ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
*Classe di Scienze*

JOÃO-PAULO DIAS

**Sur l'existence et unicité de solutions d'un modèle approximé des équations d'évolution tridimensionnelles d'un cristal liquide nématique**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série*, tome 5, nº 1 (1978), p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1978_4_5_1_1_0>

# Sur l'existence et unicité de solutions d'un modèle approximé des équations d'évolution tridimensionnelles d'un cristal liquide nématique.

JOÃO-PAULO DIAS (*)

*dédié à Jean Leray*

**Summary.** – *In* [2] *it was presented a simplified model for the evolution equations of an incompressible nematic liquid crystal submitted to a strong homogeneous magnetic field and discussed the two dimensional case. In this paper we study the important three dimensional case where the magnetic and director fields are two dimensional, but the velocity field may be three dimensional. We show that, if the variation with time of the director field is very small, there exists an unique strong solution.*

## 1. – Introduction et énoncé des résultats.

Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\boldsymbol{R}^3$ de frontière $\Gamma$ qu'on suppose régulière. L'ouvert $\Omega$ est occupé par un cristal liquide nématique incompressible lequel est soumis, pendant l'intervalle de temps $[0, T]$, $0 < T < +\infty$, à l'action d'un champ magnétique homogène $h \in C\ ([0, T]; \boldsymbol{R}^3)$. Soient $v = v(x, t)$ le champ de vitesses du fluide, $n = n(x, t)$ le champ du directeur, $\alpha_i$, $i = 1, 2, \dots, 6$, les viscosités caractéristiques, $\pi = \pi(x, t)$ la pression,

$$f = \tfrac{1}{2}[k_{11}(\operatorname{div} n)^2 + k_{22}(n \cdot \operatorname{rot} n)^2 + k_{33}(n \times \operatorname{rot} n)^2 - \chi_A(n \cdot h)^2]$$

la densité de l'énergie libre, où les $k_{ii}$, $i = 1, 2, 3$, sont des constantes élastiques et $\chi_A > 0$ est la partie anisotrope de la susceptibilité magnétique par

(*) Faculté des Sciences de Lisbonne et C.F.M.C.
Pervenuto alla Redazione il 20 Ottobre 1976.

unité de volume. Posons

$$v_{i,j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \; A_{ij}(x) = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}), \qquad B_{ij}(v) = \frac{1}{2}(v_{j,i} - v_{i,j}).$$

En négligeant l'inértie d'orientation moléculaire (ce qui est raisonable dans le cas où $n$ varie lentement avec le temps), les équations d'évolution du cristal liquide (cf. [3], [8] et [10]) s'écrivent (avec la notation d'Einstein):

$$\text{(1.0)} \qquad \begin{cases} v_{i,i} = 0\,, \\ \varrho\left(\dfrac{\partial v_i}{\partial t} + v_j v_{i,j}\right) = \sigma_{ji,j}\,, \\ 0 = g_i + \left(\dfrac{\partial f}{\partial n_{i,j}}\right)_{,j}\,, \\ |n| = (n_i n_i)^{\frac{1}{2}} = 1\,, \end{cases}$$

plus des conditions initiales et aux limites pour $v$ et $n$ et avec $\varrho$ masse volumique du fluide,

$$\sigma_{ji} = -\pi\delta_{ji} - \frac{\partial f}{\partial n_{k,j}} n_{ki} + \sigma'_{ji}\,,$$

$$\sigma'_{ji} = \alpha_1 A_{kp}(v) n_k n_p n_j n_i + \alpha_2 \left[\frac{\partial n_i}{\partial t} + v_k n_{i,k} + B_{ik}(v) n_k\right] n_j +$$

$$+ \alpha_3 \left[\frac{\partial n_j}{\partial t} + v_k n_{j,k} + B_{jk}(v) n_k\right] n_i + \alpha_4 A_{ji}(v) + \alpha_5 A_{ik}(v) n_j n_k + \alpha_6 A_{jk}(v) n_i n_k\,,$$

$$g_i = \lambda n_i - \frac{\partial f}{\partial n_i} - \gamma_1 \left[\frac{\partial n_i}{\partial t} + v_k n_{i,k} + B_{ik}(v) n_k\right] - \gamma_2 A_{ik}(v) n_k\,,$$

où $\lambda = \lambda(x, t)$ est la tension d'orientation, $\gamma_1 = \alpha_3 - \alpha_2 \geqslant 0$ et $\gamma_2 = \alpha_6 - \alpha_5 = \alpha_2 + \alpha_3$ (cf. [13]).

Supposons maintenant que $n$ dépend uniquement du temps (hypothèse qui sera physiquement acceptable seulement si le champ magnétique homogène $h$ est assez intense et qui entraîne, en particulier, qu'on néglige l'influence des parois sur l'orientation de $n$ dans une mince couche du fluide qui lui est voisine) et posons (cf. [9] et aussi [7] pour la notion de solution turbulente):

$$V = \{u \in (H_0^1(\Omega))^3 | \operatorname{div} u = 0 \text{ dans } \Omega\}\,,$$

avec le produit scalaire $((u, v)) = \int_\Omega u_{i,j} v_{i,j}\, dx$ et norme associée $\|\cdot\|$,

$H = \{u \in (L^2(\Omega))^3 | \operatorname{div} u = 0$ dans $\Omega$ et $\nu \cdot u = 0$ sur $\Gamma$, où $\nu$ est la normale à $\Gamma\}$, avec le produit scalaire $(u, v) = \int_\Omega u_i v_i dx$ et norme associée $|\cdot|$,

$$a(n; v, w) = \alpha_4 \int_\Omega A_{ij}(v) A_{ij}(w)\, dx + (\alpha_1 - \gamma_2) \int_\Omega A_{kp}(v) n_k n_p A_{ij}(w) n_i n_j\, dx$$
$$+ 2\alpha_6 \int_\Omega A_{ik}(v) n_k A_{ij}(w) n_j\, dx + 2\alpha_3 \int_\Omega B_{ik}(v) n_k A_{ij}(w) n_j\, dx\,,$$
$$b(u, v, w) = \int_\Omega u_k\, v_{i,k}\, w_i\, dx\,.$$

Dans [2] on a vu que $v$ et $n$ solutions de (1.0) devaient alors vérifier le système

(1.1) $$v \in L^2(0, T; V)\,,$$

(1.2) $$\varrho \frac{d}{dt}(v, w) + a(n; v, w) + \varrho b(v, v, w) = 0 \qquad \text{dans } ]0, T[\,,\ \forall w \in V\,,$$

(1.3) $$v(0) = v_0\,,$$

(1.4) $$\gamma_1 \frac{dn_i}{dt} = -\chi_A (n \cdot h)^2 n_i + \chi_A (n \cdot h) h_i \qquad \text{dans } [0, T]\,,$$

(1.5) $$|n| = 1 \qquad \text{dans } [0, T]\,,$$

(1.6) $$n(0) = n_0 \qquad \text{avec } |n_0| = 1\,.$$

Le système (1.4), (1.5), (1.6) admet (pour $h$ continu) une unique solution $n \in C^1([0, T]; \boldsymbol{R}^3)$ (cf. [1]).

De plus, si $h(t) = (h_1(t), h_2(t), 0)$ dans $[0, T]$ et $n_0 = (n_{01}, n_{02}, 0)$ alors $n_3(t) = 0$ dans $[0, T]$. Dans la suite nous nous placerons dans ce cas, qui est le plus intéressant du point de vue physique, et ainsi nous supposerons toujours

(1.7) $$h_3(t) = 0 \qquad \text{dans } [0, T] \text{ et } n_{03} = 0\,.$$

Le but de ce travail est de démontrer les résultats suivants:

THÉORÈME 1. *Supposons* $\alpha_3 \leqslant 0$, $\alpha_6 \leqslant 0$ *et* $\alpha_1 + \alpha_5 + \alpha_6 \geqslant 0$. *Alors on a, sous la condition* (1.7),

(1.8) $$a(n; u, u) \geqslant \alpha \|u\|^2\,, \qquad \forall u \in V,\ \forall t \in [0, T]\,,$$

*avec*

(1.9) $$\alpha = \tfrac{1}{2}(\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6) > 0\,.$$

REMARQUE 1. Les hypothèses $\alpha_3 \leqslant 0$ et $\alpha_6 \leqslant 0$ sont vérifiées dans la majorité des cas usuels (cf. [4], [10], [12], [14]). L'inégalité $\alpha_1 + \alpha_5 + \alpha_6 \geqslant 0$ est aussi vraisemblablement vérifiée dans les cas usuels (cf. [11]).

Ajoutons que, dans le cas où $n(t) = (1, 0, 0)$ dans $[0, T]$ (qui correspond à $h(t) = (h_1(t), 0, 0)$ dans $[0, T]$ et $n_0 = (1, 0, 0)$) on peut remplacer l'inégalité $\alpha_1 + \alpha_5 + \alpha_6 \geqslant 0$ (que l'on peut aussi écrire $\alpha_1 - \gamma_2 \geqslant -2\alpha_6$), par l'inégalité plus faible $\alpha_1 - \gamma_2 \geqslant 0$, dans les hypothèses du théorème 1. L'inégalité $\frac{1}{2}(\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6) > 0$ est déduite par des considérations thermodynamiques (cf., par ex., [5], chap. 5).

Posons

$$M = \max_{t\in[0,T]} |n'(t)| , \qquad \text{où } n' = \frac{dn}{dt} , \tag{1.10}$$

$$a = \sup_{u\in H_0^1(\Omega), u\neq 0} \left[\left(\int_\Omega |u|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \Big/ \left(\int_\Omega |\text{grad } u|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}\right] , \tag{1.11}$$

$$b = \sup_{u,v\in V,\, u,v\neq 0} \left[\max_{t\in[0,T]} \left| \frac{d}{dt} a((n(t);\, u, v) \right| / M\|u\| \, \|v\| \right] , \tag{1.12}$$

si $M \neq 0$ (si $M = 0$ on pose $b = 0$).

REMARQUE 2. D'après l'inégalité de Poincaré on sait que $a \leqslant \min_{1\leqslant i\leqslant 3} (|p_i\Omega|)$, où $|p_i\Omega|$ est le diamètre de la projection de $\Omega$ sur l'axe des $x_ix_i$.

THÉORÈME 2. *Supposons vérifiées les conditions* (1.7) *et* (1.8) *pour un certain* $\alpha > 0$ *et admettons qu'on a*

$$\mu = \frac{\alpha}{\varrho} - \frac{bMa^2}{\alpha} > 0 . \tag{1.13}$$

*Soit* $v_0 \in W = V \cap (H^2(\Omega))^3$ *tel que*

$$\mu - c_1\left(\frac{\varrho}{\alpha} |v_0| \, d\right)^{\frac{1}{2}} > 0 , \tag{1.14}$$

*où* $d = (1/\varrho) c_2 \|v_0\|_W + c_3 \|v_0\|_W^2$ *et* $c_1$, $c_2$, $c_3$ *sont des constantes positives, dépendant de* $\Omega$ *et des* $\alpha_i$, *à preciser dans la démonstration.*

*Alors il existe une unique solution* $v$ *de* (1.1), (1.2), (1.3) *telle que*

$$v' = \frac{dv}{dt} \in L^2(0, T;\, V) \cap L^\infty(0, T;\, H) . \tag{1.15}$$

REMARQUE 3. La solution $v$ de (1.1), (1.2), (1.3) vérifiant (1.15) va appartenir à $C([0,T];V)$ et donc, par le théorème de Sobolev, on aura $v\in L^p\big(0,T;(L^q(\Omega))^3\big)$, $\forall p\in[1,\infty]$, $\forall q\in[1,6]$. Alors, comme dans le cas des équations de Navier-Stokes (cf. [9], chap. 1, théorème 6.9) cette solution est unique dans la classe

$$\bigcup_{q\in[4,6],2/p+3/q=1}\Big[L^2(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;H)\cap L^p\big(0,T;\ (L^q(\Omega))^3\big)\Big]\,.$$

REMARQUE 4. Regardons la condition (1.13) avec $\alpha$ donné par (1.9): la constante $\alpha$ est alors de l'ordre de $10^{-2}$ (unités C.G.S.), $\varrho\simeq 1$ et $b\leqslant 16(4|\alpha_1-\gamma_2|+3|\alpha_6|+2|\alpha_3|)\simeq 10$. Donc, pour que $\mu$ soit positif, le produit $Ma^2$ doit être au maximum, de l'ordre de $10^{-5}$ (unités C.G.S.), autrement dit, très petit. En dehors de ces conditions on risque de ne plus avoir unicité (mais seulement existence d'une solution faible $v\in L^2(0,T;V)\cap$ $\cap L^\infty(0,T;H)$, comme dans le cas des équations de Navier-Stokes).

Ajoutons qu'on déduit facilement de (1.4), (1.5),

$$(1.16)\qquad |n'|\leqslant\chi_A\gamma_1^{-1}|n\cdot h||h|\leqslant\chi_A\gamma_1^{-1}\Big[|(n\cdot h)h|(0)+2\int_0^T|h|\,|h'|dt\Big]\cdot$$
$$\cdot\exp\Big(2\chi_A\gamma_1^{-1}\int_0^T|h|^2\,dt\Big)\,.$$

D'autre part, la constante $\chi_A\gamma_1^{-1}$ est de l'ordre de $0{,}2\times10^{-5}$ (unités C.G.S.) et $\max_{t\in[0,T]}|h(t)|\simeq 10^4$.

Je remercie MM. A. F. Martins, N. A. Pedro Vaz et E. Marques de Sá pour leurs utiles suggestions.

## 2. – Démonstration des résultats.

Nous commençons par établir le

LEMME 1. *On a*

$$(2.1)\qquad \int_\Omega A_{ij}(v)A_{ij}(v)\,dx=\tfrac12\int_\Omega v_{i,j}v_{i,j}\,dx\,,\qquad \forall v\in V\,.$$

DÉMONSTRATION DU LEMME 1. Puisque l'ensemble

$$E=\{u\in(\mathcal{D}(\Omega))^3|\operatorname{div}u=0\ \text{ dans }\ \Omega\}$$

est dense dans $V$ il suffit de démontrer (2.1) pour $v\in E$. En effet, on a

$$\int v_{1,2}v_{2,1}\,dx=-\int_\Omega v_{1,21}v_2\,dx=-\int_\Omega v_{1,12}v_2\,dx=\int_\Omega v_{1,1}v_{2,2}\,dx$$

et, de même,

$$\int_\Omega v_{1,3}v_{3,1}\,dx = \int_\Omega v_{1,1}v_{3,3}\,dx\,, \qquad \int_\Omega v_{2,3}v_{3,2}\,dx = \int_\Omega v_{2,2}v_{3,3}\,dx\,,$$

d'où

$$\int_\Omega (v_{1,2}v_{2,1} + v_{1,3}v_{3,1} + v_{2,3}v_{3,2})\,dx = \int_\Omega (v_{1,1}v_{2,2} + v_{1,1}v_{3,3} + v_{2,2}v_{3,3})\,dx\,. \tag{2.2}$$

D'autre part, on a

$$0 = (v_{1,1} + v_{2,2} + v_{3,3})^2 = v_{1,1}^2 + v_{2,2}^2 + v_{3,3}^2 + 2v_{1,1}v_{2,2} + 2v_{1,1}v_{3,3} + 2v_{2,2}v_{3,3}\,,$$

d'où

$$v_{1,1}v_{2,2} + v_{1,1}v_{3,3} + v_{2,2}v_{3,3} = -\tfrac{1}{2}(v_{1,1}^2 + v_{2,2}^2 + v_{3,3}^2)\,. \tag{2.3}$$

Il vient, de (2.2) et (2.3),

$$\int_\Omega (v_{1,2}v_{2,1} + v_{1,3}v_{3,1} + v_{2,3}v_{3,2})\,dx = -\tfrac{1}{2}\int_\Omega (v_{1,1}^2 + v_{2,2}^2 + v_{3,3}^2)\,dx\,.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_\Omega A_{ij}(v)A_{ij}(v)\,dx &= \\ &= \int_\Omega (v_{1,1}^2 + v_{2,2}^2 + v_{3,3}^2 + \tfrac{1}{2}v_{1,2}^2 + \tfrac{1}{2}v_{1,3}^2 + \tfrac{1}{2}v_{2,3}^2 + v_{1,2}v_{2,1} + v_{1,3}v_{3,1} + v_{2,3}v_{3,2})\,dx = \\ &= \tfrac{1}{2}\int_\Omega v_{i,j}v_{i,j}\,dx\,,\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

Nous pouvons maintenant passer à la

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1. Soit $v \in V$, $A_{ij} = A_{ij}(v)$, $B_{ij} = B_{ij}(v)$,

$$\begin{aligned} y^2 &= (A_{11}n_1^2 + 2A_{12}n_1n_2 + A_{22}n_2^2)^2\,, \\ z^2 &= (A_{11}n_1 + A_{12}n_2)^2 + (A_{21}n_1 + A_{22}n_2)^2 + (A_{31}n_1 + A_{32}\,n_2)^2\,, \\ w &= B_{12}n_2(A_{11}n_1 + A_{12}n_2) + B_{21}n_1(A_{21}n_1 + A_{22}n_2) + \\ &\qquad + (B_{31}n_1 + B_{32}n_2)(A_{31}n_1 + A_{32}n_2)\,. \end{aligned}$$

On a

$$(2.4)\qquad a(n;v,v)=\alpha_4\int_\Omega A_{ij}A_{ij}\,dx+(\alpha_1-\gamma_2)\int_\Omega y^2\,dx+2\alpha_6\int_\Omega z^2\,dx+2\alpha_3\int_\Omega w\,dx$$
$$=\tfrac{1}{2}\alpha_4\int_\Omega v_{i,j}v_{i,j}\,dx+(\alpha_1-\gamma_2)\int_\Omega y^2\,dx+2\alpha_6\int_\Omega z^2\,dx+2\alpha_3\int_\Omega w\,dx\,,$$

par le lemme 1.

Nous allons prouver:

$$(2.5)\qquad (\alpha_1-\gamma_2)y^2+2\alpha_6 z^2\geqslant\alpha_6 A_{ij}A_{ij}\,,$$

$$(2.6)\qquad w\leqslant\tfrac{1}{4}v_{i,j}v_{i,j}\,.$$

Compte tenu du lemme 1 et du fait que $\alpha_3\leqslant 0$, le théorème est une consequence de (2.4), (2.5) et (2.6).

Commençons par la démonstration de (2.5):

Puisque, par hypothèse, on a $\alpha_1+\alpha_5+\alpha_6\geqslant 0$ et donc $\alpha_1-\gamma_2\geqslant-2\alpha_6$, il vient

$$(\alpha_1-\gamma_2)y^2+2\alpha_6 z^2\geqslant\alpha_6(-2y^2+2z^2)\,.$$

Alors, si l'on démontre

$$(2.7)\qquad -2y^2+2z^2\leqslant A_{ij}A_{ij}\,,$$

il viendra, puisque $\alpha_6\leqslant 0$,

$$(\alpha_1-\gamma_2)y^2+2\alpha_6 z^2\geqslant\alpha_6(-2y^2+2z^2)\geqslant\alpha_6 A_{ij}A_{ij}\,.$$

Il nous suffit donc d'établir (2.7). Il vient

$$-2y^2=-2A_{11}^2n_1^4-2A_{22}^2n_2^4-8A_{12}^2n_1^2n_2^2-8A_{11}A_{12}n_1^3n_2-$$
$$-8A_{22}A_{12}n_1n_2^3-4A_{11}A_{22}n_1^2n_2^2\,,$$

$$2z^2=2A_{11}^2n_1^2+4A_{11}A_{12}n_1n_2+2A_{12}^2n_2^2+2A_{12}^2n_1^2+$$
$$+4A_{12}A_{22}n_1n_2+2A_{22}^2n_2^2+2A_{13}^2n_1^2+$$
$$+4A_{13}A_{23}n_1n_2+2A_{23}^2n_2^2\leqslant$$
$$\leqslant 2A_{11}^2n_1^2+4A_{11}A_{12}n_1n_2+2A_{12}^2+4A_{22}A_{12}n_1n_2+$$
$$+2A_{22}^2n_2^2+2A_{13}^2n_1^2+2A_{13}^2n_2^2+2A_{23}^2n_1^2+2A_{23}^2n_2^2=$$
$$=2A_{11}^2n_1^2+2A_{22}^2n_2^2+2A_{12}^2+4A_{11}A_{12}n_1n_2+$$
$$+4A_{22}A_{12}n_1n_2+2A_{13}^2+2A_{23}^2\,.$$

Posons $n_1 = \cos\varphi$, $n_2 = \sin\varphi$. Il vient alors

$$
\begin{aligned}
&-2y^2 + 2z^2 - 2A_{12}^2 - 2A_{13}^2 - 2A_{23}^2 \leqslant \\
&\leqslant 2A_{11}^2 n_1^2(1-n_1^2) + 2A_{22}^2 n_2^2(1-n_2^2) + 4A_{11}A_{12}n_1n_2(1-2n_1^2) + \\
&\quad + 4A_{22}A_{12}n_1n_2(1-2n_2^2) - 8A_{12}^2 n_1^2 n_2^2 - 4A_{11}A_{22}n_1^2n_2^2 \leqslant \\
&\leqslant \tfrac{1}{2}A_{11}^2 \sin^2 2\varphi + \tfrac{1}{2}A_{22}^2 \sin^2 2\varphi - 2A_{11}A_{12}\sin 2\varphi\cos 2\varphi + \\
&\quad + 2A_{22}A_{12}\sin 2\varphi \cos 2\varphi - 2A_{12}^2 \sin^2 2\varphi - A_{11}A_{22}\sin^2 2\varphi \leqslant \\
&\leqslant \tfrac{1}{2}A_{11}^2 \sin^2 2\varphi + \tfrac{1}{2}A_{22}^2 \sin^2 2\varphi + A_{11}^2 \cos^2 2\varphi + A_{12}^2 \sin^2 2\varphi + \\
&\quad + A_{22}^2 \cos^2 2\varphi + A_{12}^2 \sin^2 2\varphi - 2A_{12}^2 \sin^2 2\varphi + \tfrac{1}{2}A_{11}^2 \sin^2 2\varphi + \\
&\quad + \tfrac{1}{2}A_{22}^2 \sin^2 2\varphi = A_{11}^2 + A_{22}^2 , \qquad \text{d'où (2.7)} .
\end{aligned}
$$

Démontrons maintenant (2.6). Posons

$$
\begin{aligned}
w_1 &= B_{12}(A_{11} - A_{22})n_1n_2 + B_{12}A_{12}(n_2^2 - n_1^2) , \\
w_2 &= w - w_1 = (B_{31}n_1 + B_{32}n_2)(A_{31}n_1 + A_{32}n_2) .
\end{aligned}
$$

Il vient, avec $n_1 = \cos\varphi$, $n_2 = \sin\varphi$,

$$
\begin{aligned}
w_1 &= \tfrac{1}{4}(v_{2,1} - v_{1,2})(v_{1,1} - v_{2,2})\sin 2\varphi - \tfrac{1}{4}(v_{2,1} - v_{1,2})(v_{2,1} + v_{1,2})\cos 2\varphi \leqslant \\
&\leqslant \tfrac{1}{8}(v_{2,1} - v_{1,2})^2 \sin^2 2\varphi + \tfrac{1}{8}(v_{1,1} - v_{2,2})^2 + \tfrac{1}{8}(v_{2,1} - v_{1,2})^2 \cos^2 2\varphi + \\
&\qquad + \tfrac{1}{8}(v_{2,1} + v_{1,2})^2 = \\
&= \tfrac{1}{8}(v_{2,1} - v_{1,2})^2 + \tfrac{1}{8}(v_{2,1} + v_{1,2})^2 + \tfrac{1}{8}(v_{1,1} - v_{2,2})^2 \leqslant \\
&\leqslant \tfrac{1}{4}(v_{2,1}^2 + v_{1,2}^2 + v_{1,1}^2 + v_{2,2}^2) , \\
w_2 &= \tfrac{1}{4}(v_{1,3}^2 - v_{3,1}^2)n_1^2 + \tfrac{1}{4}(v_{2,3}^2 - v_{3,2}^2)n_2^3 + \\
&\qquad + \tfrac{1}{4}(v_{1,3} - v_{3,1})(v_{2,3} + v_{3,2})n_1n_2 + \tfrac{1}{4}(v_{2,3} - v_{3,2})(v_{1,3} + v_{3,1})n_1n_2 = \\
&= \tfrac{1}{4}(v_{1,3}^2 - v_{3,1}^2)n_1^2 + \tfrac{1}{4}(v_{2,3}^2 - v_{3,2}^2)n_2^2 + \tfrac{1}{2}(v_{1,3}v_{2,3} - v_{3,1}v_{3,2})n_1n_2 \leqslant \\
&\leqslant \tfrac{1}{4}(v_{1,3}^2 - v_{3,1}^2)n_1^2 + \tfrac{1}{4}(v_{2,3}^2 - v_{3,2}^2)n_2^2 + \tfrac{1}{4}v_{1,3}^2 n_2^2 + \\
&\qquad + \tfrac{1}{4}v_{2,3}^2 n_1^2 + \tfrac{1}{4}v_{3,1}^2 n_1^2 + \tfrac{1}{4}v_{3,2}^2 n_2^2 = \tfrac{1}{4}(v_{1,3}^2 + v_{2,3}^2) ,
\end{aligned}
$$

d'où

$$
w = w_1 + w_2 \leqslant \tfrac{1}{4} v_{i,j} v_{i,j} ,
$$

ce qui achève la démonstration du théorème 1.

Nous aurons besoin du

LEMME 2 (cf. [6], chap. 1, lemme 2). *On a*

$$\|v\|_{L^4(\Omega)} \leqslant \sqrt{2}\|v\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\Omega)}\|\operatorname{grad} v\|^{\frac{3}{4}}_{(L^2(\Omega))^3}, \qquad \forall v \in H^1_0(\Omega). \tag{2.8}$$

REMARQUE 5. De (1.11) et (2.8) on déduit

$$\|v\|_{L^4(\Omega)} \leqslant \sqrt{2}a^{\frac{1}{4}}\|\operatorname{grad} v\|_{(L^2(\Omega))^3}, \qquad \forall v \in H^1_0(\Omega). \tag{2.9}$$

Obsérvons encore qu'il existe, par le théorème de Sobolev, une constante $c_0 = c_0(\Omega) > 0$ telle que

$$\|v\|_{L^4(\Omega)} \leqslant c_0\|v\|_{H^1(\Omega)}, \qquad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{2.10}$$

Ceci étant nous allons passer à la

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2. On utilise la méthode de démonstration du théorème 6.8 du chapitre 1 de [9]. Pour appliquer la méthode de Galerkin on prend une base $\{w_k\}$ de $W = V \cap (H^2(\Omega))^3$. Puisque, par hypothèse, $v_0 \in W$ on peut choisir $v_{0k} \in [w_1, \ldots, w_k]$ (espace engendré par $w_1, \ldots, w_k$) tel que $|v_{0k}| \leqslant |v_0|$, $|v_{0k}|_W \leqslant |v_0|_W$ et $v_{0k} \xrightarrow[k\to\infty]{} v_0$ dans $W$.

On prend $v_k(t) = \sum_{m=1}^{k} g_{mk}(t)w_m$ tel que les $g_{mk}(t)$ vérifient le système

$$(v_k'(t), w_m) + \frac{1}{\varrho}\, a(n(t); v_k(t), w_m) + b(v_k(t), v_k(t), w_m) = 0\,, \quad 1 \leqslant m \leqslant k\,, \tag{2.11}$$

$$v_k(0) = v_{0k}\,. \tag{2.12}$$

On déduit de (2.11),

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_k(t)|^2 + \frac{1}{\varrho}\, a(n(t); v_k(t), v_k(t)) = 0,$$

d'où, par (1.8),

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_k(t)|^2 + \frac{\alpha}{\varrho}\|v_k(t)\|^2 \leqslant 0\,. \tag{2.13}$$

D'ici on déduit facilement que les $g_{mk}(t)$ sont définis dans $[0, T]$ et que la suite $\{v_k\}$ est dans un borné de $L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$.

On déduit de (2.11), (2.12),

$$|v_k'(0)|^2 = -\frac{1}{\varrho}\, a(n(0); v_{0k}, v_k'(0)) - b(v_{0k}, v_{0k}, v_k'(0))\,. \tag{2.14}$$

D'autre part on a, par intégration par parties,

$$|a(n(0);\, v_{0k},\, v_k'(0)| \leqslant c_2 \|v_{0k}\|_W |v_k'(0)|\,, \qquad \text{où } c_2 = c_2(\Omega, \alpha_i)\,,$$

et, par l'inégalité de Hölder, (2.9) et (2.10),

$$|b(v_{0k},\, v_{0k},\, v_k'(0))| \leqslant c_4 \|v_{0k}\|_{(L^4(\Omega))^3} \sum_{i,j} \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} (v_{0k})_j \right\|_{L^4(\Omega)} |v_k'(0)| \leqslant$$

$$\leqslant c_3 \|v_{0k}\| \; \|v_{0k}\|_W \, |v_k'(0)| \leqslant c_3 \|v_{0k}\|_W^2 \, |v_k'(0)|\,, \qquad \text{où } c_3 = c_3(\Omega)\,.$$

On peut donc écrire, compte tenu de (2.14),

$$|v_k'(0)|^2 \leqslant \frac{1}{\varrho} c_2 \|v_{0k}\|_W |v_k'(0)| + c_3 \|v_{0k}\|_W^2 |v_k'(0)|\,,$$

d'où

$$|v_k'(0)| \leqslant \frac{1}{\varrho} c_2 \|v_0\|_W + c_3 \|v_0\|_W^2 = d\,. \tag{2.15}$$

Dérivons (2.11) en $t$. On obtient, avec $\alpha_1' = \alpha_1 - \gamma_2$,

$$\begin{aligned}
(v_k''(t), w_m) &+ \frac{1}{\varrho}\, a(n(t);\, v_k'(t),\, w_m) + \frac{1}{\varrho}\Big[\alpha_1' \int_\Omega A_{sp}(v_k(t))\, n_s' n_p A_{ij}(w_m)\, n_i n_j\, dx + \\
&+ \alpha_1' \int_\Omega A_{sp}(v_k(t))\, n_s n_p' A_{ij}(w_m)\, n_i n_j\, dx + \\
&+ \alpha_1' \int_\Omega A_{sp}(v_k(t))\, n_s n_p A_{ij}(w_m)\, n_i' n_j\, dx + \\
&+ \alpha_1' \int_\Omega A_{sp}(v_k(t))\, n_s n_p A_{ij}(w_m)\, n_i n_j'\, dx + \\
&+ 2\alpha_6 \int_\Omega A_{is}(v_k(t))\, n_s' A_{ij}(w_m)\, n_j\, dx + 2\alpha_6 \int_\Omega A_{is}(v_k(t))\, n_s A_{ij}(w_m)\, n_j'\, dx + \\
&+ 2\alpha_3 \int_\Omega B_{is}(v_k(t))\, n_s' A_{ij}(w_m)\, n_j\, dx + 2\alpha_3 \int_\Omega B_{is}(v_k(t))\, n_s A_{ij}(w_m)\, n_j'\, dx\Big] + \\
&\qquad\qquad + b(v_k(t),\, v_k'(t),\, w_m) + b(v_k'(t),\, v_k(t),\, w_m) = 0\,.
\end{aligned}$$

Multiplions l'égalité antérieure par $g_{mk}'(t)$ et sommons en $m$. Il vient, compte tenu qu'on a $b(v_k(t), v_k'(t), v_k'(t)) = 0$, et avec $M$ et $b$ définis par (1.10) et (1.12), respectivement,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_k'(t)|^2+\frac{\alpha}{\varrho}\|v_k'(t)\|^2\leqslant\frac{bM}{\varrho}\|v_k(t)\|\;\|v_k'(t)\|+|b(v_k'(t),v_k(t),v_k'(t))|\,. \tag{2.16}$$

D'autre part on a, par l'inégalité d'Hölder, le lemme 2 et (2.9),

$$\begin{aligned}|b(v_k'(t),v_k(t),v_k'(t))|&\leqslant c_5\|v_k'(t)\|^2_{(L^4(\Omega))^3}\|v_k(t)\|\leqslant\\&\leqslant c_1\|v_k'(t)\|^2\|v_k(t)\|\,,\qquad \text{où } c_1=c_1(\Omega)\,.\end{aligned}$$

On a aussi, par (2.13),

$$\frac{\alpha}{\varrho}\|v_k(t)\|^2\leqslant-(v_k(t),v_k'(t))\leqslant|v_k(t)|\;|v_k'(t)| \tag{2.17}$$

et, donc, par (1.11)

$$\frac{\alpha}{\varrho}\|v_k(t)\|^2\leqslant a^2\|v_k(t)\|\;\|v_k'(t)\|,$$

d'où

$$\|v_k(t)\|\leqslant\frac{a^2\varrho}{\alpha}\|v_k'(t)\|\,. \tag{2.18}$$

Ainsi on déduit de (2.16),

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_k'(t)|^2+\frac{\alpha}{\varrho}\|v_k'(t)\|^2\leqslant\frac{bMa^2}{\alpha}\|v_k'(t)\|^2+c_1\|v_k'(t)\|^2\,\|v_k(t)\|\,,$$

et donc, avec $\mu=\alpha/\varrho-bMa^2/\alpha>0$ par (1.13),

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_k'(t)|^2+(\mu-c_1\|v_k(t)\|)\|v_k'(t)\|^2\leqslant 0\,. \tag{2.19}$$

De (2.13) on déduit $(d/dt)|v_k(t)|^2\leqslant 0$ et donc

$$|v_k(t)|\leqslant|v_k(0)|=|v_{0k}|\leqslant|v_0|\,,$$

ce qui entraîne, compte tenu de (2.17),

$$\frac{\alpha}{\varrho}\|v_k(t)\|^2\leqslant|v_0|\;|v_k'(t)|\,,$$

$$\|v_k(t)\|\leqslant\left[\frac{\varrho}{\alpha}|v_0|\;|v_k'(t)|\right]^{\frac{1}{2}}$$

et donc

$$\mu - c_1\|v_k(t)\| \geqslant \mu - c_1\left[\frac{\varrho}{\alpha}|v_0|\,|v_k'(t)|\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.20}$$

En particulier, pour $t = 0$ on a, par (2.15),

$$\mu - c_1\left[\frac{\varrho}{\alpha}|v_0|\,|v_k'(0)|\right]^{\frac{1}{2}} \geqslant \mu - c_1\left(\frac{\varrho}{\alpha}|v_0|\,d\right)^{\frac{1}{2}} = \theta > 0\,, \qquad \text{par (1.14)}\,.$$

Supposons qu'il existe $t_0 \in ]0, T]$ tel que

$$\mu - c_1\|v_k(t)\| > 0 \quad \text{dans} \quad [0, t_0[ \quad \text{et} \quad \mu - c_1\|v_k(t_0)\| = 0\,.$$

Par (2.19) on a $d/dt|v_k'(t)|^2 \leqslant 0$, $\forall t \in [0, t_0[$, et donc $|v_k'(t)| \leqslant |v_k'(0)|$, $\forall t \in [0, t_0[$, ce qui entraîne, par (2.20),

$$\mu - c_1\|v_k(t)\| \geqslant \mu - c_1\left[\frac{\varrho}{\alpha}|v_0|\,|v_k'(0)|\right]^{\frac{1}{2}} \geqslant \theta\,, \qquad \forall t \in [0, t_0[\,,$$

ce qui donne $\mu - c_1\|v_k(t_0)\| \geqslant \theta > 0$ ce qui est absurde. Donc $\mu - c_1\|v_k(t)\| \geqslant \theta$, $\forall t \in [0, T]$, et ainsi

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_k'(t)|^2 + \theta\|v_k'(t)\|^2 \leqslant 0\,, \qquad \forall t \in [0, T]\,. \tag{2.21}$$

On en déduit que la suite $\{v_k'\}$ est dans un borné de $L^2(0, T; V) \cap$ $\cap L^\infty(0, T; H)$.

La démonstration de l'existence d'une solution $v$ de (1.1), (1.2), (1.3) vérifiant (1.15) se fait maintenant comme dans le théorème 6.8 du chapitre 1 de [9].

Pour établir l'unicité on procède comme dans le cas des équations de Navier-Stokes en suivant la technique de démonstration du théorème 6.9 du chapitre 1 de [9] (cf. la remarque 3).

## BIBLIOGRAPHIE

[1] J. P. Dias, *Sur les équations d'évolution d'un nématique incompressible soumis à l'action d'un champ magnétique homogène*, C.R. Acad. Sc. Paris, Série A, **282** (1976), pp. 71-74.

[2] J. P. Dias, *Un système d'équations en rapport avec les équations d'évolution bidimensionnelles d'un cristal liquide nématique*, J. Mécanique, **15** (1976), pp. 697-709.

[3] J. L. ERICKSEN, *Hydrostatic theory of Liquid Crystals*, Arch. Rat. Mech. Anal., **9** (1962), pp. 371-378.

[4] C. GAHWILLER, *The viscosity coefficients of a room-temperature Liquid Crystal (MBBA)*, Phys. Lett. A, **36** (1971), pp. 311-312.

[5] P. G. DE GENNES, *The Physics of Liquid Crystals*, Claredon Press, Oxford, 1974.

[6] O. A. LADYZHENSKAYA, *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, Gordon and Breach, New-York, 1963.

[7] J. LERAY, *Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique*, J. Math. Pures et Appl., **12** (1933), pp. 1-82.

[8] F. M. LESLIE, *Some Constitutive Equations for Liquid Crystals*, Arch. Rat. Mech. Anal., **28** (1968), pp. 265-283.

[9] J. L. LIONS, *Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non linéaires*, Dunod et Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[10] A. F. MARTINS, *Contribution à l'étude de la dynamique moléculaire dans les phases nématique et isotrope des cristaux liquides*, Portgal. Phys., **8** (1972), pp. 1-166.

[11] A. F. MARTINS, *Molecular approach to the hydrodynamic viscosities of nematic liquid crystals*, Portgal. Phys., **9** (1974), pp. 1-8.

[12] OLCG, *Viscosity Measurements by Quasi Elastic Light Scattering in p-Azoxianisol*, Molec. Cryst. and Liquid Cryst., **13** (1971), pp. 187-191.

[13] O. PARODI, *Stress tensor for a nematic Liquid Crystal*, J. Physique, **31** (1970), pp. 581-584.

[14] H. C. TSENG et al., *Application of the Continuum Theory to Nematic Liquid Crystals*, Phys. Fluids, **15** (1972), pp. 1213-1222.