} (\log \eta_k)^2 .$$

Alors $a(t)$ *est hölderienne sur* $[0, T]$ *avec exposant* α *pour tout* $\alpha < 1$; *toutefois on peut trouver* $\varphi(x)$ *et* $\psi(x)$, *fonctions indéfiniment différentiables, telles que le problème* $\{(78), (79)\}$ *n'ait pas de solutions dans* $H^{2,1}([0, T], \mathscr{D}')$.

DÉMONSTRATION. Nous prouverons seulement le cas (i), les autres cas pouvant se démontrer de façon analogue.

Au but de construire les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, on construira une solution $v(x, t)$ de l'équation (78) dans $\mathbb{R}\times[0, 1[$ telle que

$$v \in H^{2,1}([0, 1-\delta], \mathscr{E}_s)\,, \qquad \forall s > 1\,,\ \forall \delta > 0\,, \tag{80}$$

tandis que

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t) \quad \text{n'est pas bornée dans } \mathscr{D}'_r \quad \text{lorsque} \quad t \to 1^-, \qquad \forall r > 1\,. \tag{81}$$

Une fois qu'une telle fonction v sera construite, il sera suffisant de choisir

$$\varphi(x) = v(x, 0) \quad \text{ et } \ \psi(x) = \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0)\,,$$

pour achever la démonstration du théorème.

En effet, s'il existait une solution $u(x, t)$ de $\{(78), (79)\}$ appartenant à $H^{2,1}([0, T], \mathscr{D}'_r)$ pour quelque $r > 1$, cette solution devrait (grâce au théorème 6 de unicité) coïncider avec $v(x, t)$ pour $0 < t < 1$, ce qui contredirait la (81).

La fonction $v(x, t)$ sera construite du tupe

$$v(x, t) = \sum_{h=1}^{\infty} v_h(t) \sin(\eta_h x) \tag{82}$$

où $v_h(t)$ est une solution de l'équation ordinaire:

$$v''_h(t) + \eta_h^2 a(t) v_h(t) = 0 \qquad \text{dans }]0, 1[\,. \tag{83}$$

Entre toutes les solutions de l'équation (83) on choisit celle qui vérifie les conditions suivantes

$$v_h(t_h) = 0 \quad \text{ et } \ v'_h(t_h) = 1\,, \tag{84}$$

où t_h désigne le centre de l'intervalle I_h (donc $t_h = 1 - 3\cdot 2^{-h-2}$).

Mais, en effectuant le changement de variable $t \to \tau \equiv \eta_h(t - t_h)$, on peut résoudre explicitément le problème $\{(83), (84)\}$ dans l'intervalle I_h, en obtenant la solution

$$v_h(t) = \frac{1}{\eta_h} w\big(\varepsilon_h, \eta_h(t - t_h)\big)\,, \qquad t \in I_h\,, \tag{85}$$

où

$$w(\varepsilon, \tau) = (\sin\tau)\cdot\exp\left[\varepsilon\big(\tau - \tfrac{1}{2}\sin(2\tau)\big)\right].$$

Or, désignons par t_h' et t_h'' les deux extrêmes de l'intervalle I_h (donc $t_h' = 1 - 2^{-h}$ et $t_h'' = 1 - 2^{-h-1}$).

On a alors (puisque $\sin(\eta_h t) = 0$ et $\cos(\eta_h t) = 1$ pour $t = t_h'$ et $t = t_h''$)

$$v_h(t_h') = 0 \quad \text{et} \quad v_h'(t_h') = \varepsilon_h \exp(-\varepsilon_h \eta_h 2^{-h-2}) \,, \tag{86}$$

$$v_h(t_h'') = 0 \quad \text{et} \quad v_h'(t_h'') = \varepsilon_h \exp(\varepsilon_h \eta_h 2^{-h-2}) \,. \tag{87}$$

D'après le choix qu'on a fait de ε_h et η_h, on vérifie facilment (grâce au th. 12 de l'Appendice) que la suite $\{(\partial v/\partial t)(t_h'')\}$ n'est pas bornée dans $\mathscr{D}_r'$, quel que soit $r > 1$.

On a donc prouvé la (81).

Pour prouver la (80), on utilise le Lemme 1 sur l'intervalle $[0, t_h']$ (parcouru au sens des t decroissants), avec $\alpha(t) = h^2 a(t)$, $\beta(t) = \alpha(t)$ et $\gamma(t) = 0$.

Puisque dans cet intervalle on a $|a'(t)| \leqslant C\varepsilon_{h-1}\eta_{h-1}$, la (6) donne

$$\eta_h |v_h(t)| + |v_h'(t)| \leqslant \varepsilon_h \exp(-\varepsilon_h \eta_h 2^{-h-2} + \tilde{C}\varepsilon_{h-1}\eta_{h-1}) \,.$$

D'après le choix de ε_h, η_h, on vérifie alors (grâce au th. 12) que $v(t)$ et $(\partial v/\partial t)(t)$ appartiennent à $\mathscr{E}_s$ pour tout $s > 1$ et pour tout $t \in [0, 1[$. D'après l'équation (78) on a enfin la (80). //

8. – Cas de l'hyperbolicité faible.

Tous les résultats d'existence ou de convergence des solutions des problèmes hyperboliques que nous avons obtenus jusqu'à ici, ont été prouvés sous l'hypothèse de coercivité des coefficients:

$$\sum a_{ij}(t)\xi_i\xi_j \geqslant \lambda_0 |\xi|^2 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \,, \; (\lambda_0 > 0) \,. \tag{88}$$

Or, on peut voir que cette hypothèse peut être substituée par l'hypothèse plus faible:

$$\sum a_{ij}(t)\xi_i\xi_j \geqslant 0 \,, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \,, \tag{89}$$

au moins dans le cas de solutions dans $\mathscr{A}$ ou dans $\mathscr{A}'$.

THÉORÈME 11. *Considérons le problème* $\{(1), (2)\}$ *avec des coefficients réels et intégrables* a_{ij} *qui vérifient* (89).

Si les données φ *et* ψ *appartiennent à* $\mathscr{A}$ (*resp. à* $\mathscr{A}'$) *et* f *appartient à* $L^1([0, T], \mathscr{A})$ $\big($*resp. à* $L^1([0, T], \mathscr{A}')\big)$, *alors il existe une et une seule solution du problème dans* $H^{2,1}([0, T], \mathscr{A})$ $\big($*resp. dans* $H^{2,1}([0, T], \mathscr{A}')\big)$.

En outre il est encore valable le même résultat sur la convergence des solutions prouvé dans le th. 8, *partie* (i), *sous l'hypothèse* (88).

DÉMONSTRATION. La thèse se prouve de façon analogue au cas de coercivité des coefficients, mais cette fois-ci on doit utiliser au lieu de l'estimation (19) une version un peu modifiée de cette estimation.

On peut en effet prouver, sous la seule hypothèse (89) de positivité faible, l'inégalité suivante pour la solution u dans $H^{2,1}([0, T], \mathscr{H}')$ du problème $\{(1), (2)\}$, avec des données fonctionnelles holomorphes:

$$(90) \qquad \sqrt{\varepsilon(\zeta)}\,|\zeta||\hat{u}(\zeta, t)| + \left|\widehat{\frac{\partial u}{\partial t}}(\zeta, t)\right| \leqslant$$

$$\leqslant M \exp\left(\int_0^t |a(s)|^{\frac{1}{2}} ds |\eta|\right) \cdot \exp c_1 \left[\left(\frac{\omega(\zeta)}{\varepsilon(\zeta)} + \sqrt{\varepsilon(\zeta)}\right)|\zeta| + \frac{\int_0^T |a|\, ds}{\varepsilon(\zeta)}\right]$$

où $\varepsilon(\zeta)$ est une arbitraire fonction telle que $0 < \varepsilon(\zeta) \leqslant 1$, et où

$$M = c_2\left[\left(1 + |\zeta| \int_0^{T/2|\zeta|} |a(s)|\, ds\right)^{\frac{1}{2}} |\zeta||\hat{\varphi}(\zeta)|\right] + |\hat{\psi}(\zeta)| + \int_0^T |\hat{f}(\zeta, s)|\, ds\,,$$

pour tout t dans $[0, T]$ et $|\zeta| \geqslant 1$.

Nous avons désigné par c_1 et c_2 des constantes dépendant de T et nous avons posé (cfr. (18))

$$\omega(\zeta) = \operatorname*{Sup}_{0 < \tau \leqslant T/2|\zeta|} \int_0^{T-\tau} |a(t+\tau) - a(t)|\, dt\,.$$

Pour prouver la (90), il suffit de reprende la démonstration du Lemme 2 en choisissant cette fois:

$$b(\zeta, t) = \int_0^{+\infty} \tilde{a}(t+\tau)\, \varrho_\zeta(\tau)\, d\tau + \varepsilon(\zeta)$$

(où $\tilde{a}(t)$ et $\varrho_\zeta(\tau)$ sont définis comme dans la démonstration du Lemme 2), de sorte que:

$$b(\zeta, t) \geqslant \varepsilon(\zeta) > 0\,.$$

Une fois prouvée la (90), on choisit (par exemple)

$$\varepsilon(\zeta) = \operatorname{Min}\left\{1, \sqrt{\omega(\zeta)} + |\zeta|^{-\frac{1}{2}}\right\}$$

et l'on procède comme dans la démonstration du th. 3, partie (a). //

9. – Appendice

A) DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE PALEY-WIENER, PARTIE III.

i) Soit $u \in L^1([0, T], \mathscr{A}')$. Alors l'ensemble

$$\mathscr{S}_u = \{\lambda(t) u | \lambda \in L^\infty([0, T]), |\lambda(t)| \leqslant 1\}$$

est borné dans $L^1([0, T], \mathscr{A}')$. Par conséquent l'ensemble

$$S_u = \left\{\int_0^T v(t)\, dt \mid v \in \mathscr{S}_u\right\}$$

est borné dans $\mathscr{A}'$ $\Big($en effet, l'application linéaire $v \mapsto \int_0^T v(t)\, dt$ de $L^1([0, T], \mathscr{A}')$ dans $\mathscr{A}'$ est continue$\Big)$.

De la partie II du théorème et du fait que la transformée de Fourier de la fonctionnelle $\int_0^T v(t)\, dt$ est égale à $\int_0^T \hat{v}(\zeta, t)\, dt$, il résulte alors qu'il existe $\varrho > 0$ tel que, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists C_\varepsilon$ tel que

$$\left|\int_0^T \lambda(t)\, \hat{u}(\zeta, t)\, dt\right| \leqslant C_\varepsilon \exp\left(\varepsilon|\xi| + (\varrho + \varepsilon)|\eta|\right),$$

$\forall \lambda \in L^\infty([0, T])$, avec $|\lambda(t)| \leqslant 1$.

On a donc prouvé III-(i).

Le cas (ii), (iii), (iv) se prouvent de façon analogue. //

B) DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.

i) On peut reconduire le problème $\{(1), (2)\}$ à un problème du type suivant:

$$w'(t) - \sum_{j=1}^n A_j(t) \frac{\partial w}{\partial x_j}(t) = F(t) \quad \text{dans }]0, T[\,, \qquad w(0) = w_0\,, \tag{91}$$

où w et F sont des fonctions sur $[0, T]$ à valeurs dans $[\mathscr{H}']^{n+1}$, $A_1(t), \dots, A_n(t)$ sont des matrices scalaires $(n+1) \times (n+1)$, intégrables sur $[0, T]$, et $w_0 \in [\mathscr{H}']^{n+1}$.

Le problème (91) est équivalent à l'équation intégrale

$$w(t) = w_0 + \int_0^t \left[\sum_{j=1}^n A_j(s) \frac{\partial w}{\partial x_j}(s) + F(s)\right] ds\,.$$

On définit, pour k entier $\geqslant 1$,

$$w_k(t) = w_0 + \int_0^t \left[\sum_j A_j(s) \frac{\partial w_{k-1}}{\partial x_j}(s) + F(s)\right] ds .$$

On a alors, pour $k \geqslant 2$,

$$w_k(t) - w_{k-1}(t) = \int_0^t \sum_{j_1} A_{j_1}(t_1) \int_0^{t_1} \sum_{j_2} A_{j_2}(t_2) \ldots \int_0^{t_{k-2}} \sum_{j_{k-1}} A_{j_{k-1}}(\tau) \cdot$$
$$\cdot \int_0^\tau \left[\sum_{j_k} A_{j_k}(s) \frac{\partial^k w_0}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_k}} + F(s)\right] ds\, d\tau\, dt_{k-2} \ldots dt_1 .$$

Pour chaque domaine convexe D de $\mathbf{C}^n$ et $u \in (\mathscr{H}')^N$, on pose:

$$\|w\|_D = \operatorname{Sup}\left\{|\langle w, f\rangle|, f \in (\mathscr{H})^N, |f(z)| \leqslant 1 \text{ sur } D\right\} .$$

Soit en outre

$$\beta(t) = \Big|\sum_{j=1}^n A_j(t)\Big| .$$

Fixés deux domaines convexes D_0 et D de $\mathbf{C}^n$ tels que $D_0 \subset\subset D$, on a alors (en utilisant la formule de Cauchy pour les fonctionnelles holomorphes)

$$\|w_k(t) - w_{k-1}(t)\|_D \leqslant \int_0^t \beta(t_1) \int_0^{t_1} \beta(t_2) \ldots \int_0^{t_{k-2}} \beta(\tau) \cdot$$
$$\cdot \int_0^\tau \left[\beta(s) \frac{\|w_0\|_{D_0} k!}{\varrho^k} + \|F(s)\|_D\right] ds\, d\tau\, dt_{k-2} \ldots dt_1 ,$$

où

$$\varrho = \operatorname{dist}(D_0, \complement D) .$$

Mais:

$$\int_0^t \beta(t_1) \int_0^{t_1} \beta(t_2) \ldots \int_0^{t_{\nu-1}} \beta(s)\, ds\, dt_{\nu-1} \ldots dt_1 = \left[\int_0^t \beta(s)\, ds\right]^\nu / \nu! ,$$

donc on obtient

$$\|w_k(t) - w_{k-1}(t)\|_D \leqslant \frac{\left[\int_0^t \beta(s)\, ds\right]^k}{\varrho^k} \|w_0\|_{D_0} + \frac{\left[\int_0^t \beta(s)\, ds\right]^{k-1}}{(k-1)!} \int_0^T \|F(s)\|_D\, ds .$$

Il en résulte que, pour $0 \leqslant t \leqslant T$, la série $\sum_{k=1}^{\infty} \|w_k(t) - w_{k-1}(t)\|_D$ est convergente, pourvu que le domaine D soit assez grand par rapport à D_0, notamment pourvu que

$$\operatorname{dist}(D_0, \complement D) > \int_0^T \beta(s)\, ds .$$

Montrons maintenant l'unicité des solutions. Soit w tel que

$$w(t) = \int_0^t \sum_j A_j(s) \frac{\partial w}{\partial x_j}(s)\, ds \qquad (0 \leqslant t \leqslant T)$$

et soient D_0, D et ϱ comme ci-dessus.

On a alors

$$\|w(t)\|_D \leqslant \left[\int_0^t \beta(s)\, ds\right]^k \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} \|w(s)\|_{D_0} \cdot \frac{1}{\varrho^k} .$$

Mais cette inégalité est valable pour tout k, donc, si D et D_0 sont tels que $\int_0^t \beta(s)\, ds < \varrho$, on obtient $\|w(t)\|_D = 0$.

ii) Dans le cas des fonctions entières, la démonstration de l'existence et de l'unicité est analogue au cas des fonctionnelles holomorphes. Il faut maintenant utiliser les normes suivantes sur l'espace $\mathscr{H}^N$

$$\|f\|_D = \sup_{z \in D} |f(z)| \qquad (D = \text{domaine de } \mathbb{C}^n)$$

et choisir les domaines D_0, D tels que $D \subset\subset D_0$. //

C) THÉORÈME 12 (type Paley-Wiener pour les séries de Fourier).

a) i) *Soit w une fonction analytique sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique. On a alors, au sens de l'espace $\mathscr{A}$,*

(92) $$w(x) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} b_h \exp(ihx)$$

où b_h sont des nombres complexes tels que

(93) $$|b_h| \leqslant M \exp(-\delta|h|) \qquad (\delta > 0) .$$

ii) *Soit w une fonction de Gevrey d'ordre $s \geq 1$ sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique. On a alors, au sens de $\mathscr{E}_s$, l'égalité* (92) *avec*

$$(94) \qquad |b_h| \leqslant M \exp\left(-\delta |h|^{1/s}\right) \qquad (\delta > 0)\,.$$

iii) *Soit w une fonction indéfiniment différentiable sur $\mathbb{R}$, 2π-periodique. On a alors, au sens de $\mathscr{E}$, l'égalité* (92) *avec*

$$(95) \qquad |b_h| \leqslant M(p)|h|^{-p}\,, \qquad \forall p > 0\,.$$

iv) *Soit w une distribution su $\mathbb{R}$, 2π-périodique. On a alors, au sens de $\mathscr{D}'$, l'égalité* (92) *avec*

$$(96) \qquad |b_h| \leqslant M|h|^p \qquad (p > 0)\,.$$

v) *Soit w une ultradistribution de Gevrey d'ordre $s > 1$ sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique. On a alors, au sens de $\mathscr{D}'_s$, l'égalité* (92) *avec*

$$(97) \qquad |b_h| \leqslant M_\varepsilon \exp\left(\varepsilon |h|^{1/s}\right)\,, \qquad \forall \varepsilon > 0\,.$$

b) *Vice-versa, si $\{b_h\}$ est une suite de nombres complexes qui vérifie l'inégalité* (93) (*resp. la* (94), *resp. la* (95), *resp. la* (96), *resp. la* (97)), *alors la série* (92) *converge dans l'espace $\mathscr{A}$* (*resp. dans $\mathscr{E}_s$, resp. dans $\mathscr{E}$, resp. dans $\mathscr{D}'$, resp. dans $\mathscr{D}'_s$*).

c) *Si $\{w_k\}$ est une suite bornée dans l'espace $\mathscr{A}$, alors chaque w_k admet le développement* (92) *avec des coefficients $b_{h,k}$ qui vérifient la* (93) *uniformément par rapport à k.*

Le vice-versa est aussi valable.

Des résultats analogues sont valables pour les autres espaces considérés dans la partie (*a*). //

D) PROPOSITION 1. Soit $a(t) = [a_{ij}(t)]_{i,j=1,\dots,n}$ dans $\left(L^1([0, T])\right)^{n^2}$ et soit:

$$\omega(a, \delta) = \operatorname*{Sup}_{0 \leqslant \tau \leqslant \delta} \int_0^{T-\tau} |a(t+\tau) - a(t)|\, dt\,.$$

On a alors, pour $0 \leqslant \tau \leqslant T/2$ et $0 \leqslant \bar{s} \leqslant T - \tau$,

$$\int_{\bar{s}}^{\bar{s}+\tau} |a(t)|\, dt \leqslant \frac{2\tau}{T} \int_0^T |a(t)|\, dt + \omega(a, \tau)$$

et

$$\int_{\bar{s}}^{\bar{s}+\tau} |a(t) - m_a|\, dt \leqslant \frac{2\tau}{T} \int_0^T |a(t)|\, dt + \omega(a, \tau)\,,$$

où m_a désigne la moyenne de $a(t)$ sur $[0, T]$.

DÉMONSTRATION. Soit m dans $\mathbb{C}^{n^2}$ et soit

$$\theta(s) = \int_s^{s+\tau} |a(t) - m|\, dt\,, \qquad 0 \leqslant s \leqslant T - \tau\,.$$

On a alors

$$\theta(\bar{s}) - \theta(s) = \int_{\bar{s}}^{s} (|a(t) - m| - |a(t+\tau) - m|)\, dt\,,$$

d'où

$$\theta(\bar{s}) \leqslant \theta(s) + \left| \int_{\bar{s}}^{s} |a(t) - a(t+\tau)|\, dt \right| \leqslant \theta(s) + \omega(a, \tau)\,.$$

En intégrant par rapport à s sur $[0, T - \tau]$, on obtient

$$(T - \tau)\,\theta(\bar{s}) \leqslant \int_0^{T-\tau} \theta(s)\, ds + (T - \tau)\,\omega(a, \tau)\,.$$

Or on a grâce au théorème de Fubini-Tonelli:

$$\int_0^{T-\tau} \theta(s)\, ds \leqslant \tau \int_0^T |a(t) - m|\, dt\,.$$

D'ici, pour $m = 0$, et pour $m = m_a$, on dérive la thèse. //

E) PROPOSITION 2.

Soit X un des espaces vectoriels topologiques suivants:

$$\mathscr{A},\ \mathscr{E}_s,\ \mathscr{D}'_s,\ \mathscr{E},\ \mathscr{D}',\ H^r_{\text{loc}}\,,$$

où s est un nombre réel > 1 et r un nombre réel quelconque.
Alors $\mathscr{H}$ est dense dans X et $L^1([0, T], \mathscr{H})$ est dense dans $L^1([0, T], X)$.

DÉMONSTRATION. Le fait que $\mathscr{H}$ soit dense dans X est bien connu. Soit maintenant u dans $L^1([0, T], X)$. D'après la définition, on sait qu'il existe une suite $\{u_k\}$ de fonctions étagées à valeurs dans X, qui converge à u dans $L^1([0, T], X)$. D'autre part, puisque $\mathscr{H}$ est dense dans X, il est facile de construire, pour tout k, une suite $u_k^{(h)}$ dans $L^1([0, T], \mathscr{H})$ telle que $\{u_k^{(h)}\} \to u_k$ dans $L^1([0, T], X)$, pour $h \to \infty$. On parvient donc à la thèse. //

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. COLOMBINI - S. SPAGNOLO, *On the convergence of solutions of hyperbolic equations*, Comm. Partial Differential Equations, **3** (1978), pp. 77-103.

[2] L. DE SIMON - G. TORELLI, *Linear second order differential equations with discontinuous coefficients in Hilbert spaces*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **1** (1974), pp. 131-154.

[3] J. M. GELFAND - G. E. SHILOV, *Generalized functions*, vol. II et III, Academic Press, New York, 1967 (édition originelle: Moscou, 1958).

[4] A. E. HURD - D. H. SATTINGER, *Questions of existence and uniqueness for hyperbolic equations with discontinuous coefficients*, Trans. Amer. Math. Soc., **132** (1968), pp. 159-174.

[5] J. L. LIONS, *Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites*, Springer, Berlin, 1961.

[6] J. L. LIONS - E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod, Paris, 1968.

[7] A. MARTINEAU, *Sur les fonctionnelles analytiques et la transformation de Fourier-Borel*, J. Analyse Math., **11** (1963), pp. 1-164.

[8] W. T. REID, *On the approximation of integrable functions by functions of bounded variation*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **14** (1960), pp. 133-140.

[9] C. ROUMIEU, *Sur quelques extensions de la notion de distributions*, Ann. Sci. École Norm. Sup., **77** (1960), pp. 47-121.

[10] C. ROUMIEU, *Ultradistributions définies sur* $\mathbb{R}^n$ *et sur certaines classes de variétés différentiables*, J. Analyse Math., **10** (1962-63), pp. 153-192.

[11] F. TREVES, *Basic linear partial differential equations*, Academic Press, New York, 1975.