Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Jacques Vey

Orbites périodiques d'un système hamiltonien du voisinage d'un point d'équilibre

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 5, nº 4 (1978), p. 757-787

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1978_4_5_4_757_0>

Orbites périodiques d'un système hamiltonien du voisinage d'un point d'équilibre.

JACQUES VEY (*)

1. – Position du problème.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m$ des coordonnées linéaires sur l'espace $\boldsymbol{R}^{2m}$, que nous équipons de la forme symplectique

$$\omega = (2\pi)^{-1} \sum_1^m dx_i \wedge dy_i\,.$$

Nous nous proposons d'étudier les orbites périodiques des flots associés à des hamiltoniens critiques à l'origine, analytiques au voisinage de l'origine, de la forme

$$H(x, y) = \sum_1^m c_i p_i + \tfrac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m Q_{ij} p_i p_j + H_1(x, y) \tag{1}$$

où $H_1 \in \mathfrak{m}^5$ ($\mathfrak{m}$ idéal des fonctions nulles à l'origine), où les c_i et Q_{ij} sont les constantes réelles, $p_i = (x_i^2 + y_i^2)/2$; et nous aurons à supposer la matrice $Q = \|Q_{ij}\|$ non dégénérée.

Introduisons les angles $q_i \in S^1 = \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ définis par

$$x_i = (2p_i)^{1/2} \cos q_i \qquad y_i = (2p_i)^{1/2} \sin q_i$$

on a évidemment $\omega = \sum_1^m dp_i \wedge dq_i$; et le système de coordonnées angles-actions obtenu est régulier en dehors des axes du système, c'est-à-dire les m sous-espaces vectoriels A_i d'équation $p_i = 0$ (et donc de codimension 2). Nous allons nous intéresser aux orbites périodiques tracées dans l'ouvert

(*) Institut Fourier, Grenoble, et Centre Universitaire de Savoie.
Pervenuto alla Redazione il 18 Novembre 1977.

$\Omega = \boldsymbol{R}^{2m} \setminus \bigcup_1^m A_i$; les coordonnées p_i, q_i définissent un difféomorphisme de Ω et de $\boldsymbol{R}_+^m \times T^m$ ($\boldsymbol{R}_+ =]0, +\infty[$) en sorte qu'à une orbite périodique tracée dans Ω, il est naturel d'associer d'une part sa période T, et d'autre part son indice dans Ω (c'est-à-dire sa classe d'homotopie), qui est un vecteur entier $\nu \in \boldsymbol{Z}^m$. Cela étant, nous allons donner un critère (§ 3), assez lâche, garantissant l'existence d'orbites de période et d'indice donnés. Ce critère recoupe des résultats obtenus par plusieurs auteurs, dont C.P. Simon et A. Weinstein.

Afin de tester notre résultat, nous nous sommes assurés qu'il permettait de retrouver commodément le fameux théorème de Siegel sur la divergence de la forme normale. Désignons par $\mathcal{H}_1$ l'ensemble des séries entières sur $\boldsymbol{R}^{2m}$, à coefficients réels, nulles à l'ordre 4, qui prolongées à $\boldsymbol{C}^{2m}$ convergent vers une fonction définie et de norme <1 sur le polydisque $|x_i| \leqslant 1$, $|y_i| \leqslant 1$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$. Soit $c \in \boldsymbol{R}^m$, Q une matrice symétrique $m \times m$ réelle, *inversible*,

$$H_0(x, y) = \sum_1^m c_i p_i + \tfrac{1}{2} \sum_{i,j} Q_{ij} p_i p_j$$

on notera $\mathcal{H}_{cQ}$ l'ensemble des hamiltoniens H de la forme

$$H(x, y) = H_0(x, y) + H_1(x, y), \qquad H_1 \in \mathcal{H}_1 .$$

Si maintenant nous supposons les c_i indépendants sur $\boldsymbol{Z}$, il existe une forme normale pour H indiquée par Birkhoff; et le résultat de Siegel ([1]) que nous retrouverons au § 7, c'est que si H appartient à un certain résiduel $\mathcal{G}$ de l'espace topologique $\mathcal{H}_{c.Q}$, cette forme normale diverge. Nous établirons ensuite un résultat un peu plus fin: si H appartient à un certain résiduel $\mathcal{G}' \subset \mathcal{H}_{c.Q}$, le système hamiltonien défini par H ne possède pas d'intégrale première indépendante de H.

2. – Majorations.

Choisissons trois cônes convexes $P_0 \subset\subset P_1 \subset\subset P_2 \subset\subset \boldsymbol{R}_+^m$ strictement emboîtés. Toutes les constantes ci-dessous désignées par $A, A_i, \ldots, a, a_i, \ldots$ ou implicites dans une notation O sont relatives au choix de P_1, P_2, et uniformes pour les $H \in \mathcal{H}_{c.Q}$; il en va de même pour les constantes β, γ du § 3 sauf qu'elles dépendront aussi du choix de P_0.

LEMME 1. *Si $H_1 \in \mathcal{H}_1$, on a*

$$H_1(p, q) = O(|p|^{5/2}), \qquad \frac{\partial H_1}{\partial q}(p,q) = O(|p|^{5/2}) .$$

Si l'on restreint la variable p au cône P_2,

$$\frac{\partial H_1}{\partial p}(p, q) = O(|p|^{3/2}) , \quad \frac{\partial^2 H_1}{\partial p^2}(p, q) = O(|p|^{1/2}) .$$

La définition de $\mathcal{H}_1$ implique une borne sur les coefficients de la série uniforme sur $\mathcal{H}_1$; d'où la première assertion, ainsi que la seconde, puisque

$$(2\pi)^{-1}\frac{\partial}{\partial q_i} = -y_i\frac{\partial}{\partial x_i} + x_i\frac{\partial}{\partial y_i} .$$

(On a posé $|p| = p_1 + \ldots + p_m$). D'autre part:

$$\frac{\partial}{\partial p_i} = (2p_i)^{-1}\left(x_i\frac{\partial}{\partial x_i} + y_i\frac{\partial}{\partial y_i}\right).$$

Donc $\partial H_1/\partial p_i = p_i^{-1} O(|p|^{5/2})$; si l'on restreint p au cône P_2, on a

$$p_i^{-1} = O(|p|^{-1}) \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\partial H_1}{\partial p} = O(|p|^{3/2}) .$$

Même argument pour $\partial^2 H_1/\partial p^2$.

Partant maintenant d'un point de $\boldsymbol{R}^{2m}$ hors axes, de coordonnées p, q, nous considérons la solution du système engendré par $H \in \mathcal{H}_{c.Q}$ issue de ce point: on note p', q' les valeurs à l'instant t des coordonnées:

$$p' = f(t, p, q)$$
$$q' = g(t, p, q)$$

la fonction f est définie et analytique aussi longtemps que dure la trajectoire; la fonction g est définie tant que la trajectoire ne coupe pas les axes.

PROPOSITION 1. *Il existe deux constantes A_1, a_1 positives telles que, si on limite l'intégration à $p \in P_1$, $|t||p|^{3/2} < A_1$, $|p| < a_1$, on ait:*

1) $p' \in P_2$, $p' = p + O(t|p|^{5/2}) = O(|p|)$,

2) $q' = q + tc + tQp + O(t^2|p|^{5/2}) + O(t|p|^{3/2})$.

PREUVE:

A) Par définition,

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial q}(p', q') = -\frac{\partial H_1}{\partial q}(p', q') = O(|p'|^{5/2})$$

donc

$$\frac{\partial}{\partial t}|p'| = O(|p'|^{5/2}) \qquad \text{et} \qquad |p'| < |p|((1 - C_1|t||p|^{3/2})^{-3/2}$$

du moins tant que la trajectoire n'est pas sortie du domaine de définition du système. Choisissons alors $a_1 > 0$ en sorte que la boule $|p| < 2a_1$ soit dans le domaine de définition de H (par exemple $a_1 = 1/2$), et $A_1 > 0$ telle que $|t||p|^{3/2} < A_1$ implique $(1 - C_1|t||p|^{3/2})^{-2/3} < 2$. Alors pour $p \in P_1$, $|p| < a_1$ la trajectoire existera tant que $|t||p|^{3/2} < A_1$ et on aura constamment

$$|p'| < |p|\big(1 + O(|t||p|^{3/2})\big) = O(|p|) .$$

B) Revenons maintenant à l'estimation $\partial p'/\partial t = O(|p'|^{5/2})$: d'après (*A*),

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = O(|p|^{5/2}) , \qquad p' = p + O(t|p|^{5/2}) . \tag{1}$$

Il est facile de former une constante $k > 0$ telle que si $u, v \in \boldsymbol{R}^m_+$, $u \in P_1$ et $|u - v| < k|u|$, on ait forcément $v \in P_2$. Comme (1) entraîne

$$p' - p = |p|\,O(t|p|^{3/2})$$

on voit que quitte à diminuer la borne A_1, on assure $p' \in P_2$.

C) Ainsi donc pour $p \in P_1$, $|p| < a_1$, la fonction $q' = g(t, p, q)$ est définie et analytique tant que $|t||p|^{3/2} < A_1$. On a, puisque p' reste dans P_2 et $p' = O(|p|)$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial q'}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p}(p', q') &= c + Qp' + \frac{\partial H_1}{\partial p}(p', q') \\ &= c + Qp' + O(|p'|^{3/2}) \\ &= c + Qp + O(t|p|^{5/2}) + O(|p|^{3/2}) ,\end{aligned}$$

$$q' = q + tc + tQp + O(t^2|p|^{5/2}) + O(t|p|^{3/2}) , \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Naturellement, dans cette dernière formule, q et q' sont considérés comme des points du revêtement universel de T^m. Mais il importe d'observer que la différence $q' - q$ est périodique en q.

Il nous faut à présent estimer les dérivées partielles de p' et surtout de q' par rapport à p et q.

PROPOSITION 2. *Si l'on cantonne l'intégration à $p \in P_1$, $|p| < b^4$, $|t||p|^{5/4} < B$ (b, B nombres > 0 assujettis à $b^4 \leqslant a_1$, $Bb \leqslant A_1$ en sorte que les* *bornes précédentes soient en deçà des limitations de la proposition* 1), *alors*

$$\frac{\partial p'}{\partial p} = 1 + t|p|^{5/4}O(B+b)\,,$$

$$\frac{\partial p'}{\partial q} = O\left(t|p|^{5/2}\right),$$

$$\frac{\partial q'}{\partial p} = tQ + tO(B+b)^2$$

$$\frac{\partial q'}{\partial q} = 1 + t|p|^{5/4}O(B+b)\,.$$

PREUVE. Formons les matrices $2m\times 2m$, décomposées en quatre blocs $m\times m$,

$$X(t,p,q) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial p'}{\partial p} & \dfrac{\partial q'}{\partial p} \\ \dfrac{\partial p'}{\partial q} & \dfrac{\partial q'}{\partial q} \end{pmatrix} \qquad M(t,p,q) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial^2 H}{\partial p \partial q}(p',q') & -\dfrac{\partial^2 H}{\partial q^2}(p',q') \\ \dfrac{\partial^2 H}{\partial p^2}(p',q') & \dfrac{\partial^2 H}{\partial p\partial q}(p',q') \end{pmatrix}$$

la matrice $X(t,p,q)$ est la solution du système différentiel linéaire

$$\frac{\partial X}{\partial t}(t,p,q) = M(t,p,q)X(t,p,q)$$

égale à 1 pour $t=0$. D'après la proposition 1, p' reste dans P_2, et $p' = O(|p|)$ donc d'après le lemme 1,

$$M(t,p,q) = \begin{pmatrix} O\left(|p|^{3/2}\right) & O\left(|p|^{5/2}\right) \\ Q + O\left(|p|^{1/2}\right) & O\left(|p|^{3/2}\right) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Pour mettre en relief les parties principales, posons

$$(Yt,p,q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -tQ & 1 \end{pmatrix} X(t,p,q)\,.$$

Cette matrice satisfait un système différentiel

$$\begin{aligned} \dot Y(t) &= \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -Q & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -tQ & 1 \end{pmatrix} M(t)\right] X(t) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -tQ & 1 \end{pmatrix}\left[-\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Q & 0 \end{pmatrix} + M(t)\right]\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ tQ & 1 \end{pmatrix} Y(t)\,. \end{aligned}$$

Soit $N(t)$ le coefficient de $Y(t)$ dans cette dernière équation; pour alléger, écrivons $r = |p|^{1/2}$. Les inégalités (1) donnent

$$N(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -tQ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O(r^3) & O(r^5) \\ O(r) & O(r^3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ tQ & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} O(r^3) + O(tr^5) & O(r^5) \\ O(t^2 r^5) + O(tr^3) + O(r) & O(r^3) + O(tr^5) \end{pmatrix}.$$

Introduisons maintenant la condition $|t| r^{5/2} < B$, $r^{1/2} < b$. Alors

$$N(t) = \begin{pmatrix} r^{5/2} O(B+b) & r^5 O(1) \\ O(B+b)^2 & r^{5/2} O(B+b) \end{pmatrix}$$

majoration *indépendante de t*. Convenons de dire qu'une matrice réelle A est dominée par une matrice B à coefficients > 0 (en symboles $A \prec B$) si chaque coefficient A_{ij} est strictement majoré en valeur absolue par le coefficient B_{ij} correspondant. Je vais utiliser le lemme suivant:

Lemme 2. *Soit $N(t)$ une matrice réelle dépendant différentiablement d'un paramètre $t \in [0, \tau[$; et $Y(t)$ la solution de l'équation différentielle $\dot{Y}(t) = N(t) Y(t)$ égale à 1 pour $t = 0$. Supposons que sur $[0, \tau[$, $N(t)$ reste strictement dominée par une matrice C à coefficients positifs. Alors, sur $]0, \tau[$, $Y(t) \prec \exp tC$.*

(Noter que par linéarité $Y(t)$ est définie sur $[0, \tau[$ entier). Rejetons la preuve en annexe du présent paragraphe et appliquons ce lemme à la situation présente. Nous avons une domination

$$N(t) \prec \begin{pmatrix} r^{5/2}(B+b) C_{11} & r^5 C_{12} \\ (B+b)^2 C_{21} & r^{5/2}(B+b) C_{22} \end{pmatrix} = C(r)$$

où les C_{ij} sont des blocs $m \times m$, uniformes sur $\mathcal{K}_{c,Q}$ et P_1, P_2; et nous en déduisons une domination

$$Y(t) \prec \exp tC(r).$$

(On se restreint aux temps positifs). Par un calcul facile,

$$C(r) = r^{5/2}(B+b) \begin{pmatrix} r^{5/4}(B+b)^{-1/2} & 0 \\ 0 & r^{-5/4}(B+b)^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}.$$
$$\cdot \begin{pmatrix} r^{-5/4}(B+b)^{1/2} & 0 \\ 0 & r^{5/4}(B+b)^{-1/2} \end{pmatrix}$$

$$\exp tC(r) = \begin{pmatrix} r^{5/4}(B+b)^{-1/2} & 0 \\ 0 & r^{-5/4}(B+b)^{1/2} \end{pmatrix} \left[\exp tr^{5/2}(B+b)\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}\right] \cdot$$
$$\cdot \begin{pmatrix} r^{-5/4}(B+b)^{1/2} & 0 \\ 0 & r^{5/4}(B+b)^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

Du fait que $tr^{5/2}$ est bloqué en-dessous de B, l'exponentielle est

$$1 + tr^{5/2}O(B+b)\,,$$
$$Y(t) \prec \exp tC(r) = 1 + \begin{pmatrix} tr^{5/2}O(B+b) & O(tr^5) \\ tO(B+b)^2 & tr^{5/2}O(B+b) \end{pmatrix}.$$

On revient finalement à $X(t)$:

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ tQ & 1 \end{pmatrix} Y(t) =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 + tr^{5/2}O(B+b) & O(tr^5) \\ tQ + tO(B+b)^2 + t^2 r^{5/2}O(B+b) & 1 + O(t^2 r^5) + tr^{5/2}O(B+b) \end{pmatrix}$$

ce qui donne par affaiblissement $(tr^{5/2} < B)$

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 + tr^{5/2}O(B+b) & O(tr^5) \\ tQ + tO(B+b)^2 & 1 + tr^{5/2}O(B+b) \end{pmatrix} \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

COROLLAIRE. *Il existe deux constantes $A > 0$, $a > 0$ telles que, si l'on cantonne l'intégration à $p \in P_1$ $|p| < a$, $|t||p|^{5/4} < A$,*

1) *p' reste dans le cône P_2, $p' = O(|p|)$,*
2) *$q' = q + tc + tQp + O(t^2|p|^{5/2}) + O(t|p|^{3/2})$,*
3) $\left|\dfrac{\partial q'}{\partial q} - 1\right| < 1$,
4) *pour $t \neq 0$,* $\left|t^{-1}Q^{-1}\dfrac{\partial q'}{\partial p} - 1\right| < 1$.

ANNEXE: *Preuve du lemme* 2. On se convainc aisément que la domination

$$Y(t) \prec \exp tC$$

est valable pour les petites valeurs > 0 de t. Soit ensuite

$$\tau' = \sup\{\theta \in]0, \tau]: \text{ pour } t \in]0, \theta],\ Y(t) \prec \exp tC\}\,.$$

On va voir que $\tau'=\tau$. De toute façon $Y(\tau')\leqslant Z(\tau')$. (On pose $Z(t)=\exp tC$); et pour chaque coefficient,

$$|\dot{Y}_i^j(\tau')|\leqslant\sum_k|N_i^k(\tau')|\cdot|Y_k^j(\tau')|<\sum_k C_i^k Z_k^j(\tau')=\dot{Z}_i^j(\tau')$$

si donc on avait une égalité $|Y_i^j(\tau')|=Z_i^j(\tau')$, on en déduirait $|Y_i^j(t)|>Z_i^j(t)$ pour les valeurs de t légèrement inférieures à τ', ce qui est absurde.

3. – Retour des angles.

Les deux constantes positives β et γ qui figurent dans la définition suivante sont associées aux trois cônes $P_0\subset\subset P_1\subset\subset P_2\subset\subset \boldsymbol{R}_+^m$ et seront construites dans le courant de la preuve. Rappelons que la matrice symétrique Q est supposée inversible, tandis que le vecteur $c\in\boldsymbol{R}^m$ est quelconque.

DEFINITION. *Soit T un nombre réel >0, et $\nu\in\boldsymbol{Z}^m$. Ils seront dits associés si*

(i) $\nu-Tc\in Q(P_0)$

(ii) $|\nu-Tc|<\beta T^{1/5}$

(iii) $T>\gamma$.

Le théorème d'existence que nous avons en vue est le suivant:

THEORÈME. *Supposons le nombre $T>0$ et le vecteur $\nu\in\boldsymbol{Z}^m$ associés, et soit $H\in\mathcal{H}_{c,Q}$. Il existe au moins m orbites du système différentiel engendré par H, périodiques de période T, ne coupant pas les axes et d'indice ν par rapport à ceux-ci, et géométriquement distinctes.*

Nous avons donc à résoudre le système de $2m$ équations à $2m$ inconnues

$$\begin{cases} p'(T,p,q)=p \\ q'(T,p,q)=q+\nu \end{cases}$$

(q et q' sont ici considérés dans le revêtement universel $\boldsymbol{R}^m$ de $T^m=\boldsymbol{R}^m/\boldsymbol{Z}^m$). Dans ce paragraphe, nous allons examiner le deuxième stock d'équations.

PROPOSITION 1. *Supposons T et ν associés. Il existe une fonction $\psi_T^\nu(q)$, définie et analytique pour $q\in T^m$, analytique en T, telle que*

$$p=\psi_T^\nu(q)\Leftrightarrow\begin{cases} q'(T,p,q)=q+\nu\,, \\ |p|<a\,,\qquad p\in P_1\,,\ T|p|^{5/4}<A\,. \end{cases}$$

A) Commençons par l'assertion d'unicité: T, ν, q donnés, il n'y a qu'une valeur de p, satisfaisant les inégalités $T|p|^{5/4} < A$, $|p| < a$ et le système $q'(T, p, q) = q + \nu$. Posons en effet

$$q'(t, p, q) = q + tc + tQp - G(t, p, q)$$

où G est une certaine fonction périodique en q; d'après la définition de a et A (§ 2, corollaire),

$$G(t, p, q) = O(t|p|^{3/2}) + O(t^2|p|^{5/2}) ,$$
$$\left| t^{-1}Q^{-1}\frac{\partial G}{\partial p}(t, p, q)\right| < 1 .$$

Soit $\bar{\omega} = T^{-1}Q^{-1}(\nu - Tc) \in \boldsymbol{R}^m$ (en fait $\bar{\omega} \in P_0$ par la condition (i) d'association). Le retour des angles s'écrit

$$p = \bar{\omega} + T^{-1}Q^{-1}G(T, p, q) . \tag{1}$$

Supposons une deuxième solution $\tilde{p}$, avec les mêmes angles q, assujettie aussi aux inégalités

$$|\tilde{p}| < a \qquad T|\tilde{p}|^{5/4} < A . \tag{2}$$

Il vient

$$p - \tilde{p} = T^{-1}Q^{-1}[G(T, p, q) - G(T, \tilde{p}, q)] ,$$

où $[p, \tilde{p}]$ désigne le segment de droite joignant dans $\boldsymbol{R}^m$ p et $\tilde{p}$: tous les points de ce segment sont soumis aux inégalités (2) et d'après le corollaire du § 2, on trouve

$$|p - \tilde{p}| \leqslant |p - \tilde{p}| \sup_{[p, \tilde{p}]}\left| T^{-1}Q^{-1}\frac{\partial G}{\partial p}(T, \dots, q)\right| < |p - \tilde{p}|$$

ce qui est absurde, à moins justement que $p = \tilde{p}$. En d'autres termes, l'application $p \mapsto f(p) = \bar{\omega} + T^{-1}Q^{-1}G(T, p, q)$ est strictement contractante.

B) Voyons maintenant l'effet des conditions d'association sur le vecteur $\bar{\omega}$. Par (i), $\bar{\omega} \in P_0$. Ensuite (ii) donne

$$|\bar{\omega}| < T^{-1}|Q^{-1}||\nu - Tc| < \beta|Q^{-1}|T^{-4/5}$$

donc d'une part

$$T|\bar{\omega}|^{5/4} < \beta^{5/4}|Q^{-1}|^{5/4}$$

et d'autre part, par (iii)

$$|\bar{\omega}| < \beta\gamma^{-4/5}|Q^{-1}| .$$

C'est ici qu'on fixe la constante β, en sorte que $\beta^{5/4}|Q^{-1}|^{5/4} \leqslant A/2$; et une première contrainte sur γ sera que

$$\beta\gamma^{-4/5}|Q^{-1}| \leqslant a/2 .$$

Ainsi, quels que soient ν et T associés, $T|\bar{\omega}|^{5/4} < A/2$, $|\bar{\omega}| < a/2$ (donc $|\bar{\omega}| < 1$: $a/2$ est de toute façon inférieur au rayon de convergence).

C) Procurons-nous un nombre $k > 0$ tel que si $u \in P_0$, et $v \in \boldsymbol{R}^m$ vérifie $|u - v| < k|u|$, on ait $v \in P_1$. On peut exiger de plus $(1 + k)^{5/4} < 2$. Soit B la boule centrée en $\bar{\omega}$, de rayon $k|\bar{\omega}|$. Je dis que si $p \in B$, $|p| < a$ et $T|p|^{5/4} < A$. En effet

$$|p| < (1 + k)|\bar{\omega}| < (1 + k)a/2 < (1 + k)^{5/4}a/2 < a$$

$$T|p|^{5/4} < T(1 + k)^{5/4}|\bar{\omega}|^{5/4} < (1 + k)^{5/4}A/2 < A .$$

Nous allons voir à présent que $f(B) \subset B$. Si $p \in B$,

$$f(p) - \bar{\omega} = T^{-1}Q^{-1}G(T, p, q)$$

$$\begin{aligned} |f(p) - \bar{\omega}| &= O\big(T|p|^{5/2}\big) + O\big(|p|^{3/2}\big) \\ &= O\big(T(1 + k)^{5/2}|\bar{\omega}|^{5/2}\big) + O\big((1 + k)^{3/2}|\bar{\omega}|^{3/2}\big) \\ &= |\bar{\omega}|\big[O\big(T|\bar{\omega}|^{3/2}\big) + O\big(|\bar{\omega}|^{1/2}\big)\big] . \end{aligned}$$

Mais $T|\bar{\omega}|^{3/2} = T|\bar{\omega}|^{5/4}\cdot|\bar{\omega}|^{1/4} < A|\bar{\omega}|^{1/4}/2$. Comme $|\bar{\omega}| < \beta\gamma^{-4/5}|Q^{-1}|$ on voit qu'en ajustant la constante γ assez haut, on aura

$$|f(p) - \bar{\omega}| < k|\bar{\omega}|$$

et donc $f(p) \in B$, comme voulu.

D) Puisque f est contractante strictement, elle a un unique point fixe dans B, qu'on notera $\psi_T^\nu(q)$. Puisque

$$\left| T^{-1}Q^{-1}\frac{\partial q'}{\partial p} - 1 \right| < 1 ,$$

$\partial q'/\partial p$ est inversible et l'équation (1) de retour des angles a été résolue par transversalité, ce qui montre que $\psi^{\nu}_T(q)$ est analytique en T et $q' \in T^m$.

Observer pour finir que les estimations du (C) donnent un peu plus, à savoir que si $p \in B$,

$$|f(p) - \bar{\omega}| = O\big(|\bar{\omega}|^{5/4}\big) .$$

On déduit l'information suivante:

Annexe à la proposition 1:

$$\psi^{\nu}_T(q) = \bar{\omega} + O\big(|\bar{\omega}|^{5/4}\big) .$$

(L'argumentation de cette section sort tout droit de Poincaré: [2], t. I, p. 112).

4. – La fonction génératrice.

Laissons provisoirement de côté la question du retour des actions et examinons l'équation de Hamilton-Jacobi.

LEMME 1. *Quels que soient $p \in P_1$, $t \in \mathbf{R}$ vérifiant $|p| < a$, $|t||p|^{5/4} < A$, l'application*

$$q \mapsto q' = g(t, p, q)$$

de T^m dans lui-même est un difféomorphisme.

D'après le choix de A et a (§ 2, corollaire final), $\partial q'/\partial q$ est inversible et ces applications sont des étalements. Ce sont donc des revêtements, puisque T^m est compact. Ces revêtements correspondants aux diverses valeurs de t sont homotopes; comme pour $t = 0$ ce sont des difféomorphismes, il en va de même pour tout t.

PROPOSITION 1. *Il existe une unique fonction $S(t, p, q')$, à valeurs réelles, définie et analytique pour $p \in P_1$, $|p| < a$, $|t||p|^{5/4} < A$, $q' \in \mathbf{R}^m$, solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial t} + H\left(p, \dfrac{\partial S}{\partial p}\right) = 0 , \\ S(0, p, q') = \sum\limits_1^m p_i q'_i = pq' . \end{cases}$$

En outre, la différence $S'(t, p, q') = S(t, p, q') - pq'$ est périodique en q', donc définie sur le tore $q' \in T^m$.

Inversons la relation $q' = g(t, p, q)$ en $q = g'(t, p, q')$ (lemme 1) et reportons dans $p' = f(t, p, q')$, d'où $p' = f'(t, p, q')$. Du fait que à t fixé, $dp \wedge dq = dp' \wedge dq'$ résulte que la forme différentielle

$$q\,dp + p'\,dq'$$

est fermée (ici q et q' ont été remontées au revêtement universel, et p et q' sont les $2m$ variables indépendantes). Il vient donc une fonction $S(t. p, q')$ dont elle est la différentielle:

$$q = \frac{\partial S}{\partial p}(t, p, q')\,, \qquad p' = \frac{\partial S}{\partial q'}(t, p, q')$$

et qui est unique à une fonction près de t seul. Pour $t = 0$, $p = p'$, $q = q'$ donc $S = pq'$ à une constante près. De la théorie générale de Hamilton-Jacobi résulte que S satisfait l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(p, \frac{\partial S}{\partial p}\right) = \text{fonction de } t \text{ seul}$$

et quitte à rajouter à S une fonction de t, nous obtiendrons un second membre identiquement nul, ainsi que $S(0, p, q') = pq'$. Quant à la périodicité de S', elle résulte justement de l'unicité des solutions d'un problème de Cauchy.

Bien que ce ne soit pas strictement indispensable pour la suite, il est intéressant d'examiner de plus près la structure de la fonction S. Appelons *polynôme* sur $\mathcal{H}_{c,Q}$ (ou $\mathcal{H}_1$) une application de $\mathcal{H}_{c,Q}$ dans $\boldsymbol{R}$ ou $\boldsymbol{C}$ qui ne dépend que du jet d'un certain ordre de l'argument, et qui dépend polynomialement des coefficients de Taylor; appelons fonction analytique sur $\mathcal{H}_{c,Q}$ une application à valeurs dans $\boldsymbol{R}$ ou $\boldsymbol{C}$ qui dépend au contraire du jet complet, et analytiquement.

PROPOSITION. *La fonction $S'(t, p, q') = S - pq'$ se laisse développer en une série*

$$S'(t, p, q') = -\,tH_0(p) + \sum_{\substack{\lambda,\mu \in \boldsymbol{Z}^m \\ \sum \lambda_i \geq 5}} f_{\lambda\mu}(t, H_1)\,p^{\lambda/2} \exp\left[\mu q' \sqrt{-1}\right]$$

($p^{\lambda/2} = p_1^{\lambda_1/2} \dots p_m^{\lambda_m/2}$; $\mu q' = \mu_1 q_1' + \dots + \mu_m q_m'$) où les exposants λ qui interviennent avec un coefficient non identiquement nul et de poids $\sum \lambda_i$ déterminé sont en nombre fini. Chaque coefficient $f_{\lambda\mu}(t, H_1)$ est analytique en t, et polynomial en $H_1 \in \mathcal{H}_1$. Enfin, il existe deux constantes A', $a' > 0$ telles que la série converge pour $p \in P_1$, $|p| < a'$, $|t||p| < A'$, $q' \in \boldsymbol{R}^m$.

Il faut remarquer d'une part que les valeurs de la fonction S (et des ses dérivées) sont des fonctions *analytiques* de H; d'autre part, que le domaine de convergence de la série est en deçà du domaine d'existence de S $\big(p \in P_1,\ |p| < a,\ t|p|^{5/4} < A\big)$ ce qui fait que la valeur de S en un point où $t|p| > A'$ mais $t|p|^{5/4} < A$ est complètement imprévisible, même approximativement, à partir d'un jet d'ordre fini de H.

Comme je ne ferai pas usage de ce résultat, et que sa preuve est peu longue, j'omettrai celle-ci.

5. – Les orbites périodiques.

Soit $T > 0$, $\nu \in \boldsymbol{Z}^m$, et $\big(p(t), q(t)\big)$ une orbite de période T, ne coupant pas les axes, et d'indice ν par rapport à ceux-ci. Posons $p(0) = p$, $q(0) = q$, $p(T) = p'$, $q(T) = q'$: la périodicité s'exprime par

$$p' = p$$
$$q' = q + \nu$$

le deuxième système d'équations étant à lire dans le revêtement universel. Si nous utilisons la fonction $S = pq' + S'$, ceci s'écrit

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial S}{\partial p}(T, p, q') = q' - \nu \quad \text{ou} \quad \frac{\partial S'}{\partial p}(T, p, q') = -\nu\,,$$

$$\text{(II)} \qquad \frac{\partial S}{\partial q'}(T, p, q') = p \quad \text{ou} \quad \frac{\partial S'}{\partial q'}(T, p, q') = 0\,.$$

Le premier système exprime le retour des angles. Si donc ν et T sont associés, et si l'on se restreint aux positions initiales vérifiant $|p| < a$, $p \in P_1$, $T|p|^{5/4} < A$, il est résolu par

$$p = \psi_T^\nu(q')$$

ψ_T^ν étant la fonction (vectorielle) de $q' \in T^m$, analytique, construite au § 3. Noter d'ailleurs que les m relations $q = (\partial S/\partial p)(t, p, q')$ étant équivalentes à

$$q' = q + tc + tQp + O\big(t|p|^{3/2}\big) + O\big(t^2|p|^{5/2}\big)$$

on a

$$\frac{\partial S}{\partial p}(t, p, q') = q' - tc - tQp + O\big(t|p|^{3/2}\big) + O\big(t^2|p|^{5/2}\big)\,.$$

Substituant dans (I), on se retrouve devant le système de m équations (aux m inconnues $q'_1, \ldots, q'_m$):

$$\text{(III)} \qquad \frac{\partial S'}{\partial q'}(T, \psi^\nu_T(q'), q') = 0\,.$$

J'appellerai fonction (ν, T)-séculaire la fonction analytique sur T^m

$$R^\nu_T(q') = S'(T, \psi^\nu_T(q'), q') + \sum_1^m \nu_j \psi^\nu_{T.j}(q')\,.$$

Calculons sa différentielle: on trouve

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial q'_i} R^\nu_T(q') &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial S'}{\partial p_j}(T, \psi(q'), q')\cdot\frac{\partial \psi_j}{\partial q'_i} + \frac{\partial S'}{\partial q'_i}(T, \psi(q'), q') + \sum_1^m \nu_j \frac{\partial \psi_j}{\partial q'_i} \\ &= \frac{\partial S'}{\partial q'_i}(T, \psi^\nu_T(q'), q')\end{aligned}$$

par définition même de ψ^ν_T. Par conséquent, le système (III) devient

$$\text{(III)} \qquad \frac{\partial}{\partial q'} R^\nu_T(q') = 0$$

et se trouve assuré d'au moins deux solutions.

Il s'agit à présent de décompter les orbites géométriquement distinctes ainsi obtenues. Observons d'abord que si (p, q') est une solution de (I) et (II), tous les points de l'orbite correspondante sont solutions: donc les points critiques arrivent en cercles (cf. § 6, lemme 1), et tous ces cercles ont la même classe d'homotopie ν. Il se peut toutefois, si $\nu = 0$, que certaines des orbites soient stationnaires, les cercles dégénérant alors en points. Nous serons assurés d'obtenir m tels cercles disjoints dès que la proposition suivante sera établie:

PROPOSITION 1. *Soit f une fonction différentiable sur un tore T^m à m dimensions. L'ensemble critique de f ne peut se réduire à une réunion disjointe de cercles, tous homotopes et en nombre $< m$.*

Nous allons utiliser la théorie de Lusternik Schnirelman [5] et suivrons de près le bel exposé qu'en a donné J. Schwartz ([3], ch. 5).

Soient $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$ les cercles disjoints qui constituent l'ensemble critique de f de T^m (par cercle nous entendons courbe fermée simple éventuellement réduite à un point). Procédant par l'absurde, nous allons supposer $p < m$. Formons l'espace X obtenu en attachant à T^m des disques D_i de dimension 2 aux cercles γ_i non dégénérés (c'est-à-dire non réduits à un point) (cette idée nous a été soufflée par M. Hirsch). Naturellement X et f ne sont pas différentiables; mais si l'on prolonge le flot η_t ([3], lemme 5.18) par l'identité sur les D_i, on s'assure sans peine de la validité de l'argumentation qui aboutit aux théorèmes 5.21 et 5.22. Puisque chaque D_i est contractile, les ensembles critiques de f sur X sont de catégorie 1, et le corollaire 5.22 montre que la catégorie de X est au plus $p \leqslant m-1$. Par conséquent, le produit de $m-1$ quelconques classes de degré >0 dans $H^*(X, \boldsymbol{R})$ est nul ([3], 5.14) c'est cette dernière proposition qui va s'avérer intenable.

Observons qu'en degré positif $H_*(X, T^m) \simeq \bigoplus H_*(D_i, \gamma_i)$: homologie relative est concentrée en degré 2. Par conséquent

$$0 \to H_2(T^m) \to H_2(X) \to H_2(X, T^m) \xrightarrow{\partial} H_1(T^m) \to H_1(X) \to 0$$

et l'opérateur ∂ envoie chaque D_i sur la classe de γ_i dans $H_1(T^m)$; comme tous les γ_i sont homotopes, le rang de ∂ est 0 ou 1. Il en va de même en cohomologie:

$$0 \to H^1(X) \xrightarrow{i^*} H^1(T^m) \xrightarrow{\delta^*} H^2(X, T^m) \to H^2(X) \xrightarrow{i^*} H^2(T^m) \to 0$$

(i injection de T^m dans X).

Supposons d'abord $\partial^* = 0$. On remonte alors une base $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ de $H^1(T^m)$ en $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_m$ de $H^1(X)$: on aura $\alpha'_1 \wedge \ldots \wedge \alpha'_m = 0$ dans $H^*(X)$, donc en restreignant à T^m par i^*, $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_m = 0$, ce qui est absurde.

Supposons ∂^* de rang 1. Choisissons une base $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ de $H^1(T^m)$ telle que $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$ se relèvent en $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_{m-1} \in H^1(X)$. Par ailleurs, relevons $\alpha_{m-1} \wedge \alpha_m \in H^2(T^m)$ en $\beta' \in H^2(X)$. Le produit $\alpha'_1 \wedge \ldots \wedge \alpha'_{m-2} \wedge \beta'$ ($m-1$ classes) est nul dans $H^*(X)$ donc par restriction $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_{m-2} \wedge \alpha_{m-1} \wedge \alpha_m$ est nul dans $H^*(T^m)$, nouvelle absurdité. Ceci achève la preuve de la proposition 1, et par là du théorème du § 3.

Observation 1. La seule information qu'on ait sur la localisation des orbites périodiques ainsi trouvées est fournie par l'approximation

$$\psi^{\nu}_T(q') = \bar{\omega} + O(|\bar{\omega}|^{5/4}) .$$

Observation 2. Evidemment, si les indices de deux orbites périodiques ne sont pas proportionnels, elles sont géométriquement distinctes.

Observation 3. Soit (ν, T) un couple associé, et supposons les entiers ν_i non nuls et premiers entre eux: alors T est la période minima des orbites ainsi construites.

Examinons à présent différents cas de figure autorisés par les conditions d'association. Si $\nu \in \boldsymbol{Z}^m$ on notera $I(\nu)$ l'ensemble des nombres $T > 0$ associés à ν; et si $T > 0$, on notera $N(T)$ l'ensemble des $\nu \in \boldsymbol{Z}^m$ associées à T.

Premier cas: $c = 0$.

Alors les conditions d'association se réduisent à $\nu \in QP_0$, $T > T_\nu = \sup(\gamma, \beta^{-5}|\nu|^5)$: ν est donc arbitraire dans $Q^{-1}P_0$; et ν fixé, T est libre dans l'intervalle $]T_\nu, +\infty[$. Si $T \to +\infty$, $\bar{\omega} = T^{-1}Q^{-1}\nu \to 0$ on a une famille d'orbites qui se condense sur l'origine, avec des périodes de plus en plus longues.

Deuxième cas: $c \neq 0$, et c n'est pas projectivement entier (c'est-à-dire: aucun vecteur Tc, $T \neq 0$, n'appartient à $\boldsymbol{Z}^m$). Si l'on se donne T, la localisation de ν est suggérée par le diagramme ci-après; il est clair que quand $T \to +\infty$, $N(T)$ absorbe une quantité $O(T^{m/5})$ de points entiers dans la région permise (figure 1).

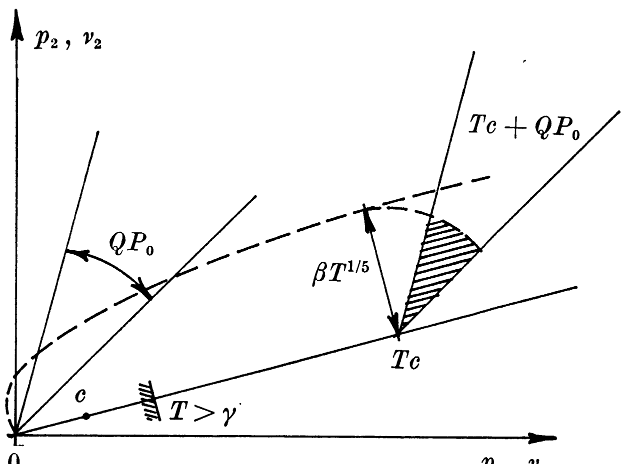

Figure 1

Partons au contraire de $\nu \in \boldsymbol{Z}^m$; notons que la condition (ii) est sensiblement équivalente à (ii)': $|\nu - Tc| < \beta|\nu|^{1/5}$. La figure 2 illustre que l'intervalle $I(\nu)$ peut être limité soit par la condition (i) (point T_1c) soit par la condition (ii)' (point T_2c). Dans le premier cas, on peut imaginer que la famille d'orbites, paramétrée par $T \in I(\nu)$, et prolongée analytiquement, ira percuter un axe; le second cas suggère qu'elle s'éloigne vers le bord du domaine de convergence.

Troisiéme cas: $c \neq 0$, et projectivement entier: nous pouvons d'ailleurs supposer $c \in \boldsymbol{Z}^m$. La discussion précédente s'applique, mais on peut aussi envisager la circonstance $\nu = lc$, $l \in \boldsymbol{Z}$. Comme $\nu - Tc$ est alors proportionnel

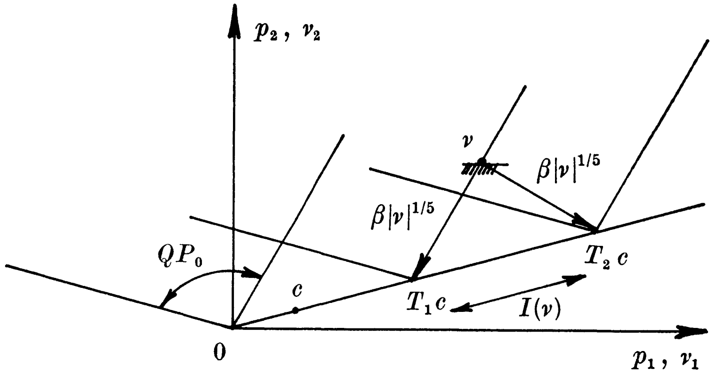

Figure 2

à c, on doit requérir $c \in \pm QP_0$ pour avoir $I(\nu) \neq \emptyset$. On trouve alors un intervalle $I(\nu)$ borné, dont l est une extrêmité; quand $T \to l$, $\bar{\omega} = T^{-1} \cdot (\nu - Tc) \to 0$ et la famille adhère à l'origine, avec des périodes bornées.

On peut envisager des rationnalités partielles entre les coefficients c_i de c. Noter aussi qu'il peut arriver que $\nu = 0$: il suffit pour cela que $c \in - Q(P_0)$, et que le vecteur $\bar{\omega} = - Q^{-1}c$ soit assez petit. Mais plutôt que de nous attarder sur cette discussion, établi ons un lemme.

LEMME. *La fonction $S(t, p, q')$ satisfait la double équation aux dérivées partielles*

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H\left(\frac{\partial S}{\partial q'}, q'\right) = -H\left(p, \frac{\partial S}{\partial p}\right).$$

La deuxième équation est de construction (§ 4). La première, d'après la théorie de Hamilton-Jacobi, est presque satisfaite:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q'}, q'\right) = \varphi(t) .$$

Soit (ν, T) associés: on va voir que $\varphi|_{I(\nu)} \equiv 0$, d'où $\varphi \equiv 0$. Prenons (p, q') une solution de (I) et (II):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial p}(T, p, q') = q' - \nu , \\ \dfrac{\partial S}{\partial q'}(T, p, q') = p , \end{cases}$$

donc

$$\frac{\partial S}{\partial t}(T, p, q') = -H(p, q'-\nu)$$
$$= -H(p, q') + \varphi(T)$$

d'où, puisque H est périodique en q, $\varphi(T) = 0$.

6. – Multiplicateurs.

Soit Z_T^ν l'ensemble des points de $\boldsymbol{R}^{2m}$, satisfaisant les conditions $p \in P_1$, $|p| < a$, $T|p|^{5/4} < A$, et dont l'orbite est de période T et d'indice ν: c'est une variété analytique (singulière) tracée sur le tore de retour des angles

$$p = \psi_T^\nu(q) = \bar{\omega} + O(|\bar{\omega}|^{5/4})$$

et qui coïncide avec l'ensemble critique de la fonction séculaire R_T^ν définie sur ce tore:

$$R_T^\nu = \big(S'(T, p, q') + \nu p\big)\big|_{p=\psi_T^\nu(q')} .$$

Eclaircissons d'abord un petit mystère. L'ensemble Z_T^ν est défini par l'annulation de m dérivées partielles sur un tore à m dimensions, ce que laisse croire que sa dimension sera 0 (génériquement). Or par définition même il est fibré en cercles par le flot, et non trivialement si $\nu \neq 0$.

Lemme 1. *La fonction séculaire R_T^ν satisfait l'équation aux dérivées partielles*

$$H\left(\psi_T^\nu(q') + \frac{\partial R_T^\nu}{\partial q'}(q'), q'\right) = H\big(\psi_T^\nu(q'), q'\big) .$$

Cela résulte de la conservation de l'énergie: partant de p, q (avec $p = \psi_T^\nu(q)$) on aboutit à (p', q') au temps T, avec $q' = q + \nu$ et

$$p' = p + \frac{\partial S'}{\partial q'}(T, p, q') = p + \frac{\partial R_T^\nu}{\partial q'}(q')$$

et d'autre part

$$H(p, q) = H(p', q') .$$

Pour clarifier ces décomptes de dimension, nous allons considérer les multiplicateurs de l'orbite périodique d'un point (p, q) de Z_T^ν. Soit $(\Delta p, \Delta q)$ un vecteur tangent en (p, q): la transformation de Poincaré L de l'orbite consiste à lui appliquer la différentielle de la transformation intégrale du champ de temps T; on obtient un vecteur $(\Delta p', \Delta q')$ tangent à $(p', q') = (p, q)$.

LEMME 2. *La transformation linéaire L est engendrée par la forme quadratique*

$$\Lambda(\Delta p, \Delta q') = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial p^2}\Delta p^2 + 2\frac{\partial^2 S}{\partial p\,\partial q'}\Delta p\,\Delta q' + \frac{\partial^2 S}{\partial q'^2}\Delta q'^2\right)$$

où les dérivées partielles sont à calculer au point (T, p, q).

On doit lire

$$\frac{\partial^2 S}{\partial p^2}\cdot\Delta p^2 = \sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial^2 S}{\partial p_i\,\partial p_j}\Delta p_i\cdot\Delta p_j\,, \qquad \text{etc.};$$

L est engendrée par Λ dans le sens suivant: on exprime $\Delta q'$ en fonction Δp et Δq en inversant la relation linéaire

$$\Delta p = \frac{\partial\Lambda}{\partial\Delta p}(\Delta p,\ \Delta q')$$

puis on obtient $\Delta p'$ par

$$\Delta p' = \frac{\partial\Lambda}{\partial\Delta q'}(\Delta p,\ \Delta q'(\Delta p,\ \Delta q))\ .$$

C'est là un énoncé satellite de la théorie de Hamilton-Jacobi.

On a donc un moyen de calcul des multiplicateurs de l'orbite (c'est-à-dire des valeurs propres de sa transformation de Poincaré). En particulier

COROLLAIRE 1. *La dimension de l'espace propre du multiplicateur* 1 *est égale au corang $\varrho(p, q')$ de la matrice*

$$\text{Hessienne}_{(T.p.q')}S - 1_{2m} = \text{Hessienne}_{(T.p.q')}S'\ .$$

En particulier, si $\nu \neq 0$, $\varrho(p, q')$ est toujours $\geqslant 1$ pour $(p, q') \in Z_T^\nu$ car dH est invariante par L, et non nulle sur l'orbite (qui n'est pas stationnaire: $\nu \neq 0$).

LEMME 3. *Soit (p, q') un point de Z_T^ν. Le corang de la matrice $2m \times 2m$* $\text{Hessienne}_{T.p.q'}S'$ *est égal au corang de la matrice $m \times m$* $\text{Hessienne}_{q'}R_T^\nu$.

Preuve. Le corang de $\mathrm{Hess}_{T,p,q'}S'$ est le nombre de solutions indépendantes du système

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 S'}{\partial p^2}\,\Delta p + \frac{\partial^2 S'}{\partial p\,\partial q'}\,\Delta q' = 0\,,\\ &\frac{\partial^2 S'}{\partial p\,\partial q'}\,\Delta p + \frac{\partial^2 S'}{\partial q'^2}\,\Delta q' = 0\,. \end{aligned}\right.$$

Mais $\partial^2 S'/\partial p^2$ est inversible (parce que $\partial q'/\partial p$ l'est) donc après élimination de Δp, il vient

$$\left(-\frac{\partial^2 S'}{\partial p\,\partial q'}\left(\frac{\partial^2 S'}{\partial p^2}\right)^{-1}\frac{\partial^2 S'}{\partial p\,\partial q'} + \frac{\partial^2 S'}{\partial q'^2}\right)\cdot\Delta q' = 0\,.$$

Je dis que le coefficient de $\Delta q'$ dans ce dernier système est justement $\partial^2 R_T^\nu/\partial q'^2$. En effet,

$$\frac{\partial R_T^\nu}{\partial q'} = \frac{\partial S'}{\partial q'}\,(T, \psi_T^\nu(q'), q')\,,$$

$$\frac{\partial^2 R_T^\nu}{\partial q'^2} = \frac{\partial^2 S'}{\partial p\,\partial q'}\,(T, \psi_T^\nu(q'), q')\,\frac{\partial \psi_T^\nu}{\partial q'} + \frac{\partial^2 S'}{\partial q'^2}\,(T, \psi_T^\nu(q'), q')\,.$$

Mais la relation qui définit ψ_T^ν,

$$\frac{\partial S'}{\partial p}\,(T, \psi_T^\nu(q'), q') = -\nu$$

donne par différenciation

$$\frac{\partial^2 S'}{\partial p^2}\,(T, \psi_T^\nu(q'), q')\,\frac{\partial \psi_T^\nu}{\partial q'}\,(q') + \frac{\partial^2 S'}{\partial p\,\partial q'}\,(T, \psi_T^\nu(q'), q') = 0$$

d'où par élimination de $\partial\psi_T^\nu/\partial q'$ l'expression voulue de $\partial^2 R_T^\nu/\partial q'^2$.

Ecartons le cas $\nu = 0$, et convenons de dire que la fonction R_T^ν est critique et transversalement de Morse en un point q' si le corang de $\mathrm{Hessienne}_{q'} R_T^\nu$ est égal à 1. Le noyau de cette forme quadratique se réduit alors à la tangente à l'orbite périodique issue de $\big(p = \psi_T^\nu(q'), q'\big)$, et R_T^ν est de Morse en restriction à une petite tranche transverse en q' à l'orbite.

Proposition 1. *Soit $(p, q') \in Z_T^\nu$, et supposons R_T^ν transversalement de Morse en q'. Alors l'orbite périodique correspondante est isolée parmi les orbites périodiques de même période; et toute intégrale première du flot est dépendante de H sur cette orbite.*

Compte-tenu du corollaire 1, la deuxième assertion est évidente. Comme les transformations de Poincaré aux différents points de l'orbite γ de $(p, q' = q)$ sont isomorphes, on voit que R^ν_T est transversalement de Morse sur toute l'orbite. Donc γ coïncide avec la composante connexe de l'ensemble critique de R^ν_T qui contient q'. Par ailleurs, les orbites de période T voisines de γ ont même indice que γ, donc sont tracées sur le tore de retour des angles $p = \psi^\nu_T(q')$, et donc coïncident avec γ au flot près (c'est-à-dire au point de départ près).

Il paraît naturel de qualifier de *simple* une telle orbite périodique.

7. – Divergence de la forme normale.

Supposons les coordonnées c_i du vecteur c indépendantes sur $\boldsymbol{Z}$. D'après le théorème de Birkhoff ([4], § 30) il existe des coordonnées formelles $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m$, $\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_m$ sur $\boldsymbol{R}^{2m}$, symplectiques, telles que H s'exprime dans ces coordonnées comme une fonction $F(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m)$ indépendante des angles $(\hat{p}_i = (\hat{x}_i^2 + \hat{y}_i^2)/2)$. Nous allons retrouver le théorème de Siegel: génériquement, le rayon de convergence de ces séries est nul.

Observer tout d'abord qu'on peut supposer qu'à l'ordre près des indices, $\hat{x}_i = x_i + \mathfrak{m}^4$, $\hat{y}_i = y_i + \mathfrak{m}^4$ et donc $\hat{p}_i = p_i + \mathfrak{m}^5$. Ainsi les nouveaux axes $\hat{A}_i$ d'équation $\hat{p}_i = 0$ (à supposer que $\hat{p}_i$ converge quelque peu) sont tangents aux anciens axes A_i. Je dirai que les coordonnées normalisantes $\hat{x}$, $\hat{y}$ sont ϱ-régulières si

1) elles forment un système de coordonnées analytiques dans la boule $|p| < \varrho$;

2) et si dans cette boule, les axes $\hat{A}_i$ sont disjoints de $P_1 \times T^m$.

LEMME 1. *Supposons que $H \in \mathcal{H}_{c,Q}$ possède des coordonnées normalisantes ϱ-régulières. Toutes les fonctions séculaires $R^\nu_T(q')$ correspondant à des couples associées $T > 0$, $\nu \in \boldsymbol{Z}^m$ vérifiant $|\bar{\omega}| < \varrho/2$ sont constantes.*

Comme à l'ordinaire, $\bar{\omega} = T^{-1}Q^{-1}(\nu - Tc)$; il est clair que de tels couples associés sont très abondants. Soit $(p_0, q_0) \in Z^\nu_T$, $\hat{p}_0$, $\hat{q}_0$ les nouvelles coordonnées de ce point. Dans les coordonnées $\hat{p}$, $\hat{q}$ l'intégration du système est immédiate: $\hat{p}$ reste constant, et

$$\hat{q}_i \to \hat{q}_i + t \frac{\partial F}{\partial \hat{p}_i}(\hat{p}_i, \dots, \hat{p}_m) .$$

Si donc le point $(p_0, q_0) = (\hat{p}_0, \hat{q}_0)$ appartient à une orbite de période T, c'est que $T(\partial F/\partial \hat{p})(\hat{p}_0) \in \boldsymbol{Z}^m$; et donc, tous les points du tore $(\hat{p}_0, \hat{q})$, $\hat{q} \in T^m$

appartiennent à des orbites de période T. Puisque $|\bar{\omega}| < \varrho/2$, $|p_0| < \varrho$ (§ 3: la constante k est < 1) et $p_0 \in P_1$ donc (p_0, q_0) est en-dehors des axes du nouveau système; toutes les composantes de $\hat{p}_0 \in \boldsymbol{R}^m_+$ sont non nulles et le tore $(\hat{p}_0, \hat{q})$, $\hat{q} \in T^m$ est bien à m dimensions. Par continuité, les points de ce tore voisins de (p_0, q_0) vérifient encore les inégalités $T|p|^{5/4} < A$, $|p| < a$, et sont sur des orbites de période T et d'indice ν. Ils sont donc dans Z^ν_T, qui est de dimension m. Autrement dit, R^ν_T est constante.

Définissons maintenant les fonctions $D^{\nu,\delta}_T : \mathcal{H}_{c,Q} \to \boldsymbol{C}$ $(\delta \in \boldsymbol{Z}^m)$: $D^{\nu,\delta}_T(H)$ est le δ-coefficient de Fourier de la fonction séculaire R^ν_T correspondant à l'hamiltonien H.

Lemme 2. *Les fonctions $D^{\nu,\delta}_T$ sont des fonctions analytiques sur la boule unité $\mathcal{H}_{c,Q}$ de l'espace de Banach des fonctions analytiques sur le polydisque unité de $\boldsymbol{C}^{2m}$, continues au bord, et congrues modulo l'ordre* 5 *à $H_0(p)$.*

(La norme sur cet espace de Banach est la norme uniforme; et naturellement, c'est en fait H_1 qui varie dans la boule unité, H étant la translatée $H_0 + H_1$). En effet, considérons les fonctions p', q' des § 2, 3, 4 comme fonctions non seulement de t, p, q, mais aussi de H (ou H_1): elles sont analytiques sur l'ensemble des variables. La construction au § 4 de la fonction génératrice S a été faite par transversalité, donc a préservé l'analyticité. Enfin le passage de S à ψ^ν_T (§ 3, § 4) se fait aussi par transversalité; donc ψ^ν_T et R^ν_T dépendent analytiquement de H.

Lemme 3. *Au moins si $\delta \perp \nu$, les fonctions $D^{\nu,\delta}_T$ ne sont pas identiquement nulles.*

Soit μ une variable réelle, $|\mu| < 1$, $H = H_0 + H_1 \in \mathcal{H}_{c,Q}$; nous allons considérer la famille $H_\mu = H_0 + \mu H_1$ et faire voir qu'en général,

$$\frac{\partial}{\partial \mu} D^{\nu,\delta}_T(H_\mu)|_{\mu=0} \neq 0 .$$

Considérons la famille correspondante de fonctions génératrices, $S_\mu(t, p, q')$:

$$S_\mu(t, p, q') = pq' - tH_0(p) + \mu S_1(t, p, q') + \mu^2(\ldots) .$$

On trouve immédiatement, en développant sur μ l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial S_\mu}{\partial t} + H_\mu\left(p, \frac{\partial S_\mu}{\partial p}\right) = 0 ,$$

$$S_1(t, p, q') = -\int_0^t H_1\left(p, q' - s\,\frac{\partial H_0}{\partial p}(p)\right) ds .$$

Pareillement, on peut, toujours par transversalité, développer $\psi^{\nu}_{T,\mu}$ selon les puissances de μ:

$$\psi^{\nu}_{T,\mu}(q') = \bar{\omega} + \mu\sigma^{\nu}_{T}(q') + \mu^2(\ldots)$$

avec des fonctions σ^{ν}_{T} qu'il sera inutile d'expliciter; et finalement

$$R^{\nu}_{T}(H_\mu) = S'_\mu(T, p, q') + \nu\cdot\psi^{\nu}_{T,\mu}(q')$$

$$= -TH_0(\bar{\omega} + \mu\sigma^{\nu}_{T}(q') + (\mu^2)) - \mu\int_0^T H_1\left(\bar{\omega} + (\mu), q' - s\frac{\partial H_0}{\partial p}(\bar{\omega} + 0(\mu))\right) ds$$

$$+ \nu\cdot\bar{\omega} + \mu\nu\sigma^{\nu}_{T}(q') + (\mu^2)$$

et compte-tenu du fait que par définition de $\bar{\omega}$,

$$\frac{\partial H_0}{\partial p}(\bar{\omega}) = c + Q\bar{\omega} = \nu/T$$

on aboutit finalement à

$$R^{\nu}_{T}(H_\mu)(q') = -TH_0(\bar{\omega}) + \nu\cdot\bar{\omega} + \mu(2\pi)^{-1}T\int_0^{2\pi} H_1(\bar{\omega}, q' + s\nu)\, ds + (\mu^2)\,.$$

Cette formule montre que la fonction séculaire R^{ν}_{T} est tangente (à la constante $-TH_0(\bar{\omega}) + \nu\bar{\omega}$ près) à la traditionnelle moyenne séculaire

$$[H_1]_{\bar{\omega}}(q') = \int_0^{2\pi} H_1(\bar{\omega}, q' + s\nu)\, ds$$

là encore, nous suivons Poincaré de près ([1], t. I, p. 114) (comparer aussi la discussion des multiplicateurs au § 6 avec [1], p. 201 s). On obtient

$$\frac{\partial}{\partial\mu} D^{\nu,\delta}_{T}(H_\mu)|_{\mu=0} = \frac{T}{2\pi}\,(\delta\text{-coefficient de Fourier de } [H_1](q'))\,.$$

Tout revient à voir que ces coefficients ne sont pas identiquement nuls quand H_1 varie dans $\mathcal{H}_1$. Développons H_1:

(1)
$$H_1(p, q) = \sum_{\substack{\gamma\in N^m\\ \delta\in Z^m\\ |\gamma|\geqslant 5}} c_{\gamma\delta}\, p^{\gamma/2} \exp[i\delta q']$$

alors le développement de Fourier de $[H_1]_{\bar{\omega}}$ s'obtient en faisant $p = \bar{\omega}$ dans (1) et en restreignant la sommation aux exposants δ orthogonaux à ν. Il devient manifeste que ces coefficients ne sont pas identiquement nuls.

Voici maintenant les théorèmes de Siegel [1]: (on suppose toujours les c_i indépendants sur $\boldsymbol{Z}$, et Q inversible)

Théorème 1. *Supposons $m \geqslant 2$. Quel que soit $\varrho > 0$, il existe un ouvert dense $\Omega_\varrho \subset \mathcal{H}_{c,Q}$, complémentaire d'un ensemble analytique de codimension infinie, tel que les hamiltoniens $H \in \Omega_\varrho$ n'admettent pas de coordonnées normalisantes ϱ-régulières.*

L'ensemble analytique en question est le lieu commun des zéros des fonctions $D_T^{\nu,\delta}$ correspondant aux couples associés (ν, T) tels que $|\bar{\omega}| < \varrho/2$, et $\delta \in \boldsymbol{Z}^m$; comme $m \geqslant 2$, il existe des vecteurs δ orthogonaux à ν.

Théorème 2. *Supposons $m \geqslant 2$. Il existe un résiduel $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}_{c,Q}$ tel que la forme normale de tout hamiltonien $H \in \mathcal{H}_{c,Q}$ ait un rayon de convergence nul.*

Ce résiduel est l'intersection des Ω_ϱ avec disons $\varrho = 1, \frac{1}{2}, \ldots, 1/n, \ldots$

Observation. On peut mettre à profit l'irrationnalité de c pour construire des couples (ν, T) vérifiant, outre $|\bar{\omega}| < \varrho/2$ ($\varrho > 0$ donné),

$$|\nu - Tc| < \varepsilon .$$

On aura alors $T|\bar{\omega}| < \varepsilon|Q^{-1}|$ donc $T|\bar{\omega}| < A'/2$, A' étant la constante de la proposition 2 du paragraphe 2. Dès lors le tore de retour des angles $p = \psi_T^\nu(q')$ se glisse dans le domaine de convergence uniforme de la série qui représente S. Cela rend concevable de décider sur un jet d'ordre fini de la non ϱ-régularité de $H \in \mathcal{H}_{c,Q}$.

8. – Isolement générique.

Dans ce paragraphe, on ne fait pas d'hypothèses sur c; et comme toujours, Q est supposée inversible.

Proposition. *Soit (ν, T) un couple associé, $\nu \neq 0$. Il existe un ouvert dense $\Omega_T^\nu \subset \mathcal{H}_{c,Q}$ tel que pour $H \in \Omega_T^\nu$, on ait au moins une orbite de période T et d'indice ν, simple.*

Nous fixons (ν, T) pour tout le paragraphe. Nous pouvons considérer le passage de H à R_T^ν comme une application analytique de $\mathcal{H}_{c,Q}$ dans $C^\omega(T^m)$; et nous allons calculer la différentielle de cette application. Autrement dit, nous perturbons H en $H + \Delta H$: S devient $S + \Delta S + O(\Delta H^2)$, ΔS linéaire en ΔH; pareillement R devient $R + \Delta R + O(\Delta H^2)$. (On pourrait d'ailleurs se dispenser des applications analytiques banachiques en considérant des familles d'hamiltoniens à un paramètre). Rappelons (§ 1) que $f(t, p, q)$, $g(t, p, q)$ désignent les coordonnées angle-action du point obtenu à partir du point (p, q) en laissant courir le flot défini par H pendant le temps t.

LEMME 1. $\Delta S(T, p, q') = -\int_0^T \Delta H(f(\tau, p, q), g(\tau, p, q))\, d\tau$, *formule dans laquelle q est défini à partir de T, p et q' par $q' = g(T, p, q)$.*

(On suppose p et T soumis aux conditions $|p| < a$, $T|p|^{5/4} < A$; q est bien déterminé d'après le lemme 1 du § 4).

PREUVE. En linéarisant l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q'}, q'\right) = 0$$

on obtient

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\Delta S + \dfrac{\partial H}{\partial p}\left(\dfrac{\partial S}{\partial q'}, q'\right)\cdot \dfrac{\partial}{\partial q'}\Delta S + \Delta H\left(\dfrac{\partial S}{\partial q'}, q'\right) = 0\,, \\ \Delta S|_{t=0} = 0\,. \end{cases}$$

Considérons ceci comme un problème de Cauchy en les variables t, q', les coordonnées p servant de paramètres. Effectuons le changement de coordonnées $(t, q') \mapsto (\tau, q)$ défini par

$$t = \tau$$

$$q' = g(\tau, p, q)\,.$$

On vérifie aussitôt que

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p}\left(\frac{\partial S}{\partial q'}, q'\right)\cdot\frac{\partial}{\partial q'}$$

et comme par ailleurs

$$\frac{\partial S}{\partial q'}(t, p, q') = f(\tau, p, q')$$

l'intégration est immédiate.

LEMME 2. $\Delta R_T^\nu(q') = -\int^T \Delta H(f(\tau, p, q'), g(\tau, p, q')\, d\tau|_{p=\psi_T^\nu(q')}\,.$

En effet,

$$\Delta R_T^\nu = \Delta S(T, \psi_T^\nu(q'), q') + \frac{\partial S}{\partial p}(T, \psi_T^\nu(q'), q')\cdot\Delta\psi_T^\nu + \nu\cdot\Delta\psi_T^\nu(q')$$

et les deux derniers termes se détruisent d'après l'égalité de définition de ψ_T^ν. Donc,

$$\Delta R_T^\nu(q') = -\int_0^T \Delta H(f(\tau, p, q), g(\tau, p, q)\,d\tau\Big|_{p=\psi_T^\nu(q')}$$

et où q est définie par $q' = g(T, p, q)$. Mais comme $p = \psi_T^\nu(q')$, $q = q'$ d'où la formule.

LEMME 3. *Soit γ un plongement analytique du cercle S^1 dans un espace $\boldsymbol{R}^n$. Il existe $n-1$ fonctions $f_1, \dots, f_{n-1}$ analytiques sur $\boldsymbol{R}^n$, nulles et indépendantes sur γ.*

Une orientation de γ et de $\boldsymbol{R}^n$ permet d'orienter le fibré normal N à γ, et donc de réduire son groupe structural à $SO(n-1, \boldsymbol{R})$. Puisque $\pi_1(BSO(n, \boldsymbol{R})) = 0$, N est trivial; et soit $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$, $n-1$ sections partout indépendantes.

Cherchons maintenant une fonction f_1 nulle sur γ et dont la différentielle soit ξ_1 sur γ. De telles fonctions existent localement, et deux d'entre elles diffèrent par une section locale du faisceau $\mathfrak{F}$ de fonctions nulles et critiques sur γ. Comme les groupes de cohomologie des faisceaux analytiques réels cohérents sont triviaux, on ne peut rencontrer d'obstruction dans la construction de f_1. On peut d'ailleurs exiger en plus l'annulation des f_i à un certain ordre en un certain point hors de γ.

Preuve de la proposition. Soit $H \in \mathcal{H}_{c.Q}$, et a un point de T^m où $R_T^\nu(H)$ atteint son minimum. Soit V une sous-variété de T^m, lisse et éventuellement à bord, de dimension $m-1$, transverse au flot, contenant a; soit γ l'orbite (périodique) de a. Prenons pour perturbation ΔH la fonction

$$\Delta H = -\sum_1^{2m-1} f_i^2$$

où $f_1, \dots, f_{2m-1}$ sont une famille de fonctions appartenant à $\mathfrak{m}^5$, nulles et indépendantes sur γ. Appliquons le lemme 2: il est clair que ΔR sera nulle et minima au point a. Je dis que a est un point de Morse pour $\Delta R|V$. En effet,

$$\mathrm{Hess}''(\Delta R|V) = -\int_0^T (\exp tH)^*[\mathrm{Hess}_{\exp tH(a)}\,\Delta H|_{(\exp tH)^*(T_aV)}]\,dt\,.$$

Considérons à présent la famille d'hamiltoniens $H_\mu = H + \mu \Delta H$, où μ est un paramètre réel > 0 assez petit pour que $H_\mu \in \mathcal{H}_{c,Q}$. Puisque ΔH est critique tout le long de γ, les gradients des H_μ coïncident sur γ qui est une orbite périodique pour eux tous. Toutes les fonctions $R_T^\nu(H_\mu)$ sont donc critiques en a. Considérons la hessienne en restriction à V:

$$\mathrm{Hess}_a\big(R_T^\nu(H_\mu)\big) = \mathrm{Hess}_a\big(R_T^\nu(H)\big) + \mu\, \mathrm{Hess}_a(\Delta R) + O(\mu^2)$$

il est clair qu'elle sera définie positive pour les valeurs de μ assez petites. Pour ces valeurs, γ sera une orbite simple de H_μ (§ 6), et $H_\mu \in \Omega_T^\nu$.

Pour finir, ajoutons que la continuité de $H \mapsto S \mapsto R_T^\nu$ et la stabilité des points de Morse manifestent que l'ensemble Ω_T^ν des $H \in \mathcal{H}_{c,Q}$ tels que $R_T^\nu(H)$ ait au moins un point transversalement de Morse sur T^m, ensemble dont vient de vérifier la densité, est ouvert.

9. – Non-existence des intégrales premières.

THÉORÈME. *Supposons $c_1, \dots, c_m$ indépendants sur $\boldsymbol{Z}$, et Q inversible. Il existe un résiduel $\mathcal{G}' \subset \mathcal{H}_{c,Q}$ tel que si $H \in \mathcal{G}'$, le flot qu'il définit n'admette pas d'intégrale première indépendante de H.*

Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des vecteurs $\nu \in \boldsymbol{Z}^m$ qui se laissent associer à un nombre $T > 0$ (c'est-à-dire $I(\nu) \neq \emptyset$); choisissons pour chaque $\nu \in \mathcal{N}$ une période $T_\nu \in I(\nu)$, et notons pour abréger $R_{T_\nu}^\nu = R^\nu$. Le résiduel $\mathcal{G}'$ sera l'ensemble des hamiltoniens $H \in \mathcal{H}_{c,Q}$ tels que toutes les fonctions $R^\nu(H)$ présentent un point transversalement de Morse (§ 8).

LEMME 1. *Si $H \in \mathcal{H}_{c,Q}$ possède des intégrales premières indépendantes de H, il en possède une, F, dont le développement en série commence par*

$$F = F_0(p_1, \dots, p_m) + \mathfrak{m}^{2l+1}$$

F_0 polynôme homogène de degré l en les p_i, linéairement indépendant de $\left(\sum_1^m c_i p_i\right)^l$.

Soit F une intégrale première, et $F_0(x, y)$ son terme d'ordre minimum. Puisque $[H, F] = 0$, $[H_0, F_0] = 0$ et comme les c_i sont indépendants sur $\boldsymbol{Z}$, on voit aisément que F_0 est un polynôme en les p_i, disons de degré l. Si ce polynôme est indépendant de $(\sum c_i p_i)^l$, la conclusion du lemme est atteinte. Sinon, nous avons $F_0 = a(\sum c_i p_i)^l$, avec une constante a convenable. Formons $F' = F - aH^l$: c'est encore une intégrale première, dont la série commence par un terme d'ordre $2l + 1$ (en fait $2l + 2$), et qui donne lieu à la même alternative. Ou bien, au bout d'un nombre fini de telles opérations, nous vérifions la conclusion du lemme; ou bien le processus court jusqu'à l'infini, et il se forme une série formelle φ d'une variable telle que $F = \varphi(H)$. Mais alors φ est convergente, et F dépendante de H.

LEMME 2. *Pour toute demi-droite $D \subset P_0$, il existe une suite de vecteurs $\nu \in \mathcal{N}$ telle que les vecteurs $\bar{\omega}_\nu \in \boldsymbol{R}^m$ tendent vers* 0 *en ayant D comme direction limite.*

(On a posé $\bar{\omega}_\nu = T_\nu^{-1} Q^{-1}(\nu - T_\nu c)$). Cela résulte de ce que $T_\nu Q \bar{\omega}_\nu$ est un point entier presque quelconque dans QP_0.

Preuve du théorème. Soit $H \in \mathcal{G}'$, et supposons que H admette une integrale première F indépendante de H (*i.e.* qui en soit pas de la forme $\varphi(H)$, avec $\varphi \in \boldsymbol{C}\{H\}$); nous pouvons supposer que le terme du plus bas degré de la série F est $F_0(p_1, \ldots, p_m)$, de degré $2l$, indépendant de $\left(\sum_1^m c_i p_i\right)^l$. Il existe alors un point $p_0 \in P_0$ où $dF_0 \wedge dL \neq 0$ $(L = \sum c_i p_i)$; sur tout un voisinage U de p_0, inclus dans P_0, on aura

$$|dF_0 \wedge dL| > \delta > 0 \, .$$

Comme les coefficients du bivecteur $dF_0 \wedge dL$ (développé sur les $dp_i \wedge dp_j$) sont homogènes de degré $l-1$ en les p_i, on aura, pour p dans le voisinage conique V engendré par U,

$$|dF_0 \wedge dL| > \delta |p|^{l-1} \, . \tag{1}$$

Soit S une suite d'indices $\nu \in \mathcal{N}$ telle que $\bar{\omega}_\nu \to 0$ en admettant $\boldsymbol{R}_+ p^0$ comme direction limite. Pour chaque $\nu \in S$, il existe une orbite périodique d'indice ν, simple; on a sur cette orbite

$$|p| = |\bar{\omega}_\nu| + O(|\bar{\omega}_\nu|^{5/4}) \tag{2}$$

(§ 3, annexe finale); et comme l'orbite est simple, $dF \wedge dH = 0$ dessus (§ 6, prop. 1). D'autre part,

$$|dF \wedge dH - dF_0 \wedge dL| = O(|p|^{l-\frac{1}{4}})$$

donc sur l'orbite

$$|dF_0 \wedge dL| = O(|p|^{l-\frac{1}{4}}) = O(|\bar{\omega}_\nu|^{l-\frac{1}{4}}) = |\bar{\omega}_\nu|^{l-1} O(|\bar{\omega}_\nu|^{\frac{3}{4}}) \, . \tag{3}$$

Mais comme $\bar{\omega}_\nu$ rentre à partir d'un certain rang dans le voisinage conique V, (3) finit par rentrer en contradiction avec (1).

10. – Variantes.

Une première variante consiste à supposer que les angles n'interviennent dans H que par des termes d'ordre $\geqslant 2l+1>5$ en x, y. Elle ne présente pas de difficulté; la condition (ii) d'association devenant

$$|\nu - Tc| < \beta T^{(2l-3)/(2l+1)}\,.$$

Une deuxième variante consiste à travailler en temps discret. On se donne un difféomorphisme symplectique F, défini et analytique au voisinage de O dans $\boldsymbol{R}^{2m}$, qu'on suppose tangent modulo l'ordre 4 à une transformation

$$F_0\colon \begin{cases} p \\ q \end{cases} \mapsto \begin{cases} p' = p\,, \\ q' = q + c + Qp\,, \end{cases}$$

avec $c \in \boldsymbol{R}^m$, et Q une matrice symétrique *non dégénérée*. On s'intéresse aux points périodiques de F dont aucun transformé ne recoupe les axes; on écrit les mêmes conditions d'association qu'au paragraphe 3 (sauf que T est maintenant entier), et le théorème du paragraphe 3 subsiste, avec une preuve identique (sauf que les inégalités différentielles du paragraphe 2 se traitent par différences finies, et que l'équation de Hamilton-Jacobi disparaît). La principale différence avec les flots, c'est qu'en l'absence de fonction énergie, les fonctions séculaires R_T^ν sont libérées de l'équation aux dérivées partielles du lemme 1, § 6; dans cette direction, et un peu en analogie avec le § 9, on devrait pouvoir prouver l'absence générique de fonction invariante par F. (Cette question a été clarifiée récemment par J.-P. Françoise).

Revenons au cas des flots: une troisième variante consiste à paramétrer les orbites périodiques par leur énergie plutôt que leur période. A cette fin, et suivant Poincaré ([2], p. 117 et aussi p. 206) on abandonne l'hypothèse d'inversibilité sur Q, qu'on remplace par la régularité de la matrice $\tilde{Q}$, carrée d'ordre $m+1$,

$$\begin{pmatrix} 0 & c_1 & \cdots & c_m \\ c_1 & & & \\ \vdots & & \boxed{\;Q\;} & \\ c_m & & & \end{pmatrix}$$

(c'est le hessien bordé de H_0). Cette hypothèse a l'effet suivant: l'application

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R} \times P^{m-1}\boldsymbol{R}\,, \\ &p \quad \mapsto H_0(p), \left[\frac{\partial H_0}{\partial p}(p)\right], \end{aligned}$$

est un étalement à l'origine (le [ ] désigne la projection dans l'espace projectif $P^{m-1}\boldsymbol{R}$). Toutefois il est plus commode techniquement de considérer l'application linéaire (inversible):

$$\begin{aligned} \tilde{Q}: \boldsymbol{R} \oplus \boldsymbol{R}^m &\mapsto \boldsymbol{R} \oplus \boldsymbol{R}^m \\ (\tau, p) &\mapsto (c \cdot p, \tau c + Qp)\,. \end{aligned}$$

On formule les conditions d'association entre un niveau d'énergie $E \in \boldsymbol{R}$ et un indice $\nu \in \boldsymbol{R}^m$ comme suit: à partir d'un cône $P_0 \subset\subset \boldsymbol{R}_+^m$ on construit des constantes positives β', β'', γ (uniformes pour $H \in \mathcal{H}_{c,Q}$) et, en termes de la décomposition $\nu = T_0(c + \sigma)$, $T_0 \in \boldsymbol{R}$, $\sigma \in \boldsymbol{R}^m$, $\sigma \perp c$, les conditions s'écrivent:

(i) $(E, \sigma) \in \tilde{Q}^{-1}(\boldsymbol{R} \times P_0)$

(ii) $|\nu||E|^{5/4} < \beta'$, $|\nu||\sigma|^{5/4} < \beta''$

(iii) $|\nu| > \gamma$.

THÉORÈME. *Si E et ν sont associés, il existe m orbites périodiques géométriquement distinctes du système différentiel engendré par $H \in \mathcal{H}_{c,Q}$, d'énergie E, ne coupant pas les axes et d'indice ν par rapport à ceux-ci.*

La preuve doit être modifiée comme suit: E, ν données, on cherche T, p, q' tels que

$$\begin{aligned} \frac{\partial S'}{\partial t}(T, p, q') &= -E\,, \\ \frac{\partial S'}{\partial p}(T, p, q') &= -\nu\,, \\ \frac{\partial S'}{\partial q}(T, p, q') &= 0\,. \end{aligned}$$

La première et les m suivantes équations se résolvent par transversalité comme au § 3 pour donner

$$\begin{cases} T = \theta_E^\nu(q') \\ p = \psi_E^\nu(q')\,. \end{cases}$$

Ensuite de quoi on construit la fonction séculaire modifiée

$$R_E^\nu(q') = S'\big(\theta_E^\nu(q'), \psi_E^\nu(q'), q'\big) + E\theta_E^\nu(q') + \nu\cdot\psi_E^\nu(q')$$

laquelle vérifie

$$\frac{\partial}{\partial q'} R_E^\nu(q') = \frac{\partial S'}{\partial q'}\big(\theta_E^\nu(q'), \psi_E^\nu(q'), q'\big)$$

en pleine analogie avec le § 5.

REFERENCES

[1] C. L. Siegel, *Über die Existenz einer Normalform analytischer Hamiltonscher Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung*, Math. Ann., **128** (1954), pp. 144-170.

[2] H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste*, tome I, Gauthier-Villars, 1892.

[3] J. T. Schwarz, *Non-linear Functional Analysis*, Gordon & Breach, 1969.

[4] C. L. Siegel - J. Moser, *Lectures on Celestial Mechanics*, Ergebn., Springer, 1971.

[5] L. Lusternik - L. Schnirelman, *Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels*, Hermann, 1934.