ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

J. L. ERMINE

Cohérence de certaines images directes à supports propres dans le cas d'un morphisme fortement p-convexe

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 6, nº 1 (1979), p. 1-18

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1979_4_6_1_1_0>

Cohérence de certaines images directes à supports propres dans le cas d'un morphisme fortement p-convexe.

J. L. ERMINE (*)

I. – Introduction.

Soient X et Y deux espaces analytiques, paracompacts et X de dimension bornée.

On dit qu'un morphisme:

$$f: X \to Y$$

est fortement p-convexe si:

i) Il existe une fonction:

$$\varphi: X \to \boldsymbol{R}$$

et une constante réelle (dite constante exceptionnelle) c_0, telles que φ soit fortement p-convexe sur l'ensemble:

$$\{x \in X; \varphi(x) > c_0\}.$$

ii) La restriction de f à l'ensemble:

$$\bar{X}_d = \overline{\{x \in X; \varphi(x) < d\}}$$

est propre pour tout $d > c_0$.

Le but de ce qui suit est de démontrer que, pour tout faisceau analytique cohérent $\mathcal{F}$ sur X, avec les hypothèses ci-dessus, les images directes à supports propres $R^k f_! \mathcal{F}$ sont cohérentes pour k $\operatorname{prof}_X \mathcal{F} - p - 1 - \dim Y$.

(*) Université de Bordeaux I, UER de Mathématiques, Talence.
Pervenuto alla Redazione il 18 Marzo 1977.

Ce résultat généralise au cas relatif des théorèmes de finitude sur la cohomologie à supports compacts dans les espaces fortement p-convexes (cf. [2] et [10]).

La première difficulté qui se présente, est que les techniques connues jusqu'alors dans ce genre de théorème ([5], [8], [13], etc.) reposent sur des récurrences descendantes. Elles nécessitent par là même, des théorèmes « d'épuisement » ([13]) du type:

$$H^k(f^{-1}(Y'), \mathcal{H}) \to H^k(f^{-1}(Y') \cap H_a, \mathcal{H})$$

est bijective pour $k \geqslant a$ (Y' est un ouvert de Stein relativement compact dans Y).

Malheureusement, dans le cas d'images directes avec supports propres, les théorèmes d'épuisement susceptibles d'être obtenus donneraient des renseignements pour $k \leqslant a$, ce qui ne permet pas de conclure par les méthodes sus-citées.

Il faut alors, comme l'ont fait Ramis et Ruget dans [12], revenir aux images directes à supports quelconques par dualité, et travailler sur $Rf_* R\,\mathcal{H}om(X, \mathcal{F}, K_X^\bullet)$. La dualité « renversant les flèches », elle fournira des renseignements « dans le bon sens ».

La seconde difficulté apparait alors, car on ne sait pas définir de manière naturelle (et nucléaire) une application de restriction sur le complexe $R\,\mathcal{H}om(X, \mathcal{F}, K_X^\bullet)$. Cet écueil est évité en se rappelant que $R\,\mathcal{H}om(X, \mathcal{F}, K_X^\bullet)$ est à cohomologie cohérente, et que Verdier fournit dans [14] un moyen de mettre une topologie sur son hypercohomologie, ce qui permet de définir aisément une opération de restriction nucléaire.

Ceci fait, on peut enfin adapter les démonstrations du théorème des images directes de Grauert. On obtient un résultat de cohérence sur $Rf_* R\,\mathcal{H}om(X, \mathcal{F}, K_X^\bullet)$. Le résultat sur $Rf_! \mathcal{F}$ s'en déduit grâce au théorème de dualité relative de [12].

Voici comment nous procèderons dans cet article:

Dans le premier paragraphe, on démontre un théorème d'épuisement concernant $R\,\mathcal{H}om(X, \mathcal{F}, K_X^\bullet)$ suivant la méthode élaborée dans [13].

Dans le second, on construit un représentant de $Rf_* R\,\mathcal{H}om(X, \mathcal{F}, K_X^\bullet)$ grâce aux hypertrivialisations ([4]).

Le troisième paragraphe donne le théorème de cohérence pour ce complexe, et on en déduit le résultat final dans le quatrième paragraphe.

Ce théorème démontre une conjecture énoncée par J. P. Ramis dans [10] où il traçait les grandes lignes de la démarche à suivre. Je tiens à le remercier ici pour son aide.

II. – Un théorème d'épuisement.

1) *Notations et définitions.*

Soit $f: X \to Y$ un morphisme fortement p-convexe entre deux espaces analytiques paracompacts et X de dimension bornée (cf. la définition dans l'introduction).

Si la constante exceptionnelle c_0 du morphisme est égale à $-\infty$ on dira que le morphisme est p-complet.

Si Y est réduit à un point, on dira que l'espace X est fortement p-convexe; (p-complet si $c_0 = -\infty$).

La fonction φ décrite dans l'introduction, est appelée fonction d'épuisement sur X.

Une fonction 0-convexe est une fonction plurisousharmonique.

Soit Y' un ouvert de Stein relativement compact dans Y. On note:

$$X' = f^{-1}(Y')$$

$$X'_d = X_d \cap X' = \{x \in X; \varphi(x) < d\} \cap X'.$$

Plus généralement pour $U \subset X$ on note:

$$U' = U \cap X'.$$

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X, on note:

$$\mathcal{H}^{\bullet} = R\,\mathcal{H}om\,(X, \mathcal{F}; K^{\bullet}_X).$$

Où $K^{\bullet}_X$ désigne le complexe dualisant de X.

$\mathcal{H}^{\bullet}$ est un complexe borné à cohomologie cohérente ([11]).

2) *Enoncé du théorème d'épuisement.*

THÉORÈME. *L'application*

$$H^k(X', R\,\mathcal{H}om\,(X, \mathcal{F}, K^{\bullet}_X)) \to H^k(X'_d, R\,\mathcal{H}om\,(X\,\mathcal{F}, K^{\bullet}_X))$$

est bijective pour $k > p + 1 - \mathrm{prof}_X\,\mathcal{F}$ *et surjective pour* $k = p + 1 - \mathrm{prof}_X\,\mathcal{F}$ *de plus:*

$$H^k_{\mathrm{sep}}(X', R\,\mathcal{H}om\,(X, \mathcal{F}, K^{\bullet}_X) \to H^k_{\mathrm{sep}}(X'_d, R\,\mathcal{H}om\,(X, \mathcal{F}, K^{\bullet}_X))$$

est injective pour $k = p + 1 - \mathrm{prof}_X\,\mathcal{F}$. ($H^{\bullet}_{\mathrm{sep}}$ *désigne le séparé associé à* $H^{\bullet}$).

Nous aurons besoin pour démontrer ce théorème, d'un résultat intermédiaire qui fera l'objet de l'alinéa suivant.

3) *Proposition.*

Pour tout $c > c_0$, il existe un ε positif tel que l'application:

$$H^k(X'_{c+\varepsilon}, \mathcal{H}^\bullet) \to H^k(X'_c, \mathcal{H}^\bullet)$$

soit bijective pour $k > p + 1 - \mathrm{prof}_X \mathcal{F}$ et surjective pour $k = p + 1 - \mathrm{prof}_X \mathcal{F}$ de plus

$$H^k_{\mathrm{sep}}(X'_{c+\varepsilon}, \mathcal{H}^\bullet) \to H^k_{\mathrm{sep}}(X'_c, \mathcal{H}^\bullet)$$

est injective pour $k = p + 1 - \mathrm{prof}_X \mathcal{F}$.

Soit $(U_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ un recouvrement fini de $\partial(X_c \cap \bar{X}')$ par des ouverts de Stein relativement compact dans l'ensemble:

$$\{x \in X;\, \varphi(x) > c_0\}\,.$$

Soit $(s_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une partition de l'unité subordonnée à (U_i). On suppose que pour tout i, s_i est à valeurs positives.

On choisit ε suffisamment petit pour que:

(i) $\partial(X_{c+\varepsilon} \cap \bar{X}') \subset \bigcup\limits_{1\leqslant i\leqslant n} U_i$

(ii) Les fonctions:

$$\varphi_k = \varphi - \varepsilon \sum_{i=1}^{k} s_i$$

soient strictement p-convexes pour tout $k = 1, \ldots, n$.

On note:

$$V_k = \{x \in X;\, \varphi_k < c\}\,.$$

On a

$$V_0 = X_c \quad \text{et} \quad V_n = X_{c+\varepsilon}\,.$$

LEMME I. *Pour tout $k = 1, \ldots, n$ et tout $i = 1, \ldots, n$, $V_k \cap U_i$ est un espace q-complet.*

U_i est de Stein, il est donc 0-convexe ([9]), il existe donc sur U_i une fonction (strictement) plurisousharmonique d'épuisement: Φ. On peut la supposer à valeurs positives.

$\varphi'_k = \varphi_k|_{U_i}$ est une fonction strictement p-convexe sur U_i. La fonction: $\Phi + (c - \varphi'_k)^{-1}$ est alors une fonction d'épuisement strictement p-convexe sur $V_k \cap U_i$.

LEMME II. *L'application*:

$$H^k(X'_{c+\varepsilon}, \mathcal{K}^\bullet) \to H^k(X'_c, \mathcal{K}^\bullet)$$

est bijective pour $k > p + 1 - \mathrm{prof}_X \mathcal{F}$ *et surjective pour* $k = p + 1 - \mathrm{prof}_X \mathcal{F}$.

On a: $V'_{k+1} = V'_k \cup (V'_{k+1} \cap U'_{k+1})$ pour tout $k = 0, \ldots, n-1$. Le lemme 1 entraine que (cf. [1] ou [10]).

$\mathrm{Ext}^q(V'_k \cap U'_{k+1}, \mathcal{F}, K^\bullet_X) = 0$ (de même pour $V'_k \cap U'_k$) pour $q \geqslant p + 1 - \mathrm{prof}_X \mathcal{F}$.

La suite de Mayer-Vietoris s'écrit:

$$H^{q-1}(V'_k \cap U'_{k+1}, \mathcal{K}^\bullet) \to H^q(V'_{k+1}, \mathcal{K}^\bullet) \to$$
$$\to H^q(V'_k, \mathcal{K}^\bullet) \oplus H^q(V'_{k+1} \cap U'_{k+1}, \mathcal{K}^\bullet) \to H^q(V'_k \cap U'_{k+1}, \mathcal{K}^\bullet) \to \ldots$$

et fournit alors pour tout $k = 0, \ldots, n-1$, une application:

$$H^q(V'_{k+1}, \mathcal{K}^\bullet) \to H^q(V'_k, \mathcal{K}^\bullet)$$

qui est bijective pour $q > p + 1 - \mathrm{prof}_X \mathcal{F}$ et surjective pour $q = p + 1 - \mathrm{prof}_X \mathcal{F}$.

Ceci fournit finalement le résultat cherché.

LEMME III. *L'application*:

$$H^k_{\mathrm{sep}}(X'_{c+\varepsilon}, \mathcal{K}^\bullet) \to H^k_{\mathrm{sep}}(X'_c, \mathcal{K}^\bullet)$$

est injective pour $k = p + 1 - \mathrm{prof}_X \mathcal{F}$.

Rappelons le lemme démontré dans [13] p. 421:

LEMME III *bis*. *Soit X un espace analytique, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module cohérent et $\mathcal{U}$ un recouvrement standard de X (i.e. constitué par des ouverts de Stein qui forment une base dénombrable de la topologie de X). Soit X_0, $Y \subset X$ des ouverts tels que: $X = X_0 \cup Y$. Supposons que*:

i) $H^k(Y, \mathcal{F}) = 0$

ii) $H^k(X_0 \cap Y, \mathcal{F}) = 0$

iii) *L'image par la restriction*:

$$Z^{k-1}(\mathcal{U}|_Y, \mathcal{F}) \to Z^{k-1}(\mathcal{U}|_{X_0}, \mathcal{F})$$

est dense.

$$(\mathcal{U}|_Y = \{U \in \mathcal{U} | U \subset Y\} \textit{ et respectivement})$$

Alors

$$H^k_{\mathrm{sep}}(X, \mathcal{F}) \to H^k_{\mathrm{sep}}(X_0, \mathcal{F}) \textit{ est injective}.$$

On applique ce lemme à $V'_{k+1} = V'_k \cap (V'_{k+1} \cap U'_{k+1})$ pour tout k i) et ii) découlent du lemme 1 (n'oublions pas que $\mathcal{K}^\bullet$ est à cohomologie cohérente).

Le fait que la restriction: pour $q = p + 1 - \mathrm{prof}_X \mathcal{F}$

$$Z^{q-1}(\mathcal{U}|_{V'_{k+1} \cap U'_{k+1}}, \mathrm{Ext}_0(\mathcal{F}, K^\bullet_X)) \to Z^{q-1}(\mathcal{U}|_{V'_k \cap U'_{k+1}}, \mathrm{Ext}_0(\mathcal{F}, K^\bullet_X))$$

est dense découle de [10] th. 3.4.2. iv) et [13] lemme 1.9 p. 420. D'où le lemme III.

La proposition est une conjonction des lemmes II et III.

4) *Démonstration du théorème.*

i) *L'application*: $H^k(X', \mathcal{K}^\bullet) \to H^k(X'_d, \mathcal{K}^\bullet)$ *est une surjection pour* $k \geqslant p + 1 - \mathrm{prof}_X \mathcal{F}$.

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des $A \subset [d; \infty]$ tel que: $d \in A$ et si $a, b \in A$ $a < b$

$$H^k(X'_b, \mathcal{K}^\bullet) \to H^k(X'_a, \mathcal{K}^\bullet)$$

soit surjective pour $k \geqslant p + 1 - \mathrm{prof}_X \mathcal{F}$.

$\mathcal{A}$ est un ensemble inductif. Soit A_0 un élément maximal et $\alpha = \mathrm{Sup}\, A_0$. Alors $\alpha \in A_0$. En effet: si $(a_i)_{i\in N}$ est une suite qui converge vers α, on note:

$$\bigcup_{i \in N} X_{a_i} = X_\alpha \quad \text{(on peut supposer } X_{a_i} \subset X_{a_{i+1}}).$$

L'application:

$$H^k(X'_{a_i}, \mathcal{K}^\bullet) \to H^k(X_{a_{i+1}}, \mathcal{K}^\bullet)$$

est surjective pour $k \geqslant p + 1 - \mathrm{prof}_X \mathcal{F}$.

Il en est de même alors pour l'application:

$$H^k(X'_\alpha, \mathcal{K}^\bullet) \to H^k(X'_{a_i}, \mathcal{K}^\bullet).$$

Si $\alpha \neq \infty$, alors d'après la proposition du 3) $A_0 \cup \{\alpha + \varepsilon\} \in \mathcal{A}$ A_0 ne serait donc pas maximal.

On en déduit que $\alpha = \infty$.

ii) *L'application* $H^k(X', \mathcal{K}^\bullet) \to H^k(X'_d, \mathcal{K}^\bullet)$ *est une injection pour* $+1-\mathrm{prof}_X \mathcal{F}$.

Soit $B \subset [d, \infty]$ tel que: si $b \in B$, l'application

$$H^k(X'_b, \mathcal{K}^\bullet) \to H^k(X'_d, \mathcal{K}^\bullet)$$

soit injective pour $k > p+1-\mathrm{prof}_X \mathcal{F}$.

Soit $\beta = \sup B$, $(b_i)_{i\in N}$ une suite qui converge vers β

$$H^k(X'_\beta, \mathcal{K}^\bullet) \to H^k(X'_{b_i}, \mathcal{K}^\bullet)$$

est une application injective pour $k > p+1-\mathrm{prof}_X \mathcal{F}$.

Soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ un recouvrement standard de X' par des ouverts de Stein. Si $f \in Z^k(\mathcal{U}|_{X'_\beta}, \mathcal{K}^\bullet)$ avec $f|_{X_{b_i}} = \delta g_i$ où $g_i \in C^{k-1}(\mathcal{U}|_{X'_{b_i}}, \mathcal{K}^\bullet)$.

Comme la restriction:

$$Z^k(\mathcal{U}|_{X'_\beta}, \mathcal{K}^\bullet) \to Z^k(\mathcal{U}|_{X'_{b_i}} \mathcal{K}^\bullet)$$

est surjective, on peut choisir les g_i tels que:

$$g_{i+1}|_{X'_{b_i}} = g_i\,.$$

D'où, il existe $g \in C^{k-1}(\mathcal{U}|_{X'_\beta}, \mathcal{K}^\bullet)$ tel que:

$$f = \delta g\,.$$

On démontre alors, comme au i), que $\beta = \infty$.

iii) *L'application*:

$$H^k_{\mathrm{sep}}(X', \mathcal{K}^\bullet) \to H^k_{\mathrm{sep}}(X'_d, \mathcal{K}^\bullet)$$

est une injection pour $k = p+1-\mathrm{prof}_X \mathcal{F}$.

Soit $C \subset [d, \infty]$ tel que si $c \in C$, l'application:

$$H^k_{\mathrm{sep}}(X'_c, \mathcal{K}^\bullet) \to H^k_{\mathrm{sep}}(X'_d \to \mathcal{K}^\bullet)$$

soit injective (ici $k = p+1-\mathrm{prof}_X \mathcal{K}$).

Soit $\gamma = \sup C$, $(c_i)_{i\in N}$ une suite qui converge vers γ.

Soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ un recouvrement standard de X'.

Si $f \in Z^{k-1}(\mathcal{U}|_{X'_\gamma}, \mathcal{K}^\bullet)$ avec $f|_{X'_{c_i}} \in \overline{\delta C^{k-1}(\mathcal{U}|_{X'_{c_i}}, \mathcal{K}^\bullet)}$ i.e. $f|_{X'_{c_i}} = \lim_n \delta g_i^n$ où

$g_i^n \in C^{k-1}(\mathcal{U}|_{X'_{c_i}}, \mathcal{K}^\bullet)$ donc $g_i^n \in C^{k-1}(\mathcal{U}|_{X'_\gamma}, \mathcal{K}^\bullet)$ (en prolongeant par 0) de la suite double $(g_i^n)_{i,n}$ on déduit une suite de $\delta C^{k-1}(\mathcal{U}|_{X'_\gamma}, \mathcal{K}^\bullet)$ dont la limite est f.

Ainsi $\gamma \in C$ et on en déduit comme au i) que $\gamma = \infty$.

Ceci termine la preuve du théorème d'épuisement.

III. – Construction d'un répresentant de $Rf_* R\mathcal{H}om(X, \mathcal{F}, K_X^\bullet)$.

1) *Trivialisation d'une application analytique.*

Soit $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_m)_{m\in N}$ un hyper-recouvrement localement fini de Y' par des ouverts de Stein, qu'on peut supposer d'Oka-Weil.

$$\mathcal{U}_m = (U_{i,m})_{i\in I}\,.$$

Chaque $U_{m,i}$ est analytiquement isomorphe à un fermé d'un polydisque $P_{m,i}$ de $\boldsymbol{C}^{n_{m,i}}$.

Pour chaque multi-indice $\alpha = (i_1, \ldots, i_n)$, on obtient un plongement:

$$i_{m,\alpha}\ U_{m,\alpha} = U_{m,i_1} \cap \ldots \cap U_{m,i_n} \to P_{m,\alpha} = P_{m,i_1} \times \ldots \times\,.$$

On note $V_{m,\alpha} = P_{m,\alpha} \times Y'$; si $\alpha < \beta$ on a des applications:

$$\pi^m_{\alpha,\beta} \colon V_{m,\alpha} \to V_{m,\beta}\,, \qquad \pi^m_\alpha \colon V_{m,\alpha} \to Y'\,.$$

Ainsi qu'un plongement fermé:

$$j^m_\alpha = i_{m,\alpha} \times f|_{U_{m,\alpha}}\ U_{m,\alpha} \to V_{m,\alpha}$$

$V_m = (V_{m,\alpha}, \pi^m_{\alpha,\beta})$ est selon la terminologie de [12] un système de Forster-Knorr (SFK) au dessus de Y'.

Pour toute application croissante $\varphi\colon [0, n]\ [0, m]\ n \leqslant m$ ($[0, n]$ désigne le segment dans Ω d'extrémités 0 et n) on a d'une manière évidente un morphisme de SFK au dessus de Y' ([12]):

$$V_m \to V_n\,.$$

On obtient ainsi $V = (V_m)_{m\in N}$ qui est un hyper-système de Forster-Knorr (HSFK) au dessus de Y' (cf. [4]); et des morphismes d'HSFK (en considérant X' et Y' comme des HSFK constants), qui forment le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{U} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\varrho"'] & V \arrow[d, "\pi"] \\ X' \arrow[r, "f"] & Y' \end{tikzcd}$$

Comme dans [12] nous appellerons ce diagramme une $\mathfrak{U}$-trivialisation de f.

Les trivialisations à partir d'hyper-recouvrement sont étudiées en détail dans [4].

Si $\mathcal{F}$ est un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules, $p^*\mathcal{F}$ est un faisceau de $\mathcal{O}_U$-modules, $j_*p^*\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_V$-module (toujours selon la terminologie de [12]).

2) *Résolutions libres de faisceaux cohérents.*

Rappelons le lemme suivant, démontré dans [4] et qui n'est autre que l'adaption du lemme I de [5] pour les hyper-recouvrements.

LEMME I. *Soit $\mathfrak{U}$ un hyper-recouvrement de X' par des ouverts d'Oka-Weil, $\mathcal{G}$ un $\mathcal{O}_{X'}$-module cohérent; pour toute trivialisation V, j, π de f, il existe un complexe $\mathcal{L}^\bullet$ de $\mathcal{O}_V$-modules libres de type fini, nul en degré > 0 et quasi-isomorphe à $j^*\mathcal{G}$.*

3) *Construction d'un représentant de $Rf_*R\mathcal{H}om(X, \mathcal{F}, K_X^\bullet)$.*

$\mathcal{H}^\bullet$ est un complexe borné à cohomologie cohérente. On sait définir une topologie sur ses objets de cohomologie, grâce au résultat suivant, démontré dans [14]:

LEMME II. *Pour tout entier positif r, il existe un hyper-recouvrement: (par des ouverts d'Oka-Weil)*

$$p\colon \mathfrak{U} \to X'$$

un complexe borné $\mathcal{G}^\bullet$ à composantes cohérentes sur $\mathfrak{U}$ et un quasi-isomorphisme de niveau r:

$$\mathcal{G}^\bullet \to p^*\mathcal{H}^\bullet.$$

Si $\mathcal{H}^\bullet$ est d'amplitude $[s, t]$ (i.e. $H^k(\mathcal{H}^\bullet) = 0$ pour $k \notin [s, t]$ avec $H^t(\mathcal{H}^\bullet)$ et $H^s(\mathcal{H}^\bullet)$ non nuls), $Rf_*\mathcal{H}^\bullet$ est d'amplitude contenue dans $[s, t + 2n]$ où $n = \dim X$, puisque la dimension cohomologique d'un espace de dimension (complexe) n est inférieure à $2n$.

On prend alors $r = t - s + 2n + 1$, et on obtient alors un quasi-isomorphisme entre $Rf_*\mathcal{H}^\bullet$ et $(f\circ p)_*\mathcal{G}^\bullet$ tronqué cohomologiquement en degré $t + 2n$.

Pour une $\mathcal{U}$-trivialisation V, j, π de f au dessus de Y', d'après le lemme I, $j_*\mathcal{G}^\bullet$ est quasi-isomorphe à un complexe $\mathcal{L}^\bullet$ de $\mathcal{O}_V$-modules libres de type fini, nul en degré > 0, donc $(f \circ p)_* \mathcal{G}^\bullet$ qui est égal à $(\pi \circ j_*)\mathcal{G}^\bullet$, est quasi-isomorphe au complexe $\pi_* \mathcal{L}^\bullet$.

Ainsi $Rf_* \mathcal{H}^\bullet$ est quasi-isomorphe au complexe $\pi_* \mathcal{L}^\bullet$ tronqué à l'ordre $t + 2n$, c'est un complexe de $\mathcal{O}_{Y'}$-modules de type FN (fréchet nucléaire), borné à droite que nous noterons $M^\bullet$.

Pour tout ouvert de Stein U de Y', $M^\bullet(U)$ est un complexe de $\mathcal{O}(U)$-modules FN-libres, dont le n-ième terme est une somme dénombrable d'espaces de la forme:

$$\mathcal{O}(U) \hat{\otimes} F$$

F est un espace de fréchet nucléaire ([6] p. 39).

IV. – Le théorème de cohérence pour $Rf_* R\,\mathcal{H}om(X, \mathcal{F}, K_X^\bullet)$.

1) *Construction d'un morphisme de complexes.*

Soit $\mathcal{U}'$ un hyper-recouvrement par des ouverts d'Oka-Weil de X'_d, plus fin que celui induit par $\mathcal{U}$ (l'hyper-recouvrement du III 3) sur X'_d, et tel que:

$$\text{si } U'_{m,i} \in \mathcal{U}' \ \exists\, U_{m,c(i)} \in \mathcal{U} \text{ tel que } U'_{m,i} \subset\subset U_{m,c(i)}.$$

Alors, en reprenant les notations de III, on peut supposer:

$$P'_{m,i} \subset\subset P_{m,c(i)} \text{ d'où } r^m_\alpha : Y' \times P_{m,c(\alpha)} \to Y' \times P'_{m,\alpha}.$$

On peut donc trouver une $\mathcal{U}$-trivialisation de f, (V, π) et une $\mathcal{U}'$-trivialisation de $f|_{X'_d}$, (V', π') et un morphisme d'HSFK au dessus de Y':

$$r : V \to V'.$$

Si $\mathcal{L}^\bullet$ est un complexe de $\mathcal{O}_V$-modules libres de type fini, $r_* \mathcal{L}^\bullet$ est un complexe de $\mathcal{O}_{V'}$-modules libres de type fini et l'on a un morphisme naturel:

$$\pi_* \mathcal{L}^\bullet \to \pi'_* r_* \mathcal{L}^\bullet.$$

En notant $M^\bullet = \pi^* \mathcal{L}^\bullet$ et $N^\bullet = \pi'_* r^* \mathcal{L}^\bullet$ le morphisme:

$$u^\bullet : M^\bullet(Y') \to N^\bullet(Y')$$

est $\mathcal{O}(Y')$-nucléaire en chaque degré, puisqu'il est obtenu à partir de restrictions du type:

$$\mathcal{O}(Y') \mathbin{\widehat{\otimes}} F \to \mathcal{O}(Y') \mathbin{\widehat{\otimes}} F'$$

qui sont $\mathcal{O}$ (Y')-nucléaires (cf. par ex. [7], p. 103).

De plus, d'après le théorème d'épuisement de II, ce morphisme est un $p + 1 - \mathrm{prof}_X \mathcal{F}$–quasi-isomorphisme.

2) *Un théorème de finitude.*

Nous ne rappellerons pas les définitions ni les résultats sur la transversalité que nous utiliserons ici. Nous renvoyons à [3] pour cela.

Dans [7], p. 87 est démontré le résultat suivant:

LEMME I. *Soit A une algèbre de Fréchet, M et N deux A-modules de Fréchet nucléaires,*

$$f, g : M \rightrightarrows N$$

deux morphismes, f nucléaire et g surjectif; alors $N/(g + f)M$ est de type fini sur A.

Démontrons maintenant la:

PROPOSITION 1. *Soient $D^{\bullet}$ et $C^{\bullet}$ deux complexes de $\mathcal{O}(Y')$-modules* FN, *acycliques en $d^{\circ} > n$, un morphisme:*

$$f^{\bullet} : C^{\bullet} \to D^{\bullet}$$

tel que f^n soit $\mathcal{O}(Y')$-nucléaire et tel que f^n soit un n–quasi-isomorphisme. Alors il existe un ouvert de Stein $Y'_1 \subset\subset Y'$ tel que si C^k et D^k sont transverses à $\mathcal{O}(Y'_1)$ sur $\mathcal{O}(Y')$ $H^n(D^{\bullet} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{O}(Y'_1))$ est un $\mathcal{O}(Y'_1)$-module de type fini. (*Avec des notations évidentes*).

La suite exacte:

$$0 \to Z^k(D^{\bullet}) \to D^k \to Z^{k+1}(D^{\bullet}) \to 0 \qquad \text{pour } k \geqslant n$$

prouve que pour $Y'_1 \subset\subset Y'$, $\mathcal{O}(Y'_1)$ est transverse à $Z^k(D^{\bullet})$, car $\mathcal{O}(Y'_1)$ est transverse à D^k sur $\mathcal{O}(Y')$.

Il en est de même pour $Z^k(C^{\bullet})$.

f^n induit une application $\mathcal{O}(Y')$-nucléaire:

$$Z^n(C^{\bullet}) \to D^n$$

dont l'image est dans $Z^n(D^{\bullet})$.

Si $Y_1' \subset\subset Y'$, $\mathcal{O}(Y_1')$ est transverse sur $\mathcal{O}(Y')$ à $Z^n(C^\bullet)$, D^n, $D^n/Z^n(D^\bullet)$. Donc si l'on note:

$$D_1^\bullet = D^\bullet \widehat{\otimes}\ \mathcal{O}(Y_1^\bullet) \quad \text{et de même pour } C_1'$$

l'application:

$$Z^n(C_1^\bullet) \to Z^n(D_1^\bullet)$$

est $\mathcal{O}(Y_1')$-nucléaire.

De plus l'application:

$$f_1 = f \widehat{\otimes}\ Id\colon C^\bullet \widehat{\otimes}\ \mathcal{O}(Y_1') \to D^\bullet \widehat{\otimes}\ \mathcal{O}(Y_1')$$

est un n–quasi-isomorphisme, donc l'application:

$$(d, f^n)\colon D_1^{n-1} \otimes Z^n(C_1^\bullet) \to Z^n(D_1^\bullet)$$

est surjective.

Comme l'application: $(0, f^n)\colon D_1^{n-1} \oplus Z^n(C_1^\bullet) \to Z^n(D_1^\bullet)$ est $\mathcal{O}(Y_1')$-nucléaire est $\mathcal{O}(Y_1')$-nucléaire, on en déduit, grâce au lemme I que:

$$H_n(D_1^\bullet) \quad \text{est de type fini sur } \mathcal{O}(Y_1')\,.$$

3) *Le théorème de cohérence.*

Nous allons démontrer par récurrence la proposition suivante, la récurrence s'amorçant trivialement puisque les complexes sont bornés à droite et s'arrêtant à $n = p + 1 - \operatorname{prof}_X \mathcal{F}$.

PROPOSITION II. *Pour $n > p + 1 - \operatorname{prof}_X \mathcal{F}$, il existe un ouvert de Stein $Y_n' \subset\subset Y_{n+1}'$, un $\mathcal{O}(Y_n')$-module de type fini L_n, et des morphismes*:

$$d^n\colon L_n \to L_{n+1} \widehat{\otimes}\ \mathcal{O}(Y_n') = L_{n+1}^n$$
$$h^n\colon L_n \to M^n \widehat{\otimes}\ \mathcal{O}(Y_n')$$

tels que:

i) $0 \to L_n \to L_{n+1}^n \to \ldots$ *soit un complexe, et $h^\bullet$ un morphisme de ce complexe dans $M^\bullet(Y_n')$.*

ii) *Le cylindre $C^\bullet(n)$ de $h^\bullet$ soit acyclique en $d^\circ \geqslant n$ (i.e. $h^\bullet$ est un n-quasi-isomorphisme).*

Supposons la construction réalisée pour $n + 1$.

Le morphisme $u^\bullet$ construit au 1):

$$u^\bullet : M^\bullet(Y') \to N^\bullet(Y')$$

est nucléaire en tout degré et est un $p+1-\mathrm{prof}_X \mathcal{F}$–quasi-isomorphisme.

Tous les $Y'_{n+1} \subset\subset Y'$ sont tels que $\mathcal{O}(Y'_{n+1})$ soit transverse aux $M^n(Y')$ et $N^n(Y')$, car ces derniers sont nucléairement libres. Donc le morphisme:

$$u^\bullet_{n+1} : M^\bullet(Y') \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{O}(Y'_{n+1}) \to N^\bullet(Y') \mathbin{\widehat{\otimes}} (Y'_{n+1})$$

est également un $p+1-\mathrm{prof}_X \mathcal{F}$–quasi-isomorphisme. Il en découle que si le cylindre de $h^\bullet$ est acyclique en $d^\circ \geqslant n+1$, il en est de même du cylindre de $u^\bullet_{n+1} \circ h^\bullet$, que nous noterons par $D^\bullet(n+1)$.

On obtient ainsi un morphisme:

$$C^\bullet(n+1) \to D^\bullet(n+1)$$

qui est nucléaire en tout degré, et est un n–quasi-isomorphisme.

D'après la proposition I, il existe donc un ouvert de Stein

$$Y'_n \subset\subset Y'_{n+1}$$

tel que:

$$H^n(C^\bullet(n+1) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{O}(Y'_n)) \quad \text{et} \quad H^n(D^\bullet(n+1) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{O}(Y'_n))$$

soient de type fini sur $\mathcal{O}(Y'_n)$.

Par la même, il existe un $\mathcal{O}(Y'_n)$-module libre de type fini L_n et un épimorphisme:

$$L_n \to H^n(C^\bullet(n+1) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{O}(Y'_n))$$

Soit un morphisme:

$$(h^n, d^n) : L_n \to (M^n \oplus L_{n+1}) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{O}(Y'_n)$$

qui fournit h^n et d^n cherchés.

On note $h'^\bullet_n = u^\bullet_n \circ h^\bullet$ pour $n > p+1-\mathrm{prof}_X \mathcal{F}$. En degré $q = p + {}$ ${} + 1 - \mathrm{prof}_X \mathcal{F}$ par le même raisonnement, on prouve l'existence d'un ouvert de Stein Y'' tel que

$$H^q(D(q+1) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{O}(Y''))$$

est de type fini donc d'un module libre L^q et d'un morphisme

$$(h'^q, d^q) : L^q \to (N^q \oplus L^{q+1}) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{O}(Y'')$$

D'où un morphisme $h^\bullet$ du complexe $0 \to L^q \to L^{q+1} \to \dots$ dans $N^\bullet$ qui est un q–quasi-isomorphisme.

De par cette proposition, il existe un ouvert de Stein Y'' relativement compact dans Y', et un complexe $L^\bullet(Y'')$, borné, de modules libres de type fini sur $\mathcal{O}(Y'')$ et un morphisme:

$$L^\bullet(Y'') \to N^\bullet(Y'')$$

dont le cylindre est acyclique en degrés $\geqslant p + 1 - \mathrm{prof}_X \mathcal{F}$ (i.e. qui est un $p + 1 - \mathrm{prof}_X \mathcal{F}$–quasi-isomorphisme).

Comme $M^\bullet$ est un représentant de $Rf_* \, R \, \mathcal{H}\mathrm{om}\, (X, \mathcal{F}, K_X^\bullet)$, on peut énoncer le:

Théorème. *Les images directes* $R^k f_* \, R \, \mathcal{H}\mathrm{om}\, (X, \mathcal{F}, K_X^\bullet)$ *sont cohérentes pour* $k \geqslant p + 1 - \mathrm{prof}_X \mathcal{F}$.

De là, on déduit que $N^\bullet(Y'')$ est à cohomologie cohérente en $d^\circ > p + 1 - \mathrm{prof}_X \mathcal{F}$, donc d'après le théorème d'épuisement de II, il en est de même de $M^\bullet(Y'')$.

Comme $M^\bullet$ est un représentant de $Rf_* \, R \, \mathcal{H}\mathrm{om}\, (X, \mathcal{F}, K_X^\bullet)$ on a donc montré que $R^k f_* \, R \, \mathcal{H}\mathrm{om}\, (X, \mathcal{F}, K_X^\bullet)$ est cohérent pour $k > p + 1 - \mathrm{prof}_X \mathcal{F}$. Indiquons comment on prouve la cohérence en degré $p + 1 - \mathrm{prof}_X \mathcal{F}$. On notera $q = p + 1 - \mathrm{prof}_X \mathcal{F}$ et $L^\bullet$ pour $L^\bullet(Y'')$ (et respectivement). Considérons le cylindre $D^\bullet$ du morphisme:

$$L^\bullet \to N^\bullet$$

$D^\bullet$ est acyclique en $d^\circ \geqslant q$.

Le complexe $L^\bullet$ augmenté en $d^\circ q - 1$ par $Z^{q-1}(D^\bullet)$ que nous noterons $L^{\bullet\prime}$ s'envoie dans le complexe $N^\bullet$ par un morphisme qui induit un isomorphisme sur la cohomologie en $d^\circ \geqslant q$.

$L^{\bullet\prime}$ est libre (et FN-libre) de type fini en tous degrés sauf en degré $q - 1$.

On peut alors construire un module FN-libre, L''^{q-1}, (cf. [13], p. 454 où ce module est appelé quasi-libre) qui s'envoie dans L'^{q-1} donc dans $L'^q = L^q$, par un morphisme (continu) dont l'image est dense dans:

$$(h'^q)^{-1}\left(\overline{\delta C^{q-1}(N^\bullet)} \cap Z^q(L^\bullet)\right) .$$

Ainsi, le complexe $L^\bullet$ augmenté en $d^\circ q - 1$ par L''^{q-1}, que nous noterons $L''^\bullet$, s'envoie dans $N^\bullet$ par un morphisme qui induit un isomorphisme entre $H^k(L''^\bullet)$ et $H^k(N^\bullet)$ pour $k > p + 1 - \mathrm{prof}_X \mathcal{F}$ et entre $H^k_{\mathrm{sep}}(L''^\bullet)$ et $H^k_{\mathrm{sep}}(N^\bullet)$ pour $k = p + 1 - \mathrm{prof}_X \mathcal{F}$. $L''^\bullet$ est FN-libre en tout degré et libre de type fini en $d^\circ \geqslant q$. On a alors le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccc} H^q(L''^\bullet) & \longrightarrow & H^q(N^\bullet) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ H^q_{sep}(L''^\bullet) & \longrightarrow & H^q_{sep}(N^\bullet) & & \end{array}$$

Il suffit alors de montrer que la première flèche verticale est un isomorphisme la cohérence de $H^q(M^\bullet)$ découlera alors du théorème d'épuisement de II sur les séparés en degré q.

Mais ceci provient alors directement du résultat suivant ([12], p. 103 ou [13], p. 449).

LEMME II. *Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_X$-module cohérent sur un espace de Stein X, F un espace de type* FN, *et*

$$f: \mathcal{G} = \mathcal{O}_X \hat{\otimes} F \to \mathcal{F}$$

un morphisme $\mathcal{O}_X$-linéaire et continu, alors $\operatorname{Im} f$ *est un $\mathcal{O}_X$-module cohérent. Si de plus X_0 est un ouvert de Stein relativement compact dans X, $f(\mathcal{G})(X_0)$ est fermé dans $\mathcal{F}(X_0)$.*

Soient $E_1 \subset \ldots \subset E_n \subset \ldots$ une suite emboitée de sous espaces de dimension finie de F.

Soit f_n la restriction de f à E_n, $\mathcal{G}_n = \mathcal{O}_X \hat{\otimes} E_n \mathcal{F}_n = \operatorname{Im} f_n = f(\mathcal{G}_n)$.

La suite croissante $(\mathcal{F}_n)_n$ N de sous-modules cohérents de $\mathcal{F}$ est stationnaire sur les compacts de X. $\mathcal{F}' = \bigcup \mathcal{F}_n$ est donc un $\mathcal{O}_X$-module cohérent.

Soit $\mathcal{G}' = \bigcup \mathcal{G}_n$, pour X_0; ouvert de Stein relativement compact dans X, $\mathcal{G}'(X_0)$ est dense dans $\mathcal{G}(X_0)$.

Il est clair de plus que:

$$f(\mathcal{G}'(X_0)) = \mathcal{F}'(X_0) \subset f(\mathcal{G}(X_0)) \subset \mathcal{F}(X_0)\,.$$

Puisque f est continue, $\mathcal{F}'(X_0)$ est dense dans $f(\mathcal{G}(X_0))$. Comme $\mathcal{F}'(X_0)$ est fermé dans $\mathcal{F}(X_0)$ on a

$$\mathcal{F}'(X_0) = f(\mathcal{G}(X_0))$$

on a finalement démontré le:

THÉORÈME. *Soient X et Y deux espaces analytiques paracompacts, X étant de dimension bornée et*

$$f: X \to Y$$

un morphisme fortement q-convexe. Pour tout $\mathcal{O}_X$-module cohérent $\mathcal{F}$ les images directes $R^k f_* R\,\mathcal{H}\mathrm{om}\,(X, \mathcal{F}, K^\bullet_X)$ sont cohérentes pour $k \geqslant p+1-\mathrm{prof}_x\,\mathcal{F}$.

V. – Le theoreme de coherence pour $\mathrm{Rf}_! \mathcal{F}$.

Nous supposerons d'abord (cas lisse) que la base Y est un poly-disque de $\boldsymbol{C}^n$.

Dans ce cas, $K^\bullet_Y = T^{-n}\Omega_Y$ où Ω_Y désigne le faisceau des formes différentielles de degré n sur Y.

D'après le (2-ème) théorème de dualité relative de [12], si $M^\bullet$ est le représentant de $Rf_* R\,\mathcal{H}\mathrm{om}\,(X, \mathcal{F}, K^\bullet_X)$ construit dans III, par trivialisation, il existe un représentant topologique $N^\bullet$ de $Rf_!\mathcal{F}$ (i.e. un représentant de $Rf_!\mathcal{F}$ qui est un complexe borné à droite de $\mathcal{O}_Y$-modules dont les composantes sont DFN libres et les différentielles continues) et un quasi-isomorphisme:

$$M^\bullet \to \mathcal{H}\mathrm{omtop}\,(Y, N^\bullet, T^{-n}\Omega_Y)\,.$$

Donc, d'après ce qui a été démontré dans IV, il existe un complexe $P^\bullet$, borné à droite de $\mathcal{O}_Y$-modules libres (et FN libres), de type fini en $d^\circ \geqslant p+ +1-\mathrm{prof}_x\,\mathcal{F}$ et un quasi-isomorphisme:

$$P^\bullet \to \mathcal{H}\mathrm{omtop}\,(Y, N^\bullet, T^{-n}\Omega_Y)\,.$$

En dualisant une seconde fois sur la base, on obtient un quasi-isomorphisme:

$$\mathcal{H}\mathrm{omtop}\,(Y, P^\bullet, K^\bullet_Y) \to \mathcal{H}\mathrm{omtop}\,(Y, \mathcal{H}\mathrm{omtop}\,(Y, N^\bullet, K^\bullet_Y), K^\bullet_Y)\,.$$

Or $\mathcal{H}\mathrm{omtop}\,(Y, P^\bullet, K^\bullet_Y) = \mathcal{H}\mathrm{omtop}\,(Y, P^\bullet, T^{-n}\Omega_Y)$ est libre en tout degrés, et de type fini en $d^\circ \leqslant -\dim Y - p - 1 + \mathrm{prof}_x\,\mathcal{F} = -n-p-1-\mathrm{prof}_x\,\mathcal{F}$.

Et comme $\mathcal{H}\mathrm{omtop}\,\big(Y, \mathcal{H}\mathrm{omtop}\,(Y, N^\bullet, K^\bullet_Y), K^\bullet_Y\big)$ est quasi-isomorphe à $N^\bullet$, on en déduit que $N^\bullet$ est à cohomologie cohérente en $d < -n-p- -1-\mathrm{prof}_x\,\mathcal{F}$.

La cohérence en degré $-\dim Y - p - 1 - \mathrm{prof}_x\,\mathcal{F}$ est obtenue en « dualisant » le résultat du lemme II de IV:

On reprend ici les mêmes notations qu'au lemme II de IV mais avec F de type DFN, ce qui fait de $\mathcal{G} = \mathcal{O}_Y \otimes F$ un $\mathcal{O}_Y$-module DFN, de même pour $\mathcal{G}'$. On prendra également $\mathcal{F}$ DFN libre.

Si K est un compact de Stein de Y, de même qu'au lemme sus-cité, on a:

$$f(\mathcal{G}'(K)) = \mathcal{F}'(K) = f(\mathcal{G}(K))$$

On en déduit que pour un ouvert de Stein $U \subset K$, les applications:

$$\mathrm{Homtop}_{\mathcal{O}(K)}(\mathcal{F}(K), K^{\bullet}_Y(U)) \to \mathrm{Homtop}_{\mathcal{O}(K)}(\mathcal{G}(K), K^{\bullet}_Y(U))$$
$$\mathrm{Homtop}_{\mathcal{O}(K)}(\mathcal{F}(K), K^{\bullet}_Y(U)) \to \mathrm{Homtop}_{\mathcal{O}(K)}(\mathcal{G}'(K), K^{\bullet}_Y(U))$$

ont le même noyau.

Donc le faisceau noyau de:

$$\mathcal{H}\mathrm{omtop}\,(Y, \mathcal{F}, K^{\bullet}_Y) \to \mathcal{H}\mathrm{omtop}\,(Y, \mathcal{G}, K^{\bullet}_Y)$$

est cohérent.

Dans le cas non lisse, on peut supposer qu'il existe un plongement de Y dans un ouvert U de $\boldsymbol{C}^n$:

$$i: Y \hookrightarrow U\,.$$

Grâce aux techniques des faisceaux quasi-cohérents, exposées dans [12], on sait construire un représentant DFN libre de $Rf_! \mathcal{F}$ soit $N^{\bullet}$, tel que, si $N'^{\bullet}$ est un représentant de $R(i \circ f)_! \mathcal{F}$, construit par trivialisation, on ait des quasi-isomorphismes:

$$\mathcal{H}\mathrm{omtop}\,(Y, N^{\bullet}, K^{\bullet}_Y) \to \mathcal{H}\mathrm{omtop}\,(U, i_* N^{\bullet}, T^{-n}\Omega_U)$$
$$\to \mathcal{H}\mathrm{omtop}\,(U, N'^{\bullet}, T^{-n}\Omega_U)\,.$$

Si $P^{\bullet}$ est un complexe dont les composantes sont FN libres, on sait construire un complexe $\bar{K}_U$ qui permet de définir $\mathcal{H}\mathrm{omtop}\,(U, P^{\bullet}, \bar{K}^{\bullet}_U)$; (si $P^{\bullet} = \mathcal{O}_U \hat{\otimes} F'$, $\bar{K}^{\bullet}_U$ est une résolution de $T^{-n}\Omega_U \hat{\otimes} F'$).

On sait de plus qu'il existe un quasi-isomorphisme:

$$N'^{\bullet} \to \mathcal{H}\mathrm{omtop}\,(U, \mathcal{H}\mathrm{omtop}\,(U, N'^{\bullet}, \bar{K}^{\bullet}_U)\bar{K}^{\bullet}_U)\,.$$

On peut alors, d'une manière analogue à la précédente, conclure à la cohérence des images directes $R^k f_! \mathcal{F}$ cherchées.

On a donc finalement démontré le:

THÉORÈME. *Soient X et Y deux espaces analytiques paracompacts, X étant de dimension de Zariski bornée, et*

$$f: X \to Y$$

une application analytique fortement p-convexe. Pour tout $\mathcal{O}_X$-module cohérent $\mathcal{F}$, les images directes à supports propres $R^k f_! \mathcal{F}$ sont des $\mathcal{O}_Y$-modules cohérents pour $k \leqslant \mathrm{prof}_X \mathcal{F} - p - 1 - \dim Y$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Andreotti - H. Grauert, *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes*, Bull. Soc. Math. France, **90** (1962), pp. 193-259.

[2] A. Andreotti - E. Vesentini, *Carleman estimates for the Laplace-Beltrami equation on complex manifolds*, Publ. Math. I.H.E.S. no. 25 (1965), pp. 81-130.

[3] A. Douady, *Le théorème des images directes de Grauert*, Séminaire Bourbaki, exposé 404, novembre 1971.

[4] A. Duval, *Comparaison des deux topologies naturelles sur les espaces de cohomologie du complexe dualisant en géométrie analytique complexe*, I.R.M.A. de Strasbourg (octobre 1975).

[5] O. Forster - K. Knorr, *Ein beweis des Grauertschen Bildgarbensatz nach Ideen von B. Malgrange*, Manuscripta Math., **5** (1971), pp. 19-44.

[6] C. Houzel, *Espaces analytiques relatifs et théorèmes de finitudes*, Math. Ann., **205** (1973), pp. 13-54.

[7] R. Kiehl, *Relativ analytische Räume*, Invent. Math., **16** (1972), pp. 40-112.

[8] R. Kiehl - J. L. Verdier, *Ein einfacher Beweis des Kohärenzsatz von Grauert*, Math. Ann., **195** (1971), pp. 24-50.

[9] R. Narasimhan, *The Levi problem for complex spaces*, Math. Ann., **142** (1961), pp. 355-365.

[10] J. P. Ramis, *Théorèmes de séparation et de finitude pour l'homologie et la cohomologie des espaces (p, q)-convexes-concaves*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **27** (1973), pp. 933-997.

[11] J. P. Ramis - G. Ruget, *Complexe dualisant et théorèmes de dualité en géométrie analytique complexe*, Publ. Math. I.H.E.S., **38** (1971), pp. 77-91.

[12] J. P. Ramis - G. Ruget, *Résidus et dualité*, Invent. Math., **26** (1974), pp. 82-131.

[13] P. Siegfried, *Un théorème de finitude pour les morphismes q-convexes*, Comment. Math. Helvet. **49** (1974), pp. 417-459.

[14] J. L. Verdier, *Topologie sur les espaces de cohomologie d'un complexe de faisceaux analytiques à cohomologie cohérente*, Bull. Soc. Math. France, **99** (1971), pp. 337-343.