ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

C. BAIOCCHI

Problèmes à frontière libre en hydraulique : milieux non homogènes

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 5, nº 3 (1978), p. 429-453

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1978_4_5_3_429_0>

Problèmes à frontière libre en hydraulique: milieux non homogènes.

C. BAIOCCHI (*)

dédié à Hans Lewy

Résumé. – *Un problème à frontière libre en hydraulique* [*cf.* (1.4), (1.5), (1.6) *suivantes*] *est ramené, moyennant un changement de fonction inconnue convénable, à un système d'inéquations quasi-variationnelles* [*cf. Probl.* 2.1], *pour lequel on donne un théorème d'existence et de régularité des solutions. Le problème est une généralisation naturelle du problème traité en* [1], *pour lequel on parvenait à une unique inéquation variationnelle. La méthode est analogue à celle employée dans* [1]; *toutefois la transformation du problème à frontière libre en inéquation est ici plus compliquée; pour construire cette transformation on suit le schéma abstrait suggéré dans* [2]; *en Appendice on démontre quelques résultats qui avaient été annoncés dans* [2].

1. – Description du problème.

On considère ici le problème de la filtration d'un liquid à travers un milieux poreux (digue en terre séparant deux bassins d'eau de niveaux différents); on se borne au cas stationnaire, incomprimible, en absence de capillarité et d'évaporation; les parois de la digue sont supposées verticales et la base est supposée horizontale et imperméable; on consultera p. ex. [3] et la relative bibliographie pour une description des problèmes plus généraux que l'on peut traiter par la méthode ici employée.

Le matériau composant la digue sera supposé hysotrope mais non nécessairement homogène; de plus, pour simplifier l'écriture, on va se borner au problème bidimensionnel, l'extension au cas tridimensionnel ne posant aucune difficulté.

(*) Université de Pavie et L.A.N. du C.N.R. de Pavie.
Pervenuto alla Redazione il 16 Giugno 1977.

On choisit unitaire l'épaisseur de la digue, et on note y_0, y_1, y_* les hauteurs des bassins et de la digue respectivement ($0 \leqslant y_1 < y_0 \leqslant y_*$; voir figure); on note aussi $D =]0,1[\times]0, y_*[$ l'intérieur de la digue et Ω la « zone mouillée » de D; finalement on note Γ_l et Γ_e respectivement la « ligne libre » et la « ligne d'émergence » (noter que Ω, Γ_l et le point de raccord entre Γ_l et Γ_e sont inconnus!).

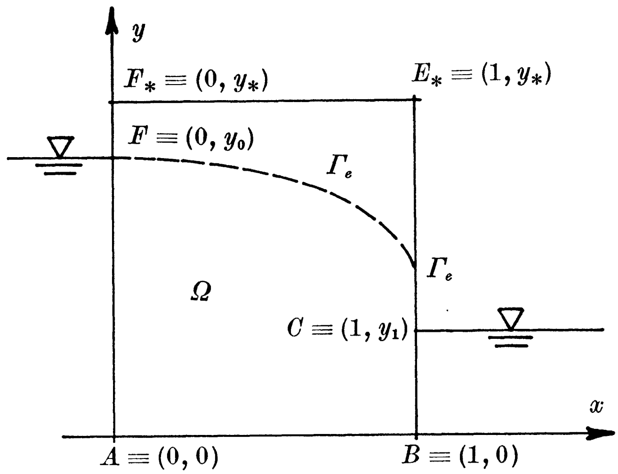

Fig. 1.

REMARQUE 1.1. Dans les cas simples (p. ex. digue homogène) on peut montrer (cf. [1], [2]) que Ω est un sousgraphe, à savoir:

$$(1.1) \qquad \Gamma_l = \{(x, \varphi(x)) | 0 < x < 1\} \;;\; \Omega = \{(x, y) | 0 < x < 1;\, 0 < y < \varphi(x)\}$$

avec φ fonction « régulière »:

(1.2) $x \to \varphi(x)$ *est continue sur* $[0,1]$, *analytique sur* $]0,1[$, *strictement décroissante*; $\varphi(0) = y_0$, $\varphi'(0) = 0$, $\varphi(1) > y_1$, $\varphi'(1) = -\infty$.

Dans le cas général (digue non homogène) les relations (1.1), (1.2) sont toutefois inexactes (cf. [12]) donc on ne va pas les imposer.

En renvoyant à [7], [14] pour une description physique du problème, on se borne ici à rappeler que, suivant la loi de Darcy, le mouvement de l'eau dans la digue est lié à un « potentiel de vitesse » $u(x, y)$:

$$(1.3) \qquad \overrightarrow{vitesse} = -k \operatorname{grad} u \qquad \text{dans } \Omega$$

où le coefficient (*de perméabilité*) $k(x, y)$ dépend du matériau composant D et est constant si la digue est homogène; de toute façon il s'agit d'une quantité positive, que l'on va noter sous forme exponentielle, $k(x, y) = e^{g(x,y)}$; ceci étant, les équations du phénomène sont données par (cf. toujours [7], [14]):

$$\operatorname{div} e^g \operatorname{grad} u = 0 \qquad \textit{dans } \Omega, \tag{1.4}$$

$$u|_{\overline{AF}} = y_0; \qquad u|_{\overline{BC}} = y_1; \qquad u|_{\Gamma_l \cup \Gamma_e} = y, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \textit{ sur } \overline{AB} \textit{ et sur } \Gamma_l \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \textit{ dérivée normale}\right). \tag{1.6}$$

A ces relations on ajoutera un'hypotèse qui physiquement correspond à supposer que *la poussée de l'eau sur un segment du type* $\{(\bar{x}, \bar{y}) | \bar{y} < y < y_*\}$ *soit non négative pour tout* $(\bar{x}, \bar{y}) \in D$; *et soit strictement positive si et seulement si* $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega$; si l'on pose:

$$\tilde{u}(x, y) = \begin{cases} u(x, y) & \textit{pour } (x, y) \in \bar{\Omega}, \\ y & \textit{pour } (x, y) \in \bar{D} \setminus \bar{\Omega}, \end{cases} \tag{1.7}$$

cette hypothèse s'écrit:

$$\int_y^{y_*} e^{g(x,t)} [\tilde{u}(x, t) - t]\, dt \geq 0 \qquad \forall (x, y) \in D, \tag{1.8}$$

$$\Omega = \left\{(x, y) \in D \,\middle|\, \int_y^{y_*} e^{g(x,t)} [\tilde{u}(x, t) - t]\, dt > 0\right\}. \tag{1.9}$$

REMARQUE 1.2. Supposons $g(x, y)$ donné avec:

$$\frac{\partial g}{\partial y} \geq 0 \qquad \textit{dans } D. \tag{1.10}$$

De (1.4), (1.5), (1.6), grâce au principe du maximum, on tire alors:

$$u(x, y) > y \qquad \textit{dans } \Omega \tag{1.11}$$

et donc (1.8) est automatiquement satisfaite; si de plus (1.1) est valable on en déduit aussi la validité de (1.9); dans le cas général, toutefois, la relation (1.11) est inexacte notemment près des points de Γ_l qui délimitent Ω par dessous; on remplace donc (1.11) (1) par (1.8), (1.9) (2).

(1) Qui a elle aussi une interprétation physique: (1.11) dit que la pression dans Ω est plus grande que la pression atmosphérique.

(2) Pour des cas où, sans supposer (1.10), on a toujours la validité de (1.11), (1.1), cf. [6].

REMARQUE 1.3. Le problème (1.4), (1.5), (1.6) est un typique *problème à frontière libre*: sur un ouvert Ω dont la frontière est partiellement inconnue on doit resoudre une équation elliptique avec deux conditions sur la « partie libre » Γ_l de $\partial\Omega$.

On va maintenant donner une formulation précise au problème; pour ce qui concerne le coefficient $g(x, y)$ on supposera (³):

$$g \in C^3(\bar{D}) \tag{1.12}$$

tandis que la fonction $\tilde{u}$ définie dans (1.7) sera cherchée avec:

$$\tilde{u} \in C^0(\bar{D}) \cap H^1(D)\ (^4)\ ; \tag{1.13}$$

et on va formuler le problème en termes de la seule inconnue $\tilde{u}$ (au lieu qu'en termes du couple $\{\Omega, u\}$).

PROBLÈME 1.1. *On cherche $\tilde{u}$ satisfaisant* (1.13), (1.8) *et*

$$\begin{cases} \tilde{u}(x, y_*) = y_* & \text{pour } x \in [0, 1]; \\ \text{pour } i = 0, 1, \quad u(i, y) = y_i \wedge y\ (^5) & \text{pour } y \in [0, y]_*\ , \end{cases} \tag{1.14}$$

telle que, définissant Ω par (1.9), on ait:

$$\tilde{u}(x, y) = y \qquad \forall (x, y) \in \bar{D} \setminus \bar{\Omega}\ ; \tag{1.15}$$

$$\begin{cases} \forall \psi \in C^1(\bar{D}) \text{ nulle dans un voisinage de } x = 0 \text{ et de } x = 1 \text{ on a} \\ \displaystyle\iint_{\Omega} e^g \operatorname{grad} \tilde{u} \operatorname{grad} \psi \, dx\, dy = 0\ . \end{cases} \tag{1.16}$$

REMARQUE 1.4. Le sens de (1.8), (1.14), (1.5) est évident grâce à (1.13); on remarque que (1.14), (1.15) contiennent les conditions de Dirichlet (1.5);

(³) Avec notations usuelles: $C^k(\bar{D})$ est l'espace des fonctions continues sur $\bar{D}$ avec les dérivées jusqu'à l'ordre k continues sur $\bar{D}$.

(⁴) $H^k(D)$ désigne l'espace de Sobolev d'ordre k, i.e.

$$H^k(D) = \left\{ f \in L^2(D) \,\middle|\, \frac{\partial^{\alpha+\beta} f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} \in L^2(D) \text{ pour } \alpha + \beta \leqslant k \right\};$$

les derivées sont toujours prises au sens de distributions.

(⁵) $\alpha \wedge \beta$ désignant le minimum entre α et β.

toujours de (1.13) on a évidemment:

Ω est un sousensemble ouvert de D ;

en particulier (1.16) traduit à la fois (1.4) (au sens des distributions sur Ω) et (1.6) (dans l'usuel sens faible).

REMARQUE 1.5. L'hypothèse (1.12) est souvent trop restrictive; d'ailleurs on contrôle aisément que les résultats qu'on obtiendra restent valables en remplaçant (1.12) par:

$$\left\{\begin{array}{l} g \textit{ est continue par morceaux sur } \bar{D} ; \\ \textit{et } g_{xy} \in C^1(\bar{D}) ; \end{array}\right. \tag{1.17}$$

en particulier rentrent dans ce cadre à la fois le cas de digues « en couches » horizontales ou verticales:

(1.18) *g est constante par rapport à l'une des variables et constante par morceaux par rapport à l'autre*

(cas traité en détail dans [4], [5] (6)) et le cas où l'on a:

$$g(x, y) = g_0(x) + g_1(y) \tag{1.19}$$

(cas traité dans [8] sous des hypothèses de régularité sur g_1, g_2).

REMARQUE 1.6. On a déjà remarqué que (sans supposer (1.10)) (1.11) est en général inexacte; des estimations a priori, telles que p. ex.:

$$0 \leq \tilde{u}(x, y) \leq y_* \qquad \forall (x, y) \in \bar{D} \tag{1.20}$$

sont toutefois toujours satisfaites (principe du maximum).

2. – Transformation du problème et énoncé des résultats.

On introduit les notations:

$$\left\{\begin{array}{l} V = \{v \in L^2(D) | v_y \in L^2(D);\ (e^{-g} v)_x \in L^2(D)\} , \\ V_* = \{v_* \in L^2(0,1) | (e^{-g(x,y_*)} v_*(x))' \in L^2(0,1)\} , \end{array}\right. \tag{2.1}$$

(6) Dans [4] on trouvera aussi le nouveau type de traitement numérique des problèmes à frontière libre que cette méthode a suggéré.

espaces qu'on munira des normes du graphe [7];

$$
(2.2)\quad \begin{cases} Av \;=\; -e^{-g}D_x e^{g} D_x e^{-g} v - D_y e^{-g} D_y v & \forall v \in V\,, \\ Bv \;=\; -e^{-g} D_x \displaystyle\int_0^y g_{xy}(x,t)\, v(x,t)\, dt & \forall v \in L^2(D)\,, \\ g_*(x) = g(x, y_*)\;; \quad A_* v_* = -e^{-g_*} D_x e^{g_*} D_x e^{-g_*} v & \forall v_* \in V_*\,, \end{cases}
$$

$$
(2.3)\quad \begin{cases} K \;=\left\{ v \in V | v(x,0) = 0;\ pour\ i = 0, 1,\ v(i,y) = \displaystyle\int_0^y e^{g(i,t)} (y_i - t)^+ \, dt \right\} \text{(}^8\text{)}\,, \\ K_* = \left\{ v_* \in V_* |\ pour\ i = 0, 1,\ v_*(i) = \displaystyle\int_0^{y_i} e^{g(i,t)} (y_i - t)\, dt \right\}. \end{cases}
$$

REMARQUE 2.1. Sous l'hypothèse (1.12) on n'a pas de difficultés à imposer des valeurs au bord aux éléments de V, V_* (cf. [7]); si seulement (1.17) était remplie on devrait changer un peu: par ex., pour $v_* \in V_*$ c'est $x \to (e^{-g} : v_*)(x)$ qui est continue, et alors on devrait changer la définition de K_* posant:

$$
K_* = \left\{ v_* \in V_* | (e^{-g_*} v_*)(i) = e^{-g_*(i)} \int_0^{y_i} e^{g(i,t)} (y_i - t)\, dt,\ i = 0, 1 \right\};
$$

dorénavant on n'exploitera plus de telles variantes.

Soit maintenant $\tilde{u}$ une solution du problème 1; on définit $z(x, y)$, $z_*(x)$ par

$$
(2.4)\qquad z(x,y) = \int_0^y e^{g(i,t)} [\tilde{u}(x,t) - t]\, dt \qquad \forall (x,y) \in \overline{D}\,,
$$

$$
(2.5)\qquad z_*(x) = \int_0^{y_*} e^{g(x,t)} [\tilde{u}(x,t) - t]\, dt \qquad \forall x \in [0, 1]\,.
$$

THÉORÈME 2.1. *Si $\tilde{u}$ est solution du Problème 1.1, le couple $\{z, z_*\}$ défini*

[7] Sous l'hypothèse (1.12) on a bien entendu $V = H^1(D)$, $V_* = H^1(0, 1)$; toutefois si seulement (1.17) est remplie on n'a plus ces relations et ce sont les espaces V et V_* dont on a bésoin.

[8] Pour $\vartheta \in \boldsymbol{R}$ on pose $\vartheta^+ = (|\vartheta| + \vartheta)/2$.

par (2.4), (2.5) *satisfait*:

$$\text{(2.6)} \qquad \textit{pour tout } r \in]1, +\infty[\textit{ on a } z \in W^{2,r}(D)\,,\ z_* \in W^{2,r}(0,1)\ (^9)\ ;$$

$$\text{(2.7)} \qquad z(x, y_*) = z_*(x) \qquad \forall x \in [0,1]\ ;$$

$$\text{(2.8)} \qquad z \in K\ ;\ z(x,y) \leqslant z_*(x) \qquad \forall (x,y) \in \bar{D}\ ;$$

$$\text{(2.9)} \qquad z_* \in K_*\ ;\ z_*(x) \geqslant 0 \qquad \forall x \in [0,1]\ ;$$

$$\text{(2.10)} \qquad z_y(x, y_*) = 0 \qquad \forall x \in [0,1]\ ;$$

$$\text{(2.11)} \qquad Az + Bz = \chi_\Omega \qquad \textit{p.p. dans } D\ (^{10})\ ;$$

$$\text{(2.12)} \qquad A_* z_* = -(Bz)(x, y_*) \qquad \textit{p.p. dans }]0,1[\ ;$$

de plus Ω, $\tilde{u}$ *sont donnés par*:

$$\text{(2.13)} \qquad \begin{cases} \Omega = \{(x,y) \in D | z(x,y) < z_*(x)\}\ ; \\ u(x,y) = y + e^{g(x,y)} z_y(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \bar{D}\,. \end{cases}$$

Inversement, si $\{z, z_*\}$ *satisfait* (2.6), ..., (2.12), *la formule* (2.13) *donne une solution du Problème* 1.1.

DÉM. On remarque d'abord que la relation (1.16) consiste essentiellement de deux parties: une à l'intérieur, à savoir:

$$\operatorname{div} e^g \operatorname{grad} (\tilde{u} - y) = -D_y e^g \chi_\Omega \qquad \textit{au sens de } \mathcal{D}'(D)$$

l'autre sur les bords $y = 0$ et $y = y_*$, à savoir que la fonction $y \mapsto D_y(u - y) - \chi_\Omega$ possède les traces sur $y = 0$ et $y = y_*$, et que ces traecs sont nulles.

Compte tenu de l'identité ([11]):

$$\text{(2.14)} \qquad D_y e^g (A + B) = -\operatorname{div} e^g \operatorname{grad} e^{-g} D_y$$

([9]) $W^{k,r}(D)$ est l'espace des fonctions de $L^r(D)$ dont les dérivées (distributionnelles) jusqu'à l'ordre k sont dans $L^r(D)$; analoguement est défini $W^{k,r}(0,1)$. D'après les inclusions de Sobolev $z \in C^1(\bar{D})$, $z_* \in C^1 \in ([0,1])$, donc le sens de (2.7) ... (2.10) est évident.

([10]) A, B étant définis dans (2.2); χ_Ω désigne la fonction caractéristique de Ω dans D.

([11]) La validité de (2.14) est immédiate (les opérateurs A, B étant construits exprès pour avoir (2.14)); cf. aussi la Rem. 2.2 suivante et l'Appendice.

on obtient exactement (2.11), (2.12). La partie restante du Théorème est standard et peut être obténue en recopiant la démonstration des théorèmes analogues de [1], [5].

REMARQUE 2.2. Le changement d'inconnues $\{\Omega, u\} \to \{z, z_*\}$ est motivé par l'identité (2.14) suivant le schéma abstrait de [2]; cf. l'Appendice où l'on montre comment se débarrasser, où c'est possible, du terme intégro-différentiel B.

On va maintenant donner une «formulation faible» du problème (2.6), (2.12); pour celà on introduit les formes bilinéaires associées aux opérateurs A, B, A_*:

$$(2.15)\qquad \begin{cases} a(u, v) = \displaystyle\iint_D [e^{-g} u_y v_y + e^g (e^{-g} u)_x (e^{-g} v)_x]\, dx\, dy & \forall u, v \in V\,, \\ b(u, v) = \displaystyle\iint_D \Big(\int_0^y g_{xy}(x, t)\, u(x, t)\, dt\Big)(e^{-g} v)_x\, dx\, dy & \\ & \forall u \in L^2(D)\,,\ \forall v \in V\,, \\ a_*(u_*, v_*) = \displaystyle\int_0^1 e^g (e^{-g} u_*)'(e^{-g} v_*)'\, dx & \forall u_*, v_* \in V_*\,; \end{cases}$$

on pose aussi, pour tout λ réel:

$$(2.16)\qquad a_\lambda(u, v) = a(u, v) + \lambda \iint_D e^{-g} uv\, dx\, dy \qquad \forall u, v \in V$$

(de façon que $a_0 \equiv a$) et:

$$(2.17)\qquad \begin{cases} L_\lambda(f, v) = \displaystyle\iint_D (1 + \lambda e^{-g} f) v\, dx\, dy & \forall f, v \in L^2(D)\,, \\ L_*(f, v_*) = \displaystyle\int_0^1 \big(g_{xy}(x, t) f(x, t)\, dt\big)\big(e^{-g} v_*(x)\big)'\, dx & \\ & \forall f \in L^2(D)\,,\ \forall v_* \in V_*\,. \end{cases}$$

Avec ces notations on considère le problème:

PROBLÈME 2.1. *On cherche un couple* $\{z, z^*\}$ *avec*:

$$(2.18)\qquad z_* \in K_*\,;\ z_*(x) \geq 0 \qquad \textit{p.p. dans }]0, 1[\,;$$

$$(2.19)\qquad z \in K\,;\ z(x, y) \leq z_*(x) \qquad \textit{p.p. dans } D\,;$$

$$(2.20)\qquad \begin{cases} \forall v_* \in K_* \text{ avec } v_*(x) \geqslant 0 \qquad p.p. \text{ dans }]0,1[\text{ on a} \\ a_*(z_*, z_* - v_*) \leqslant L_*(z, z_* - v_*)\,; \end{cases}$$

$$(2.21)\qquad \begin{cases} \forall v \in K \text{ avec } v(x,y) \leqslant z_*(x) \qquad p.p. \text{ dans } D \text{ on a} \\ a_\lambda(z.\, z - v) + b(z, z - v) \leqslant L_\lambda(z, z - v)\,. \end{cases}$$

REMARQUE 2.3. Le problème 2.1 est en fait indépendant de λ, les termes contenant λ dans les deux membres de (2.21) étant identiques; en particulier, pour $\lambda = 0$, (2.21) s'écrit:

$$(2.22)\qquad \begin{cases} \forall v \in K \text{ avec } v(x,y) \leqslant z_*(x) \qquad p.p. \text{ dans } D \text{ on a:} \\ a(z, z - v) + b(z, z - v) \leqslant \iint\limits_D (z - v)\, dx\, dy \end{cases}$$

(et donc le deuxième membre est linéaire en $z - v$).

Par un procédé tout à fait standard on contrôle aisément que (2.6), ..., (2.12) entrainent (2.18), ..., (2.21); le Th. 2.1 donne alors:

THÉORÈME 2.2. *Si $\tilde{u}$ est solution du Problème* 1.1, *le couple* $\{z, z^*\}$ *défini par* (2.4), (2.5) *est solution du Problème* 1.2.

Avant de discuter la possibilité d'inverser ce résultat on va donner quelques commentaires sur le Problème 2.1.

On remarque d'abord que, à z fixé, le problème (2.18), (2.20) est une i.v. (12) en z_*; et que, à z_* fixé, le problème (2.19), (2.21) est une i.v. en z (cf. la Rem. 2.3). Soit d'ailleurs $\mathcal{M}$ l'opérateur qui à tout $z \in K$ associe la solution $z_* = \mathcal{M}z$ de l'i.v. (2.18), (2.20) (13); la «partie à l'intérieur» du problème (2.19), (2.21) peut être exploitée sous la forme (14):

$$(2.23)\qquad z \leqslant \mathcal{M}z\,; \qquad Az + Bz \leqslant 1\,; \qquad Az = Bz = 1 \qquad \text{où } z < \mathcal{M}z$$

et donc on pourrait présenter le Problème 2.1 comme i.q.v. (15) dans la seule inconnue z; en réalité on doit imposer aussi la condition (2.7), et donc on doit étudier un système d'i.q.v.

(12) Inéquation variationnelle. Les i.v. ont été introduites par [20]; pour les liaisons entre i.v. et problèmes à frontière libre cf. [16].

(13) Qui existe unique; cf. le Lemme 3.1 suivant.

(14) Cf. plus loin les formules (2.24), (2.25).

(15) Inéquation quasi variationnelle. Les i.q.v. ont été introduites par [9] pour l'étude de problèmes de contrôle impulsionnel; ici aussi elles traduisent des problèmes à frontière libre.

On remarquera aussi que, dans (2.23), l'opérateur $\mathcal{M}$ « non local » caractéristique des i.q.v. n'est pas monotone; et d'ailleurs l'opérateur $A + B$ ne satisfait pas le principe de maximum, à cause du caractère intégro-différentiel de B. On ne pourra donc pas étudier le Problème 2.1 suivant les tecniques de [9], [21], basées essentiellement sur l'ordre, et on devra s'appuyer, suivant [19], à des propriétés de compacité.

Les résultats qu'on obtiendra (cf. les n. 3 et 4 suivants) sont:

THÉORÈME 2.3. *Le Problème* 2.1 *admet au moins une solution.*

THÉORÈME 2.4. *Toute solution du Probl.* 2.1 *satisfait* (2.6), (2.8), (2.9), (2.10); *de plus on a*:

(2.24) $$Az + Bz \leqslant 1 \qquad p.p. \text{ dans } D\,;$$

(2.25) $$Az + Bz = 1 \qquad \text{dans } \Omega,\ \Omega \text{ défini par } (2.13)\,;$$

(2.26) $$A_* z_* \geqslant -(Bz)(x, y_*) \qquad p.p. \text{ dans }]0,1[\,;$$

(2.27) $$A_* z_* = -(B^* z)(x, y_*) \qquad \text{dans } \{x \in]0,1[\,|z_*(x) > 0\}\,.$$

On voit donc que le passage du Probl. 1.1 au Prob. 2.1 constitue en général une « perte d'information »; d'un côté on n'a pas imposé (2.7); d'autre côté (2.11), (2.13) ont été affaiblies sous la forme (2.24), (2.25); et (2.12) a été remplacée par (2.26), (2.27). On était d'ailleurs forcé de perdre quelques renseignements car on ne pouvait pas (au niveau de formulation du problème en $\{z, z_*\}$), imposer toutes les conditions (2.6), ..., (2.12) à la fois: par exemple on ne peut pas imposer à la fois l'équation (2.12) et l'inégalité (cf. (2.9)) $z_* > 0$; ou l'équation (2.11) et l'inégalité (cf. (2.8)) $z(x, y) \leqslant z_*(x)$; finalement, à $y = Y_*$ on aurait dû imposer à la fois la condition de Dirichlet (cf. (2.7)) et la condition de Neumann (cf. (2.10)).

Puisque, pour le Probl. 2.1, on n'obtiendra pas de Théorème d'unicité, on pourrait penser d'avoir « trop perdu » en passant du Probl. 1.1 au Probl. 2.1; en réalité il n'est pas ainsi; en effet, du moins si (1.10) ou bien (1.19) est remplie, (2.7) *est conséquence de* (2.18), ..., (2.21); plus précisément on démontrera le Théorème:

THÉORÈME 2.5. *Si l'une au moins entre* (1.10), (1.19) [16] *est remplie, toute solution* $\{z, z_*\}$ *du Probl.* 2.1 *vérifie* (2.7), (2.12); *et on a*:

$$z_*(x) > 0 \qquad \forall x \in [0, 1[\,;$$

[16] Si $y_1 > 0$, il suffirait de supposer, seulement que g_{xy} est « suffisamment petite » [au lieu que nulle, comme dans (1.19)].

en particulier il existe $\mathcal{O}$, *voisinage de* $\{(x, 0)|0 < x < 1\}$ *tel que* $\Omega \supset \mathcal{O} \cap D$.

Pour ce qui concerne la validité de (2.11), on remarquera que du Th. 2.4, lorsque (2.7), (2.12) sont remplies, on tire aussi:

$$Az + Bz = \chi_\Omega \qquad p.p.\ dans\ D\setminus\partial\Omega\,;$$

donc (2.11) serait valable si Ω était « régulier ».

Le problème de la régularité de Ω, ainsi que le problème de l'unicité, restent ouverts dans le cas général; on verra à ce propos:

THÉORÈME 2.6. *Si* (1.19) *est valable le Probl.* 2.1 *admet une et une seule solution*; *l'ensemble* Ω *défini dans* (2.13) *est de la forme*:

$$\Omega = \{(x, y) \in D|0 < x < \psi(y)\} \qquad avec\ \psi\ continue\ sur\ [0, y_*]\,;$$

si de plus (1.10) *est remplie, on a* (1.1) *avec* $\varphi \in C^0([0, 1])$ *strictement décroissante et* (1.11) *aussi est remplie.*

3. – Le théorème d'existence.

On garde les notations (2.1), (2.2), (2.3), (2.15), (2.16), (2.17); on pose aussi:

$$K_*^+ = \{v_* \in K_*|v_*(x) \geqslant 0\ p.p.\ dans\ ]0, 1[\} \tag{3.1}$$

et, pour tout $h \in L^2(D)$:

$$K_h = \big\{v \in K|v(x, y) \leqslant h(x, y)\ p.p.\ dans\ D\big\}\,. \tag{3.2}$$

REMARQUE 3.1. K_h peut être vide. Si h est « régulière » (p. ex. si $h \in V$) une condition nécessaire pour que $K_h \neq \emptyset$ est que:

$$\forall v \in K\,, \qquad h - v \geqslant 0 \qquad sur\ \partial D \cap \big\{(x, y)|0 < x < 1\big\}\,. \tag{3.3}$$

On constate aisément que:

$$a_0\ est\ coercitive\ sur\ K - K \tag{3.4}$$

(i.e. $\exists \alpha > 0$ tel que, $\forall u, v \in K$, $a_0(u - v, u - v) \geqslant \alpha\|u - v\|_V^2$); et que:

$$a_*\ est\ coercitive\ sur\ K_* - K_*\,; \tag{3.5}$$

d'ailleurs $\{u, v\} \mapsto b(u, v)$ est continue sur $L^2(D) \times V$; grâce à (3.4) il existera donc λ tel que:

$$\lambda \geqslant 0 \;; \qquad a_\lambda + b \textit{ est coercitive sur } K - K\,. \tag{3.6}$$

REMARQUE 3.2. Dans la suite on supposera fixé λ tel que (3.6) ait lieu. On remarquera que sous l'hypothèse (1.19) on a $b(u, v) \equiv 0$; grâce à (3.4), on peut dans ce cas choisir $\lambda = 0$.

Grâce aux résultats de [18] on a:

LEMME 3.1. *Pour tout $f \in L^2(D)$, le problème en z_*:*

$$z_* \in K_*^+ \;; \qquad \forall v_* \in K_*^+ \,, \; a_*(z_*, z_* - v_*) \leqslant L_*(f, z_* - v_*) \tag{3.7}$$

admet une solution unique; pour tout $h \in L^2(D)$ tel que $K_h \neq \emptyset$ le problème en z:

$$z \in K_h \;; \qquad \forall v \in K_h \,, \; a_\lambda(z, z - v) + b(z, z - v) \leqslant L_\lambda(f, z - v) \tag{3.8}$$

admet une solution unique.

Si l'on dénote par $\mathcal{M}f$ la solution z_* de (3.7) et par $\mathcal{C}_h f$ la solution z de (3.8), on a:

LEMME 3.2. *Si $\{z, z_*\}$ est solution du Probl.* 2.1, *on a:*

$$z_* = \mathcal{M}z \;; \qquad z = \mathcal{C}_{z_*} z \;; \tag{3.9}$$

inversement si z est tel que:

$$z = \mathcal{C}_{\mathcal{M}z} z \tag{3.10}$$

le couple $\{z, \mathcal{M}z\}$ résoud le Probl. 2.1.

DÉM. Il suffit de remarquer que (3.8) avec $f = f$, $h(x, y) \equiv z_*(x)$, équivaut à (2.19), (2.21) et que (3.7) avec $f = z$ équivaut à (2.18), (2.20).

On pose maintenant:

$$\begin{cases} \mathcal{V} = \{v \in L^2(D) | v_y \in L^2(D);\; v(x, 0) = 0\} \,, \\ \mathcal{K} = \{v \in \mathcal{V} | -y \leqslant e^{-g} v_y \leqslant y_* - y \;\; p.p. \textit{ dans } D\} \,, \end{cases} \tag{3.11}$$

et on va démontrer le Théorème:

THÉORÈME 3.1. *L'application* $f \to \mathcal{C}_{\mathcal{M}_f} f$ *admet un point fixe dans* $\mathcal{K}$.

Avant de démontrer le Théorème, on remarquera que, grâce au Lemme 3.2, le Th. 3.1 implique le Th. 2.2; de plus il donne l'existence d'une solution z telle que, $\tilde{u}$ étant définie par (2.14), la relation (1.20) est remplie; en réalité on verra (cf. Th. 4.1 suivant) que *toute solution* du Probl. 2.1 est telle que $z \in \mathcal{K}$; de plus, si (2.23) est remplie, on a l'équivalent de (1.11), à savoir $z \in \mathcal{K}_+$, où:

$$\mathcal{K}^+ = \{v \in \mathcal{K} | v_y \geqslant 0\} . \tag{3.12}$$

Pour la démonstration du Th. 3.1 on se servira des Lemmes suivantes:

LEMME 3.3. *L'opérateur* $f \to \mathcal{C}_{\mathcal{M}_f} f$ *est partout défini dans* $\mathcal{V}$, *et continû de* $\mathcal{V}$ *dans* $\mathcal{V}$ *par rapport à la topologie faible.*

LEMME 3.4. *Si* $f \in \mathcal{K}$ *on a* $\mathcal{C}_{\mathcal{M}_f} f \in \mathcal{K}$.

L'ensemble $\mathcal{K}$ étant convexe fermé borné non vide dans l'espace de Hilbert $\mathcal{V}$, le Th. 3.1 en résulte, grâce au Théorème de point fixe de Dakutani-Schauder (cf. p. ex. [11]).

Pour la démonstration du Lemme 3.4 on fera usage du résultat suivant ([17]):

LEMME 3.5. *Soit* $p \geqslant 2$. *Pour tout* f, h *avec*:

$$f \in L^p(D) \; ; \qquad h \in W^{2,p}(D) \; ; \qquad h_y(x, y_*) \geqslant 0 \; ; \qquad K_h \neq \emptyset \tag{3.13}$$

la solution z *de* (3.8) *satisfait*:

$$z \in W^{2,p}(D) \; ; \qquad z_y(x, y_*) = 0 \qquad \forall x \in [0, 1] \; ; \tag{3.14}$$

de plus on a ([18]):

$$Az + Bz + \lambda e^{-g} z = 1 + \lambda e^{-g} f \;\; \textit{dans} \;\; \{(x, y) \in D | z(x, y) < h(x, y)\} . \tag{3.15}$$

REMARQUE 3.3. En général le problème (3.8) impose sur $\{(x, y_*) | 0 < < x < 1\}$ une condition de type « ambigüe » (ou « de type de Signorini ») à savoir, formellement, $z(x, y_*)$ satisfait:

$$z(x, y_*) \leqslant h(x, y_*) \; ; \; z_y(x, y_*) \leqslant 0 \; ; \; z_y(x, y_*) = 0 \;\; \textit{où} \;\; z(x, y_*) < h(x, y_*) . \tag{3.16}$$

([17]) Le Lemme 3.5 nous servira uniquement avec $h_y(x, y) \equiv 0$; toutefois le résultat nous semble intéressant en soi; cf. la Rem. 3.3 suivante.

([18]) L'ensemble consideré dans (3.15) est ouvert, grâce à (3.13), (3.14).

Les deux conditions de (3.14) sont alors l'une conséquence de l'autre: en effet, si z était régulier, on pourrait justifier (3.16); et en déduire, par une simple réduction à l'absurde, que $z_y(x, y_*) \equiv 0$ ([19]); inversement si $z_y(x, y_*) \equiv 0$, grâce au conditions de Dirichlet contenues en $z \in K$ ([20]), le théorème de régularité (cf. [10], [16], [19]) entrainerait $z \in W^{2,p}(D)$.

Malheureusement on ne peut pas « séparer » les conditions de (3.14), et il faut les obtenir les deux à la fois; c'est ce qu'on fera, en adaptant la tecnique de [10] et en se bornant à indiquer les modifications réquises par le terme $b(u, v)$ (qui ne permet pas d'appliquer directement le principe de maximum).

DÉM. DU LEMME 3.5. On suppose d'abord:

$$f \in C^0(\overline{D}) \; ; \qquad h \in C^2(\overline{D}) . \tag{3.17}$$

Pour $n = 1, 2, \ldots,$ on considère le problème en z_n:

$$\begin{gathered} z_n \in K \; ; \qquad \forall v \in K \;\; \textit{on a}: \\ a_\lambda(z_n, z_n - v) + b(z_n, z_n - v) + \\ + n \iint_D (z_n - h)^+ \, dx\, dy \leqslant n \iint_D (v - h)^+ \, dx\, dy + L_\lambda(f, z_n - v) . \end{gathered} \tag{3.18}$$

Grâce à (3.6), et la fonction $v \to n \iint_D (v - h)^+ dx\, dy$ étant convexe continue sur V, le problème (3.18) admet une solution z_n unique; de plus, moyennant des techniques standard (choix convénable de v dans (3.18)) on trouve:

$$1 + \lambda e^{-g} f \geqslant A z_n + B z_n + \lambda e^{-g} z_n \geqslant 1 + \lambda e^{-g} f - n \;\text{([21])} , \tag{3.19}$$

$$D_y z_n(x, y_*) = 0 \qquad \textit{dans }]0, 1[\, . \tag{3.20}$$

([19]) Par l'absurde, d'après (3.16) il existerait $\bar{x} \in]0, 1[$ avec $z_y(\bar{x}, y_*) < 0$ et $z(\bar{x}, y_*) = h(\bar{x}, y_*)$. De $z(\bar{x}, y) < h(\bar{x}, y)$, passant à la limite sur les quotients différentiels, on trouve $(D_y(z - h))(\bar{x}, y_*) \geqslant 0$; donc $0 > z_y(\bar{x}, y_*) \geqslant h_y(\bar{x}, y_*)$ ce qui contredit (3.13).

([20]) On remarquera que les données de Neumann $[z_y(x, y_*) = 0]$ et de Dirichlet $[z \in K]$ sont « compatibles » près des points $(0, y_*)$ et $(1, y_*)$.

([21]) (3.19) est obtenue d'abord au sens de $\mathfrak{D}'(D)$; donc elle entraine $Az_n + Bz_n + \lambda^{-g} z_n \in L^\infty(D)$, et (3.19) est valable p.p. dans D. En particulier on a aussi $Az_n \in L^2(D)$, donc la trâce de $D_y z_n$ sur $\{y = y_*\}$ existe dans $(H^{\frac{1}{2}}_{00}(0,1))'$ (cf. [17]), ce qui donne un sens à (3.10).

De $Az_n \in L^2(D)$ (relation contenu dans (3.19); cf. ([21]) pag. préc.), et de $z_n \in K$ et (3.10) on tire $z_n \in H^2(D)$ (grâce aux théorèmes de régularité jusqu'au bord des solutions de problèmes elliptiques; pour ce qui concerne les coins sur ∂D cf. [13] et ce qu'on a dit dans ([20]) page préc.).

Grâce au caractère régularisant de B, de $z_n \in H^2(D)$ et de (3.19) on tire $Az_n \in L^r(D)$, $\forall r < +\infty$; d'où (en répetant le raisonnement qui a donné $z_n \in H^2(D)$) $z_n \in W^{2,r}(D)$, $\forall r < +\infty$; et, avec C_r qui peut dépendre de r, f, h, mais non de n:

$$\|z_n\|_{W^{2,r}(D)} \leqslant C_r\{1 + \|(A + \lambda e^{-g}) z_n\|_{L^r(D)}\} \leqslant C_r\{1 + n + \|Bz_n\|_{L^r(D)}\} . \tag{3.21}$$

De (3.6), (3.18) on tire aussi aisément:

$$\|z_n\|^2_{H^1(D)} \leqslant C\{1 + n\} \tag{3.22}$$

ce qui, joint à (3.21), et grâce au caractère régularisant de B donne:

$$\|z\|_{W^{2,r}(D)} \leqslant C(1 + n)$$

d'où, encore grâce à (3.22) et moyennant une inégalité d'interpolation ([22]):

$$\exists \sigma > 0 \ , \ C_\sigma \ \textit{tels que} \ \|z_n\|_{C^1(\bar{D})} \leqslant C_\sigma\{1 + n^{1-\sigma}\} . \tag{3.23}$$

On pose maintenant:

$$\begin{cases} \Omega_n^+ = \{(x, y) \in D | z_n(x, y) > h(x, y)\} , \\ \Omega_n^- = \{(x, y) \in D | z_n(x, y) < h(x, y)\} . \end{cases} \tag{3.24}$$

(il s'agit d'ensembles ouverts grâce à (3.17) et $z_n \in W^{2,r}(D)$); choisissant dans (3.18) v de la forme $z_n + \mu\psi$ avec $\psi \in \mathcal{D}(D)$, supp $\psi \subset \Omega_n^\pm$, $|\mu|$ suffisamment petit, on obtient:

$$Az_n + Bz_n + \lambda e^{-g} z_n = 1 + \lambda z^{-g} f \qquad \textit{dans } \Omega_n^- , \tag{3.25}$$

$$Az_n + Bz_n + \lambda e^{-g} z_n = 1 + \lambda e^{-g} g - n \qquad \textit{dans } \Omega_n^+ . \tag{3.26}$$

De (3.26), (3.17), (3.23), on tire, pour n suffisamment grand:

$$(A + \lambda e^{-g})(z_n - h) \leqslant 0 \qquad \textit{où } z_n - h > 0 ;$$

([22]) A savoir il suffit de trouver un espace d'interpolation entre $H^1(D)$ et $W^{2,r}(D)$ qui soit contenu dans $C^1(\bar{D})$; r étant arbitraire de tels espaces existent.

le principe de Hopf entraîne alors que $\Omega_n^+ = \emptyset$, grâce à (3.10), (3.13) (cf. aussi (3.3)). On a donc démontré que, pour n suffisamment grand, $z_n \leqslant h$, donc $z_n \in K_h$; choisissant dans (3.18) $v \in K_h$ les termes en n disparaissent et donc z_n satisfait (3.8); à savoir la solution z de (3.8) coïncide, pour n grand, avec la solution z_n de (3.18); donc, sous l'hypothèse (3.16), le Lemme 3.5 est démontré (on a vu que $z_n \in W^{2,r}(D)$, $\forall r < +\infty$ et que (3.20) est remplie; d'où (3.14); la relation (3.15) est donnée, pour n grand, par (3.25)).

On reprend maintenant (3.8), toujours sous l'hypothèse (3.16), et on applique l'inégalité de Lewy-Stampacchia après avoir passé le terme $b(z, z-v)$ au deuxième membre:

$$[(A + \lambda e^{-g})h - 1 - \lambda e^{-g} f - Bz] \wedge 0 \leqslant (A + \lambda e^{-g}) z \leqslant 1 + \lambda e^{-g} f - Bz$$

d'où évidemment, quel que soit p:

$$\|(A + \lambda e^{g}) z\|_{L^p(D)} \leqslant C_p \{1 + \|f\|_{L^p(D)} + \|h\|_{W^{2,p}(D)} + \|Bz\|_{L^p(D)}\}$$

avec C_p indépendente de f, h; d'où, grâce à $z \in K$ et (3.14):

$$\|z\|_{W^{2,p}(D)} \leqslant C_p \{1 + \|f\|_{L^p(D)} + \|h\|_{W^{2,p}(D)} + \|Bz\|_{L^p(D)}\} .$$

D'ici (grâce au caractère régularisant de B, et puisque de (3.8), (3.6) on a que

$$\|z\|_{H^1(D)} \leqslant C\{1 + \|f\|_{L^2(D)} + \|h\|_{H^1(D)}\})$$

on déduit

$$\|z\|_{W^{2,p}(D)} \leqslant C_p \{1 + \|f\|_{L^p(D)} + \|h\|_{W^{2,p}(D)}\}$$

ce qui permet de se débarasser de l'hypothèse (3.16), en obtenant ainsi le Lemme 3.5 en général.

DÉM. DU LEMME 3.3. Posons, pour $(x, y) \in \overline{D}$:

$$\bar{z}(x, y) = (1 - x)\int_0^y e(y_0 - t)^+ dt + x\int_0^y e(y_1 - t)^+ dt \,;$$

Pour tout $v_* \in K_*^+$, posant $\bar{v}(x, y) = \bar{z}(x, y) \wedge v_*(x)$ on contrôle aisément que $\bar{v} \in K$, et évidemment $\bar{v}(x, y) \leqslant v_*(x)$; donc si $h(x, y) \equiv \partial_n(x)$, avec $v_* \in K_*^+$, on a $\bar{v} \in K_h$, en particulier $K_h \neq \emptyset$. Ceci implique que $f \to \mathcal{C}_{\mathcal{M}f} f$ est partout définie; les propriétés de continuité de $f \to \mathcal{M}f$, $h \to \mathcal{C}_h f$, $f \to \mathcal{C}_h f$ étant standard le Lemme 3.3 en résulte.

DÉM. DU LEMME 3.4. Soit $f \in \mathfrak{V}$; et soyent z_* la solution de (3.7), z la solution de (3.8) avec $h(z, y) \equiv z_*(x)$; on a (grâce à $z \in K_h$)

(3.27) $$z(x, y) \leqslant z_*(x)$$

et aussi:

(3.28) $$Az + Bz + \lambda e^{-g} z = 1 + \lambda e^{-g} f \qquad \text{où } z(x, y) < z_*(x)$$

(cf. (3.15); le Lemme 3.5 peut être appliqué avec $p = 2$; d'ailleurs il suffit de supposer d'abord $f \in C^1(\bar{D})$ et démontrer le Lemme 3.4 sous cette hypothèse; en particulier on peut supposer $z \in C^1(\bar{D})$ grâce à (3.14)). On pose:

(3.29) $$\delta(x, y) = y + e^{-g(x,y)} z_y(x, y) \ ; \qquad \omega = \{(x, y) \in D | \delta(x, y) < 0\} \ .$$

Dans ω on a $z_y(x, y) < 0$, donc $y \to z(x, y) - z_*(x)$ décroit; grâce à (3.27) dans ω on a $z(x, y) < z^*(x)$, et alors de (3.28) on tire [23]:

(3.30) $$-\operatorname{div} e^g \operatorname{grad} \delta + \lambda e^{+g} \delta = \lambda^{+g}[y + e^{-g} f_y] \qquad \text{dans } \omega$$

grâce à $f \in \mathcal{K}$ le principe de maximum assure que δ prend son minimum sur ∂D; mais $\delta \geqslant 0$ sur $\partial D \setminus \{(x, 0) | 0 < x < 1\}$ (grâce à $z \in K$ et (3.14)) tandis que sur $\{(x, 0) | 0 < x < 1\}$ de (3.28) on déduirait $D_y \delta = 0$. Le principe de Hopf, assûre donc que $\omega = \emptyset$, à savoir $e^{-g(x,y)} z_y(x, y) \geqslant - y$ dans D. Analoguement on montre que $e^{-g(x,y)} z_y(x, y) \leqslant y_* - y$, et le Lemme 3.4 en résulte.

REMARQUE 3.4. Supposons (1.10) remplie; avec la notation (3.12) il est facile de voir que, pour $f \in \mathcal{K}^+$, $\mathcal{T}_{\mathcal{M},f} f \in \mathcal{K}^+$. Il suffit de modifier la démonstration précédente en remplaçant (3.29) par:

(3.31) $$\delta(x, y) = e^{-g(x,y)} z_y(x, y) \ ; \qquad \omega = \{(x, y) \in D | \delta(x, y) < \omega\}$$

et on obtiendra, au lieu que (3.30):

(3.32) $$-\operatorname{div} e^g \operatorname{grad} \delta = \lambda e^g \delta = \lambda e^g f_y + D_y e^g \qquad \text{dans } \omega$$

d'où l'on continue comme auparavant en minorant le terme $D_y e^g$ par 0 (c'est loisible, grâce à (1.10)).

[23] Il suffit de prendre $D_y e^g$ des deux membres de (3.28); et d'appliquer l'identité (2.14).

4. – Régularité et propriétés ultérieures.

Soit $\{z, z_*\}$ une solution du Probl. 2.1. On a les implications:

$$(4.1) \qquad z \in H^1(D) \Rightarrow Bz\,,\; D_y Bz \in L^2(D) \Rightarrow (Bz)(x, y_*) \in L^2(0,1) \Rightarrow z_* \in H^2(0,1)\,,$$

la dernière implication suivant du Théorème de régularité de [21] après avoir remarqué que

$$L_*(z, z_* - v_*) = -\int_0^1 (Bz)(x, y_*)[z_*(x) - v_*(x)]\,dx\,.$$

Analoguement, grâce à $H^1(D) \subset L^r(D)$, $\forall r$ fini, on a:

$$(4.2) \qquad \begin{cases} z \in H^2(D) \Rightarrow Bz\,,\; D_y Bz \in L^r(D)\,, \\ \forall r < +\infty \Rightarrow (Bz)(x, y_*) \in L^r(0,1)\,, \\ \forall r < +\infty \Rightarrow z_* \in W^2(0,1)\,,\; \forall r < +\infty\,. \end{cases}$$

D'ailleurs le Lemme 3.5 avec $h(x, y) \equiv z_*(x)$ donne les implications:

$$(4.3) \qquad z_* \in H^2(0,1) \Rightarrow z \in H^2(D)\,,$$

$$(4.4) \qquad z_* \in W^{2,r}(0,1)\,,\; \forall r < +\infty \Rightarrow z \in W^{2,r}(D)\,,\; \forall r < +\infty$$

donc (la relation $z \in H^1(D)$ étant vraie, car $z \in K$) la chaine (4.1), (4.3), (4.2), (4.4) montre que toute solution du Probl. 2.1 satisfait (2.6). La validité de (2.8), (2.9) étant évidente, et (2.10) suivant encore du Lemme 3.5, la démonstration du Th. 3.4 se réduit au contrôle de (2.24), ..., (2.27); et ceci se fait comme d'habétude par un choix convénable des fonctions v, v_* dans (2.20), (2.21); le Th. 2.4 est donc complètement démontré.

Repétant maintenant les raisonnements développés dans la démonstration du Lemme 3.4 et dans la Rem. 3.4 on obtient:

THÉORÈME 4.1. *Toute solution $\{z, z_*\}$ du Probl. 2.1 est telle que:*

$$(4.5) \qquad -y \leqslant e^{-g(x,y)} z_y(x, y) \leqslant y_* - y \qquad \forall (x, y) \in \bar{D}\,;$$

de plus, si (1.10) *est remplie, on a:*

$$(4.6) \qquad z_y(x, y) \geqslant 0 \qquad \forall (x, y) \in \bar{D}\,;$$

en particulier l'ensemble Ω défini dans (2.13) *est de la forme* (1.1) ([24]).

([24]) φ ne vérifiant pas nécessairement (1.2); la propriété est immédiate grâce à la définition de Ω [cf. (2.13)] et à (2.8), (4.6).

Pour la démonstration du Th. 2.5 on se servira des deux problèmes auxiliaires suivants:

$$\bar{z}(0) = \bar{z}(1) = 0\ ; \qquad A_* \bar{z} = -(Bz)(x, y_*)\ , \tag{4.7}$$

$$z_0 \in K_*\ ; \qquad A_* z_0 = 0\ , \tag{4.8}$$

(existence, unicité er régularité de $\bar{z}$, z_0 sont immédiates); et on va donner des estimations en fonction de deux constantes M, N telles que:

$$|g(x, y)| \leqslant M\ ; \qquad |g_{xy}(x, y)| \leqslant N\ . \tag{4.9}$$

LEMME 4.1. *Sous l'hypothèse* (4.9) *on a*:

$$|e^{-g_*} \bar{z}(x)| \leqslant e y N \qquad \forall x \in [0, 1]\ , \tag{4.10}$$

$$|e^{-g_*} z_0(x)| \geqslant e^{-2M} \frac{y_1^2}{2} \qquad \forall x \in [0, 1]\ , \quad \textit{avec inégalité stricte sur } [0, 1[\ . \tag{4.11}$$

DÉM. On a, grâce à (4.7):

$$a^*(\bar{z}, \bar{z}) = -\int_0^1 \left(\int_0^{y_*} g_{xy}(x, t)\, z(x, t)\, dt \right) (e^{-g_*} \bar{z})'\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_0^1 |(e^{-g_*} \bar{z})'|^2 e^{g_*}\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 e^{-g_*} \left(\int_0^{y_*} g_{xy}\, z\, dt \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant (a_*(\bar{z}, \bar{z}))^{\frac{1}{2}} \left(e^M y_*^2 N^2 \|z\|^{L^\infty(D)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

d'où $\Big($en simplifiant et remarquant que (grâce à $z(x, 0) = 0$ et à $|z_y(x, y)| \leqslant$ $\leqslant y_*$; cf. (4.5))

$$\left. |z(x, y)| \leqslant \int_0^y |z_y(x, t)|\, dt \leqslant y_*^2 \right) \qquad a_*(\bar{z}, \bar{z}) \leqslant e^M y_*^6 N^2\ .$$

Il suffit maintenant d'appliquer l'inégalité standard suivante pour avoir (4.10) ([25]):

$$|e^{-g_*} \bar{z}(x)| = \left| \int_0^x (e^{-g_*} \bar{z})'(\xi)\, d\xi \right| \leqslant e^{M/2} |e^{g_*/2} (e^{-g_*} \bar{z})'|\, d\xi \leqslant$$
$$\leqslant e^{M/2} \left(\int_0^1 e^{g_*} |(e^{-g_*} \bar{z})^1|^2\, d\xi \right) = e^{M/2} (a_*(\bar{z}, \bar{z}))^{\frac{1}{2}}\ .$$

([25]) Dans tout le Lemme on n'a pas cherché « les meilleures constantes possibles »; d'ailleurs on a développé les calculs de façon à les rendre valables en supposant que seulement (1.17) est remplies.

Pour ce qui concerne z_0, le principe du maximum donne (voir la définition de K_*):

$$e^{-g_*(x)} z z_0(x) \geqslant \left(e^{-g_*} z(0)\right) \wedge \left(e^{-g_*(1)} z_0(1)\right) \geqslant e^{-M} \int_0^{y_1} e(y_1 - t)\, dt$$

d'où l'inégalité large de (4.11); l'inégalité est stricte pour $x = 0$ (grâce à $y_0 > y_1$) donc elle doit être stricte aussi dans $[0, 1[$.

COROLLAIRE 4.1. *Sous l'hypothèse* (4.9) *on a*:

$$e^{-g_*} z_*(x) > e^{-2M} \frac{y_1^2}{2} - e^M y_*^3 N \qquad \forall x \in]0, 1[\,. \tag{4.12}$$

DÉM. Il suffit de remarquer que, grâce à (2.26), $A_* z_* \geqslant A_*(\bar{z} + z_0)$; puisque $z_* - (\bar{z} + z_0)$ s'annulle en $x = 0$, $x = 1$, on en tire $z_* \geqslant \bar{z} + z_0$, d'où (4.12) grâce à (4.10), (4.11).

LEMME 4.2. *Si l'une au moins des relations*:

$$z_*(x) > 0 \qquad \forall x \in]0, 1[\,, \tag{4.13}$$

$$z(x, y_*) \geqslant 0 \qquad \forall x \in]0, 1[\,, \tag{4.14}$$

est remplie, on a nécessairement (2.7).

DÉM. Si (2.7) était inexacte l'ouvert $\{x \in]0, 1[\,|\, z(x, y_*) < z_*(x)\}$ serait non vide (car $z(x, y_*) \leqslant z_*(x)$); pour $]\alpha, \beta[$ composante connexe de cet ouvert on a:

$$\begin{cases} 0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1 \; ; \qquad z(\alpha, y_*) = z_*(\alpha) \text{ (}^{26}\text{)} \; ; \qquad z(\beta, y_*) = z_*(\beta) \; ; \\ z(x, y_*) < z_*(x) \qquad \forall x \in]\alpha, \beta[\; ; \end{cases} \tag{4.15}$$

Dans un voisinage (en D) de $\{(x, y_*) | \alpha < x < \beta\}$ on peut appliquer les inégalités (2.25) (car $z < z_*$) et (2.27) (car $z_* > 0$; c'est vrai si (4.13) est remplie; et si (4.14) est remplie suit de $z < z_*$); on en déduit [27]:

$$\begin{aligned} A_*\left(z(x, y_*) - z_*(x)\right) &= \left(Az + D_y e^{-g} D_y z\right)\big|_{y = y_*} - A_* z_* = \\ &= \left(1 - Bz + D_y e^{-g} D_y z\right)\big|_{y = y_*} - (-Bz)\big|_{y = y_*} = \left(D_y(e^{-g} D_y z + y)\right)\big|_{y = y_*} \geqslant 0 \end{aligned}$$

[26] Si $\alpha = 0$ suit de $z \in K$, $z_* \in K_*$; si $\alpha > 0$ suit de la définition de $]\alpha, \beta[$ et de la continuité de $z(x, y_*)$ et $z_*(x)$. Analoguement pour la proprieté en β.

[27] L'égalité (2.25) et la condition aux limites (2.10) sont suffisantes à justifier ces passages.

car $e^{-g}D_y z + y$ prend son maximum pour $y = y_*$ (cf. (2.10) et (4.5)). La relation obtenue, grâce au principe de maximum, contradit (4.15).

DÉM. DU TH. 2.5. Soit d'abord remplie (1.19).

On peut alors choisir dans (4.9) $N = 0$; de (4.12) on tire alors (4.13), qui donne (2.7) (grâce au Lemme 4.2) et (2.12) (grâce à (2.27)).

Soit maintenant remplie (1.10); de $z \in K$ (qui entraîne $z(x, 0) = 0$) et de (4.6) on déduit (4.14), d'où (2.7) (grâce au Lemme 4.2). Pour montrer (4.13) (qui entraînera (2.12), grâce à (2.27)) on pose:

$$f(x) = e^{g_*(x)} D_x e^{-g_*(x)} z_*(x) + \int_0^{y_*} g_{xy}(x, t)\, z(x, t)\, dt \qquad \forall x \in [0, 1]$$

et on va montrer dans un moment que:

$$(4.16) \quad \begin{cases} f \in W^{1,r}(0,1) \quad \forall r < +\infty\,; \quad f'(x) \leqslant 0 \quad \textit{p.p. dans }]0,1[\,; \\ \forall x \in]0,1[\quad \textit{on a } \{z_*(x) > 0 \Rightarrow f'(x) = 0\} \textit{ et } \{z_*(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0\}\,. \end{cases}$$

De (4.16) on tire (4.13) (sinon, si z_* s'annullait quelque part dans $]0, 1[$, serait $z_* \equiv 0$ dans $]0, 1[$, ce qui contredit $z_* \in K$, $y_0 > 0$) et le Théorème sera démontré.

Les trois premières relations de (4.16) suivent de (2.6), (2.26), (2.27); la dernière est immédiate car les zéros de z_* sont du deuxième ordre ([28]) et $z_*(x_0) = 0$ entraîne $z(x_0, y) \equiv 0$ grâce à (2.8), $z(x_0, 0) = 0$ et (4.6).

REMARQUE 5.1. Supposons $g(x, y)$ donné en fonction d'un paramètre sous la forme:

$$g_\varepsilon(x, y) = h_0(x) + h_1(y) + \varepsilon h_2(x, y)\,;$$

avec notations évidentes on pourra choisir, dans (4.9), $M = M_0 + M_1 + |\varepsilon| M_2$; $N = |\varepsilon| N_2$; donc, quitte à choisir $|\varepsilon|$ suffisamment petit, si $y_1 > 0$, de (4.12) on tire encore (4.13); ceci complète ce qu'on a dit dans la note en bas de page relative au Th. 2.5. On peut d'ailleurs renverser ce point de vue: supposant g fixée, chercher y_0, y_1 tels que l'on ait (4.13); toujours de (4.12), dans laquelle on fixera par example $y_* = y_0$, on voit que (4.13) est remplie si $(y_0, y_1) \in \{(s, t) | 0 < t < s;\ s > (2Ne^{3M} t^3)^{\frac{1}{4}}\}$.

DÉM. DU TH. 2.6. Soit donc g de la forme $g(x, y) = g_0(x) + g_1(y)$; faisaint suite à la Rem. 3.2 on constate aisément que le problème (2.18), (2.20)

([28]) i.e. $z_*(x_0) = 0 \Rightarrow z'_*(x_0) = 0$.

est indépendent de z (la solution z_* coïncide avec $\bar{z}$ solution de (4.7)); et que z_* étant ainsi fixé, le problème (2.19), (2.20) admet une solution unique. Ceci donne l'unicité de $\{z, z_*\}$; la partie restante du Théorème est conséquence de résultats de [6], où l'on a fait usage, au lieu que de $\{z, z_*\}$ défini par (2.4), (2.5), de la fonction

$$w(x, y) \geqslant \int_0^y e^{g_1(t)}[\tilde{u}(x, t) - t]\, dt\,.$$

Appendice.

Ou a vu dans la démonstration du Th. 2.1 que la relation (1.16) entraînait:

$$\text{(A.1)} \qquad \operatorname{div} e^g \operatorname{grad}(u - y) = -D_y e^g \chi_\Omega$$

et c'est la présence de l'opérateur D_y au deuxième membre de (A.1) qui interdit la présentation directe (i.e. sans passer par le couple $\{z, z_*\}$) du Problème 1.1 sous la forme d'inéquation variationnelle.

Suivant le schéma abstrait de [2], on doit donc chercher un opérateur différentiel Q et un opérateur (si possible différentiel, et si non pseudo-differentiel) R, tels que

$$\text{(A.2)} \qquad \operatorname{div} e^g \operatorname{grad} Q = -D_y e^g R\,;$$

ensuite on cherchera une solution $\mathcal{U}$ de

$$\text{(A.3)} \qquad R\mathcal{U} = \chi_\Omega$$

et posant

$$\text{(A.4)} \qquad \tilde{u} = y + Q\mathcal{U}$$

on obtiendra une solution de (A.1). Le choix qu'on a fait ici correspond en fait à:

$$\text{(A.5)} \qquad R = A + B\,; \qquad Q = e^{-g} D_y$$

(avec les notations (2.2)); la relation (A.2) devient dans ce cas (2.14).

On va maintenant discuter la solvabilité de (A.2) dans les inconnues Q, R (de façon à « construire » la solution (A.5) et à trouver d'autres solutions éventuelles).

On cherche d'abord de resoudre (A.2) avec R aussi opérateur différentiel. Introduisons la notation, pour A et B opérateurs differentiels:

(A.6) $\quad A \equiv B \underset{\text{déf}}{\Leftrightarrow}$ *il existe C opérateur différentiel tel que* $A - B = D_y C$.

Sauf le cas de la solution triviale $Q \equiv R \equiv 0$, l'opérateur Q doit contenir des dérivations en y; en cherchant d'abord la solvabilité de (A.2) avec Q du premier ordre en y ([29]) soit $Q = Q_0 + D_y Q_1$, Q_0, Q_1 opérateurs differentiels en x, $Q_1 \neq 0$; (A.2) donne:

$$\begin{aligned} 0 &\equiv - D_y e^g R = \operatorname{div} e^g \operatorname{grad} Q \equiv D_x e^g D_x (Q_0 + D_y Q_1) = \\ &= D_x e^g D_x Q_0 + D_x e^g D_y D_x Q_1 = D_x e^g D_x Q_0 + D_x D_y e^g D_x Q_1 - D_x g_y e^g D_x Q_1 \equiv \\ &\equiv D_x e^g [D_x Q_0 - g_y D_x Q_1]\,. \end{aligned}$$

Les deux membres extrêmes ne contenant pas de dérivées en y on doit avoir (égalité et non congruence!)

$$0 = D_x e^g [D_x Q_0 - g_y D_x Q_1]$$

d'où évidemment:

(A.7) $$D_x Q_0 - g_y D_x Q_1 = 0\,.$$

De (A.7), par des «congruences modulo D_x» on tire:

$$0 \equiv - g_y D_x Q_1 = - D_x g_y Q_1 + g_{xy} Q_1 g_{xy} Q_1\,;$$

voulant $Q_1 \neq 0$ on a donc:

(A.8) *condition nécessaire pour la solvabilité de* (A.2) *avec R différentiel et Q du premier degrée en y est que* $g_{xy} \equiv 0$

(i.e. la validité de (1.19)); la condition est d'ailleurs suffisante: si (1.19) est remplie on peut choisir Q_1 arbitraire et $Q_0 = g_y Q_1$ pour avoir (A.7); le Q correspondent est $Q = Q_0 + D_y Q_1 = g_y Q_1 + D_y Q_1 = e^{-g} D_y\, e^g Q_1$; le choix (A.5) correspond dans ce cas à $Q_1 = e^{-g} I$ ($I =$ identité) et $R = A$ (A donné dans (2.2); dans ce cas $B \equiv 0$).

([29]) Ce qui correspond, dans (A.4), à pouvoir construire $\mathcal{U}$ à partir de $\tilde{u}$ avec une seule intégration en y.

Si l'on veut garder même type de choix pour Q aussi dans le cas où (1.19) n'est pas remplie, on est forcé d'ajouter à A des morceaux intégro-différentiels; par des simples calculs on arrive ainsi au choix (A.5).

On peut d'ailleurs chercher Q « d'ordre supérieur » en y, soit $Q = Q_0 + D_x Q_1 + \ldots + D_y^n Q_n$, avec $Q_n \neq 0$ et les Q_i différentiels en x; reprenant les calculs précédents et posant par simplicité $k(x, y) = e^{g(x,y)}$, de (A.2) on tire:

$$O = D_x Q_0 - \frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial y} Q_1 + \frac{1}{k}\frac{\partial^2 k}{\partial y^2} Q_2 \pm \ldots + (-1)^n \frac{1}{k}\frac{\partial^n k}{\partial y^n} Q_n$$

d'où la condition nécessaire:

$$\text{(A.9)} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{k}\frac{\partial^n k}{\partial y^n}\right) \textit{ est combinaison linéaire de } \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{k}\frac{\partial^j k}{\partial y^j}\right);\ j = 1, \ldots, n-1\right\};$$

ici aussi des simples calculs montrent que, si (A.9) est remplie, on peut choisir Q_n n'importe comment (p. ex. $Q_n = I$) et construire $Q_0, Q_1, \ldots, Q_{n-1}, R$; i.e. (A.9) est la condition nécessaire et suffisante pour la solvabilité de (A.2) avec R différentiel et Q d'ordre n en y.

Comme exemple, soit:

$$e^{g(x,y)} = k(x, y) = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy \ ;$$

on doit alors choisir $n = 2$; par exemple, posant $Q = D_y^2$, on trouve aisément

$$R = D_x \gamma D_x D_y + \gamma D_y^3 - D_x k_y D_x \ ;$$

dans ce cas, choissant:

$$\mathcal{U}(x, y) = \int_0^y ds \int_0^s [\tilde{u}(x, t) - t]\, dt$$

on aura encore $R = \chi_\Omega$; d'où, en multipliant par $(\partial/\partial y)(\mathcal{U} - v)$, avec v « fonction de test », on parviendra à une inéquation variationnelle du quatrième ordre dont la «partie principale» est associée à la forme

$$\{u, v\} \to \iint_D k \operatorname{grad} u_y \cdot \operatorname{grad} v_y \, dx\, dy \ .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. Baiocchi, Ann. Mat. Pura e Appl., **92** (1971), pp. 107-127.

[2] C. BAIOCCHI, C. R. Ac. Sc. Paris, **283** (1976), pp. 29-32.
[3] C. BAIOCCHI - F. BREZZI - V. COMINCIOLI, 2nd Symp. on Finite Element Methods in Flo Problems, I.C.C.A.D., Santa Margherita (1976).
[4] C. BAIOCCHI - V. COMINCIOLI - L. GUERRI - G. VOLPI, Calcolo, **10** (1973), pp. 1-86.
[5] C. BAIOCCHI - V. COMINCIOLI - E. MAGENES - G. A. POZZI, Annali di Mat. Pura e Appl., **97** (1973), pp. 1-82.
[6] C. BAIOCCHI - A. FRIEDMAN, à paraître aux Annali di Mat. Pura e Appl.
[7] J. BEAR, *Dynamics of fluid in porous media,* American Elsevier, New York, 1972.
[8] V. BENCI, Annali di Mat. Pura e Appl., **100** (1974), pp. 191-209.
[9] A. BENSOUSSAN - J. L. LIONS, C. R. Ac. Sc. Paris, **276** (1973), pp. 1189-1192.
[10] H. BRÉZIS - G. STAMPACCHIA, Bull. Soc. Mat. France, **96** (1968), pp. 153-180.
[11] N. DUNFORD - J. T. SCHWARTZ, *Linear operators*, Interscience Publishers, New York, 1958.
[12] A. FRIEDMAN - R. JENSEN, *Convexity of free boundary in Stefan problem and in the dam problem*, à paraître.
[13] P. GRISVARD, Boll. U.M.I., **4** (1972), pp. 132-164.
[14] M. E. HARR, *Groundwater and seepage*, McGraw-Hill, New York, 1962.
[15] J. L. JOLY - U. MOSCO, C. R. Acad. Sc. Paris, **279** (1974), pp. 499-502.
[16] H. LEWY - G. STAMPACCHIA, Comm. Pure Appl. Math., **22** (1969), pp. 153-188.
[17] J. L. LIONS - E. MAGENES, *Non homogeneous boundary value problems and applications*, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
[18] J. L. LIONS - G. STAMPACCHIA, Comm. Pure Appl. Math., **20** (1967), pp. 493-519.
[19] U. MOSCO - G. M. TROIANIELLO, Boll. U.M.I., **8** (1973), pp. 57-67.
[20] G. STAMPACCHIA, C. R. Ac. Sc. Paris, **258** (1964), pp. 4413-4416.
[21] L. TARTAR, C. R. Acad. Sc. Paris, **278** (1974), pp. 1193-1196.