ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

JEAN VAILLANT

Symétrisabilité des matrices localisées d'une matrice fortement hyperbolique en un point multiple

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 5, nº 2 (1978), p. 405-427
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1978_4_5_2_405_0>

Symétrisabilité des matrices localisées d'une matrice fortement hyperbolique en un point multiple.

JEAN VAILLANT (*)

dédié à Jean Leray

Soit $H(\xi)$ une matrice fortement hyperbolique à coefficients réels et $\eta \neq 0$ un point de multiplicité k pour le déterminant de H. Pour un polynôme hyperbolique P, Atiyah, Bott, et Gårding [1] ont défini le polynôme localisé du polynôme P en un point multiple et décrit ses propriétés. Nous définissons pour la matrice $H(\xi)$ des matrices carrées à k lignes, $\mathcal{H}(\xi)$, linéaires en ξ, que nous appelons localisées de $H(\xi)$ en η et qui ont les propriétés convenables: leur déterminant est proportionnel à la localisation en η de det H, le support de la solution élémentaire de $\mathcal{H}$ est inclus dans le support singulier de celle de H [4], ou, autrement dit, les termes successifs de la partie relative à η d'une solution asymptotique se calculent à l'aide de l'opérateur $\mathcal{H}(D)$.

Le résultat principal de ce travail est le suivant: pourvu que la dimension réduite de $\mathcal{H}(\xi)$ soit supérieure ou égale à $k(k+1)/2$, — c'est-à-dire que le nombre minimum de variables ξ_α, grâce auxquelles, dans une base convenable, on peut exprimer $\mathcal{H}(\xi)$ soit supérieur ou égal à $k\,(k+1)/2$ —, $\mathcal{H}(\xi)$ est symétrisable par une matrice inversible; de façon précise, si N est la direction d'hyperbolicité, $\mathcal{H}^{-1}(N)\mathcal{H}(\xi) = T^{-1}S(\xi)T$, où $S(\xi)$ est symétrique pour tout ξ, T ne dépend pas de ξ.

P. D. Lax [3] avait mis en évidence le fait que la symétrisabilité n'était pas nécessaire à l'hyperbolicité forte; on voit ici que les matrices localisées sont toujours symétrisables. Pour obtenir ce résultat, on a besoin, en particulier, d'une proposition qui peut porter un intérêt en soi: une matrice

(*) U.E.R. de Mathématiques, Université de Paris VI, 4 Place Jussieu, 75230 Paris, Cedex 05, France.

Pervenuto alla Redazione il 10 Maggio 1977 ed in forma definitiva il 21 Giugno 1977.

$k \times k$ de formes linéaires $\mathcal{H}(\xi)$, diagonalisable pour tout ξ, de dimension réduite $\geqslant k(k+1)/2$, telle que les différences 2 à 2 des formes de la diagonale n'appartiennent pas au sous-espace engendré par les formes non diagonales est symétrisable par une matrice diagonale indépendante de ξ à coefficients positifs. Cette propriété annoncée dans [9] pour $k=3$ a été obtenue dans le cas général, en collaboration avec D. Shiltz. Remarquons aussi qu'on peut appliquer alors aux matrices localisées les méthodes de Friedrichs.

La propriété de symétrie des matrices localisées obtenue sera utilisée dans un prochain travail où nous décrirons la propagation des singularités des solutions du problème de Cauchy pour $H(D)$.

§ 1. – On désigne par E un espace vectoriel réel de dimension $n+1$ et par E^* l'espace vectoriel dual; on note ξ un élément de E^*. On note $\mathcal{H} = (\mathcal{H}^{\bar{C}}_{\bar{D}})$, $1 \leqslant \bar{C}$, $\bar{D} \leqslant k$ une matrice carrée d'ordre k d'éléments de E; un vecteur de E définit une forme linéaire sur E^*; à tout ξ, $\mathcal{H}$ fait correspondre une matrice numérique réelle $\mathcal{H}(\xi)$ dont les éléments sont les valeurs de chaque vecteur élément de $\mathcal{H}$ pour ξ. On note dét $\mathcal{H}$ l'application polynomiale homogène de degré k:

$$\xi \mapsto \text{dét}\, \mathcal{H}(\xi)\,.$$

DÉFINITION 1. *On appelle linéalité de $\mathcal{H}$ le sous-espace vectoriel $L(\mathcal{H})$ de E^* intersection des noyaux des formes sur E^* éléments de $\mathcal{H}$. $L(\mathcal{H})$ est aussi l'orthogonal du sous-espace vectoriel de E engendré par les éléments de $\mathcal{H}$. On appelle dimension réduite de $\mathcal{H}$ le nombre*:

$$d(\mathcal{H}) = n + 1 - \dim L(\mathcal{H})\,.$$

On suppose désormais: dét $\mathcal{H} \not\equiv 0$.

LEMME 1. *Si $\xi \in L(\mathcal{H})$, ξ est un point multiple d'ordre k de* dét $\mathcal{H}$.

LEMME 2. *Si T est une matrice réelle inversible d'ordre k,*

$$d(T\mathcal{H}) = d(\mathcal{H})\,.$$

En effet le sous-espace vectoriel de E engendré par les éléments de $\mathcal{H}$ est identique au sous-espace vectoriel engendré par les éléments de $T \cdot \mathcal{H}$.

P désigne une application polynômiale homogène réelle sur E^* de degré k.

DÉFINITION 2 [1]. *On appelle linéalité de P le sous-espace vectoriel $L(P)$ de E^* dont les éléments sont les ξ tels que $P(\xi + \zeta) = P(\zeta)$ pour tout $\zeta \in E^*$.*

$L(P)$ est aussi l'ensemble des ξ de multiplicité k pour P. On appelle dimension réduite de P le nombre $d(P) = n + 1 - \dim L(P)$.

LEMME 3. *Si* $\xi \in L(\mathcal{H})$, $\xi \in L$ (dét $\mathcal{H}$); d(dét $\mathcal{H}$) $\leqslant d(\mathcal{H})$.

Cela résulte immédiatement du lemme 1 et de la définition 2.

Soit $N \in E^*$, tel que dét $\mathcal{H}(N) \neq 0$; on pose $\mathcal{H}' = \mathcal{H}^{-1}(N)\,\mathcal{H}$.

Soit une base de premier vecteur N; on notera ξ' un élément de composantes $(0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$. Un élément quelconque ξ de E^* s'écrira aussi: $\xi = \xi_0 N + \xi'$.

LEMME 4. *On peut choisir une base de E^* dont le premier vecteur soit N et dont les autres éléments sont dans le noyau de $\mathcal{H}'^1_1$, ($\mathcal{H}'^1_1$ élément de la* 1-ère *ligne et de la* 1-*ère colonne de $\mathcal{H}'$), on a alors*

$$\mathcal{H}'(\xi) = \xi_0 I + \left(\varphi^{\bar{c}}_{\bar{D}}(\xi)\right),$$

où $\varphi^1_1 = 0$; $\varphi^{\bar{c}}_{\bar{D}}(N) = 0$.

En effet: $\mathcal{H}'(N) = I$, donc $\mathcal{H}'^1_1(N) = 1$ et la forme $\mathcal{H}'^1_1$ sur E^* n'est pas nulle; son noyau est un hyperplan de E^* qui ne contient pas N; on peut donc choisir des bases dont N soit le 1-er vecteur et dont les n autres vecteurs soient une base de cet hyperplan. On a alors $\mathcal{H}'^1_1(\xi) = \xi_0$;

$$\mathcal{H}'^{\bar{c}}_{\bar{C}}(\xi) = \xi_0 + \mathcal{H}'^{\bar{c}}_{\bar{C}}(\xi')\,; \qquad \text{si} \quad \bar{C} \neq \bar{D},\ \ \mathcal{H}'^{\bar{c}}_{\bar{D}}(\xi) = \mathcal{H}'^{\bar{c}}_{\bar{D}}(\xi')\,.$$

On pose

$$\varphi^{\bar{c}}_{\bar{C}}(\xi) = \mathcal{H}'^{\bar{c}}_{\bar{C}}(\xi')\,; \qquad \varphi^{\bar{c}}_{\bar{D}}(\xi) = \mathcal{H}'^{\bar{c}}_{\bar{D}}(\xi') \qquad \text{si} \quad \bar{C} \neq \bar{D}\,.$$

On remarque que le vecteur de E, φ_0: $\xi \to \xi_0$ n'appartient pas au sous-espace engendré par les $(\varphi^{\bar{c}}_{\bar{D}})$, $(\bar{C}, \bar{D}) \neq (1, 1)$.

Nous rappellerons [2] [5] [6] la:

DÉFINITION 3. *Pour que $\mathcal{H}$ soit fortement hyperbolique par rapport à N, il faut et il suffit que, pour un choix d'une base de E^* de 1-er vecteur N,*

a) pour tout ξ', (de coordonnées $(0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ dans cette base), les valeurs propres de $\mathcal{H}'(\xi')$ soient toutes réelles et $\mathcal{H}'(\xi')$ soit diagonalisable: il existe $M(\xi')$ telle que $M^{-1}(\xi')\,\mathcal{H}'(\xi')\,M(\xi')$ soit diagonale, (ou bien la dimension de l'espace propre correspondant à chaque valeur propre soit égale à la multiplicité de cette valeur propre).

b) la diagonalisation soit uniforme: il existe un nombre $\varepsilon > 0$, tel que, pour tout ξ' appartenant à la sphère unité, on puisse trouver une matrice diagonalisatrice $M(\xi')$ dont les colonnes soient de longueur euclidienne 1 *et telle que* $|\text{dét}\, M(\xi')| \geqslant \varepsilon$.

On sait de plus que, si on choisit une autre base de 1-er vecteur N, les conditions analogues dans cette base sont réalisées.

Nous utiliserons alors la

DÉFINITION 4. *Si pour un choix d'une base de E^* de 1-er vecteur N, $\mathcal{H}$ satisfait la condition a), on dira que $\mathcal{H}$ est diagonalisable par rapport à N.*

On voit encore que pour toute autre base de 1-er vecteur N, $\mathcal{H}$ satisfait à a).

On obtient alors la:

PROPOSITION 1. *Si $\mathcal{H}$ est diagonalisable par rapport à N, alors $d(\mathcal{H}) = d(\text{dét}\,\mathcal{H})$.*

En effet, si $\xi \in L$ (dét $\mathcal{H}$), ξ est un point multiple d'ordre k pour dét $\mathcal{H}$; $-\xi_0$ est valeur propre multiple d'ordre k de $\mathcal{H}'(\xi')$ et de la définition 4 il résulte que $\xi \in L(\mathcal{H})$; on a donc: $d(\mathcal{H}) \leqslant d(\text{dét}\,\mathcal{H})$ et, avec le lemme 3 le résultat.

Lorsque $\mathcal{H}$ est diagonalisable son étude sera facilitée par le

LEMME 5. *Si $\mathcal{H}$ est diagonalisable par rapport à N et si:*

$$d(\mathcal{H}) \geqslant \frac{k(k+1)}{2},$$

alors, avec les notations du lemme 4, les vecteurs $(\varphi_{\bar{D}}^{\bar{C}})$, $\bar{C} \geqslant \bar{D}$, $(\bar{C}, \bar{D}) \neq (1,1)$ sont linéairement indépendants.

Pour simplifier la typographie, nous remplacerons dans les démonstrations du lemme 5 et des propositions 2 et 3, les indices $\bar{C}$, $\bar{D}$, par des indices, i, j, p, q.

Si la dimension du sous-espace engendré par les (φ_j^i), $i \geqslant j$, $(i, j) \neq (1,1)$ était strictement inférieure à $k(k+1)/2 - 1$, du fait de l'hypothèse sur $d(\mathcal{H})$, on pourrait choisir un vecteur φ_q^p, $p < q$, qui n'appartienne pas à ce sous-espace et un ξ' tel que $(\varphi_j^i(\xi')) = 0$ et $\varphi_q^p(\xi') = 1$; pour ce ξ', $\xi_0 = 0$ serait racine multiple d'ordre k et on devrait avoir $\varphi_q^p(\xi') = 0$, d'après la définition 4, d'où une contradiction.

PROPOSITION 2. *Si $\mathcal{H}$ est diagonalisable par rapport à N et si $d(\mathcal{H}) \geqslant k(k+1)/2$, alors pour un choix quelconque d'une base de E^* de 1-er vecteur N, le discriminant par rapport à ξ_0 de dét $\mathcal{H}$ n'est pas identiquement nul.*

On voit tout de suite su'il suffit de le démontrer pour une base de E^* de premier vecteur N choisie commodément; choisissons une base dans les conditions du lemme 4; compte tenu du lemme 5, on peut trouver un point ξ' tel que

$$\varphi_j^i(\xi') = 0\,, \quad i > j\,; \qquad \varphi_i^i(\xi') = i\,, \quad i \neq 1\,,$$

les racines en ξ_0 correspondantes sont toutes distinctes et la proposition est démontrée.

PROPOSITION 3. *On suppose que $\mathcal{H}$ est diagonalisable par rapport à N, que $d(\mathcal{H}) \geqslant k(k+1)/2$ et que les vecteurs $\mathcal{H}'^{\bar{C}}_{\bar{C}} - \mathcal{H}'^{\bar{D}}_{\bar{D}}$, $\bar{C} \neq \bar{D}$, n'appartiennent pas au sous-espace de E engendré par les vecteurs $\mathcal{H}'^{\bar{C}}_{\bar{D}}$, $\bar{C} \neq \bar{D}$. Alors $\mathcal{H}'$ est symétrisable par une matrice réelle diagonale inversible D à termes positifs, c'est à dire que: $\mathcal{H}' = \mathcal{H}^{-1}(N)\mathcal{H} = D^{-1}SD$, où S est une matrice de vecteurs de E, symétrique. $\mathcal{H}$ est donc fortement hyperbolique par rapport à N et $d(\mathcal{H}) = k(k+1)/2$.*

REMARQUE 1. Il est évident que si $\mathcal{H}'$ est symétrisable par une matrice diagonale et si $d(\mathcal{H}) = k(k+1)/2$, alors les différences $\mathcal{H}'^{\bar{C}}_{\bar{C}} - \mathcal{H}'^{\bar{D}}_{\bar{D}}$, $\bar{C} \neq \bar{D}$, n'appartiennent pas au sous-espace de E engendré par les vecteurs non diagonaux.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.

a) Comme dans le lemme 4, N est le 1-er vecteur de base de E^* et les autres vecteurs de base seront pris dans le noyau de $\mathcal{H}'^1_1$; d'après le lemme 5 les vecteurs φ^i_j, $i \geqslant j$, $(i,j) \neq (1,1)$ de E sont linéairement indépendants et du lemme 4 résulte qu'ils définissent aussi des formes linéaires indépendantes du dual du noyau de $\mathcal{H}'^1_1$; on prendra aussi la base du noyau telle que les φ^i_j considérés appartiennent à la base duale. Un point ξ' du noyau aura les coordonnées correspondantes notées ξ^i_j au cours de cette démonstration: $\xi^i_j = \varphi^i_j(\xi')$.

Pour tout ξ' tel que $\xi^i_j = 0$, $i \geqslant j$, $(i,j) \neq (1,1)$, $\xi_0 = 0$ est racine multiple d'ordre k de dét $\mathcal{H}'(\xi_0 N + \xi') = 0$ et l'on a pour un tel point:

$$\forall p,\ q,\ p < q\,, \quad \varphi^p_q(\xi') = 0\,.$$

On a donc pour ξ quelconque, si $p < q$, $\varphi^p_q(\xi) = \sum_{i \geqslant j} a^{pj}_{qi}\xi^i_j$; $a^{pj}_{qi} \in \mathbf{R}$.

b) On se propose de démontrer qu'en fait:

$$\text{si } p < q\,, \quad \varphi^p_q(\xi) = \sum_{i > j} a^{pj}_{qi}\xi^i_j\,.$$

On choisit pour celà dans *b*) des points ξ' tels que:

$$\xi^i_j = 0 \quad \text{pour tout } i > j\,.$$

Pour tout (p, q), $p<q$, on a:

$$\varphi_q^p(\xi')=\sum_{i=2}^{k} a_{qi}^{pi}\xi_i^i .$$

(i) Soit $j\in\{2,\dots k\}$ fixé et prenons pour tout $i\in\{2,\dots k\}$, $i\neq j$:

$$\xi_i^i=0\,,\qquad \xi_j^j\neq 0\,.$$

Alors $\xi_0=0$ est racine multiple d'ordre $k-1$ de dét $\mathcal{H}'(\xi)$ et les mineurs d'ordre 2 correspondants sont nuls; on en déduit:

$$p<q\,,\qquad \varphi_q^p(\xi')=\sum_{i=p}^{i=q} a_{qi}^{pi}\xi_i^i\,.$$

(ii) On procède ensuite par récurrence sur $q-p$. Soit d'abord:

$$(p, q)\,,\qquad p<q\,,\qquad \text{tel que}\qquad q-p=1\,.$$

Choisissons pour tout $i\in\{2,\dots k\}$: $\xi_i^i=1$.
Alors $\xi_0=-1$ est racine multiple d'ordre $k-1$ de dét $\mathcal{H}'(\xi)$; on en déduit:

$$p\geqslant 2\,,\qquad a_{p+1p}^{pp}+a_{p+1p+1}^{pp+1}=0\,.$$

L'hypothèse faite sur les vecteurs diagonaux implique alors, pour tout $p\geqslant 1$:

$$a_{p+1p}^{pp}=a_{p+1p+1}^{pp+1}=0\,.$$

(iii) Supposons maintenant que, pour tout (p, q), $p<q$, $q-p\leqslant r-1$, on ait obtenu:

$$\forall\, i\in\{p,\dots q\}:\qquad a_{qi}^{pi}=0\,.$$

Soit alors (p, q) fixé, $q-p=r$ et $j\in\{p+1,\dots q-1\}$; on choisit $\xi'\in\boldsymbol{R}^n$ tel que $\forall\, i\neq j$: $\xi_i^i=0$; $\xi_j^j\neq 0$.
$\xi_0=0$ est racine multiple d'ordre $k-1$; on en déduit: $a_{qj}^{pj}=0$.
On a donc:

$$\varphi_q^1(\xi')=a_{qq}^{1q}\xi_q^q\,,$$

$$p\geqslant 2\,,\qquad \varphi_q^p(\xi')=a_{qp}^{pp}\xi_p^p+a_{qq}^{pq}\xi_q^q\,.$$

On choisit ξ' tel que: $\xi_i^i=1$; $\xi_0=-1$ est à nouveau racine multiple d'ordre $k-1$; on en déduit:

$$p\geqslant 2\,, \qquad a_{qp}^{pp}+a_{qq}^{pq}=0\,.$$

L'hypothèse sur les vecteurs diagonaux permet de terminer le b):

$$\forall(p,q)\,, \qquad p<q\,, \qquad i\neq 1: \qquad a_{qi}^{pi}=0\,.$$

c) On démontrera dans ce c) que:

$$\text{si } p<q\,, \qquad \varphi_q^p(\xi')=a_{qq}^{pp}\,\xi_p^q \qquad \text{et} \qquad a_{qq}^{pp}>0\,.$$

On procède par récurrence sur $q-p$.

(i) Soit (p,q), $p<q$, tel que: $q-p=1$.

On choisit ξ' tel que:

$$i\geqslant j\,; \qquad (i,j)\neq(p+1,p): \ \xi_j^i=0\,; \qquad \xi_p^{p+1}\neq 0\,.$$

Comme dét $\mathcal{H}'(\xi)$ a toutes ses racines réelles, on a: $a_{p+1p+1}^{pp}\geqslant 0$; la condition de diagonalisation implique: $a_{p+1p+1}^{pp}>0$.

(ii) Soit $p\in\{2,\dots k-1\}$, choisissons ξ' tel que:

$$\forall(i,j)\,, \qquad i\geqslant j\,, \qquad (i,j)\notin\{(p,p),\,(p+1,p+1),\,(p+1,p)\}:$$
$$\xi_j^i=0\,;\ \xi_p^p=1\,,\ \xi_{p+1}^{p+1}=a_{p+1p+1}^{pp}\,(\xi_p^{p+1})^2;\ \xi_p^{p+1}\ \text{quelconque}\,.$$

Alors $\xi_0=0$ est racine multiple d'ordre $k-1$ de dét $\mathcal{H}'(\xi)$; tous les mineurs d'ordre 2 de $\mathcal{H}'(0,\xi')$ sont nuls; on en déduit:

$$\forall(u,v)\,, \quad u<v\,, \quad (u,v)\neq(p,p+1): \qquad a_{vp+1}^{up}=0\,.$$

Choisissons ensuite ξ' tel que:

$$\forall(i,j)\,, \quad i>j\,, \quad (i,j)\neq(2,1): \qquad \xi_j^i=0\,;$$

si $i\neq 2$, $\xi_i^i=1$; $\xi_2^2=1-a_{22}^{11}(\xi_1^2)^2$; ξ_1^2 quelconque.

Alors $\xi_0=-1$ est racine multiple d'ordre $k-1$; les mineurs d'ordre 2 de $\mathcal{H}'(-1,\xi')$ sont nuls et:

$$\forall(u,v)\,, \quad u<v\,, \quad (u,v)\neq(1,2): \qquad a_{v2}^{u1}=0\,.$$

(iii) $r \geqslant 2$; supposons que pour tout (p', q'), $p' < q'$, $q' - p' \leqslant r - 1$, on ait:

$$\forall (u, v)\,, \quad u < v\,, \quad (u, v) \neq (p', q'): \qquad a^{up'}_{vq'} = 0 \quad \text{et} \quad a^{p'p'}_{q'q'} > 0\,.$$

Soit maintenant (p, q), $2 \leqslant p < q$, $q - p = r$. Soit ξ' tel que:

$$\forall (i, j)\,, \quad i \geqslant j\,. \quad \text{non } [p \leqslant j < i \leqslant q]: \qquad \xi^i_j = 0\,;$$

$$\forall i \in \{p+1, q-1\}: \qquad \xi^i_p = 0\,; \quad \xi^q_p \text{ quelconque}:$$

$$\forall (i, j)\, p < j < i \leqslant q: \qquad \xi^i_j = -\frac{a^{jp}_{iq}}{a^{jj}_{ii}}\xi^q_p\,.$$

On obtient: $a^{pp}_{qq} > 0$.

Soit maintenant ξ' tel que:

$$\forall (i, j)\,, \quad i \geqslant j\,, \quad \text{non } [p \leqslant j \leqslant i \leqslant q]: \qquad \xi^i_j = 0\,;$$

$$\forall i \in \{p+1, q-1\}: \qquad \xi^i_p = 0\,, \quad \xi^i_i = 0\,;$$

$$\forall (i, j)\, p < j < i \leqslant q: \qquad \xi^i_j = -\frac{a^{jp}_{iq}}{a^{jj}_{ii}}\xi^q_p\,; \quad \xi^p_p = 1\,;$$

$\xi^q_q = a^{pp}_{qq}(\xi^q_p)^2$; ξ^q_p quelconque.

On obtient $\xi_0 = 0$ comme racine multiple d'ordre $k-1$; les mineurs correspondants d'ordre 2 sont tous nuls et:

$$\forall (u, v)\,, \quad u < v\,, \quad (u, v) \neq (p, q): \qquad a^{up}_{vq} = 0\,.$$

Enfin soit: $(p, q) = (1, r+1)$. Soit ξ' tel que:

$$\forall (i, j)\,, \quad i > j\,, \quad \text{non } [1 \leqslant j \leqslant i \leqslant q]: \qquad \xi^i_j = 0\,,$$

$$\forall i \in \{2, \dots q-1\}: \qquad \xi^i_1 = 0\,, \quad \xi^i_i = 1\,.$$

$$\forall i \in \{q+1, \dots k\}: \qquad \xi^i_i = 1\,.$$

$$\forall (i, j)\,, \quad 1 < j < i \leqslant q: \qquad \xi^i_j = -\frac{a^{j1}_{iq}}{a^{jj}_{ii}}\xi^q_1$$

$\xi^q_q = 1 - a^{11}_{qq}(\xi^q_1)^2$, ξ^q_1 quelconque.

Alors $\xi_0 = -1$ est racine d'ordre $k-1$; on obtient:

$$\forall (u, v)\,, \quad u < v\,, \quad (u, v) \neq (1, q): \qquad a^{u1}_{vq} = 0$$

$a^{11}_{qq} > 0$ s'obtient comme précédemment.

d) On a donc, en posant: $a_{qq}^{pp} = a_q^p$:

$$\text{si } p < q \qquad \varphi_q^p(\xi) = a_q^p \xi_p^q, \qquad a_q^p > 0 .$$

On se propose de démontrer que $\mathcal{H}'(\xi_0 N + \xi')$ est symétrisable par une matrice réelle diagonale à termes diagonaux strictement positifs.

On remarquera d'abord que, $\forall (p, q)$: $1 < p < q$, on a:

$$a_p^1 a_q^p = a_q^1 .$$

On pose pour cela:

$$\xi_j^i = 0 \qquad \text{pour tout } i \geqslant j,\ (i, j) \notin \{(p, 1), (q, 1), (q, p)\} .$$

On est amené à écrire que le déterminant de la matrice ci-dessous a toutes ses racines en ξ_0 réelles:

$$\begin{pmatrix} \xi_0 & a_p^1 \xi_1^p & a_q^1 \xi_1^q \\ \xi_1^p & \xi_0 & a_q^p \xi_p^q \\ \xi_1^q & \xi_p^q & \xi_0 \end{pmatrix} .$$

Posons:

$$\xi_1^p = \frac{1}{\sqrt{a_p^1}}, \quad \xi_1^q = \frac{1}{\sqrt{a_q^1}}, \quad \xi_p^q = \frac{1}{\sqrt{a_q^p}} .$$

On a la matrice:

$$\begin{pmatrix} \xi_0 & \sqrt{a_p^1} & \sqrt{a_q^1} \\ \dfrac{1}{\sqrt{a_p^1}} & \xi_0 & \sqrt{a_q^p} \\ \dfrac{1}{\sqrt{a_q^1}} & \dfrac{1}{\sqrt{a_q^p}} & \xi_0 \end{pmatrix}$$

dont le déterminant vaut, en posant:

$$\frac{\sqrt{a_p^1}\sqrt{a_q^p}}{\sqrt{a_q^1}} = a$$

$$\xi_0^3 - 3\xi_0 + a + \frac{1}{a} .$$

Son discriminant vaut:

$$27\left[-4+\left(a+\frac{1}{a}\right)^2\right]$$

et doit être négatif ou nul, ce qui impose $a=1$ et le résultat annoncé.

D'autre part pour que la matrice $\mathcal{H}'(\xi)$ soit symétrisable par une matrice diagonale réelle à coefficients diagonaux strictement positifs notés $D_r, 1 \leqslant r \leqslant k$, il faut et il suffit que l'on puisse trouver des D_r, vérifiant pour tous (p, q), $p < q$.

$$\sqrt{a_q^p} = \frac{D_p}{D_q}$$

soit:

$$\sqrt{a_q^1} = \frac{D_1}{D_q} \quad \text{si } q > 1$$

et:

$$\sqrt{a_q^p} = \frac{D_p}{D_q} \quad \text{si } 1 < p < q\,.$$

Comme on sait que si $1 < p < q$, $a_q^p = a_q^1/a_p^1$, il suffit de prendre:

$$D_1 = 1\,, \qquad D_q = \frac{1}{\sqrt{a_q^1}} \quad \text{pour } q > 1\,.$$

On a bien alors:

$$\mathcal{H}'(\xi) = D^{-1}S(\xi)D\,.$$

$S(\xi)$ est symétrique pour tout ξ; $\mathcal{H}'$ et $\mathcal{H}$ sont fortement hyperboliques par rapport à N et $d(\mathcal{H}) = k(k+1)/2$.

§ 2. – On note $H(\xi)$ une matrice $m \times m$ de polynômes homogènes d'ordre t à coefficients réels. Des indices $A, B, \ldots$ varient de 1 à m; on a ainsi:

$$H(\xi) = (H_B^A(\xi))\,.$$

On notera $A_A^B(\xi)$ le cofacteur de $H_B^A(\xi)$ dans la matrice $H(\xi)$. La définition 3 de l'hyperbolicité forte pour $t=1$ se généralise [2]; nous la donnerons sous une forme voisine de [8] p. 39: indiquons ici que la proposition II du même travail aurait dû faire intervenir un recouvrement ouvert fini convenable du compact S. On suppose dét $H(N) \neq 0$.

DÉFINITION 5. *Pour que H soit fortement hyperbolique par rapport à N, il faut et il suffit que, pour un choix d'une base de E^* de 1-er vecteur N:*

a) pour tout ξ', (de coordonnées $(0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ dans cette base), les racines en ξ_0 de dét $H(\xi_0, \xi')$ *soient toutes réelles et la dimension du noyau de $H(\xi_0, \xi')$ soit égale à la multiplicité de la racine correspondante.*

b) En notant S la sphère unité de $\xi_0 = 0$, $(\xi_{01}, \ldots, \xi_{0p}, \ldots, \xi_{0l})$ les racines correspondant à $\xi' \in S$, il existe un nombre strictement positif ε tel que pour tout $\xi' \in S$, pour tout p, il existe une base $(d_{p\underline{D}(p)}(\xi'))$, $[1 \leqslant \underline{D}(p) \leqslant$ multiplicité $k(p)$ de la racine $\xi_{0p}]$ normée, (vecteurs de longueur 1), *du noyau de H (ξ_{0p}, ξ') telle que:*

$$|\det \Delta(\xi')| \geqslant \varepsilon$$

$$\Delta(\xi') = \left(\begin{array}{c:c:c:c:c}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & d^B_{p1} & d^B_{p\underline{D}} & d^B_{pk} & \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 & (\xi_{0p})^q d^B_{p1} & (\xi_{0p})^q d^B_{p\underline{D}} & (\xi_{0p})^q d^B_{pk} & \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 & (\xi_{0p})^{t-1} d^B_{p1} & (\xi_{0p})^{t-1} d^B_{p\underline{D}} & (\xi_{0p})^{t-1} d^B_{pk} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}\right).$$

On aura aussi [2] [5] [6] la condition équivalente de Svensson.

DÉFINITION 5'. – *Pour que H soit fortement hyperbolique par rapport à N, il faut et il suffit que:*

a) $\det H(\xi + iN) \neq 0, \ \forall \xi \in E^*$

b) il existe un réel C tel que, pour tout ξ, A, B:

$$\left| \frac{A^B_A(\xi + iN)}{\det H(\xi + iN)} \right| \leqslant C(1 + |\xi|)^{1-t}$$

où $|\xi|$ désigne la norme euclidienne de ξ.

On supposera désormais H *fortement hyperbolique par rapport à N.* Dans toute la suite, η *est un point multiple d'ordre k de* dét H et $\eta \neq 0$.

On a immédiatement le:

LEMME 6. *La dimension du noyau de $H(\eta)$, (resp. de sa transposée) est k.*

On note $(d_{\overline{D}})$, $1 \leqslant \overline{D} \leqslant k$, (resp. $(g^{\overline{C}})$, $1 \leqslant \overline{C} \leqslant k$ une base du noyau de $H(\eta)$, (resp. de la matrice transposée). On utilise les conventions matricielles habituelles.

DÉFINITION 6. *On appelle matrice localisée de H en η toute matrice $k\times k$ de la forme*:

$$\mathcal{H}_\eta(d, g, \xi) = \left(\sum_{0\leqslant\alpha\leqslant n} g^{\bar{C}}\cdot\frac{\partial H}{\partial\xi_\alpha}(\eta)\cdot d_{\bar{D}}\xi_\alpha\right), \qquad 1\leqslant\bar{C},\ \bar{D}\leqslant k\,.$$

LEMME 7. *Si $\mathcal{H}_\eta(d, g, \xi)$ et $\mathcal{H}_\eta(d, \gamma, \xi)$ sont deux matrices localisées en η, alors*:

$$\mathcal{H}_\eta(\delta, \gamma, \xi) = \Lambda\cdot\mathcal{H}_\eta(d, g, \xi)\cdot M\,,$$

où M est la matrice inversible de passage de la base d à la base δ, (resp. Λ de g à γ).

On rappellera d'après [1], la:

DÉFINITION 7. *On appelle localisation en η de P le premier coefficient non nul du développement de $P(\eta+r\xi)$ en puissances croissantes de $r\in\mathbf{R}$; la puissance de r correspondante est la multiplicité de η pour P.*

On obtient [4], le

LEMME 8. *Les matrices localisées de H en η sont fortement hyperboliques par rapport à N; leurs déterminants sont proportionnels à la localisation en η de* dét H, *soit* (dét $H)_\eta$.

Compte tenu du lemme 7, il suffit de le démontrer pour un choix commode de vecteurs du noyau de la base de $H(\eta)$ et de sa transposée. On notera: $A^{B_1\dots B_p}_{A_1\dots A_p}$ le cofacteur obtenu en rayant dans H les lignes d'indice $A_1\dots A_p$ et les colonnes d'indice $B_1, \dots, B_p$. D'après le lemme 6 un des cofacteurs d'ordre $m-k$ est non nul en η; on peut supposer que c'est $A^{12\dots k}_{12\dots k}$; on a donc $A^{12\dots k}_{12\dots k}(\eta)\neq 0$.

On pose:

$$\delta^B_{\bar{D}} = A^{12\dots(\bar{D}-1)B(\bar{D}+1)\dots k}_{12\quad\dots\quad k}(\eta)\,,$$

en convenant que si B prend une des valeurs $1, 2, \dots, (\bar{D}-1), (\bar{D}+1)\dots k$, alors $\delta^B_{\bar{D}}=0$. De même

$$\gamma^{\bar{C}}_A = A^{12\quad\dots\quad k}_{12\dots(\bar{C}-1)A(\bar{C}+1)\dots k}(\eta)\,.$$

Les $(\delta_{\bar{D}})$ forment une base de $H(\eta)$; de même les $(\gamma^{\bar{C}})$ pour la transposée. On a encore [7]

$$(\mathcal{H}_\eta(\delta, \gamma, \xi))^{\bar{C}}_{\bar{D}} = A^{12\dots k}_{12\dots k}(\eta)\cdot(-1)^{(\bar{C}+\bar{D})}\sum_\alpha\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\left(A^{12\dots(\bar{D}-1)(\bar{D}+1)\dots k}_{12\dots(\bar{C}-1)(\bar{C}+1)\dots k}\right)(\eta)\,\xi_\alpha\,.$$

Posons:

$$\mathcal{A}'^{\bar{C}}_{\bar{D}} = (-1)^{(\bar{C}+\bar{D})} A^{12\ldots(\bar{D}-1)(\bar{D}+1)\ldots k}_{12\ldots(\bar{C}-1)(\bar{C}+1)\ldots k}\,; \qquad \mathcal{A}' = (\mathcal{A}'^{\bar{C}}_{\bar{D}})\,; \qquad A = (A^{\bar{C}}_{\bar{D}})\,.$$

On a les identités: (cf. par ex. [7]):

$$\mathcal{A}' \cdot A = \text{dét}\, H \cdot A^{12\ldots k}_{12\ldots k} I\,,$$

où I désigne la matrice unité d'ordre k et

$$\text{dét}\, \mathcal{A}' = \text{dét}\, H \cdot (A^{12\ldots k}_{12\ldots k})^{k-1}\,.$$

Du lemme 6 et de l'expression de la dérivée d'un déterminant résulte que les cofacteurs d'ordre $m-1$ de H, (soit du type A^B_A) s'annulent $(k-1)$ fois en η; plus généralement les cofacteurs d'ordre $(m-k+p)$ s'annulent p fois en η, $1 \leqslant p \leqslant k$; ainsi les cofacteurs d'ordre $(m-k+1)$ s'annulent en η.

En dérivant k fois les identités précédentes, on obtient: $(\partial_\alpha = \partial/\partial\xi_\alpha)$

$$\text{dét}\Big(\sum_\alpha \partial^\alpha \mathcal{A}'(\eta)\xi_\alpha\Big) = \Big(\frac{1}{k!}\sum_{\alpha_1\ldots\alpha_k} \partial^{\alpha_1\ldots\alpha_k}\,\text{dét}\, H(\eta)\xi_{\alpha_1}\ldots\xi_{\alpha_k}\Big)\big(A^{12\ldots k}_{12\ldots k}(\eta)\big)^{k-1} \tag{1}$$

et:

$$\Big(\sum_{\alpha_k} \partial^{\alpha_k}\mathcal{A}'(\eta)\xi_{\alpha_k}\Big)\cdot\Big(\frac{1}{(k-1)!}\sum_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}} \partial^{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}} A(\eta)\xi_{\alpha_1}\ldots\xi_{\alpha_{k-1}}\Big)\cdot \\ \cdot\big(A^{12\ldots k}_{12\ldots k}(\eta)\big)^{k-2} = \text{dét}\Big(\sum_\alpha \partial^\alpha \mathcal{A}'(\eta)\xi_\alpha\Big) I\,. \tag{2}$$

D'autre part de la condition d'hyperbolicité forte de la définition 5′, on déduit que, $\forall \bar{C}$, $\bar{D}$:

$$\left|\frac{A^{\bar{C}}_{\bar{D}}(\eta/r + \xi + iN)}{\text{dét}\, H(\eta/r + \xi + iN)}\right| \leqslant C(1 + |\eta/r + \xi|)^{1-t}\,, \qquad r \in \boldsymbol{R}^*\,,$$

ou:

$$|r|\left|\frac{A^{\bar{D}}_{\bar{C}}(\eta + r(\xi + iN))}{\text{dét}\, H(\eta + r(\xi+iN))}\right| \leqslant C(|r| + |\eta + r\xi|)^{1-t}$$

et en développant en r et faisant tendre r vers 0, compte tenu de l'hyperbolicité de $(\text{dét}\, H)_\eta$ [1],

$$\left|\frac{\sum\limits_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}} \partial^{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}} A^{\bar{D}}_{\bar{C}}(\eta)(\xi_{\alpha_1} + iN_{\alpha_1})\ldots(\xi_{\alpha_{k-1}} + iN_{\alpha_{k-1}})}{\sum\limits_{\alpha_1\ldots\alpha_k} \partial^{\alpha_1\ldots\alpha_k}\,\text{dét}\, H(\eta)(\xi_{\alpha_1} + iN_{\alpha_1})\ldots(\xi_{\alpha_k} + iN_{\alpha_k})}\right| \leqslant C'\,. \tag{3}$$

En utilisant à nouveau la condition d'hyperbolicité de la définition 5' et (1), (2), on obtient l'hyperbolicité forte de la matrice

$$\sum_\alpha \partial^\alpha \mathcal{A}'(\eta)\xi_\alpha$$

et le lemme 8 est démontré.

REMARQUE 2. On en déduit [4] que le support de la solution élémentaire hyperbolique d'une matrice localisée est inclus dans le support singulier de la solution élémentaire de la matrice H; cette remarque et les résultats de propagation obtenus justifient la définition 6.

CONSÉQUENCE 1. *Si la dimension réduite de la localisation en* η *de* dét H *est supérieure ou égale à* $k(k+1)/2$: $d(\text{dét}\, H)_\eta \geqslant k(k+1)/2$, *alors le discriminant en* ξ_0 *de* $(\text{dét}\, H)_\eta$ *n'est pas identiquement nul.*

Cela résulte immédiatement des propositions 1 et 2 et du lemme 8.

Nous rappellerons maintenant un résultat de [3] [1] que nous écrirons sous une forme adaptée à notre étude. On prend une base de E^* de premier vecteur N.

LEMME 9. $r \in \boldsymbol{R}$, μ' *a pour coordonnées* $(0, \mu_1, \ldots, \mu_i, \ldots, \mu_n)$, $\mu' \in E^*$; $\mu' \neq 0$, $s \in \boldsymbol{C}$; *le polynôme*:

$$(r, s) \mapsto \text{dét}\, H(\eta + r\mu' + sN)$$

se factorise sous la forme:

$$\text{dét}\, H(\eta + r\mu' + sN) = \text{dét}\, H(N) \cdot \tag{4}$$
$$\cdot [s - \lambda^1(r)] \ldots [s - \lambda^{\bar{D}}(r)] \ldots [s - \lambda^k(r)] \cdot Q(r, s)$$

où les fonctions

$$r \in \boldsymbol{R} \mapsto \lambda^{\bar{D}}(r)\,, \quad 1 \leqslant \bar{D} \leqslant k\,,$$

sont à valeurs réelles, analytiques, telles que: $\lambda^{\bar{D}}(0) = 0$; Q *se décompose de façon analogue, mais les racines* $\lambda^{k+1}(r), \ldots, \lambda^{mt}(r)$ *sont non nulles pour* $r = 0$ *et* $Q(0, 0) \neq 0$.

LEMME 10. *On pose*: $\mu_0^{\bar{D}} = (d\lambda^{\bar{D}}/dr)(0)$; $\mu^{\bar{D}} = \mu_0^{\bar{D}} N + \mu'$, $\mu^{\bar{D}}$ *a pour coordonnées*: $(\mu_0^{\bar{D}}, \mu_1, \ldots, \mu_n) = (\mu_\alpha^{\bar{D}})$; $(\text{dét}\, H)_\eta$ *est la localisation en* η *de* dét H, *alors, pour* μ' *donné*:

$$(\text{dét}\, H)_\eta \quad (\mu_0 N + \mu') = 0$$

a pour racines en μ_0 *les valeurs* $\mu_0^{\bar{D}}$, $1 \leqslant \bar{D} \leqslant k$; *ainsi* $\forall \bar{D}$:

$$(\text{dét}\, H)_\eta \quad (\mu^{\bar{D}}) = 0\,.$$

On dérive k fois en r, l'identité:

$$\text{dét}\, H[\eta + r\mu' + \lambda^{\bar{D}}(r)N] = 0$$

et l'on fait $r = 0$.

REMARQUE 3. Géométriquement ce résultat exprime que les tangentes aux courbes:

$$r \to \eta + r\mu' + \lambda^{\bar{D}}(r)N$$

appartiennent au cône hyperbolique défini par $(\det H)_\eta$.

Nous aurons besoin de lemmes exprimant l'ordre d'annulation des premières dérivées en ξ_0 de dét H et des mineurs de H pour $r = 0$.

On posera: $\partial^0 = \partial/\partial\xi_0$, $(\partial^0)^p = \partial^p/\partial\xi_0$. *On suppose, jusqu'au lemme* 17 *inclus que* μ' *est tel que*: $\mu_0^{\bar{C}} \neq \mu_0^{\bar{D}}$, pour $\bar{C} \neq \bar{D}$.

LEMME 11.

$$\partial^0 \quad (\text{dét}\, H)(\eta + r\mu' + \lambda^{\bar{D}}(r)N) = r^{k-1}[\varrho^{\bar{D}} + O(r)], \textit{ avec } \quad \varrho^{\bar{D}} \neq 0.$$

$$(\partial^0)^p(\text{dét}\, H)(\eta + r\mu' + \lambda^{\bar{D}}(r)N) = O(r^{k-p}), \qquad \textit{pour } 2 \leqslant p \leqslant k-1.$$

$$(\partial^0)^k(\text{dét}\, H)(\eta) \neq 0.$$

On obtient ces résultats facilement en dérivant (4) en s et en remplaçant ensuite s par $\lambda^{\bar{D}}(r)$.

LEMME 12. *Pour tout* (B, A), $1 \leqslant A$, $B \leqslant m$, *et* $\bar{D}$, $1 \leqslant \bar{D} \leqslant k$:

$$\frac{d^p}{dr^p}\,[A_A^B(\eta + r\mu' + \lambda^{\bar{D}}(r)N)](0) = 0\,, \quad \textit{si } 0 \leqslant p \leqslant k-2\,.$$

Soit $A_{12\ldots k}^{12\ldots k}(\eta) \neq 0$; $\forall \bar{D}$, $1 \leqslant \bar{D} \leqslant k$, *il existe au moins un couple d'indices* $(\bar{F}, \bar{E})$, $1 \leqslant \bar{F}$, $\bar{E} \leqslant k$, *tels que le cofacteur correspondant* $A_{\bar{E}}^{\bar{F}}$ *soit tel que*:

$$\frac{d^{k-1}}{dr^{k-1}}\,[A_{\bar{E}}^{\bar{F}}(\eta + r\mu' + \lambda^{\bar{D}}(r)N)](0) \neq 0\,.$$

Rappelons que, pour tout cofacteur d'ordre $(m-1)$ soit A_A^B;

$$A_A^B(\eta) = 0\,; \qquad \text{si } \partial^\alpha = \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\,, \quad \partial^{\alpha_1 \dots \alpha_p} A_A^B(\eta) = 0\,, \qquad \text{pour: } 1 \leqslant p \leqslant k-2\,.$$

Il sera commode de poser:

$$A(\eta + r\mu' + \lambda^{\overline{D}}(r)N) = \overset{(\overline{D})}{A}(r)$$

et de faire la même convention pour les expressions analogues.

On a donc:

$$\overset{(\overline{D})}{A}{}_A^B(r) = O(r^{k-1})$$

et:

$$\overset{(\overline{D})}{\overbrace{(\partial^0)^p A_A^B(r)}} = O(r^{k-p-1})\,, \qquad \text{pour } 1 \leqslant p \leqslant k-2\,.$$

$\overline{D}$ étant donné, nous montrerons qu'il est impossible, que, pour tout $(\overline{F}, \overline{E})$, on ait:

$$\frac{d^{k-1}}{dr^{k-1}} \overset{(\overline{D})}{A}{}_{\overline{E}}^{\overline{F}}(0) = 0\,.$$

Si on avait cette égalité, on aurait:

$$\overset{(\overline{D})}{A}{}_{\overline{E}}^{\overline{F}}(r) = O(r^k)\,. \tag{5}$$

Or, l'identité de Jacobi, s'écrit, si $A = (A_{\overline{E}}^{\overline{F}})$:

$$\text{dét}\, A = A_{12\dots k}^{12\dots k} (\det H)^{k-1}\,.$$

En dérivant $k-1$ fois en ξ_0 cette identité, puis remplaçant ξ par $\eta + r\mu' + \lambda^{\overline{D}}(r)N$, le deuxième membre donne:

$$(k-1)!\, \overset{(\overline{D})}{A}{}_{12\dots k}^{12\dots k}(r) [\overset{(\overline{D})}{\overbrace{\partial^0 \det H(r)}}]^{k-1} = r^{(k-1)^2} [\varrho^{\overline{D}'} + O(r)]\,, \qquad \varrho^{\overline{D}'} \neq 0$$

et le 1-er membre donne une somme de termes, par la formule de dérivation d'un déterminant.

Si on avait (5), le terme d'ordre le plus petit du 1-er membre proviendrait des termes du type:

$$\overset{(\overline{D})}{\overbrace{\left(\partial^0 A_{\overline{E}_1}^{\overline{F}_1} \dots \partial^0 A_{\overline{E}_{k-1}}^{\overline{F}_{k-1}} A_{\overline{E}_k}^{\overline{F}_k}\right)}} (r)$$

et serait:

$$O(r^{(k-2)(k-1)+k}) = O(r^{(k-1)^2+1})$$

et on aboutit à une contradiction.

Les lemmes précédents vont permettre de construire des bases des noyaux des $H(\eta + r\mu' + \lambda^{\bar{D}}(r)N)$ pour chaque $\bar{D}$, analytiques en r et pour $r = 0$ formant une base de $H(\eta)$.

LEMME 13. *Pour chaque $\bar{D}$, on choisit d'après le lemme précédent $\bar{E}(\bar{D})$ et $\bar{F}(\bar{D})$ tels que:*

$$\frac{d^{k-1}}{dr^{k-1}}\left[A^{\bar{F}(\bar{D})}_{\bar{E}(\bar{D})}(\eta + r\mu' + \lambda^{\bar{D}}(r)N)\right](0) \neq 0\,.$$

On pose, pour $r \neq 0$:

$$d^B_{\bar{D}}(r) = \frac{A^B_{\bar{E}(\bar{D})}(\eta + r\mu' + \lambda^{\bar{D}}(r)N)}{\left[\sum_B \left(A^B_{\bar{E}(\bar{D})}(\eta + r\mu' + \lambda^{\bar{D}}(r)N)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

et de même:

$$g^{\bar{C}}_A(r) = \frac{A^{\bar{F}(\bar{C})}_A(\dots\lambda^{\bar{C}})}{\left[\sum_A \left(A^{\bar{F}(\bar{C})}_A(\dots)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

pour $r = 0$:

$$d^B_{\bar{D}}(0) = \frac{(d^{k-1}/dr^{k-1})\left[A^B_{\bar{E}(\bar{D})}(\eta + r\mu' + \lambda^{\bar{D}}(r)N)\right](0)}{\left[\sum_B \left((d^{k-1}/dr^{k-1})\left[A^B_{\bar{E}(\bar{D})}(\eta + r\mu' + \lambda^{\bar{D}}(r)N)\right](0)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

et:

$$g^{\bar{C}}_A(0) = \frac{(d^{k-1}/dr^{k-1})\left[A^{\bar{F}(\bar{C})}_A(\dots)\right](0)}{\left[\sum_A \left((d^{k-1}/dr^{k-1})\left[A^{\bar{F}(\bar{C})}_A(\dots)\right](0)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

Dans un voisinage de $r = 0$,

a) les vecteurs $d_{\bar{D}}$ et $g^{\bar{C}}$ sont fonctions analytiques de r.

b) $\forall r \neq 0$, $\forall \bar{D}$, $d_{\bar{D}}(r)$ est une base du noyau de

$$H(\eta + r\mu' + \lambda^{\bar{D}}(r)N)\,;$$

pour $r = 0$ *la famille* $(d_{\overline{D}}(0))$, $1 \leqslant \overline{D} \leqslant k$ *forme une base du noyau de* $H(\eta)$ $\forall r \neq 0$, $\forall \overline{C}$, $g^{\overline{C}}(r)$ *est une base du noyau de la transposée de*

$$H(\eta + r\mu' + \lambda^{\overline{C}}(r)N)\ ;$$

pour $r = 0$, *la famille* $(g^{\overline{C}}(0))$, $1 \leqslant \overline{C} \leqslant k$ *forme une base du noyau de la transposée de* $H(\eta)$.

Le *a*) est immédiat; par exemple, en abrégeant un peu les notations

$$d_{\overline{D}}^{B}(r) = \frac{\overset{(\overline{D})}{A}{}_{\overline{E}}^{B}(r)/r^{k-1}}{\|(\overset{(\overline{D})}{A}{}_{\overline{E}}^{B}(r)/r^{k-1})\|}\,, \qquad \|\ \|\ \text{norme euclidienne}\ .$$

Pour obtenir le *b*), on a d'abord si $r \neq 0$:

$$H(\eta + r\mu' + \lambda^{\overline{D}}(r)N)\,d_{\overline{D}}(r) = 0\,, \tag{6}$$

et $d_{\overline{D}}(r)$ est un vecteur normé, base du noyau de $\overset{(\overline{D})}{H}(r)$ qui est de dimension 1, puisque pour r petit, $r \neq 0$, les racines $\lambda^{\overline{D}}(r)$ sont distinctes du fait de l'hypothèse faite sur μ'.

Pour montrer que les $(d_{\overline{D}}(0))$ forment une base de $H(\eta)$, remarquons que la définition 5 implique que $|\text{dét}\,\Delta(\xi')|$ doit être uniformément minoré par $\varepsilon' > 0$ pour ξ' voisin du point η' considéré ici, (ε' se déduit de ε par un raisonnement d'homogénéité).

Rappelons Δ en n'explicitant que les k colonnes relatives à la racine η_0 considérée:

$$\Delta(\eta' + r\mu') = \left(\begin{array}{c:c:c} \vdots & \vdots & \vdots \\ d_1^B(r) & d_{\overline{D}}^B(r) & d_k^B(r) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (\eta_0 + \lambda^1(r))^q d_1^B(r) & (\eta_0 + \lambda^{\overline{D}}(r))^q d_{\overline{D}}^B(r) & (\eta_0 + \lambda^k(r))^q d_k^B(r) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (\eta_0 + \lambda^1(r))^{t-1} d_1^B(r) & (\eta_0 + \lambda^{\overline{D}}(r))^{t-1} d_{\overline{D}}^B(r) & (\eta_0 + \lambda^k(r))^{t-1} d_k^B(r) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right)$$

Chaque vecteur $d_{\overline{D}}(r)$ est au signe près, l'unique vecteur normé du noyau de $\overset{(\overline{D})}{H}(r)$. Si r tend vers 0, le dét $\Delta(\eta + r\mu')$ tend vers une limite qu'on explicite en développant par blocs relatifs au k colonnes relatives à η_0; les blocs provenant des autres colonnes sont bornés; ceux provenant de ces k

colonnes ont des limites de la forme

$$(\eta_0)^l \left(\begin{array}{c:c:c} \vdots & \vdots & \vdots \\ d_1^{B_1}(0) & d_{\overline{D}}^{B_1}(0) & d_k^{B_1}(0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_1^{B_p}(0) & d_{\overline{D}}^{B_p}(0) & d_k^{B_p}(0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_1^{B_k}(0) & d_{\overline{D}}^{B_k}(0) & d_k^{B_k}(0) \end{array} \right).$$

Si les vecteurs $(d_{\overline{D}}(0))$ ne sont pas linéairement indépendants, tous ces blocs sont nuls et dét $\Delta(\eta' + r\mu')$ ne peut être uniformément minoré. Un raisonnement analogue vaut pour la matrice transposée de H.

NOTATION. On notera les vecteurs ainsi obtenus:

$$d_{\overline{D}}(0) = d_{\mu'\overline{D}}, \qquad g^{\overline{C}}(0) = g^{\overline{C}}_{\mu'}$$

en rappelant ainsi que ces vecteurs sont fonctions de μ'.

On posera aussi: $\mathcal{H}_{\eta\mu'}(\xi) = \mathcal{H}_\eta(d_{\mu'}, g_{\mu'}, \xi)$ (cf. Déf. 6).

REMARQUE 4. Ces vecteurs seront aussi utiles pour la détermination de développements asymptotiques relatifs à H.

Nous indiquerons quelques propriétés des matrices localisées $\mathcal{H}_{\eta\mu'}$.

LEMME 14. *Si* $\overline{C} \neq \overline{D}$,

$$\mathcal{H}\eta\mu'^{\overline{C}}_{\overline{D}}(N) = 0\,,$$

$$\mathcal{H}\eta\mu'^{\overline{C}}_{\overline{D}}(\mu') = 0\,.$$

En effet pour $r \neq 0$ petit; on a le produit des matrices

$$g^{\overline{C}}(r) \cdot \frac{\overset{(\overline{C})}{H}(r) - \overset{(\overline{D})}{H}(r)}{\lambda^{\overline{D}}(r) - \lambda^{\overline{C}}(r)} \cdot d_{\overline{D}}(r) = 0\ ;$$

d'où à l'aide de la formule de Taylor pour les polynômes d'une variable, en posant:

$$\partial^{(0)^t} = \partial^{\overbrace{0\ldots0}^{t}}$$

$$\begin{aligned}(7) \qquad g^{\overline{C}}(r) \cdot \Big[-(\partial^0 \overset{(\overline{D})}{H})(r) + \frac{1}{2}(\lambda^{\overline{D}}(r) - \lambda^{\overline{C}}(r))(\partial^{00} \overset{(\overline{D})}{H})(r) + \ldots \\ + \frac{(-1)^t}{t!}(\lambda^{\overline{D}}(r) - \lambda^{\overline{C}}(r))^{t-1} \partial^{(0)^t} \overset{(\overline{D})}{H}(r) \Big] d_{\overline{D}}(r) = 0\,.\end{aligned}$$

Cette formule utile pour les calculs de propagation vaut encore pour $r = 0$; si $r = 0$, on obtient la formule cherchée.

De (6) on déduit:

$$\frac{d}{dr}\overset{(\bar{D})}{H}(r)\cdot d_{\bar{D}}(r) + \overset{(\bar{D})}{H}(r)\frac{d}{dr}d_{\bar{D}}(r) = 0$$

et en multipliant à gauche par $g^{\bar{C}}(r)$ et passant à $r = 0$, on obtient:

$$g^{\bar{C}}(0)\cdot\frac{d}{dr}\overset{(\bar{D})}{H}(0)\cdot d_{\bar{D}}(0) = 0\,,$$

et le deuxième résultat est obtenu en simplifiant cette égalité à l'aide du premier.

LEMME 15. *On pose, $\forall\bar{C}$, $\forall\alpha$:*

$$\overset{\bar{C}}{p^{\alpha}}(r) = \frac{(\partial/\partial\xi_{\alpha}\det H)(\eta + r\mu' + \lambda^{\bar{C}}(r)N)}{r^{k-1}}\,,\qquad si\ r\neq 0\,;$$

$$\overset{\bar{C}}{p^{\alpha}}(0) = \frac{1}{(k-1)!}\frac{d}{dr^{k-1}}\left[\frac{\partial}{\partial\xi_{\alpha}}\det H\,(\eta + r\mu' + \lambda^{\bar{C}}(r)N)\right](0)\,.$$

$\overset{\bar{C}}{p}$ est ainsi une fonction vectorielle à valeurs dans E, analytique en r; pour chaque $r\neq 0$, $\overset{\bar{C}}{p}(r)$ est proportionnel au vecteur bicaractéristique classique; la direction de $\overset{\bar{C}}{p}(0)$ est la limite de la direction du vecteur bicaractéristique classique si r tend vers 0.

On a, $\forall\bar{C}$, $\forall\alpha$:

$$g^{\bar{C}}(r)\cdot\frac{\partial}{\partial\xi_{\alpha}}H(\eta + r\mu' + \lambda^{\bar{C}}(r)N)\cdot d_{\bar{C}}(r) = \overset{\bar{C}}{\mathbf{C}}(r)\cdot\overset{\bar{C}}{p^{\alpha}}(r)\,;\tag{8}$$

$\overset{\bar{C}}{\mathbf{C}}(r)$ est une fonction analytique de r pour r petit.

On a aussi:

$$\mathcal{K}_{\eta\mu',\bar{C}}\overset{\bar{C}}{\xi} = \overset{\bar{C}}{\mathbf{C}}(0)\,\overset{\bar{C}}{p}(0)$$

et

$$\mathcal{K}_{\eta\mu',\bar{C}}\overset{\bar{C}}{\xi}(N)\neq 0\,.$$

On a en utilisant le lemme 13:

$$g^{\bar{C}}(r)\cdot\widehat{\partial^{\alpha}\overset{(\bar{C})}{H}}(r)\cdot d_{\bar{C}}(r) = \overset{\bar{C}}{\mathbf{C}}{}'(r)\sum_{A,B}\frac{\overset{(\bar{C})}{A}{}^{\bar{F}}_{A}(r)}{r^{k-1}}\,\widehat{\partial^{o}\overset{(\bar{C})}{H}}{}^{A}_{B}(r)\cdot\frac{\overset{(\bar{C})}{A}{}^{B}_{\bar{E}}(r)}{r^{k-1}}$$

$$= \overset{\bar{C}}{\mathbf{C}}{}'(r)\,\frac{\overset{(\bar{C})}{A}{}^{\bar{F}}_{\bar{E}}(r)}{r^{k-1}}\cdot\frac{\widehat{\partial^{\alpha}\det\overset{(\bar{C})}{H}}(r)}{r^{k-1}}$$

et $\overset{\overline{C}}{\mathbf{C}}'(r)\overset{(\overline{C})}{A}{}^{\overline{F}}_{\overline{E}}(r)/r^{k-1}$ est différent de 0 et analytique pour r petit; notons le $\overset{\overline{C}}{\mathbf{C}}(r)$; on a donc:

$$g^{\overline{C}}(r)\overset{(\overline{C})}{\widehat{\partial^\alpha H}}(r)d_{\overline{C}}(r) = \overset{\overline{C}}{\mathbf{C}}(r)\,\overset{\overline{C}\alpha}{p}(r),$$

et $\overset{\overline{C}}{p}$ est aussi analytique.

Si r tend vers 0 on obtient:

$$\mathcal{K}_{\eta\mu'}{}^{\overline{C}}_{\overline{C}} = \overset{\overline{C}}{\mathbf{C}}(0)\,\overset{\overline{C}}{p}(0)$$

et:

$$\mathcal{K}_{\eta\mu'}{}^{\overline{C}}_{\overline{C}}(N) = \frac{1}{[(k-1)!]^2}\overset{\overline{C}}{\mathbf{C}}(0)\,\frac{d^{k-1}\overset{(\overline{C})}{A}{}^{\overline{E}(\overline{C})}_{\overline{F}(\overline{C})}}{dr^{k-1}}(0)\,\frac{d^{k-1}(\overset{(\overline{C})}{\widehat{\partial^0 \det H}})}{dr^{k-1}}(0).$$

Des lemmes 11 et 12 résulte que:

$$\mathcal{K}_{\eta\mu'}{}^{\overline{C}}_{\overline{C}}(N) \neq 0.$$

LEMME 16. *On rappelle que*: $\mu^{\overline{C}} = \mu_o^{\overline{C}}N + \mu'$; $\forall \overline{C}$, $\mathcal{K}_{\eta\mu'}{}^{\overline{C}}_{\overline{C}}(\mu^{\overline{C}}) = 0$ *ou encore*: $\overset{\overline{C}}{p}(0)\ (\mu^{\overline{C}}) = 0$.

On a, $\forall \overline{C}$, $\forall r$:

$$\text{dét}\, H(\eta + r\mu' + \lambda^{\overline{C}}(r)N) = 0.$$

Dérivons k fois en r et remplaçons r par 0, on obtient:

$$\sum_{0\leqslant\alpha\leqslant n}\frac{d}{dr^{k-1}}\big(\overset{(\overline{C})}{\widehat{\partial^\alpha \det H(r)}}\big)(0)\mu^{\overline{C}}_\alpha = 0,$$

d'où le résultat.

LEMME 17. *Si* $d[(\text{dét}\, H)_\eta] \geqslant k(k+1)/2$, *alors la matrice* $\mathcal{K}_{\eta\mu'}$ *est symétrisable par une matrice diagonale.*

$\mathcal{K}_{\eta\mu'}$ est fortement hyperbolique par rapport à N d'après le lemme 8; elle est donc diagonalisable; de la proposition 1 résulte que:

$$d(\mathcal{K}_{\eta\mu'}) \geqslant \frac{k(k+1)}{2}.$$

Les lemmes 14 et 15 impliquent que $\mathcal{K}_{\eta\mu'}(N)$ est diagonale et inversible. Du lemme 14 résulte que $\mathcal{K}_{\eta\mu'}(\mu')$ est diagonale.

Comme: $\mathcal{K}'_{\eta\mu'} = \mathcal{K}^{-1}_{\eta\mu'}(N)\mathcal{K}_{\eta\mu'}$, on a

$$\mathcal{K}'_{\eta\mu'}(\mu') = \mathcal{K}^{-1}_{\eta\mu'}(N)\mathcal{K}_{\eta\mu'}(\mu') .$$

Le lemme 16 implique que:

$$\mu_o^{\bar{C}} = -\frac{\mathcal{K}_{\eta\mu'\bar{C}}^{\ \ \bar{C}}(\mu')}{\mathcal{K}_{\eta\mu'\bar{C}}^{\ \ \bar{C}}(N)} .$$

On a donc:

$$\mathcal{K}'_{\eta\mu'}(\mu') = \begin{pmatrix} -\mu_o^1 & 0 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & -\mu_o^{\bar{C}} & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & 0 & -\mu_o^k \end{pmatrix} .$$

μ' annule donc tous les vecteurs du sous-espace engendré par les éléments non diagonaux de $\mathcal{K}'_{\eta\mu'}$, mais n'annule pas la différence de deux éléments non diagonaux, puisque $\bar{C} \neq \bar{D}$ implique $\mu_o^{\bar{C}} \neq \mu_o^{\bar{D}}$; la différence de deux éléments diagonaux de $\mathcal{K}'_{\eta\mu'}$ n'appartient donc pas au sous-espace engendré par les éléments non diagonaux.

Toutes les hypothèses de la proposition 3 sont réalisées et le lemme 17 est démontré.

Théorème 1. *Si H est une matrice de polynômes homogénes de degrét fortement hyperbolique par rapport à $N \neq 0$, $\eta \neq 0$ un point multiple d'ordre k pour le déterminant de H, si la dimension réduite du polynôme* (dét $H)_\eta$, *localisé en η de* dét H, *est supérieure ou égale à $k(k+1)/2$, alors toute matrice localisée $\mathcal{K}_\eta$ de H en η est symétrisable:*

$$\mathcal{K}_\eta^{-1}(N)\mathcal{K}_\eta(\xi) = T^{-1}S(\xi)T ,$$

où T est réelle inversible, S symétrique; la dimension réduite de (dét $H)_\eta$ *est en fait égale à $k(k+1)/2$.*

Du lemme 8, de la proposition 2 et du lemme 10 résulte qu'il existe au moins un μ' tel que:

$$\forall \bar{C},\ \bar{D}, \quad \bar{C} \neq \bar{D},$$

on ait:

$$\mu_o^{\bar{C}} \neq \mu_o^{\bar{D}} .$$

Choisissons le; la matrice $\mathcal{H}_{\eta\mu'}$ qui lui correspond est symétrisable:

$$\mathcal{H}'_{\eta\mu'} = D^{-1}SD .$$

Si $\mathcal{H}_\eta$ est une matrice localisée quelconque, il résulte du lemme 7 que:

$$\mathcal{H}'_\eta = M^{-1}\mathcal{H}'_{\eta\mu'}M ;$$

d'où

$$\mathcal{H}'_\eta = M^{-1}D^{-1}SDM$$

et le théorème.

REMARQUE 5. Les conditions du théorème 1 limitent évidemment k; on a:

$$\frac{k(k+1)}{2} < n+1 \qquad \text{et: } k \leqslant m .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. F. ATIYAH - R. BOTT - L. GÅRDING, Acta mathematica, **124** (1970), pp. 109-189.
[2] K. KASAHARA - M. YAMAGUTI, Memoirs of the college of Science, Kyoto, série A, **33**, Math., n. 1 (1960).
[3] P. D. LAX, Comm. Pure and Appl. Math., **11** (1958), pp. 175-194.
[4] J. RIVERO - J. VAILLANT, Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, **277**, série A (1973), p. 951.
[5] G. STRANG, J. Math. Kyoto University, **63** (1967), pp. 397-417.
[6] L. SVENSSON, Ark. Maths., **8**, n. 17 (1950), pp. 145-162.
[7] J. VAILLANT, Ann. Institut Fourier, Grenoble, **15**, n. 2 (1965), pp. 225-311.
[8] J. VAILLANT, J. Maths. pures et appliquées, **50** (1971), pp. 25-51.
[9] J. VAILLANT, Comptes rendus de l'académie des Sciences de Paris, **284**, série A, (1977), p. 489.
[10] D. LUDWIG - B. GRANOFF, J. Math. Analysis and applic., **21** (1968), pp. 556-574.
[11] J. VAILLANT, J. Math. Pures et appl., **53** (1974), pp. 71-98.