ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

C. FOIAS

R. TEMAM

Remarques sur les équations de Navier-Stokes stationnaires et les phénomènes successifs de bifurcation

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 5, nº 1 (1978), p. 29-63

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1978_4_5_1_29_0>

Remarques sur les équations de Navier-Stokes stationnaires et les phénomènes successifs de bifurcation.

C. FOIAS (*) - R. TEMAM (**)

dédié à Jean Leray

Introduction.

Nous nous proposons dans cet article de reprendre l'étude commencée en [9] de la structure de l'ensemble des solutions stationnaires des équations de Navier Stokes. Supposons qu'un fluide incompressible emplisse un domaine Ω borné de $\boldsymbol{R}^n$, $n = 2$ ou 3, de frontière Γ, et qu'il soit soumis à des forces volumiques stationnaires $f = f(x)$ et que les points de Γ soient animés d'une vitesse stationnaire, $\varphi = \varphi(x)$. Alors dans un écoulement stationnaire, la vitesse $u = (u_1, \dots, u_n)$ et la pression p sont régies par les équations

$$(0.1) \qquad -\nu\Delta u + \sum_{=1}^{n} u_i D_i u + \operatorname{grad} p = f \quad \text{dans } \Omega\,,$$

$$(0.2) \qquad \operatorname{div} u = 0 \quad \text{dans } \Omega\,,$$

$$(0.3) \qquad u = \varphi \quad \text{sur } \Gamma. \qquad (D_i = \partial/\partial x_i)\,.$$

Nous savons (cf. ci après) que ce problème peut être réduit à une équation fonctionnelle ne faisant intervenir que u et nous noterons dans la suite $S(f, \varphi, \nu)$ l'ensemble des solutions u du problème (0.1)-(0.3). Les deux principaux résultats établis en [9] étaient que l'ensemble $S(f, \varphi, \nu)$ est homéomorphe à un compact de R^m, m assez grand, et qu'il était génériquement

(*) Université de Bucarest, Faculté de Mathématiques, Str. Akademiei 14, Bucarest.

(**) Université de Paris Sud, Mathématique, Bâtiment 425, Orsay.

Pervenuto alla Redazione il 21 Marzo 1977.

fini, pour ν fixé, pour presque tout couple $\{f, \varphi\}$ et, pour $\{\nu, \varphi\}$ fixés, pour presque tout f. Ces résultats vont être sensiblement précisés dans ce travail, dont nous allons à présent décrire le contenu.

Le paragraphe 1 rappelle et précise les résultats d'existence pour le problème (0.1)-(0.3). En particulier nous faisons le lien entre les deux types de résultats connus: ceux de O. A. Ladyzhenskaya [14] et J. L. Lions [22] qui donnent l'existence de solutions faibles de (0.1)-(0.3) (c'est-à-dire appartenant à des espaces de Sobolev) mais nécessitent des conditions compliquées sur φ et ceux de J. Leray [19] qui impose une condition très simple sur φ mais se place dans le cadre de fonctions plusieurs fois continûment différentiables. Ce résultat est une conséquence immédiate de certaines propriétés de l'opérateur rotationnel qui sont établies au début du paragraphe 1 et présentent aussi un certain intérêt intrinsèque (cf. l'introduction du paragraphe 1).

Le paragraphe 2 a pour but de munir l'ensemble $S(f, \varphi, \nu)$ d'une structure de variété C-analytique réelle compacte: plus précisément la projection de $S(f, \varphi, \nu)$ dans un espace de dimension finie m, m convenable, est injective, et l'image de $S(f, \varphi, \nu)$ est une variété C-analytique réelle compacte. D'autres résultats de ce type sont également établis. Par commodité nous faisons cette étude dans un cadre abstrait un peu plus général; pour les questions de variétés analytiques cf. en particulier Bruhat-Whitney [2], H. Cartan [3] et Narasimhan [25].

Le paragraphe 3 qui contient les résultats essentiels tire avantage des deux paragraphes précédents, et du théorème fondamental de stratification pour les variétés C-analytiques réelles dû à Bruhat et Whitney [2]. D'une part, en liaison avec [9] et par des considérations purement topologiques, nous obtenons des renseignements génériques sur le nombre de solutions de (0.1)-(0.3). Ensuite, utilisant également [2], nous obtenons certains renseignements sur l'ensemble $S = \bigcup_{\nu > 0} S(f, \varphi, \nu)$, et sur les phénomènes successifs de bifurcation de solutions stationnaires lorsque $\nu \to 0$. En particulier le résultat suivant est établi: *l'ensemble de toutes les valeurs ν de bifurcation primaire ou secondaire est fini à droite de tout nombre $\nu_0 > 0$, pour tout φ et pour une valeur générique de f.* Cela constitue à notre connaissance le premier résultat relatif à l'ensemble de toutes les bifurcations primaires et secondaires. Des résultats similaires pour les écoulements de Taylor et de Bénard sont aussi décrits.

Pour terminer, il nous semble souhaitable d'ajouter deux remarques sur ce travail. L'une est relative à la rédaction de ce travail qui se trouve à la jonction de spécialités différentes: à plusieurs reprises il nous a paru nécessaire de détailler certains points qui paraîtront classiques ou faciles au spécialiste. L'autre remarque est relative à la motivation de ce travail en liaison avec la turbulence. Les approches nouvelles sur la turbulence, celle due à Ruelle et Takens [30] en particulier et la théorie des solutions statistiques stationnaires [7], font jouer un rôle important aux sous-ensembles invariants par l'opérateur d'évolution de Navier-Stokes. L'étude de tels ensembles paraît donc intéressante, et les ensembles $S(f, \varphi, \nu)$ sont les ensembles invariants les plus simples.

Les auteurs remercient N. Boboc, A. Douady et G. Gussi pour de nombreuses discussions intéressantes. Certains résultats du paragraphe 3 ont été motivés par une question posée par J. Leray et H. Lewy que nous remercions également.

PLAN

1. – Théorèmes d'existence: rappels et compléments.

Après des rappels et notations faisant l'objet de la section 1.1, les sections 1.2 à 1.4 donnent des propriétés de l'opérateur rotationnel dans $\boldsymbol{R}^n$ $n = 2$ ou 3. En particulier nous caractérisons complètement le noyau de cet opérateur dans $H^1(\Omega)^3$ (ou $H^1(\Omega)$ si $n = 2$), et son image (Ω ouvert borné de $\boldsymbol{R}^n$). Cela nous permet de préciser la décomposition classique de $L^2(\Omega)^n$ (cf. [14], [35]) en l'espace G des gradients de fonctions de $H^1(\Omega)$ et son orthogonal: on voit ainsi apparaître dans $G^{\perp}$ un sous-espace isomorphe au premier espace de cohomologie de Ω et on fait le lien avec la théorie de Hodge.

Enfin la section 1.5 est consacrée aux résultats d'existence pour les équations de Navier Stokes stationnaires non homogènes.

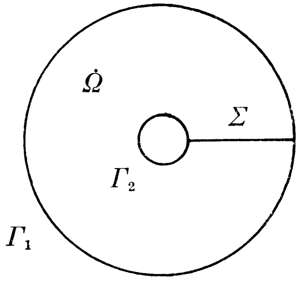
1.1. *Rappels et notations.*

Soit Ω un ouvert borné connexe de $\boldsymbol{R}^n$, $n = 2$ ou 3, de frontière Γ. On suppose que

(1.1) Γ est une variété de classe $\mathcal{C}^r$ de dimension $n-1$ et Ω est situé localement d'un seul côté de Γ ($r = 2$ sauf mention contraire). Γ a un nombre fini de composantes connexes notées $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ ($m \geqslant 1$).

L'ouvert Ω peut être simplement ou multiplement connexe. Dans ce deuxième cas, il est clair qu'on peut le rendre simplement connexe avec un nombre fini de coupures régulières. Plus précisément:

(1.2) On note $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_N$, N variétés de dimension $n-1$ et de classe $\mathcal{C}^r$ ($N \geqslant 0$), telles que $\Sigma_i \cap \Sigma_j = \emptyset$ pour $i \neq j$, et l'ouvert $\dot{\Omega} = \Omega \setminus \Sigma$, $\Sigma = \bigcup_{i=1}^{N} \Sigma_i$ soit simplement connexe et lipschitzien (i.e. les Σ_i ne sont pas tangents à Γ).



On note $L^2(\Omega)$ l'espace des fonctions réelles qui sont L^2 sur Ω, $H^m(\Omega)$, m entier, l'espace de Sobolev d'ordre m, et $H_0^m(\Omega)$ l'adhérence dans $H^m(\Omega)$ de $\mathcal{D}(\Omega)$, l'espace des fonctions réelles $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans Ω. On se reportera à J. L. Lions-E. Magenes [23] et J. Nečas [26] pour tout ce qui concerne les espaces de Sobolev. Les produits scalaires dans $L^2(\Omega)$, $H^m(\Omega)$,

$H_0^1(\Omega)$ sont respectivement dénotés

$$(u, v) = \int_\Omega uv\,dx\,, \qquad (u, v)_m = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (D^\alpha u, D^\alpha v)\,,$$

$$((u, v)) = \sum_{i=1}^n (D_i u, D_i v)\,,$$

et les normes: $|u| = (u, u)^{\frac{1}{2}}$, $|u|_m = [(u, u)_m]^{\frac{1}{2}}$, $\|u\| = ((u, u))^{\frac{1}{2}}$.

Si Z est un quelconque espace alors $\boldsymbol{Z} = Z^n$; par exemple $\boldsymbol{L}^2(\Omega) = L^2(\Omega)^n$, $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega) = H_0^1(\Omega)^n$. Nous convenons d'utiliser la même notation pour le produit scalaire et la norme dans $L^2(\Omega)$ ou $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ ou $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega), \ldots$.

Il est d'usage dans la théorie des équations de Navier-Stokes d'introduire les espaces suivants

$$\mathcal{V} = \{u \in \mathcal{D}(\Omega)^n,\ \operatorname{div} u = 0\}\,.$$

$$V = \text{adhérence de } \mathcal{V} \text{ dans } \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$$

$$H = \text{adhérence de } \mathcal{V} \text{ dans } \boldsymbol{L}^2(\Omega)\,.$$

On montre, grâce à l'hypothèse (1.1) sur Ω, que

$$V = \{u \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)\,, \quad \operatorname{div} u = 0\}\,, \tag{1.3}$$

et d'autre part (cf. [35])

$$H = \{u \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)\,, \quad \operatorname{div} u = 0\,, \quad \gamma_\nu u = 0\}\,, \tag{1.4}$$

où $\gamma_\nu u$ est la valeur sur Γ de $u \cdot \nu$, et cela a un sens si $u \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$ et $\operatorname{div} u = 0$ (ν normale unitaire à Γ dirigée vers l'extérieur de Ω).

It est bien connu (cf. O. A. Ladyzhenskaya [14], R. Temam [34], [35]) que

$$\boldsymbol{L}^2(\Omega) = H \oplus G\,, \tag{1.5}$$

où

$$G = \{u,\ u = \operatorname{grad} p,\ p \in H^1(\Omega)\}\,. \tag{1.6}$$

On a même plus précisément

$$G = H_1 \oplus H_2 \tag{1.7}$$

où

$$H_1 = \{u,\ u = \operatorname{grad} p,\ p \in H^1(\Omega),\ \Delta p = 0\} \tag{1.8}$$

$$H_2 = \{u,\ u = \operatorname{grad} p,\ p \in H_0^1(\Omega)\}\,. \tag{1.9}$$

REMARQUE 1.1. Nous mettrons en évidence dans la suite, une décomposition, nouvelle semble-t-il, de l'espace H.

1.2. *Le noyau de l'opérateur rotationnel.*

Il n'y a pas lieu de revenir sur la définition de l'opérateur rotationnel en dimension 3. En dimension d'espace 2, nous posons

$$\operatorname{rot} u = D_1 u_2 - D_2 u_1, \quad \text{si } u = \{u_1, u_2\} \text{ est une application de } \Omega \to \boldsymbol{R}^2,$$

$$\operatorname{rot} u = \{-D_2 u, D_1 u\}, \quad \text{si } u\colon \Omega \to \boldsymbol{R} \text{ est une fonction scalaire.}$$

L'opérateur rotationnel envoie $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ dans $\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)$ si $n = 3$ (ou $H^{-1}(\Omega)$ si $n = 2$). On se propose de préciser son noyau dans $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$, soit Ker(rot).

Il est clair que $\operatorname{Ker}(\operatorname{rot}) \supset G$; précisons les éléments de $\operatorname{Ker}(\operatorname{rot}) \cap H$. Si $u \in \operatorname{Ker}(\operatorname{rot}) \cap H$, alors u est localement un gradient et plus précisément $u = \operatorname{grad} q$ dans $\dot{\Omega}$, avec $\operatorname{div} u = \Delta q = 0$, en sorte que q est $\mathcal{C}^\infty$ et univoque dans $\dot{\Omega}$, q est $\mathcal{C}^r$ dans $\overline{\dot{\Omega}}$ sauf au voisinage de $\Gamma \cap \Sigma$. On a aussi avec (1.4)

$$\gamma_\nu u = \frac{\partial q}{\partial \nu} = 0 \qquad \text{sur } \Gamma .$$

On note Σ_i^+ et Σ_i^- les deux côtés de Σ_i et ν la normale à Σ_i orientée de Σ_i^+ vers Σ_i^-; si une fonction θ prend des valeurs différentes sur Σ_i^+ et Σ_i^- alors on pose

$$[\theta]_i = \theta|_{\Sigma_i^+} - \theta|_{\Sigma_i^-} .$$

Pour la fonction q ci-dessus, on a $[q]_i =$ constante puisque $\operatorname{grad} q$ est $\mathcal{C}^\infty$ et univoque; on note $[q]_i = a_i \in \boldsymbol{R}$. Pour caractériser complètement u et q, il reste à écrire que $\operatorname{div} u = 0$ dans Ω. Si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}
\langle \operatorname{div} u, \varphi \rangle &= - \langle \operatorname{grad} q, \operatorname{grad} \varphi \rangle = \\
&= - \int_{\Omega \text{ ou } \dot{\Omega}} \operatorname{grad} q \cdot \operatorname{grad} \varphi \, dx = \\
&= (\text{puisque } \Delta q = 0) = \\
&= - \int_{\partial \dot{\Omega}} \frac{\partial q}{\partial \nu} \varphi \, d\Gamma = \\
&= - \sum_{i=1}^{N} \int_{\Sigma_i} \left[\frac{\partial q}{\partial \nu}\right]_i \varphi \, d\Sigma = 0 .
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\left[\frac{\partial q}{\partial v_i}\right]_i = 0\,, \qquad i = 1, \ldots, N\,.$$

Finalement:

Lemme 1.1. *L'espace* $H_c = \mathrm{Ker}(\mathrm{rot}) \cap H$ *se compose des gradients des fonctions q harmoniques (analytiques) multivoques dans* Ω, *univoques dans* $\dot{\Omega}$ *avec,*

$$\frac{\partial q}{\partial v} = 0 \qquad \textit{sur } \Gamma\,, \tag{1.10}$$

$$\begin{cases} [q]_i = \textit{constante}\,, & i = 1, \ldots, N\,, \\ \left[\dfrac{\partial q}{\partial v}\right]_i = 0\,, & i = 1, \ldots, N\,. \end{cases} \tag{1.11}$$

On va mettre en évidence une base de H_c. Au préalable on prouve ceci:

Lemme 1.2. *Pour* $i = 1, \ldots, N$, *il existe une fonction* q_i *unique à une constante additive près, telle que*

$$\begin{cases} \Delta q_i = 0 & \textit{dans } \dot{\Omega}\,, \\ \dfrac{\partial q_i}{\partial v} = 0 & \textit{sur } \Gamma\,, \\ \left[\dfrac{\partial q_i}{\partial v}\right]_j = 0\,, & j = 1, \ldots, N\,, \\ [q_i]_j = 0\,, & j \neq i\,, \\ [q_i]_i = 1\,. \end{cases} \tag{1.12}$$

Démonstration. On considère le problème ci-après dont on vérifiera qu'il est équivalent au problème (1.12).

$$\begin{cases} \Delta q'_i = 0 & \text{dans } \dot{\Omega}\,, \\ \dfrac{\partial q'_i}{\partial v} = 0 & \text{sur } \Gamma\,, \\ \left[\dfrac{\partial q'_i}{\partial v}\right]_j = 0\,, & j = 1, \ldots, N\,; \\ [q'_i]_j = 0\,, & j \neq 1\,, \\ [q'_i]_i = \text{constante (indéterminée)}\,, \\ \displaystyle\int_{\Sigma_i} \frac{\partial q'_i}{\partial v}\, d\Sigma = 1\,. \end{cases} \tag{1.13}$$

Nous remarquons pour commencer que le problème (1.13) est variationnel. Soit

$$X_i = \{p \in H^1(\dot{\Omega}),\ [p]_i = \text{constante},\ [p]_j = 0,\ \forall j \neq i\}\,.$$

Il est élémentaire de vérifier que le problème (1.13) est équivalent à trouver $q_i' \in X_i$, tel que

$$\int_\Omega \operatorname{grad} q_i' \cdot \operatorname{grad} p\, dx = [p]_i\,, \qquad \forall p \in X_i\,. \tag{1.14}$$

Le membre de gauche de (1.14) définit sur X_i/R une forme bilinéaire continue coercive, et le membre de droite est une forme linéaire sur X_i, qui s'annule sur les constantes et qui induit donc une forme linéaire continue sur X_i/R. On obtient l'existence et l'unicité de q_i' dans X_i/R.

Si q_i' est solution de (1.14), alors $\alpha = [q_i']_i \neq 0$ et donc $q_i = (1/\alpha)q_i'$ est solution de (1.12); $\alpha \neq 0$ car si $\alpha = 0$, q_i' se prolonge en une fonction de $H^1(\Omega)$ dont on vérifie trivialement qu'elle est constante (solution du problème de Neumann homogène dans Ω); cela contredit (1.14).

Reciproquement si q_i est solution de (1.12) alors

$$\beta = \int_{\Sigma_i} \frac{\partial q_i}{\partial \nu}\, d\Sigma$$

est non nul et $q_i' = (1/\beta)q_i$ est solution de (1.13); $\beta \neq 0$ sans quoi q_i serait solution de l'égalité (1.14) dont le second membre serait remplacé par 0; on aurait donc $q_i =$ constante ($= 0$ dans X_i/R), en contradiction avec $[q_i]_i = 1$.

Lemme 1.3. *$H_c = \operatorname{Ker}(\operatorname{rot}) \cap H$ est l'espace engendré par* $\operatorname{grad} q_1, \ldots, \operatorname{grad} q_N$ (1). *Sa dimension est N.*

Démonstration: Si $u \in H_c$, alors $u = \operatorname{grad} q$, où q vérifie les conditions énoncées au Lemme 1.1. Soit $a_i = [q]_i$, et $r = q - \sum_{i=1}^{N} a_i q_i$. Il est clair que r est analytique dans $\dot{\Omega}$,

$$\begin{cases} \Delta r = 0 & \text{dans } \dot{\Omega}\,, & \dfrac{\partial r}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Gamma\,, \\ \left[\dfrac{\partial r}{\partial \nu}\right]_i = 0\,, & [r]_i = 0\,, & & i = 1, \ldots, N\,. \end{cases}$$

(1) Il s'agit des gradients des q_i au sens classique. Les gradients distributions (dans Ω) sont sommes de ces fonctions et de masses de Dirac sur Σ_i: $-[q]_i \nu \delta_{\Sigma_i}$.

Ainsi r est une constante, et $u = \sum_{i=0}^{N} a_i \operatorname{grad} q_i$.

Il est enfin évident que les fonctions grad q_i sont linéairement indépendantes. ■

REMARQUE 1.2. L'espace H_c est isomorphe au premier espace de cohomologie de Ω, i.e. le quotient de l'espace des formes différentielles fermées dans Ω, par l'espace des formes différentielles exactes dans Ω (cf. [29]). Si Ω est simplement connexe, $N = 0$ et $H_c = \{0\}$.

LEMME 1.4. *Soit H_0 l'orthogonal de H_c dans H. On a*

$$H_0 = \left\{ v \in H, \int_{\Sigma_i} v \cdot \nu \, d\Sigma = 0, \ i = 1, \ldots, N \right\}. \tag{1.15}$$

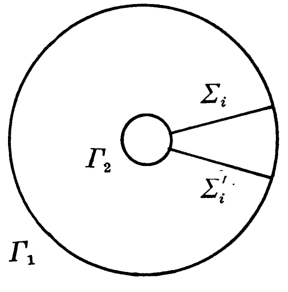
DÉMONSTRATION. Si $v \in H$, alors $v \in H_0$ si et seulement si $(v, \operatorname{grad} q_i) = 0$, $i = 1, \ldots, N$. Or d'après la formule de Stokes généralisée (cf. [23], [35]),

$$\begin{aligned}(v, \operatorname{grad} q_i) &= \int_{\dot{\Omega}} v \cdot \operatorname{grad} q_i \, dx \\ &= \int_{\partial \dot{\Omega}} v \cdot \nu q_i \, d\Gamma = \int_{\Sigma_i} v \cdot \nu \, d\Sigma ;\end{aligned}$$

d'où (1.15).

REMARQUE 1.3. i) On vérifie que pour $v \in H$, $\int_{\Sigma_i} v \cdot \nu \, d\Sigma$ est indépendant de la coupure Σ_i, c'est-à-dire ne change pas par déformation continue de Σ_i:

$$\int_{\Sigma_i} v \cdot \nu \, d\Sigma = \int_{\Sigma_i'} v \cdot \nu \, d\Sigma .$$



ii) On vérifie directement que si $v \in H_c$, $v = \operatorname{grad} q$, et

$$\int_{\Sigma_i} v \cdot \nu \, d\Sigma = \int_{\Sigma_i} \frac{\partial q}{\partial \nu} \, d\Sigma = 0 \,, \qquad i = 1, \ldots, N \,,$$

alors $v = 0$. ■

En résumé on a

PROPOSITION 1.1. *Sous les hypothèses* (1.1) *et* (1.2),

$$L^2(\Omega) = H_c \oplus H_0 \oplus H_1 \oplus H_2 \,, \tag{1.16}$$

$$\operatorname{Ker}(\operatorname{rot}) = H_c \oplus H_1 \oplus H_2 \,, \tag{1.17}$$

les espaces H_c, H_0, H_1, H_2, *étant décrits ci-dessus.*

REMARQUE 1.4. i) On note P_{H_c}, P_{H_i}, les opérateurs de projection orthogonale dans $L^2(\Omega)$ sur H_c, H_i, $i = 0, 1, 2$; P_{H_1} et P_{H_2} sont décrits en [35]; si $v \in H$, alors $P_{H_c} = \sum_{i=1}^{N} a_i \operatorname{grad} q_i$, où les a_i sont solutions du système linéaire

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_{ij} a_i = \int_{\Sigma_j} v \cdot \nu \, d\Sigma \,, \qquad 1 \leqslant j \leqslant N \tag{1.18}$$

avec

$$\alpha_{ij} = \int_{\Sigma_j} \frac{\partial q_i}{\partial \nu} \, d\Sigma = \int_{\Sigma_i} \frac{\partial q_j}{\partial \nu} \, d\Sigma = (\operatorname{grad} q_i, \operatorname{grad} q_j) \,,$$

si bien que la matrice des α_{ij} est *non singulière.*

ii) On sait [35] que P_{H_1} et P_{H_2} envoient $H^m(\Omega)$ dans $H_i \cap H^m(\Omega)$, $i = 1, 2$, si $r \geqslant m + 2$. Comme $H_c \subset C^\infty(\Omega)^n \cap C^r(\bar{\Omega})^n$, il en est de même de P_{H_c} et P_{H_0}. ■

1.3. *L'espace* $\operatorname{rot}(H^1(\Omega))$.

Tout d'abord

LEMME 1.5. $\operatorname{rot} H^1(\Omega) = \operatorname{rot}(H^1(\Omega) \cap H_0)$.

DÉMONSTRATION. On remarque que si $u \in H^1(\Omega)$, $v = P_{H_0} u = u - \operatorname{grad} q$, où $\operatorname{grad} q \in \operatorname{Ker}(\operatorname{rot})$, et donc $\operatorname{rot} v = \operatorname{rot} u$.

LEMME 1.6. *Il existe une constante* $c_0 = c_0(\Omega)$ *telle que*

$$|u|_1 \leqslant c_0 |\operatorname{rot} u|\,, \tag{1.19}$$

$$|u| \leqslant c_0 |\operatorname{rot} u|\,, \tag{1.20}$$

pour tout $u \in \boldsymbol{H}^1(\Omega) \cap H_0$.

DÉMONSTRATION. On sait d'après [6] que

$$\{u \in \boldsymbol{H}^1(\Omega),\ u\cdot\nu|_\Gamma = 0\} = \{u \in \boldsymbol{L}^2(\Omega),\ \operatorname{div} u \in L^2(\Omega),\ \operatorname{rot} u \in \boldsymbol{L}^2(\Omega),\ u\cdot\nu|_\Gamma = 0\} \tag{1.21}$$

et qu'il existe $c_1 = c_1(\Omega)$ tel que

$$|u|_1 \leqslant c_1\{|u| + |\operatorname{div} u| + |\operatorname{rot} u|\}\,, \tag{1.22}$$

pour tout u dans l'espace (1.21).

L'inégalité (1.19) est donc conséquence immédiate de (1.20) et (1.22).

Pour prouver (1.20) on procède par l'absurde: si (1.20) est faux, il existe une suite $u_m \in \boldsymbol{H}^1(\Omega) \cap H_0$, telle que

$$|u_m| > m|\operatorname{rot} u_m|\,, \qquad \forall m\,. \tag{1.23}$$

On peut supposer que $|u_m| = 1$. Alors d'après (1.22) u_m est bornée dans $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$. On peut extraire une sous-suite aussi notée u_m, qui converge faiblement dans $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$ vers $u \in \boldsymbol{H}^1(\Omega) \cap H_0$; la convergence a lieu dans $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ fort et donc $|u| = 1$. D'autre part d'après (1.23) $\operatorname{rot} u = 0$, si bien que $u \in H_0 \cap \operatorname{Ker}(\operatorname{rot} u)$, et donc $u = 0$, en contradiction avec $|u| = 1$. ■

LEMME 1.7. $\operatorname{rot} \boldsymbol{H}^1(\Omega)$ *est fermé dans* $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ *si* $n = 3$ (*dans* $L^2(\Omega)$ *si* $n = 2$).

DÉMONSTRATION. D'après (1.19), rot est un isomorphisme de $\boldsymbol{H}^1(\Omega) \cap H_0$ dans $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$. ■

Caractérisation de $(\operatorname{rot} \boldsymbol{H}^1(\Omega))^\perp$.

On note $(\operatorname{rot}\ \boldsymbol{H}^1(\Omega))^\perp$, l'orthogonal dans $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ de $\operatorname{rot}(\boldsymbol{H}^1(\Omega))$, $(n = 3)$.

PROPOSITION 1.2. *Si* $n = 3$,
$(\operatorname{rot} \boldsymbol{H}^1(\Omega))^\perp = \{u \in \boldsymbol{L}^2(\Omega),\ u = \operatorname{grad} p,\ p \in H^1(\Omega),\ p = \textit{constante sur chaque } \Gamma_i\}$.

DÉMONSTRATION. Si $u \in (\operatorname{rot} \boldsymbol{H}^1(\Omega))^\perp$, alors

$$(u, \operatorname{rot} \varphi) = 0 , \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)^3 ,$$

et donc $\operatorname{rot} u = 0$.

Ensuite comme $u \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$ et $\operatorname{rot} u \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$, on peut, d'après [6] définir $u \wedge \nu$ sur Γ et

$$(1.24) \qquad (u, \operatorname{rot} \varphi) = (\operatorname{rot} u, \varphi) + \int_\Gamma (u \wedge \nu) \varphi \, d\Gamma , \quad \forall \varphi \in \boldsymbol{H}^1(\Omega) .$$

Alors

$$(u, \operatorname{rot} \varphi) = \int_\Gamma (u \wedge \nu) \varphi \, d\Gamma = 0 , \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega) ,$$

si bien que $u \wedge \nu = 0$ sur Γ, et

$$(\operatorname{rot} \boldsymbol{H}^1(\Omega))^\perp = \{ u \in \boldsymbol{L}^2(\Omega), \ \operatorname{rot} u = 0, \ u \wedge \nu|_\Gamma = 0 \} .$$

On peut encore préciser: pour un tel u, $\operatorname{rot} u = 0$, et donc $u = \operatorname{grad} p$, $u \in H_c \oplus G$. Comme $\operatorname{grad} p = (\partial p / \partial \nu) \nu + \nabla_\tau p$, où $\nabla_\tau p$ est la composante tangentielle de $\operatorname{grad} p$, $u \wedge \nu|_\Gamma = 0$ signifie

$$\nabla_\tau p = 0 \quad \text{sur } \Gamma ,$$

si bien que p est constant sur chaque Γ_i. On voit encore que $P_{H_c}(\operatorname{grad} p)$ est nécessairement nul et donc $p \in H^1(\Omega)$.

Le résultat suit, la réciproque étant facile. ■

On peut à présent caractériser $\operatorname{rot}(\boldsymbol{H}^1(\Omega))$.

PROPOSITION 1.3. *Sous les hypothèses* (1.1) *et* (1.2), *et si* $n = 3$,

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{H}^1(\Omega)) = \left\{ u \in \boldsymbol{L}^2(\Omega), \ \operatorname{div} u = 0, \ \int_{\Gamma_i} u \cdot \nu \, d\Gamma = 0, \ \forall i \right\} .$$

DÉMONSTRATION. Soit Y l'espace à droite dans l'égalité ci-dessus. Comme $\operatorname{rot} \boldsymbol{H}^1(\Omega)$ est fermé, il suffit de voir que $Y = (\operatorname{rot} \boldsymbol{H}^1(\Omega))^{\perp\perp}$. Or si $v = \operatorname{grad} p \in$ $\in (\operatorname{rot} \boldsymbol{H}^1(\Omega))^\perp$, et si $u \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$, $\operatorname{div} u = 0$, alors

$$\begin{aligned}(u, v) &= \int_\Omega u \cdot \operatorname{grad} p \, dx = \\ &= \int_\Gamma u \cdot \nu p \, d\Gamma = \\ &= \sum_i p(\Gamma_i) \int_{\Sigma_i} u \cdot \nu \, d\Gamma ,\end{aligned}$$

$p(\Gamma_i) =$ valeur de p sur Γ_i. Comme les $p(\Gamma_i)$ sont des nombres arbitraires, le résultat suit. ■

REMARQUE 1.5. Lorsque $n = 2$, on a des résultats analogues avec les mêmes démonstrations pour $\operatorname{rot} H^1(\Omega)$ et $(\operatorname{rot} H^1(\Omega))^\perp$. ■

1.4. *Remarque sur la régularité.*

On peut préciser un peu le résultat de Duvaut-Lions [6] en (1.21), (1.22).

PROPOSITION 1.4. *Soit Ω un ouvert borné de R^n, $n = 2, 3$, et soit m un entier $\geqslant 1$. On suppose que* (1.1) *et* (1.2) *ont lieu avec $r \geqslant m + 1$. Alors*

$$(1.25)\qquad \boldsymbol{H}^m(\Omega) = \\ = \{u \in \boldsymbol{L}^2(\Omega),\ \operatorname{rot} u \in \boldsymbol{H}^{m-1}(\Omega),\ \operatorname{div} u \in H^{m-1}(\Omega),\ u\cdot\nu| \in H^{m-\frac12}(\Gamma)\}$$ (2)

et il existe $c_2 = c_2(m, \Omega)$ tel que

$$(1.26)\qquad |u|_m \leqslant c_2\{|u| + |\operatorname{rot} u|_{m-1} + |\operatorname{div} u|_{m-1} + |u\cdot\nu|_{H^{m-\frac12}(\Gamma)}\},$$

pour tout $u \in \boldsymbol{H}^m(\Omega)$.

DÉMONSTRATION. i) On commence par le cas $m = 1$. L'espace à droite dans (1.25) contient $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$ et il faut donc prouver l'inclusion inverse. Soit u dans cet espace et $\operatorname{grad} p$ la projection de u sur G. On sait que p est une solution du problème de Neumann

$$(1.27)\qquad \Delta p = \operatorname{div} u \quad \text{dans } \Omega, \qquad \frac{\partial p}{\partial \nu} = u\cdot\nu \quad \text{sur } \Gamma.$$

Alors $v = u - \operatorname{grad} p$ vérifie $v \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$, $\operatorname{div} v \in L^2(\Omega)$, $\operatorname{rot} v \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$ et $\nu\cdot v|_\Gamma = 0$ et donc $v \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$ d'après (1.21) et u aussi puisque $p \in H^2(\Omega)$ d'après [1]. L'inégalité (1.26) résulte ensuite de l'inégalité (1.22) pour v et de ce que (cf. [1]):

$$\|p\|_{H^2(\Omega)/R} \leqslant c_3 \left\{ |\Delta p|_{L^2(\Omega)} + \left|\frac{\partial p}{\partial \nu}\right|_{H^{1/2}(\Gamma)} \right\}.$$

ii) On procède par induction lorsque $m > 1$.

(2) Pour la définition des $H^s(\Gamma)$, cf. [23].

On suppose (1.25) et (1.26) démontrés à l'ordre $m-1$. Il faut d'abord montrer que si u est dans l'espace de droite dans (1.25) alors $u \in \boldsymbol{H}^m(\Omega)$. Par l'hypothèse d'induction, on a déjà $u \in \boldsymbol{H}^{m-1}(\Omega)$. Si D^{m-1} est un opérateur de dérivation d'ordre $m-1$, on voit que $v = D^{m-1}u$ vérifie:

$$\left\{\begin{array}{l} v \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)\,, \qquad \operatorname{rot} v \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)\,, \qquad \operatorname{div} v \in L^2(\Omega)\,, \\ v \cdot \nu = D^{m-1}(u \cdot \nu) - \sum_{i=1}^{m-1} \binom{i}{m-i} D^i \nu D^{m-1-i} u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\,, \end{array}\right.$$

et donc d'après la première partie, $v \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$. Il en résulte que $u \in \boldsymbol{H}^m(\Omega)$ et (1.26) est facile. ■

REMARQUE 1.6. i) Cette proposition peut se déduire aussi directement de Agmon-Douglis-Nirenberg [1].

ii) On peut remplacer (1.26) par

$$|u - P_{H_c} u|_m \leqslant c_3 \{|\operatorname{rot} u|_{m-1} + |\operatorname{div} u|_{m-1} + |u \cdot \nu|_{H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma)}\}\,. \tag{1.28}$$

1.5. *Application aux équations de Navier Stokes stationnaires non homogènes.*

On s'intéresse à l'existence de solutions de (0.1)-(0.3) lorsque f et φ sont donnés.

THÉORÈME 1.1. *On suppose que* $n = 2$ *ou* 3, *et que* (1.1) *et* (1.2) *sont satisfaits. On suppose que* $f \in \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)$ *et* $\varphi \in \boldsymbol{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *sont donnés avec*

$$\int_{\Gamma_i} \varphi \cdot \nu \, d\Gamma = 0\,, \qquad \forall i\,. \tag{1.29}$$

Alors le problème (2.1)-(2.3) *possède au moins une solution* $u \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$, *et* $p \in L^2(\Omega)$.

DÉMONSTRATION. Le résultat est établi dans J. L. Lions [22] (cf. aussi [14]), lorsque φ est donné sous la forme suivante:

$$\varphi = \operatorname{rot} F_{|\Gamma}\,, \qquad F \in \boldsymbol{H}^2(\Omega)\,. \tag{1.30}$$

Nous allons montrer qu'un tel φ vérifie (2.5).

Tout d'abord on sait qu'il existe $\psi \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$, tel que $\operatorname{div} \psi = 0$ et $\varphi = \psi_{|\Gamma}$: il suffit par exemple (cf. [35]) de résoudre le problème de Stokes non homogène

$$\{-\Delta\psi + \operatorname{grad} \pi = 0,\ \operatorname{div} \psi = 0,\ \psi = \varphi \text{ sur } \Gamma\}\,.$$

D'après (1.29), le Lemme 1.5 et la Proposition 1.3, il existe $F \in H_0 \cap \cap \boldsymbol{H}^1(\Omega)$ tel que $\operatorname{rot} F = \psi$. Observant que $\operatorname{rot} F \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$ et invoquant la Proposition 1.4, on voit que $F \in \boldsymbol{H}^2(\Omega)$ et (2.5) est donc bien vérifiée. ■

REMARQUE 1.7. Pour f et φ donnés plusieurs fois continûment différentiables, φ vérifiant (1.29), J. Leray établit en [19] l'existence de solutions de (0.1)-(0.3) qui sont également plusieurs fois continûment différentiables.

2. – Structure analytique de l'ensemble des solutions.

Nous démontrons dans ce paragraphe que, pour ν, f, φ fixés, l'ensemble des solutions de (0.1)-(0.3) est un ensemble C-analytique réel.

2.1. *Un lemme d'analyticité.*

Nous aurons besoin du lemme ci-après

LEMME 1.1. *Soient X et Y des espaces de Banach complexes. Soient $\mathcal{O}_0$ un ensemble ouvert de X, $\mathcal{O}_1$ un ensemble fermé de Y, et $\mathcal{O}_1'$ un voisinage ouvert de $\mathcal{O}_1$. On se donne une application analytique T de $\mathcal{O}_0 \times \mathcal{O}_1'$ dans Y telle que*

$$\|T(x, y) - T(x, y')\|_Y \leqslant c\|y - y'\|_Y, \qquad \forall x \in \mathcal{O}_0, \ \forall y, \ y' \in \mathcal{O}_1', \tag{2.1}$$

où $c < 1$.

Alors pour tout $x \in \mathcal{O}_0$, il existe $y \in \mathcal{O}_1$ unique tel que $T(x, y) = y$, et l'application $x \mapsto y$ de $\mathcal{O}_0$ dans Y est analytique.

DÉMONSTRATION. L'existence et l'unicité de y résultent évidemment du théorème du point fixe pour applications contractantes. D'après M. Hervé [10] il suffit de vérifier que l'application $x \mapsto y$ est Fréchet différentiable.

Vérifions pour commencer la continuité; si $y_1 = y(x_1)$, $y_0 = y(x_0)$, nous avons

$$y_1 - y_0 = T(x_1, y_1) - T(x_0, y_0)$$

$$\begin{aligned} \|y_1 - y_0\|_Y &\leqslant \|T(x_1, y_1) - T(x_1, y_0)\|_Y + \|T(x_1, y_0) - T(x_0, y_0)\|_Y \\ &\leqslant c\|y_1 - y_0\|_Y + \|T(x_1, y_0) - T(x_0, y_0)\|_Y . \end{aligned}$$

D'où

$$\|y_1 - y_0\|_Y \leqslant \frac{1}{1 - c}\|T(x_1, y_0) - T(x_0, y_0)\|_Y , \tag{2.2}$$

et la continuité en résulte.

Nous notons T'_x et T'_y les différentielles partielles de T en x et y; d'après (2.1) $\|T'_y\|_{\mathcal{L}(Y)} \leqslant c$, et $I - T'_y$ est donc inversible, l'inverse

$$(I - T'_y(x, y))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (T'_y(x, y))^n ,$$

est une fonction analytique de $\mathcal{O}_0 \times \mathcal{O}'_1$ dans $\mathcal{L}(Y)$. Nous allons voir que

$$y'(x) = (I - T'_y(x, y))^{-1} T'_x(x, y) . \tag{2.3}$$

Posons $\chi = (I - T'_y(x, y))^{-1} T'_x(x, y) \cdot (x_1 - x)$. Alors

$$\begin{aligned} y_1 - y - \chi &= T(x_1, y_1) - T(x, y) - T'_y(x, y)\chi - T'_x(x, y) \\ &= T'_y(x, y)\cdot(y_1 - y - \chi) + \big(T'_x(x, y_1) - T'_x(x, y)\big)(x_1 - x) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 , \end{aligned}$$

où

$$\varepsilon_1 = T(x, y_1) - T(x, y) - T'_y(x, y)(y_1 - y) ,$$

$$\varepsilon_2 = T(x_1, y_1) - T(x, y_1) - T'_x(x, y_1)(x_1 - x) ,$$

$$\big(\|\varepsilon_1\|_Y / \|y_1 - y\|_Y\big) \to 0 \quad \text{quand } y_1 \to y \quad \text{et donc par (2.2)},$$

$$\big(\|\varepsilon_1\|_Y / \|x_1 - x\|_Y\big) \to 0 \quad \text{quand } x_1 \to x , \quad \text{et}$$

$$\big(\|\varepsilon_2\|_Y / \|x_1 - x\|_Y\big) \to 0 \quad \text{quand } x_1 \to x .$$

Ainsi

$$\|(I - T'_y(x, y))^{-1}(y_1 - y - \chi)\|_Y / \|x_1 - x\|_X \to 0$$

quand $x_1 \to x$ et (2.3) en résulte. ∎

2.2. *La méthode de Lyapounov-Schmidt.*

Nous aurons à utiliser la méthode de Lyapounov-Schmidt dans le contexte ci-après.

Nous nous donnons un espace de Hilbert complexe $\mathcal{H}$ et un opérateur linéaire fermé non borné de domaine $D(\mathcal{A})$. Nous supposons $\mathcal{A}$ injectif et $\mathcal{A}^{-1}$ continu; alors $D(\mathcal{A})$ est un espace de Hilbert pour la norme $|\mathcal{A}u|_{\mathcal{H}}$ et $\mathcal{A}$ est un isomorphisme de $D(\mathcal{A})$ sur $\mathcal{H}$. Soient P et Q deux opérateurs de projection orthogonale dans $D(\mathcal{A})$ et $\mathcal{H}$, qui commutent avec $\mathcal{A}$, et tels que $P + Q = I$.

Soit encore Ξ un espace de Banach complexe, $\mathcal{O}$ un ouvert de Ξ et $\mathcal{T}$ une application analytique de $D(\mathcal{A})\times\mathcal{O}$ dans $\mathcal{H}$ telle que pour tout $r>0$,

$$|\mathcal{T}(\xi+\delta',\theta)-\mathcal{T}(\xi+\delta,\theta)|_{\mathcal{H}}\leqslant c|\mathcal{A}(\delta'-\delta)|_{\mathcal{H}}, \tag{2.4}$$

quels que soient $\theta\in\mathcal{O}$, $\xi\in PD(\mathcal{A})$, δ', $\delta\in QD(\mathcal{A})$ avec $|\mathcal{A}\xi|_{\mathcal{H}}\leqslant r$, $|\mathcal{A}\delta'|_{\mathcal{H}}\leqslant r$, $|\mathcal{A}\delta|_{\mathcal{H}}\leqslant r$, où $c=c(r,P,Q,\mathcal{T})<1$.

Nous nous intéressons aux $u\in D(\mathcal{A})$ tels que

$$\mathcal{A}u=\mathcal{T}(u,\theta), \tag{2.5}$$

θ étant fixé dans $\mathcal{O}$ et $|\mathcal{A}u|<r$, $r>0$ fixé. Posant $\xi=Pu$ et $\delta=Qu$, nous voyons que ξ et δ vérifient

$$\mathcal{A}\delta=Q\mathcal{T}(\xi+\delta,\theta) \tag{2.6}$$

$$\mathcal{A}\xi=P\mathcal{T}(\xi+\delta,\theta) \tag{2.7}$$

avec $|\mathcal{A}\xi|<r$, $|\mathcal{A}\delta|<r$. D'après le Lemme 2.1, appliqué avec $X=PD(\mathcal{A})\times\Xi$,

$$\mathcal{O}_0=\{(\xi,\theta),\xi\in PD(\mathcal{A}),\ |\mathcal{A}\xi|_{\mathcal{H}}<r,\ \theta\in\mathcal{O}\},\qquad Y=QD(\mathcal{A}),$$
$$\mathcal{O}_1=\{\delta,\delta\in QD(\mathcal{A}),\ |\mathcal{A}\delta|_{\mathcal{H}}\leqslant r\},\quad \mathcal{O}_1'=\{\delta,\delta\in QD(\mathcal{A}),\ |\mathcal{A}\delta|_{\mathcal{H}}<r+1\},$$

l'équation (2.6) définit une application analytique $(\xi,\theta)\mapsto\delta=\delta(\xi,\theta)$ de $\mathcal{O}_0$ dans $QD(\mathcal{A})$. Ainsi pour toute solution u de (2.5) vérifiant $|\mathcal{A}u|_{\mathcal{H}}<r$, $\xi=Pu$ et $\delta=Qu$ vérifient $|\mathcal{A}\xi|_{\mathcal{H}}<r$, $|\mathcal{A}\delta|_{\mathcal{H}}<r$ et

$$\mathcal{A}\xi=P\mathcal{T}(\xi+\delta(\xi,\theta),\theta). \tag{2.8}$$

Réciproquement pour de tels ξ et δ, $u=\xi+\delta$ est une solution de (2.5) qui ne vérifie pas nécessairement $|\mathcal{A}u|_{\mathcal{H}}<r$. Il y aura équivalence complète entre (2.5) et (2.8) si on sait a priori que toute solution u de (2.5) vérifie $|\mathcal{A}u|_{\mathcal{H}}<r$.

REMARQUE 2.1. Ce qui précède s'étend aussi au cas réel lorsque les données peuvent être complexifiées. Supposons que $\mathcal{H}$ soit un Hilbert *réel*, et soit $\mathcal{H}_C$ l'espace complexifié de $\mathcal{H}$ et soient $\mathcal{A}_C$, P_C, Q_C, les opérateurs dans $\mathcal{H}_C$ qui sont les extensions linéaires de $\mathcal{A}$, P, Q; $D(\mathcal{A}_C)$ de domaine de $\mathcal{A}_C$ dans $\mathcal{H}_C$ est le complexifié de $D(\mathcal{A})$. Soit Ξ_C l'espace complexifié de Ξ et supposons qu'il existe une application analytique $\mathcal{T}_C$ de $D(\mathcal{A}_C)\times\mathcal{O}_C$ dans $\mathcal{H}_C$ où $\mathcal{O}_C$-est un ouvert de Ξ_C contenant $\mathcal{O}$, qui coïncide avec $\mathcal{T}$ sur $D(\mathcal{A})\times\mathcal{O}$, et telle que

$$|\mathcal{C}_c(\xi+\delta',\theta)-\mathcal{C}_c(\xi+\delta,\theta)|_{\mathcal{H}_c}\leqslant c|\mathcal{A}_c(\delta'-\delta)|_{\mathcal{H}_c}, \tag{2.9}$$

quels que soient $\theta\in\mathcal{O}_c$, $\xi\in P_cD(\mathcal{A}_c)$, δ', $\delta\in Q_cD(\mathcal{A}_c)$ avec $|\mathcal{A}_c\xi|_{\mathcal{H}_c}\leqslant r$, $|\mathcal{A}_c\delta'|_{\mathcal{H}_c}\leqslant r$, $|\mathcal{A}_c\delta|_{\mathcal{H}_c}\leqslant r$, où $c=c(r,P_c,Q_c,\mathcal{A}_c)<1$.

Dans ces conditions l'équation

$$\mathcal{A}_c\delta=Q_c\mathcal{C}_c(\xi+\delta,\theta), \tag{2.10}$$

définit une application analytique $\{\xi,\theta\}\mapsto\delta=\delta(\xi,\theta)$ qui est réelle si ξ et θ sont réels, et, dans les conditions qui ont été précisées ci-dessus, l'équation (2.5) et l'équation (2.8) dans le champ réel sont équivalentes. ■

2.3. *Rappel sur les équations de Navier Stokes stationnaires.*

Nous reprenons les notations introduites dans la Section 1.1, et certaines notations de [9]. Si V' désigne le dual de V, alors H peut être identifié à un sous espace de V', et

$$V\subset H\subset V', \tag{2.11}$$

les injections étant continues et chaque espace étant dense dans le suivant. Nous appelons A l'isomorphisme canonique de V sur V' et $D(A)$ son domaine dans H.

Il est équivalent de dire que $Au=f$, ou qu'il existe $p\in L^2(\Omega)$ tels que u, p, soient solution du problème de Stokes homogène

$$\begin{cases} -\Delta u+\operatorname{grad}p=f, \quad \operatorname{div}u=0 \quad \text{dans } \Omega \\ u=0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.12}$$

On sait (cf. [1], [4], [39]) que $D(A)=V\cap \boldsymbol{H}^2(\Omega)$ et que $|Au|$ est sur $D(A)$ une norme équivalente à celle induite par $\boldsymbol{H}^2(\Omega)$,

$$c_4^{-1}|u|_2\leqslant|Au|\leqslant c_4|u|_2, \quad \forall u\in D(A), \tag{2.13}$$

où comme précédemment les constantes c_i, c_i', ne dépendent que de Ω.

Comme A^{-1} est compact dans H, il existe une base orthonormée dans H, $\{w_m\}_{m=1}^{\infty}$, telle que

$$Aw_m=\lambda_m w_m, \quad m\geqslant1, \quad \text{et } 0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\ldots. \tag{2.14}$$

Nous avons

$$\lambda_m \geqslant c_5 m^{2/n}, \qquad m \geqslant 1. \tag{2.15}$$

Dans la suite P_m désigne la projection orthogonale dans H (ou aussi bien dans V, V' ou $D(A)$), sur l'espace engendré par $w_1, \dots, w_m$, et $Q_m = I - P_m$.

La forme b.

Pour u, v, w, donnés, nous posons comme d'habitude

$$b(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} u_i (D_i v_j) w_j \, dx. \tag{2.16}$$

Il est bien connu que b est trilinéaire continue sur $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$ ($n = 2$ ou 3) et que

$$\begin{cases} b(u, v, v) = 0, \qquad b(u, v, w) = -b(u, w, v) \\ \forall u \in \boldsymbol{H}^1(\Omega) \cap H, \qquad \forall v, w \in \boldsymbol{H}^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.17}$$

Pour $u, v \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$, $w \mapsto b(u, v, w)$ est une forme linéaire continue sur V dénotée $B(u, v) \in V'$:

$$\langle B(u, v), w \rangle = b(u, v, w), \qquad \forall w \in V', \tag{2.18}$$

et nous écrivons $B(u) = B(u, u)$.

En procédant comme pour le Lemme 1.1 de [9], nous établissons aisément le

LEMME 2.2. *La dimension d'espace est $n \leqslant 4$. Alors $b(u, v, w)$ est une forme trilinéaire continue sur $\boldsymbol{H}^{s_1}(\Omega) \times \boldsymbol{H}^{s_2+1}(\Omega) \times \boldsymbol{H}^{s_3}(\Omega)$, où $s_\alpha \geqslant 0$ et*

$$s_1 + s_2 + s_3 \geqslant n/2 \quad \textit{si } s_\alpha \neq n/2, \ \alpha = 1, 2, 3, \tag{2.19}$$

$$s_1 + s_2 + s_3 > n/2 \quad \textit{si } s_\alpha = n/2 \textit{ pour un } \alpha. \tag{2.20}$$

En particulier en dimension $n = 2$ ou 3, $b(u, v, w)$ est une forme trilinéaire continue sur $\boldsymbol{H}^2(\Omega) \times \boldsymbol{H}^1(\Omega)$ ou $\boldsymbol{H}^1(\Omega) \times \boldsymbol{H}^2(\Omega)$, et

$$\begin{cases} |B(u, v)| \leqslant c_6 |u|_2 |v|_1 \\ |B(u, v)| \leqslant c_6 |u|_1 |v|_2. \end{cases} \tag{2.21}$$

En vue d'une formulation précise de (0.1)-(0.3), et en raison de la condition

(1.29) nous introduisons les espaces:

$$\dot{\boldsymbol{H}}^m(\Omega) = \left\{u \in \boldsymbol{H}^m(\Omega), \int_{\Gamma_i} u \cdot \nu \, d\Gamma = 0, \ \forall i\right\}$$

$$\dot{\boldsymbol{H}}^m(\Gamma) = \left\{\psi \in \boldsymbol{H}^m(\Gamma), \int_{\Gamma_i} \psi \cdot \nu \, d\Gamma = 0, \ \forall i\right\}.$$

La recherche de solution $\boldsymbol{H}^2$ de (0.1)-(0.3) peut alors être formulée ainsi: pour φ donné dans $\dot{\boldsymbol{H}}^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ et f donné dans H, trouver $u \in \boldsymbol{H}^2(\Omega)$, tel que $\operatorname{div} u = 0$ et

$$-\nu P \Delta u + B(u) = f \tag{2.22}$$

où P est la projection orthogonale dans $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ sur H (cf. section 1.1).

Si φ est donné dans $\dot{\boldsymbol{H}}^{m+\frac{1}{2}}(\Gamma)$, on sait qu'il existe ψ unique dans $\dot{\boldsymbol{H}}^{m+1}(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} -\Delta\psi + \operatorname{grad}\pi = 0\,, \quad \operatorname{div}\psi = 0 \ \text{dans } \Omega\,, \\ \psi = \varphi \quad \text{sur } \Gamma\,. \end{cases} \tag{2.23}$$

Nous notons $\psi = \Lambda\varphi$, l'application Λ étant linéaire continue de $\dot{\boldsymbol{H}}^{m+\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $\dot{\boldsymbol{H}}^{m+1}(\Omega)$. Posant $u = \bar{u} + \Lambda\varphi$, on voit que la formulation ci-dessus du problème (0.1)-(0.3) revient à chercher $\bar{u}$ dans $D(A)$ tel que

$$\nu A\bar{u} + B(\bar{u} + \Lambda\varphi) = f\,. \tag{2.24}$$

Nous notons $S(f, \varphi, \nu)$ l'ensemble des $\bar{u} \in D(A)$ vérifiant (2.24). Diverses propriétés de $S(f, \varphi, \nu)$ établies en [9] seront rappelées en temps utile.

2.4. *Structure analytique de* $S(f, \varphi, \nu)$.

D'après [9] (cf. Remarque 1.2), l'ensemble $S(f, \varphi, \nu)$ reste borné dans $\boldsymbol{H}^2(\Omega)$, lorsque f et φ parcourent un ensemble borné de $H \times \dot{\boldsymbol{H}}^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ et $\nu \geqslant \nu_0 > 0$. Plus précisément si

$$|f| \leqslant r_1\,, \qquad |\varphi|_{\dot{\boldsymbol{H}}^{\frac{3}{2}}(\Gamma)} \leqslant r_2\,, \qquad \nu \geqslant \nu_0\,,$$

alors

$$|A\bar{u}| \leqslant \sigma_2(r_1, r_2, \nu_0) \tag{2.25}$$

où σ_2 est croissante en r_1, r_2, décroissante en ν_0.

Nous pouvons écrire (2.24) sous la forme (2.5); nous prenons $\mathcal{H} = H$, $\mathcal{A} = A$, $\Xi = H \times \dot{\boldsymbol{H}}^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times R$, avec $\theta = \{f, \varphi, \nu\} \in \Xi$. L'ouvert $\mathcal{O}$ est l'ensemble des $\theta = \{f, \varphi, \nu\}$ tels que

$$(2.26) \qquad |f| < r_1\,, \quad |\varphi|_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}(\Gamma)} < r_2\,, \quad \nu > \nu_0$$

et nous prenons $r = \sigma_2(r_1, r_2, \nu_0)$, $P = P_m$, $Q = Q_m$ où m sera précisé ultérieurement et:

$$(2.27) \qquad \mathcal{C}(\bar{u}, \theta) = \nu^{-1}(f - B(\bar{u} + \Lambda\varphi))\,.$$

Comme à la Remarque 2.1, nous considérons la forme complexifiée de (2.24); H_C, A_C, P_C, Q_C, Ξ_C sont définis comme à la Remarque 2.1. Précisons $\mathcal{O}_C$ et $\mathcal{C}_C$:

$$\mathcal{O}_C = \{\theta = (f, \varphi, \nu),\ |f|_{H_C} < r_1,\ |\varphi|_{\dot{H}_C^{\frac{3}{2}}(\Gamma)} < r_2,\ |\nu| > \nu_0\}\,,$$
$$\mathcal{C}_C(\bar{u}, \theta) = \nu^{-1}(f - B_C(\bar{u} + \Lambda_C\varphi))$$

où Λ_C et B_C sont les prolongements de Λ et B en opérateurs linéaires et bilinéaires continus.

En vue d'utiliser les résultats de la section 2.2, il reste à vérifier (2.9):

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_C(\xi + \delta', \theta) - \mathcal{C}_C(\xi + \delta, \theta) &= \nu^{-1}(B_C(\xi + \delta + \Lambda_C\varphi) - B_C(\xi + \delta' + \Lambda_C\varphi))\\ &= \nu^{-1}(B_C(\delta + \xi + \Lambda_C\varphi, \delta - \delta') +\\ &\qquad + B_C(\delta - \delta', \delta' + \xi + \Lambda_C\varphi))\,.\end{aligned}$$

D'après (2.13) et (2.19), pour $\theta \in \mathcal{O}_C$, $|A_C\xi| \leqslant r$, $|A_C\delta| \leqslant r$, $|A_C\delta'| < r$, nous avons [3]

$$\begin{aligned}|\mathcal{C}_C(\xi + \delta', \theta) - \mathcal{C}_C(\xi + \delta, \theta)| &\leqslant 2\nu_0^{-1}c_6(2r_1 + \|\Lambda\|r_2)|\delta - \delta'|_1 \ ^{(4)}\\ &\leqslant \text{(par interpolation cf. [23])}\\ &\leqslant c_7(2r_1 + \|\Lambda\|r_2)|\delta - \delta'|^{\frac{1}{2}}|\delta - \delta'|_2^{\frac{1}{2}}\\ &\leqslant \text{(par (2.13))}\\ &\leqslant c_8(2r_1 + \|\Lambda\|r_2)|\delta - \delta'|^{\frac{1}{2}}|A_C(\delta - \delta')|^{\frac{1}{2}}\,.\end{aligned}$$

(3) Nous notons encore $|\cdot|$ la norme de H_C.

(4) $\|\Lambda\| =$ norme de Λ dans $\mathcal{L}(\dot{H}^{3/2}(\Gamma), \dot{H}^2(\Omega))$, et de Λ_C dans les espaces complexifiés.

Pour tout $\delta_1 \in Q_{m_C} D(A_C)$,

$$|\delta_1| \leqslant \lambda_{m+1}^{-1} |A\delta_1| , \tag{2.28}$$

et cela nous permet de majorer la dernière quantité ci-dessus par

$$c_8(2r_1 + \|A\| r_2)\, \lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}} |A_C(\delta - \delta')| .$$

La condition (2.9) est réalisée avec $c = \frac{1}{2}$, dès que m est assez grand pour que

$$c_8(2r_1 + \|A\| r_2)\, \lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}} \leqslant \tfrac{1}{2}$$

$$\lambda_{m+1} \geqslant (2c_8(2r_1 + \|A\| r_2))^2 . \tag{2.29}$$

En conclusion, quand (2.29) a lieu quand $\theta = (f, \varphi, \nu) \in \mathcal{O}$ (cf. (2.26)), $\xi \in P_m H$, $\delta \in Q_m D(A)$, $|A\xi| \leqslant r$, $|A\delta| \leqslant r$ ($r = \sigma_2(r_1, r_2, \nu_0)$, cf. (2.25)), l'équation

$$\nu A\delta + Q_m B(\xi + \delta + \Lambda\varphi) = Q_m f , \tag{2.30}$$

définit uniquement δ comme une fonction analytique de ξ, f, φ, ν. Par ailleurs $\bar{u} = \xi + \delta$ est solution de (2.24) si et seulement si, $\xi \in P_m H$ vérifie

$$\nu A\xi + P\epsilon B(\xi + \delta(\xi, \theta) + \Lambda\varphi) = P_m f , \tag{2.31}$$

$\theta = \{f, \varphi, \nu\}$. Posons pour $\xi \in P_m H$, $\theta \in \mathcal{O}$:

$$w_m(\xi, \theta) = \nu A\xi + P_m B(\xi + \delta(\xi, \theta) + \Lambda\varphi) - P_m f . \tag{2.32}$$

La fonction w_m est analytique réelle sur $P_m H \times \mathcal{O}$, à valeurs dans $P_m H \equiv R^m$. Nous obtenons (cf. [2], [9], [25]) le

THÉORÈME 2.1. *On suppose que* $\Omega \subset R^n$, $n = 2$ *ou* 3 *vérifie* (1.1) *et* (1.2), *que* f *est donné dans* H *et* φ *est donné dans* $\dot{H}^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$, *et que* m *est assez grand pour que* (2.29) *ait lieu.*

Alors P_m *est injectif sur* $S(f, \varphi, \nu)$, *d'inverse* $P_m^{-1}\xi = \xi + \delta(\xi, \theta)$ *et* $P_m S(f, \varphi, \nu)$ *est un ensemble* $\mathcal{C}$*-analytique réel compact.*

Nous en déduisons le corollaire ci-après qu'il est intéressant de comparer aux résultats de [9]:

COROLLAIRE 2.1. *Sous les hypothèses de Théorème* 2.1, *l'ensemble* $S(f, \varphi, \nu)$ *est formé d'un nombre fini de points isolés, ou autrement il comprend au moins* *une variété analytique régulière de dimension* $\geqslant 1$ *et en particulier au moins un arc analytique de solutions.*

DÉMONSTRATION. Soit $Z = \{\xi \in P_m H, w_m(\xi, \theta) = 0\}$. Comme Z est un ensemble C-analytique réel, le Théorème de stratification de Bruhat-Whitney (cf. [2]), entraîne que

$$Z = Z_1 \cup \ldots \cup Z_k,$$

où chaque Z_i est une variété analytique non vide, régulière de dimension d_i avec $d_1 < d_2 \ldots < d_k$. Le résultat est établi si $k > 1$ ou si $k = 1$ et $\dim Z_1 > 0$; si $k = 1$ et $\dim Z_1 = 0$, alors Z_1 est formé d'un nombre fini de points isolés.

REMARQUE 2.5. Ce Corollaire montre en particulier que $S(f, \varphi, \nu)$ ne peut être formé par exemple d'une suite infinie de points. ■

REMARQUE 2.6. Si θ parcourt $\mathcal{O} \cap \Xi_1$ où Ξ_1 est un sous espace de dimension finie de Ξ, alors l'équation $w_m(\xi, \theta) = 0$, définit dans $P_m H \times \Xi_1$ une variété C-analytique réelle (cf. § 3). ■

2.5. *Comparaison de la régularité de deux différentielles.*

Nous terminons ce paragraphe par un résultat technique: comparaison des régularités des différentielles $N'_{\bar u}(\bar u, \theta)$ et $w'_{m\xi}(\xi, \theta)$, où w_m est défini en (2.32) et

$$N(\bar u, \theta) = \nu A \bar u + B(\bar u + \Lambda\varphi), \quad \xi = P_m \bar u. \tag{2.33}$$

LEMME 2.3. $N'_{\bar u}(\bar u, \theta)$ *est injectif si et seulement si* $w'_{m\xi}(\xi, \theta)$ *est injectif,* $\xi = P_m \bar u$.

DÉMONSTRATION. Nous avons

$$\begin{aligned}
&N'_{\bar u}(\bar u, \theta)\cdot v = \nu A v + B(v, \bar u + \Lambda\varphi) + B(\bar u + \Lambda\varphi, v)\\
&Q_m N'_{\bar u}(\bar u, \theta)\cdot q = \nu A Q_m v + Q_m\big(B(v, \bar u + \Lambda\varphi) + B(\bar u + \Lambda\varphi, v)\big)\\
&w_m(\xi, \theta) = P_m[N(\xi + \delta(\xi, \theta), \theta) - f]\\
&w'_{m\xi}(\xi, \theta)\cdot\eta = P_m[N'_{\bar u}(\xi + \delta(\xi, \theta), \theta)\cdot(\eta + \delta'_{\bar u}(\xi, \theta)\cdot\eta)]\,.
\end{aligned}$$

Alors s'il existe $\eta \in P_m H$, $\eta \neq 0$, tel que $w'_{m\xi}(\xi, \theta)\cdot\eta = 0$, posant

$v = \eta + \delta'_\xi(\xi, \theta)\cdot\eta \in P_m D(A) \oplus Q_m D(A)$, nous voyons que $v \neq 0$ et que

$$N'_{\bar{u}}(\bar{u}, \theta)\cdot(\eta + \delta'_\xi(\xi, \theta)\cdot\eta) = P_m N'_{\bar{u}}(\bar{u}, \theta)\cdot v + Q N'_{\bar{u}}(\bar{u}, \theta)\cdot v = 0\,.$$

Réciproquement, par différentiation en ξ de (2.30) nous voyons que

$$\begin{aligned}(2.34)\qquad \nu A\delta'_\xi\cdot\eta + Q_m B(\xi + \delta + \Lambda\varphi, \eta + \delta'_\xi\cdot\eta) &+ \\ + Q_m B(\eta + \delta'_\xi\cdot\eta, \xi + \delta + \Lambda\varphi) &= 0\,,\end{aligned}$$

où $\delta = \delta(\xi, \theta)$, $\delta'_\xi\cdot\eta = \delta'_\xi(\xi, \theta)\cdot\eta$, $\theta = (f, \varphi, \nu)$. En outre par une remarque faite à la section 2.1, pour tout η fixé, il existe χ unique dans $Q_m D(A)$ tel que

$$\nu A\chi + Q_m B(\xi + \delta + \Lambda\varphi, \eta + \chi) + Q_m B(\eta + \chi, \xi + \delta + \Lambda\varphi) = 0$$

et $\chi = \delta'_\xi(\xi, \theta)\cdot\eta$.

Si alors il existe $v \in D(A)$, $v \neq 0$ tel que $N'_{\bar{u}}(\bar{u}, \theta)\cdot v = 0$, en posant $\eta = P_m v$, nous voyons que $Q_m v = \delta'_\xi(\xi, \theta)\cdot\eta$ $(\xi = P_m\bar{u})$. Il s'ensuit que $\eta \neq 0$ sans quoi v serait nul, et l'égalité $w'_{m\xi}(\xi, \theta)\cdot\eta = 0$ s'obtient simplement en appliquant P_m à l'égalité $N'_{\bar{u}}(\bar{u}, \theta)\cdot(\eta + \delta'_\xi(\xi, \theta)\cdot\eta) = 0$.

3. – Généricité et bifurcation.

3.1. *Propriétés génériques de $S(f, \varphi, \nu)$.*

Dans [9], nous avons établi deux propriétés génériques de $S(f, \varphi, \nu)$:

(3.1) Pour tout $\nu > 0$, il existe $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\nu)$ fermé rare de $H \times \dot{\boldsymbol{H}}^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$, et pour tout $\{f, \varphi\} \in H \times \dot{\boldsymbol{H}}^{\frac{3}{2}}(\Gamma)\setminus\mathfrak{R}$, $S(f, \varphi, \nu)$ est fini.

(3.2) Pour tout $\nu > 0$, et φ fixé dans $\dot{\boldsymbol{H}}^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$, il existe $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\varphi, \nu)$, fermé rare de H, tel que pour tout $f \in H\setminus\mathfrak{R}$, $S(f, \varphi, \nu)$ est fini.

Nous nous proposons de préciser ces résultats. Nous faisons usage du Lemme ci-après que nous devons à N. Boboc [5].

LEMME 3.1. *Soient X un espace topologique séparable métrisable et Y un espace de Baire; soit F une partie fermée de $X \times Y$. Soit $D = \{x \in X$, F_x est*

[5] Communication personnelle.

rare dans $Y\}$ où:

$$F_x = \{y \in Y, (x, y) \in F\}, \qquad \forall x \in X$$

$$F_y = \{x \in X, (x, y) \in F\}, \qquad \forall y \in Y.$$

Supposons que D soit dense dans X. Alors il existe G, un G_δ partout dense de Y, tel que pour tout $y \in G$, F_y soit rare et fermé dans X.

DÉMONSTRATION. Comme X est séparable et métrisable, il existe une partie D_0 dénombrable de D qui est dense dans X. Par hypothèse, pour $x \in D_0$, F_x est rare et fermé et $G_x = Y \setminus F_x$ est un ouvert dense de Y. Soit

$$G = \bigcap_{x \in D_0} G_x;$$

comme Y est un espace de Baire, G est un G_δ dense de Y et si $y \in G$, $X \setminus F_y$, qui est ouvert dans X est dense puisqu'il contient D_0; ainsi F_y est rare dans X, tout $y \in G$. ■

THÉORÈME 3.1. *Nous supposons que $\Omega \subset R^n$ ($n = 2, 3$) vérifie* (1.1) *et* (1.2). *Soit X une partie quelconque de $\dot{\boldsymbol{H}}^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$. Alors pour tout $\nu > 0$, il existe un G_δ dense de H, $G_1 = G_1(X, \nu)$, et pour tout $f \in G$, $S(f, \varphi, \nu)$ est fini pour tous les φ de X qui n'appartiennent pas à une partie rare et fermée de X.*

DÉMONSTRATION. Nous remarquons que pour $u \in \dot{\boldsymbol{H}}^2(\Omega)$, il existe $\bar{u} \in D(A)$ et $\varphi \in \dot{\boldsymbol{H}}^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ uniques tels que $\bar{u} = u + \Lambda\varphi$ et $u \mapsto \{\bar{u}, \varphi\}$ est un isomorphisme de $\dot{\boldsymbol{H}}^2(\Omega)$ sur $D(A) \times \dot{\boldsymbol{H}}^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$.

Nous appliquons le Lemme 3.1 avec l'ensemble X donné dans l'énoncé, $Y = H$ et F l'ensemble des valeurs singulières de l'application

$$N_1: u \equiv \{\bar{u}, \varphi\} \mapsto \{N(\bar{u}, \varphi), \varphi\}$$

où $N(\bar{u}, \varphi) = \nu A\bar{u} + B(\bar{u} + \Lambda\varphi)$ (cf. section 2.5; la dépendance de N en ν n'est pas explicitée). La différentielle N_1' de N_1 étant égale à

$$\begin{pmatrix} N'_{\bar{u}} & N'_\varphi \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$\{f, \varphi\}$ est valeur régulière de N_1 si et seulement si f est valeur régulière de $\bar{u} \mapsto N(\bar{u}, \varphi)$. L'ensemble F est fermé et d'après [9], pour tout φ de X (ou tout φ de $\dot{\boldsymbol{H}}^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$), F_φ est rare dans H. Il existe donc G, G_δ dense de H

tel que, pour tout $f \in G$, F_f soit rare dans X. Si $\varphi \in X \setminus F_f$, alors $\{f, \varphi\}$ est une valeur régulière de N_1, et on sait dans ce cas que $S(f, \varphi, \nu)$ est fini (cf. [9]). Le résultat suit. ■

Voici à présent un autre résultat de ce type

THÉORÈME 3.2. *Nous supposons que $\Omega \subset R^n$ ($n = 2, 3$) vérifie* (1.1) *et* (1.2). *Soit φ fixé dans $\dot{\boldsymbol{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.*

Alors il existe un G_δ dense de H, soit $G_2 = G_2(\varphi)$, et pour tout $f \in G_2(\varphi)$, $S(f, \varphi, \nu)$ est fini pour tous les $\nu > 0$ qui n'appartiennent pas à un ensemble rare et fermé de R_+.

DÉMONSTRATION. Nous appliquons le Lemme 3.1, avec $X = \boldsymbol{R}_+$, $Y = H$ et F l'ensemble (fermé) des valeurs singulières de N_2:

$$N_2 \colon \{u, \nu\} \equiv \{\bar{u}, \varphi, \nu\} \mapsto \{N(\bar{u}, \varphi, \nu), \nu\}\,,$$

$N(\bar{u}, \varphi, \nu) = \nu\ A\bar{u} + B(\bar{u} + \Lambda\varphi)$. L'ensemble F est fermé puisque N_2 est Fredholm et propre (cf. J. C. Saut [32]). La différentielle N_2' de N_2 est

$$\begin{pmatrix} N'_{\bar{u}} & N'_\nu \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

et cet opérateur est surjectif si et seulement si $N'_{\bar{u}}$ est surjectif, c'est-à-dire f est une valeur régulière de $\bar{u} \mapsto N(\bar{u}, \varphi)$. Ainsi par [9], F_f est rare dans H, pour tout ν de R_+. Par le Lemme 3.1, il existe un G_δ dense de H, soit $G_2(\varphi)$, et pour tout $f \in G_2(\varphi)$, F_f est un ensemble fermé et rare de R_+. Si $\nu > 0$, $\nu \notin F_f$, $\{f, \nu\} \notin F$, et f est une valeur régulière de $\bar{u} \mapsto N(\bar{u}, \varphi, \nu)$; l'ensemble $S(f, \varphi, \nu)$ est donc fini d'après [9]. ■

REMARQUE 3.1. i) Le Théorème 3.1 répond partiellement à une question posée par J. Leray et H. Lewy: pour tout f et ν l'ensemble $S(f, \varphi, \nu)$ serait-il en général fini (i.e. fini sauf pour les φ d'un ensemble rare de $\dot{\boldsymbol{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$).

ii) De manière analogue nous ignorons si le résultat énoncé dans le Théorème 3.2 est vrai pour tout f et φ.

iii) Nous renvoyons à une remarque de [9] et à Gh. Minéa [24] pour le caractère optimal de ce type de résultat.

3.2. *Phénomènes successifs de bifurcation.*

Soit φ_0 fixé dans $\dot{\boldsymbol{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Nous considérons l'équation de Navier Stokes non homogène

$$N(\bar{u}, \varphi_0, \nu) = f\,, \tag{3.3}$$

où $N(\bar{u}, \varphi_0, \nu) = \nu \ A\bar{u} + B(\bar{u} + \Lambda\varphi_0)$, $u = \bar{u} + \Lambda\varphi_0 \in \dot{\boldsymbol{H}}^2(\Omega)$. Soit f_0 fixé dans H et n'appartenant pas à l'ensemble exceptionnel $G_2(\varphi_0)$ décrit dans l'énoncé du Théorème 3.2. Il existe alors un ensemble $E(f_0)$ rare et fermé dans R_+ et pour tout $\bar{u} \in D(A)$ et $\nu > 0$, $\nu \notin E(f_0)$, tels que $N(\bar{u}, \varphi_0, \nu) = f_0$, l'opérateur $N'_{\bar{u}}(\bar{u}, \varphi_0, \nu)$ est surjectif et donc aussi injectif puisque cet opérateur est de Fredholm d'indice 0.

Choisissons r_1 et r_2, $r_1 > |f_0|$ et $|r_2| > |\varphi_0|_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}(\Gamma)}$, et soit $\nu_0 > 0$ arbitraire. Si m est assez grand pour que (2.29) ait lieu, alors $\bar{u}$ est solution de (3.3) (avec $f = f_0$) si et seulement si $\xi = P_m\bar{u}$, vérifie $w_m(\xi, \varphi_0, \nu) = 0$ où (cf. (2.32)):

$$w_m(\xi, f_0, \varphi_0, \nu) = \nu A\xi + P_m B(\xi + \delta(\xi, f_0, \varphi_0, \nu) + \Lambda\varphi) - P_m f_0 . \tag{3.4}$$

D'après le lemme 2.3, la matrice $w'_{m\xi}(\xi, f_0, \varphi_0, \nu)$ est régulière pour tout ξ et ν tels que $w_m(\xi, f_0, \varphi_0, \nu) = 0$ et $\nu \notin E(f_0)$. Soit ξ_*, ν_* un tel couple. Dans un voisinage de $\xi = \xi_*$, $\nu = \nu_*$, $f = f_0$, l'équation

$$w_m(\xi, f, \varphi_0, \nu) = 0 \tag{3.5}$$

peut, par le théorème des fonctions implicites, être résolue en ξ, et devient équivalente à une équation

$$\xi = \psi(f, \varphi_0, \nu) . \tag{3.6}$$

L'ensemble $w_m(\xi, f_0, \varphi_0, \nu) = 0$ définit une variété C-analytique réelle Z dans $R^m \times I(\nu_0)$, $I(\nu_0) = \{\nu > \nu_0\}$. D'après le Théorème de Bruhat-Whitney [2],

$$Z = Z_0 \cup \ldots \cup Z_k ,$$

où Z_i est une variété analytique réelle régulière de dimension d_i, $d_0 < d_1 < \ldots < d_k$. Pour tout j tel que $d_j > 1$, πZ_j est inclus dans $E(f_0)$, π étant l'opérateur de projection $\{\xi, \nu\} \mapsto \nu$. S'il en était autrement on pourrait alors appliquer (3.6) avec $\nu_* \notin E(f_0)$, et $\nu_* \in \pi Z_j$; (3.6) entrainerait que Z est au voisinage de $(\xi_*, \nu_*) \in Z_j$ une variété de dimension 1, en contradiction avec l'hypothèse $Z_j \subset Z$ et $\dim Z_j > 1$.

Pour $d_j > 1$, l'ensemble πZ_j est donc rare et on vérifie alors qu'il est uniquement formé de points isolés. Par la propriété (P_3) de [9], pour tout ν assez grand, $\nu > c_7\sigma_0(r_1, r_2, \nu)$ (6), l'ensemble $S(f_0, \varphi_0, \nu)$ est réduit à un point ce qui entraîne que πZ_j est borné et donc fini (pour $\forall j$ tel que $d_j > 1$). Soient maintenant Z_0 et Z_1 les composantes de Z de dimension 0 et 1. L'ensemble Z_0 est discret et utilisant encore une forme un peu plus précise de la propriété (P_3) de [9], pour ν assez grand, l'unique élément u de

(6) D'après la Remarque 1.2 de [9], $\sigma_0(r_1, r_2, \nu)$ décroît lorsque ν croît; en consequence $\nu > c_7\sigma_0(r_1, r_2, 1) + 1$ entraîne $\nu > c_7\sigma_0(r_1, r_2, \nu)$.

$S(f_0, \varphi_0, \nu)$ est une fonction analytique de ν correspondant à l'unique composante à ν infini de Z et Z_1; dans ces conditions πZ_0 est fini lui aussi. Enfin les valeurs singulières de $\pi|_{Z_1}$ forment, d'après le Théorème de Sard un ensemble de mesure nulle. Cet ensemble est nécessairement discret; comme précédemment il ne s'accumule pas à l'infini et il est donc fini.

Finalement pour tout $\nu_0 > 0$, il existe un nombre fini de valeurs dans $\nu > \nu_0$ tels que $S(f_0, \varphi_0, \nu)$ soit infini (c'est alors une variété C-analytique de dimension $\geqslant 1$, cf. Théorème 2.1). L'ensemble complémentaire dans $\bigcup_{\nu > \nu_0} S(f_0, \varphi_0, \nu)$ est l'ensemble $Z_0 \cup Z_1$: il est formé d'une variété analytique de dimension 1 et éventuellement d'un nombre fini de points isolés.

Pour terminer, notons que, lorsque ν varie, les phénomènes de bifurcation de solution stationnaires (cf. [28]) se produisent pour des valeurs de ν appartenant à πZ_0, et donc en nombre fini à droite de ν_0, $\nu_0 > 0$ quelconque.

En résumé on a le

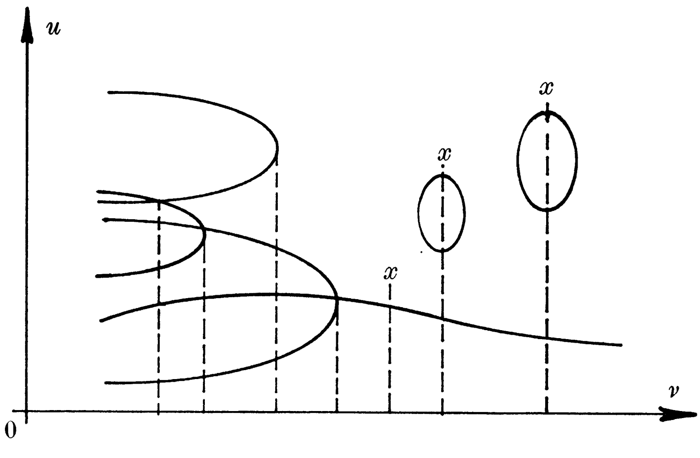
THÉORÈME 3.3. *Les hypothèses sont celles du Théorème* 3.2. *Pour tout* $f \in G_2(\varphi)$ (*ensemble* G_δ *dense de* H), *le continuum de solutions*

$$S(f, \varphi) = \bigcup_{\nu > 0} S(f, \varphi, \nu)$$

est de la forme suivante:

1) *il comprend des points isolés et des variétés C-analytiques isolées situées au-dessus de certaines valeurs de ν qui sont en nombre fini à droite de tout nombre* $\nu_0 > 0$;

2) *il comprend une* (*ou des*) *variété*(*s*) *analytique*(*s*) *de dimension* 1 *dont la projection sur l'axe des ν s'étend de* 0 *à* $+\infty$. *L'ensemble des points singuliers de ce continuum* (et donc l'ensemble de toutes les valeurs ν de bifurcation) *est fini à droite de tout nombre* $\nu_0 > 0$.



3.3. *Problème de Taylor et de Bénard.*

Tout ce qui précède s'étend avec peu de modifications au cas des écoulements de Taylor et de Bénard. Dans ce qui suit nous indiquons brièvement le principe de cette extension, et le type de résultats que l'on obtient.

Ecoulement de Taylor.

L'espace R^3 est rapporté soit aux coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3) soit aux coordonnées cylindriques d'axe Ox_3, c'est-à-dire $r = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}$, $\theta, z = x_3$. On considère dans R^3 le domaine cylindrique Ω,

$$r_1 < r < r_2\,, \qquad 0 < z < L\,, \tag{3.7}$$

où r_1, r_2, et L sont donnés, $0 < r_1 < r_2$, $0 < L$.

Nous définissons des espaces analogues aux espaces $\mathcal{V}$, V, H (cf. Lailly [15])

$$\mathcal{V}_1 = \{\varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})^3,\ \operatorname{supp}\varphi \subset]r_1, r_2[,\ \operatorname{div}\varphi = 0\}\,,$$

V_1 (resp. H_1) $=$ adhérence de $\mathcal{V}_1$ dans $\boldsymbol{H}^1_{0,1}(\Omega)$ (resp. $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$) où

$$H^1_1(\Omega) \;= \{u \in H^1(\Omega),\ u(x_1, x_2, L) = u(x_1, x_2, 0)\}\,,$$

$$H^1_{0,1}(\Omega) = \{u \in H^1_1(\Omega),\ u(x) = 0 \ \text{ si } \ x \in \Sigma\}\,,$$

$\Sigma_i = \{x \in \partial\Omega,\ x_1^2 + x_2^2 = r_i\}$, $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, et $\boldsymbol{H}^1_1(\Omega) = [H^1_1(\Omega)]^3$, $\boldsymbol{H}^1_{0,1}(\Omega) = H^1_{0,1}(\Omega)^3$. En procédant comme dans la Section 2.3, il est possible de voir que

$$V_1 \subset H_1 \subset V_1'\,, \tag{3.8}$$

les injections étant continues et chaque espace étant dense dans le suivant. Soit A_1 l'isomorphisme canonique de V_1 sur V_1' et $D(A_1) = (A_1)^{-1}H_1$. Il est possible également de définir B_1, en posant

$$\langle B_1(u, v), w\rangle = b(u, v, w)\,, \qquad \forall u, v \in \boldsymbol{H}^1_1(\Omega),\ \forall w \in V_1\,,$$

et

$$B_1(u, v) \in V_1'\,, \qquad B_1(u) = B_1(u, u)\,.$$

Les propriétés de A_1 et B_1 sont analogues à celles de A et B.

Nous considérons à présent le groupe $\mathcal{R}$ des rotations d'axe Oxz et nous désignons par V_2 et H_2, le quotient de V_1 et H_1 par $\mathcal{R}$, et d'autre part A_2, B_2, sont les analogues de A_1 et B_1 sur les espaces quotients. L'écoulement de Taylor est l'étude de l'écoulement d'un fluide incompressible dans un cylindre infini limité par les parois solides $r = r_1$ et $r = r_2$ qui sont animées de rotations uniformes de vitesses angulaires ω_1 et ω_2. Il est naturel (cf. [35]) de chercher des solutions invariantes par le groupe $\mathfrak{R}$ et qui sont périodiques en z; en appelant L la période, nous sommes conduits à un problème dont nous allons donner la formulation fonctionnelle. La fonction vitesse u est de la forme $\bar{u} + \varphi$, où (cf. Velte [37], Temam [35]) φ est de la forme:

$$\varphi = \left\{-\frac{x_2}{r} v_0(r), \frac{x_1}{r} v_0(r), 0\right\},$$

$v_0(r) = \alpha/r + \beta r$, avec

$$\alpha = \frac{(r_2 w_1 - r_1\omega_2) r_1 r_2}{r_2^2 - r_1^2}, \qquad \beta = \frac{r_1\omega_1 - r_2\omega_2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Nous noterons aussi $\varphi = \omega_1\varphi_1 + \omega_2\varphi_2$, où φ_i (resp. φ_2) correspond à $\omega_2 = 0$ et $\omega_1 = 1$ (resp. $\omega_1 = 0$ et $\omega_2 = 1$). Le problème pour $\bar{u}$ s'écrit, avec ce qui précède:

$$\nu A_2 \bar{u} + B_2(\bar{u} + \varphi) = f. \tag{3.9}$$

L'ensemble des $\bar{u}$ solutions de (3.9) dépend de f, $\omega = \{\omega_1, \omega_2\} \in R^2$, ν; il est noté $S(f, \omega, \nu)$. Il est facile de reprendre, avec peu de modifications, les raisonnements de la section 2.4 et de la section 3.1. Nous obtenons un résultat analogue au Théorème 3.2.

Théorème 3.4. *Sous les hypothèses précédents, il existe un G_δ dense de H_2, noté G, et pour tout $f \in G$, l'ensemble $S(f, \omega, \nu)$ est fini pour tous les $\nu > 0$ et $\omega_1, \omega_2 \in R$, qui ne sont pas dans un ensemble rare et fermé de $R_+ \times R^2$.*

Démonstration. Nous appliquons le Lemme 3.1 avec $X = R_+ \times R^2$, $Y = H_2$ et F l'ensemble fermé des valeurs singulières de N

$$\{\bar{u}, \omega, \nu\} \mapsto \{\nu A_2\bar{u} + B_2(\bar{u} + \varphi), \omega, \nu\}.$$

N est un opérateur C^∞, de Fredholm d'indice 0 et N' est surjectif si et seulement si la différentielle de $\bar{u} \mapsto \nu A_2\bar{u} + B_2(\bar{u} + \varphi)$ l'est. Par un raisonnement analogue à celui de [9], nous voyons que $F_{\{\omega,\nu\}}$ est rare dans H_2 pour tout $\{\omega, \nu\} \in R^2 \times R_+$ et alors, par le Lemme 3.1 il existe un G_δ dense de H_2, soit G tel que pour tout $f \in G$, F_f est un ensemble fermé rare de $R^2 \times R_+$. Si $\{\omega, \nu\} \in (R^2 \times R_+) \setminus F_f$, f est une valeur régulière de $\bar{u} \mapsto A_2\bar{u} + B_2(\bar{u} + \varphi)$, et l'ensemble $S(f, \omega, \nu)$ est donc fini.

REMARQUE 3.2. i) Nous ignorons si G peut être pris égal à H dans le Théorème 3.4. En particulier pour l'écoulement de Taylor il faudrait faire $f = 0$, alors que le résultat acquis ci-dessus vaut seulement pour des f arbitrairement petits.

ii) Nous pouvons biensûr obtenir des résultats analogues pour ω ou ν fixés.

iii) L'ensemble $S(f, \omega, \nu)$ et l'ensemble $S = \bigcup_{\omega,\nu} S(f, \omega, \nu)$ possèdent biensûr une structure analytique.

iv) Il est possible aussi d'obtenir des résultats de généricité par rapport à L.

Relativement aux phénomènes successifs de bifurcation, nous avons des résultats analogues à ceux du Théorème 3.3, pour l'un quelconque des paramètres ω_1, ω_2, ν. Par exemple

THÉORÈME 3.5. *Les hypothèses sont celles du Théorème* 3.4, $\omega_2 \in R$, $\nu \in R_+$ *sont fixés. Il existe un G_δ dense de H_2, soit $G(\omega_2, \nu)$ et pour tout $f \in G(\omega_2, \nu)$, le continuum de solutions*

$$S = \bigcup_{\omega_1 \in R} S(f, \omega_1, \omega_2, \nu),$$

est de la forme suivante:

1) *il comprend des points isolés et des variétés* C-*analytiques isolées situées au-dessus de certaines valeurs de ω_1 qui forment une suite discrète dans R*;

2) *il comprend une* (*ou des*) *variété*(*s*) *analytique*(*s*) *de dimension* 1 *dont la projection sur l'axe des ω_1, s'étend de $-\infty$ à $+\infty$. L'ensemble des points singuliers de ce continuum* (et donc l'ensemble de toutes les valeurs ω_1 de bifurcation) *est discret.*

Ecoulement de Bénard.

Il s'agit d'étudier l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible conducteur de chaleur, et compris entre les deux plans horizontaux $x_1 = -h$ et $x_1 = h$. Le plan inférieur est maintenu à une température T_0, le plan supérieur est maintenu à une température T_1, $T_0 > T_1$. Les solutions cherchées sont celles qui sont périodiques en x_2 (période $2a$) et qui sont indépendantes de x_3.

Suivant Rabinowitz [27] et Velte [38] (cf. aussi Temam [35]), le problème est réduit à la détermination de deux fonctions φ et θ qui vérifient:

$$(3.10)\qquad \left|\begin{array}{l} \Delta^2\varphi \ \ + \lambda\left(-\dfrac{\partial(\Delta\varphi,\varphi)}{\partial(x_1,x_2)}+\dfrac{\partial\theta}{\partial x_2}\right)=0\,, \\ -\Delta\theta+\lambda\left(\beta\ \dfrac{\partial(\theta,\varphi)}{\partial(x_1,x_2)}-\dfrac{\partial\theta}{\partial x_2}\right)=0\,, \end{array}\right.$$

dans $\Omega=(-1,+1)\times(-a,a)$ ($h=1$ pour simplifier).

Par ailleurs $\partial(f,g)/\partial(x_1,x_2)$ est le Jacobien de f et g par rapport à x_1 et x_2, $\beta=\nu/\mu$ (rapport des coefficients de viscosité et de conductivité, $\lambda= =\big((T_0-T_1)/2\mu\nu\big)^{\frac{1}{2}}\big)$. Enfin

$$F=\left(\frac{(T_0-T_1)\nu}{2\mu}\right)^{\frac{1}{2}}\varphi\,,\qquad T=\frac{T_1-T_0}{2}(x_1+1)+T_0+\frac{T_0-T_1}{2}\frac{\nu}{\mu}\theta\,,$$

sont respectivement le potentiel des vitesses et la température du problème physique.

Les conditions aux limites s'écrivent

$$(3.11)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \varphi(\pm1,x_2)=0\,, & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}(\pm1,x_2)=0\,, & \theta(\pm1,x_2)=0\,, \\ \dfrac{\partial^j\varphi(x_1,x_2+a)}{\partial x_2^j}=\dfrac{\partial^j\varphi(x_1,x_2-a)}{\partial x_2^j}\,, & & j=0,\dots,3\,, \\ \dfrac{\partial^j\theta(x_1,x_2+a)}{\partial x_2^j}=\dfrac{\partial^j\theta(x,x_2-a)}{\partial x_2^j}\,, & & j=0,\dots,3\,. \end{array}\right.$$

Nous considérons en fait une variante non homogène de (3.10)-(3.11), (3.10) étant remplacé par

$$(3.12)\qquad \left|\begin{array}{l} \Delta^2\varphi \ \ + \lambda\left(-\dfrac{\partial(\Delta\varphi,\varphi)}{\partial(x_1,x_2)}+\dfrac{\partial\theta}{\partial x_2}\right)=\varrho\,, \\ -\Delta\theta+\lambda\left(\beta\ \dfrac{\partial(\theta,\varphi)}{\partial(x_1,x_2)}-\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)=\sigma\,, \end{array}\right.$$

où ϱ, $\sigma\in L^2(\Omega)$ sont donnés.

Nous notons, pour j entier $\geqslant 1$,

$$H_p^j(\Omega)\ =\left\{u\in H^j(\Omega),\ \frac{\partial^l u}{\partial x_2}(x_1,x_2+a)=\frac{\partial^l u}{\partial x_1^l}(x_1,x_2-a),\ 0\leqslant l\leqslant j-1\right\},$$

$$H_{0p}^j(\Omega)=\left\{u\in H_p^j(\Omega),\ \frac{\partial^l u}{\partial x_1^l}(\pm1,x_2)=0\ ,0\leqslant l\leqslant j-1\right\}.$$

Nous introduisons l'espace $V = H^2_{0p}(\Omega)\times H^1_{0p}(\Omega)$, qui, grâce à l'inégalité de Poincaré est de Hilbert pour le produit scalaire

$$((u, u')) = \int_\Omega (\Delta\varphi\cdot\Delta\varphi' + \operatorname{grad}\theta\cdot\operatorname{grad}\theta')\,dx$$

$u = \{\varphi, \theta\}$, $u' = \{\varphi', \theta'\}$. Nous posons

$$B(u, u') = \left\{-\frac{\partial(\Delta\varphi, \varphi')}{\partial(x_1, x_2)}, \beta\frac{\partial(\theta, \varphi')}{\partial(x_1, x_2)}\right\}, \qquad B(u) = B(u, u),$$

$$C(u) = \left\{\frac{\partial\theta}{\partial x_2}, -\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right\}.$$

Le problème (3.11)-(3.12) prend alors la forme

$$Au + \lambda B(u) + \lambda Cu = f, \tag{3.13}$$

où A est l'isomorphisme canonique de V sur V' et $f = \{\varrho, \sigma\}\in L^2(\Omega)^2$. On pose $D(A) = A^{-1}(L^2(\Omega)^2)$, qui est de Hilbert pour la norme $|Au|$.

On adapte sans difficulté le travail effectué à la section 2.4. L'ensemble des solutions de (3.13) est noté $S(f, \lambda)$.

THÉORÈME 3.6. *Sous les hypothèses précédentes, il existe un G_δ dense de $L^2(\Omega)^2$ noté G, et pour tout $f\in G$, l'ensemble $S(f, \lambda)$ est fini pour tous les $\lambda > 0$ qui ne sont pas dans un ensemble rare de R_+.*

THÉORÈME 3.7. *Les hypothèses sont celles du Théorème 3.6 et les différents paramètres, T_0, T_1, μ, ν, autres que λ sont fixés. Il existe un G_δ dense de $L^2(\Omega)^2$ soit G et pour tout $f\in G$, le continuum de solutions*

$$S = \bigcup_{\lambda>0} S(f, \lambda)$$

est de la forme suivante:

1) *il comprend des points isolés et des variétés C-analytiques isolées situées au-dessus de certaines valeurs de λ qui forment une suite discrète dans $[0, +\infty)$;*

2) *il comprend une (ou des) variété(s) analytique(s) de dimension 1 dont la projection sur l'axe des λ s'étend de 0 à $+\infty$. L'ensemble des points singuliers de ce continuum* (et donc l'ensemble de toutes les valeurs λ de bifurcation) *est discret.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Agmon - A. Douglis - L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, I, II*, Comm. Pure Appl. Math., **12** (1959), pp. 623-727 et **17** (1964), pp. 35-92.

[2] F. Bruhat - H. Whitney, *Quelques propriétés fondamentales des ensembles analytiques réels*, Comm. Math. Helv., **33** (1959), pp. 132-160.

[3] H. Cartan, *Séminaire de l'Ecole Normale Supérieure*, 1951-52 et 1953-54.

[4] L. Cattabriga, *Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **31** (1961), pp. 308-340.

[5] A. Douady, *Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné*, Annales Inst. Fourier, **16** (1966), pp. 1-95.

[6] G. Duvaut - J. L. Lions, *Les inéquations variationnelles en Mécanique et en Physique*, Dunod, Paris, 1972.

[7] C. Foias, *Solutions statistiques des equations de Navier-Stokes*, Cours au Collège de France, 1974.

[8] C. Foias - R. Temam, *On the stationary statistical solutions of the Navier-Stokes equations and turbulence*, Publication Mathématique d'Orsay, n. 120-75-28, 1975.

[9] C. Foias - R. Temam, *Structure of the set of stationary solutions of the Navier-Stokes equations*, Comm. Pure Appl. Math., **30** (1977), pp. 149-164.

[10] M. Hervé, *Several Complex Variables, Local Theory*, Oxford Univ. Press and Tata Institute of Fundamental Research, 1963.

[11] E. Hopf, *Abzweigung einer Periodischen Lösung eines Differentialsystems*, Berichten der Math. Phys. Klasse der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, **94** (1942), pp. 1-22.

[12] E. Hopf, *A mathematical example displaying features of turbulence*, Comm. Pure Appl. Math., **1** (1948), pp. 303-322.

[13] E. Hopf, *Repeated branching through loss of stability, an example*, Proc. Conf. Diff. Equations, University of Maryland, 1955.

[14] O. A. Ladyzhenskaya, *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, Gordon and Breach, New York, 1969

[15] P. Lailly, *Thèse*, Université de Paris-Sud, 1976.

[16] L. Landau, *On the problem of turbulence*, Doklady Akad. Nauk, USSR, **44** (1944), pp. 311-314.

[17] L. Landau - E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, London, Pergamon Press, 1959.

[18] O. E. Lanford, III, *Bifurcation of periodic solutions into invariant Tori.: the work of Ruelle and Takens*, Lecture Notes in Math. n. 322, pp. 159-192, Springer-Verlga, 1973.

[19] J. Leray, *Etude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique*, J. Math. Pures Appl., **12** (1933), pp. 1-82.

[20] J. Leray, *Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois*, J. Math. Pures Appl., **13** (1934), pp. 331-418.

[21] J. Leray, *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace*, Acta Math., **63** (1934), pp. 193-248.

[22] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[23] J. L. LIONS - E. MAGENES, *Non homogeneous boundary value problems and applications*, Springer-Verlag, Heidelberg, New York, 1973.

[24] GH. MINÉA, *Remarques sur l'unicité de la solution stationnaire d'une équation de type Navier-Stokes*, Revue Roum. Math. Pures Appl., **21**, no. 8 (1976), pp. 1071-1075.

[25] R. NARASIMHAN, *Introduction to the theory of analytic spaces*, Lecture Notes in Math., vol. 25, Springer-Verlag (1966).

[26] J. NEČAS, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris, 1967.

[27] P. RABINOWITZ, *Existence and non uniqueness of rectangular solutions of the Bénard problem*, Arch. Rat. Mech. Anal., **29** (1968), pp. 32-57.

[28] P. RABINOWITZ, Editor, Proceeding on a Conference on Bifurcation Theory held at Madison, October 1976, Academic Press.

[29] G. DE RHAM, *Variétés différentiables*, Hermann, Paris, 1960.

[30] D. RUELLE - F. TAKENS, *On the nature of turbulence*, Comm. Math. Phys., **20** (1971), pp. 167-192 et **23** (1971), pp. 343-344.

[31] D. SATTINGER, *Topics in stability and bifurcation theory*, Lecture Notes in Math., n. 309, Springer-Verlag, 1973.

[32] J. C. SAUT, Exposé dans le séminaire d'Equations aux Dérivées Partielles non linéaires d'Orsay, 1975-76, Publication Mathématique d'Orsay, en cours de parution.

[33] R. TEMAM, *Introduction à certains problèmes de valeurs propres non linéaires*, Exposé de Séminaire rédigé par J. C. Saut, 1972.

[34] R. TEMAM, *On the theory and numerical analysis of Navier-Stokes equations*, Lecture Notes n. 9, 1973, Department of Mathematics, University of Maryland.

[35] R. TEMAM, *Navier-Stokes equations, theory and numerical analysis*, North-Holland, Amsterdam, 1977.

[36] R. TEMAM, *Turbulence and Navier-Stokes equation*, Proceeding of a Conference held at Orsay, Lecture Notes in Mathematics, vol. 565, Springer-Verlag, 1976.

[37] W. VELTE, *Stabilitäts und Vevrweigung stationärer Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichungen beim Taylor problem*, Arch. Rat. Mech. Anal., **22** (1966), pp. 1-14.

[38] W. VELTE, *Stabilitätsverhalten und Verweigung Stationärer Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichungen*, Arch. Rat. Mech. Anal., **16** (1964), pp. 97-125.

[39] I. I. VOROVICH - V. I. YUDOVICH, *Stationary flows of incompressible viscous fluids*, Mat. Sborn., **53** (1961), pp. 393-428.

Note ajoutée à la correction des épreuves.

On peut obtenir des résultats voisins des Théorèmes 3.3, 3.5 et 3.6, en appliquant le théorème de Sard-Smale avec des opérateurs de Fredholm d'indice non nul. Par exemple dans les conditions du Théorème 3.3, on peut appliquer le théorème de Smale à l'application

$$\{\bar{u}, \varphi, \nu\} \mapsto \{N(\bar{u}, \varphi, \nu), \varphi\}$$

et on obtient ainsi que $S(f, \varphi)$ est une variété analytique de dimension 1, pour tout f, φ appartenant à un ouvert dense de $H \times \dot{\boldsymbol{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Cette remarque et son incidence sur la théorie de la bifurcation sera précisée dans un travail ultérieur.