Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Yujiro Ohya

Le problème de Cauchy à caractéristiques multiples

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 4, nº 4 (1977), p. 757-805

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1977_4_4_4_757_0>

Le problème de Cauchy à caractéristiques multiples.

YUJIRO OHYA (*)

dédié à Jean Leray

Introduction.

1. *Enoncé des résultats.*

Le problème de Cauchy pour les équations et systèmes aux dérivées partielles dans la classe des fonctions indéfiniment dérivables fut étudié d'abord sous l'hypothèse d'hyperbolicité stricte (Hadamard, Petrowsky, J. Leray [2]). Puis ce problème a été étendu quand le polynôme caractéristique a des racines de multiplicité constante (hyperbolicité non-stricte) par Ohya [12], Leray-Ohya [4] [5], Mizohata-Ohya [8] [9], et Chazarain [20]. Oleinik [15] a obtenu une condition suffisante pour que le problème de Cauchy soit bien posé dans le cas des équations différentielles du second ordre en supprimant l'hypothèse de multiplicité constante.

Petkov [17] et Menikoff [7] ont étendu le résultat analogue au cas des équations d'ordre supérieur.

Cet article propose un moyen plus direct pour obtenir une condition suffisante — condition généralisée de E. E. Levi — pour que le problème de Cauchy dans le cas des équations aux dérivées partielles hyperboliques d'ordre m avec multiplicité variable soit bien posé dans la classe des fonctions indéfiniment dérivables.

On trouvera l'historique plus détaillé au n. 5 et les énoncés précis aux nn. 10, 12 et 17.

2. *Sommaire.*

Nous résolvons le problème de Cauchy pour les opérateurs différentiels hyperboliques dont les racines caractéristiques sont multiples.

(*) Section de Mathématique et Physique appliquées, Université de Kyoto, 606 - Kyoto.

Pervenuto alla Redazione il 29 Marzo 1977.

Il est bien connu que pour que ce, problème soit bien posé, il faut imposer des conditions aux opérateurs. Nous donnons deux types de conditions suffisantes moyennant les symboles des opérateurs pseudo-différentiels au n. 9. Chaque condition nous permet d'établir l'inégalité d'énergie en nous appuyant sur le résultat d'hyperbolicité stricte à coefficients singuliers (nn. 10 et 12).

Les théorèmes d'existence s'obtiennent à l'aide du problème de Cauchy adjoint au n. 17.

Sous la condition concernant le symbole sous-caractéristique, nous montrerons qu'il y a domaine d'influence (n. 19).

§ 1. – Préliminaires.

3. *Résumés sur les opérateurs pseudo-différentiels* (voir Nirenberg [11] et ses références).

Désignons la transformation de Fourier par la formule suivante;

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-l/2}\int_{R^l} \exp[-i\langle x, \xi\rangle] f(x)\,dx \qquad \text{pour } f(x) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^l), \tag{3.1}$$

et la transformation inverse de Fourier par

$$f(x) = (2\pi)^{-l/2}\int_{R^l} \exp[i\langle x, \xi\rangle]\hat{f}(\xi)\,d\xi, \qquad \text{où } \langle x, \xi\rangle = \sum_{j=1}^{l} x_j\xi_j. \tag{3.2}$$

La formule de Parseval implique que la transformation de Fourier peut être prolongée comme un isomorphisme de $L^2(\boldsymbol{R}^l)$ sur lui-même; c'ést-à-dire, si l'on désigne $(u, v) = \int_{R^l} u(x)\overline{v(x)}\,dx$ la forme sesqui-linéaire des fonctions à valeurs complexes sur $\boldsymbol{R}^l$, alors on a $(u, v) = (\hat{u}, \hat{v})$.

On étend la norme de L^2 par la forme suivante;

(3.3) s étant un nombre réel quelconque

$$\|u\|_s^2 = \int (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2\,d\xi \qquad \text{pour } u \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^l), \text{ où } |\xi|^2 = \sum_{j=1}^{l} \xi_j^2.$$

Définissons $H_s(\boldsymbol{R}^l)$ l'espace complété de $C_0^\infty(\boldsymbol{R}^l)$ par cette norme.

Pour simplifier l'écriture, on pose

$$D_{x_j} = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j} \qquad \text{et} \qquad \partial\xi_j = \frac{\partial}{\partial \xi_j} \qquad (1 \leqslant j \leqslant l).$$

Par la notation $S^m(\boldsymbol{R}^l \times \boldsymbol{R}^l_\xi \setminus 0) \ni p(x, \xi)$, on entend que

(3.4) $p(x, \xi)$ est une fonction indéfiniment dérivable de $\boldsymbol{R}^l \times \boldsymbol{R}^l_\xi \setminus 0$,

(3.5) pour chaque ensemble compact K de $\boldsymbol{R}^l$, il existe une constante $c_{\alpha\beta}(K)$ telle que

$$|D_x^\beta \partial_\xi^\alpha p(x, \xi)| \leqslant c_{\alpha\beta}(1 + |\xi|)^{m-|\alpha|}$$

pour tout $x \in K$ et tous les multi-indices α, β, et

(3.6) il existe une suite de $\{p_{m-j}(x, \xi)\}_{j=0,1,2,\ldots}$ de fonctions indéfiniment dérivables de $\boldsymbol{R}^l \times \boldsymbol{R}^l_\xi \setminus 0$, homogènes en ξ de degré $m - j$ telles que, pour $|\xi| \to \infty$,

$$|D_x^\beta\{p(x, \xi) - \sum_{j=0}^N p_{m-j}(x, \xi)\}| = O(|\xi|^{m-N-1})$$

pour tout β et tout $x \in K$; on le note simplement $p(x, \xi) \sim \sum_{j=0}^\infty p_{m-j}(x, \xi)$.

On associe au $p(x, \xi) \in S^m(\boldsymbol{R}^l \times \boldsymbol{R}^l \setminus 0)$ les opérateurs pseudo-différentiels $P(x, D)$ définis par

$$P(x, D)u(x) = (2\pi)^{-l/2}\int \exp[i\langle x, \xi\rangle]p(x, \xi)\hat{u}(\xi)d\xi \tag{3.7}$$

pour $u \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^l)$; on désigne l'espace des opérateurs pseudo-différentiels $P(x, D)$ d'ordre m par $L(m)$, et on dit que $p(x, \xi)$ est le symbole de $P(x, D)$.

Résumons quelques propriétés de $L(m)$;

(3.8) [1] $P(x, D)$ est un opérateur linéaire de $C_0^\infty(\boldsymbol{R}^l)$ à $C^\infty(\boldsymbol{R}^l)$, et pour s un nombre réel quelconque, il existe une constante positive C telle que

$$\|Pu\|_s \leqslant C\|u\|_{s+m} \quad \text{pour } u \in H_{s+m}(\boldsymbol{R}^l)\,;$$

(3.9) pour $Q \in L(n)$, on a $PQ \in L(m + n)$, et

(3.10) le symbole de $PQ \sim \sum_\alpha \dfrac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha p D_x^\alpha q$;

(3.11) il existe un opérateur pseudo-différentiel P^*, formellement adjoint de P, appartenant à $L(m)$, et

(3.12) le symbole de $P^* \sim \sum_\alpha \dfrac{1}{\alpha!} D_x^\alpha \partial_\xi^\alpha \overline{p(x, \xi)}$.

[1] On suppose que le support de $p(x, \xi)$ par rapport à x soit compact.

4. *Notations.*

Notons les coordonnées de $\boldsymbol{R}^{l+1}$ par $(x_0, x_1, \dots, x_l)$. Soit $\boldsymbol{\Omega}$ la bande de $\boldsymbol{R}^{l+1}$ d'équations $0 \leqslant x_0 = t \leqslant T$. Considérons le problème de Cauchy

$$(4.1) \qquad \begin{cases} P\left(t, x; \dfrac{\partial}{\partial t}, \dfrac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x) = f(t, x) & \text{dans } \boldsymbol{\Omega}, \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)^j u(0, x) = \varphi_j(x) & \text{pour } 0 \leqslant j \leqslant m-1, \end{cases}$$

où $P(t, x; \partial/\partial t, \partial/\partial x)$ est un opérateur aux dérivées partielles du type Kowalewskien d'ordre m:

$$P\left(t, x; \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m + \sum_{\substack{j+|\nu| \leqslant m \\ j<m}} a_{j\nu}(t, x) \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\nu,$$

dont les coefficients $a_{j\nu}(t, x)$ sont des fonctions indéfiniment dérivables de $(t, x) \in \boldsymbol{\Omega}$.

En désignant $P_k(t, x; \partial/\partial t, \partial/\partial x)$ les opérateurs différentiels homogènes d'ordre k en $(\partial/\partial t, \partial/\partial x)$, on aura

$$P\left(t, x; \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{k=0}^{m} i^k P_k(t, x; D_t, D).$$

Donc on considère dans la suite

$$(4.1)' \qquad \begin{cases} P(t, x; D_t, D) u(t, x) = i^{-m} f(t, x) & \text{dans } \boldsymbol{\Omega} \\ D_t^j u(0, x) = i^{-j} \varphi_j(x) & \text{pour } 0 \leqslant j \leqslant m-1. \end{cases}$$

NOTE 4.1. On résout le problème de Cauchy pour les équations aux dérivées partielles hyperboliques. Mais, dans ce qui suit, on emploie le calcul des opérateurs pseudo-différentiels. Dans cet article, on ne considère que les opérateurs pseudo-différentiels par rapport à l'espace, mais différentiels par rapport au temps; par conséquent, tous les opérateurs peuvent s'écrire sous la forme $Q(t, x; D_t, D) = \sum_{j=0}^{m} b_{m-j}(t, x; D) D_t^j$, où b_{m-j} sont les opérateurs pseudo-différentiels de $L(m-j)$ dépendant du paramètre t $(0 \leqslant t \leqslant T)$. On désigne l'espace des opérateurs de ce type d'ordre m par $\tilde{L}(m)$.

Si l'on définit pour s réel quelconque

$$(4.2) \qquad \|D^m u(t)\|_s = \sup_{0 \leqslant i \leqslant m} \|D_t^i u(t)\|_{m-i+s},$$

alors on aura,

$$\|Qu(t)\|_s \leqslant \text{const} \sum_{j=0}^{m} \|D_t^j u(t)\|_{m-j+s} \tag{4.3}$$
$$\leqslant \text{const} \|D^m u(t)\|_s , \qquad \text{compte tenu de (3.8)} .$$

Soit $p_m(t, x; \tau, \xi)$ le polynôme caractéristique de P; on dit que P est *hyperbolique*, si ses racines caractéristiques par rapport à τ sont réelles pour tout $(t, x; \xi) \in \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{R}^l_\xi \setminus 0$.

On suppose dans la suite ceci:

(4.4) $p_m(t, x; \tau, \xi)$ se factorise dans la classe des fonctions indéfiniment dérivables; c'est-à-dire, si l'on a

$$p_m(t, x; \tau, \xi) = \prod_{i=1}^{m} (\tau - \lambda_i(t, x; \xi)) , \tag{4.5}$$

alors les $\lambda_i(t, x; \xi)$ sont des fonctions indéfiniment dérivables de $(t, x; \xi) \in \in \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{R}^l_\xi \setminus 0$, et homogènes de degré 1 en ξ, qui implique $\lambda_i(t, x; \xi) \in S^1$.

5. *Historique.*

Supposons la factorisation

$$p_m(t, x; \tau, \xi) = \prod_{i=1}^{p} a^{(i)}_{m_i}(t, x; \tau, \xi)$$

où $\sum_{i=1}^{p} m_i = m$, et que les $a^{(i)}_{m_i}(t, x; \tau, \xi)$ sont des polynômes strictement hyperboliques de degré m_i; si l'on associe aux $a^{(i)}_{m_i}$ les opérateurs $A_i \in \tilde{L}(m_i)$ tels que le symbole de $A_i(t, x; D_t, D) \sim a^{(i)}_{m_i}(t, x; \tau, \xi) + a^{(i)}_{m_i-1} + \ldots$, alors on aura $P - A_1 A^s \ldots A_p \in \tilde{L}(m - p + q)$ où, en général, $0 \leqslant q \leqslant p - 1$. Ce cas a été étudié sous l'hypothèse de multiplicité constante dans Ohya [12] et Leray-Ohya [4] [5] dans la classe de fonctions de Gevrey; de plus, un choix convenable des symboles de degré inférieur pour A_i permet d'obtenir $P - A_1 A_2 \ldots A_p \in \tilde{L}(m - p)$, ce qui est le cas strictement hyperbolique (voir p. 124 de [4], p. 196 et p. 201 de [5] et [13]).

La condition nécessaire et suffisante pour que le problème de Cauchy soit bien posé dans la classe des fonctions indéfiniment dérivables a été obtenue par Mizohata-Ohya [8] [9] (suivant E. E. Levi [6]) sous l'hypothèse de multiplicité constante et double.

Dans cet article, on ne suppose plus que la multiplicité soit constante. Très récemment, Kitagawa et Sadamatsu [19] étudient le cas où la multiplicité variable est au plus trois; on ne traite dans la suite que le cas de la multiplicité soit double.

§ 2. – Condition de Levi.

6. *Opérateurs pseudo-différentiels strictement hyperboliques.*

On considère le problème de Cauchy pour

(6.1) $P(t, x; D_t, D)u(t, x) = i^{-m}f(t, x)$ dans Ω, où $P(t, x; D_t, D)$ appartient à $\tilde{L}(m)$; c'est-à-dire, le symbole $p(t, x; \tau, \xi)$ de P a le développement

$$p(t, x; \tau, \xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{i}\right)^j p_{m-j}(t, x; \tau, \xi) , \tag{6.2}$$

où les $p_{m-j}(t, x; \tau, \xi)$ sont des fonctions indéfiniment dérivables de $(t, x; \tau, \xi)$ homogènes en (τ, ξ) de degré $m - j$, et des polynômes en τ de degré $m - j$ $(0 \leqslant j \leqslant m)$.

Supposons que $P(t, x; D_t, D)$ soit strictement (régulièrement) hyperbolique; l'équation en τ de $p_m(t, x; \tau, \xi) = 0$ a des racines $\lambda_i(t, x; \xi)$ indéfiniment dérivables de $\Omega \times \boldsymbol{R}^l_\xi \setminus 0$, réelles et distinctes; c'est-à-dire, on a

$$p_m(t, x; \tau, \xi) = \prod_{i=1}^{m} (\tau - \lambda_i(t, x; \xi)) \tag{6.3}$$

où il existe une constante positive δ telle que $\inf\limits_{(t,x;\,\xi)\in\Omega\times\boldsymbol{R}^l_\xi\setminus 0} |\lambda_i(t, x; \xi) - \lambda_j(t, x; \xi)| \geqslant \delta$ pour $i \neq j$ et $|\xi| = 1$.

LEMME 6.1. *Pour le problème de Cauchy* (6.1), *il existe une constante positice C telle que l'on ait, n étant un nombre entier non négatif,*

$$\left|\|D^{n+m-1}u(t)\|'_\sigma\right| \leqslant C\left(\|D^{n+m-1}u(t)\|_\sigma + \|D^n f(t)\|_\sigma\right) \tag{6.4}$$

presque partout dans $[0, T]$, *où* $\|...\|'$ *signifie la dérivée en t et C dépend du caractère d'hyperbolicité stricte, pour σ un nombre réel quelconque.*

PREUVE. Voir l'appendice de [10].

Pour l'application qui va suivre, on va étendre le lemme 6.1.

LEMME 6.2. *Soit $\tilde{P}$ un opérateur pseudo-différentiel strictement hyperbolique tel que, $\tilde{p}(t, x; \tau, \xi)$ étant le symbole de $\tilde{P}$,*

$$\tilde{p}(t, x; \tau, \xi) \sim p_m + \frac{1}{i}\frac{\tilde{p}_{m-1}}{t} + \sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{1}{i}\right)^j \tilde{p}_{m-j} , \tag{6.5}$$

où $\tilde{p}_{m-j}(t, x; \tau, \xi)$ ont les mêmes propriétés que $\tilde{p}_{m-j}(t, x; \tau, \xi)$ pour $j \geqslant 1$.

Alors, pour le problème de Cauchy

$$\tilde{P}(t, x; D_t, D)u(t, x) = i^{-m}f(t, x)\,, \qquad \textit{on a l'inégalité}\,, \tag{6.6}$$

n étant un nombre entier non négatif,

$$\left|(\|D^{n+m-1}u(t)\|_\sigma^2)'\right| \leq C\left\{\|D^{n+m-1}u(t)\|_\sigma^2 + \sum_{k=0}^{n}\frac{\|D^{n+m-1-k}u(t)\|_\sigma^2}{t^{2k+1}} + t\|D^n f(t)\|_\sigma^2\right\}, \tag{6.7}$$

pour σ un nombre réel quelconque, où C est une constante positive.

Preuve. On ne le prouve que pour $\sigma = 0$. A la place de (6.6), si l'on considère l'équation

$$P(t, x; D_t, D)u(t, x) = (P - \tilde{P})u + i^{-m}f, \tag{6.6$'$}$$

alors, compte tenu du lemme 6.1, on aura

$$\begin{aligned}\left|\|D^{n+m-1}u(t)\|'\right| &\leq \gamma\|D^{n+m-1}u(t)\| + \gamma\|D^n((P-\tilde{P})u + i^{-m}f)\| \leq \\ &\leq \gamma\|D^{n+m-1}u(t)\| + \gamma\|D^n(P-\tilde{P})u(t)\| + \gamma\|D^n f(t)\|\,.\end{aligned} \tag{6.8}$$

D'autre part, on considère, presque partout dans $[0, T]$, $\left|(\|D^{n+m-1}u(t)\|^2)'\right| = 2\|D^{n+m-1}\,u(t)\|\,\left|\|D^{n+m-1}\,u(t)\|'\right|$, qui, compte tenu de (6.8), est majoré par

$$\begin{aligned}2\gamma\|D^{n+m-1}u(t)\|\{\|D^{n+m-1}u(t)\| + \|D^n(P-\tilde{P})u(t)\| + \|D^n f(t)\|\} &= \\ \leq 2\gamma\|D^{n+m-1}\,u(t)\|^2 + \gamma\left(\theta\frac{\|D^{n+m-1}u(t)\|^2}{t} + \frac{t}{\theta}\|D^n f(t)\|^2\right) &+ \\ + \gamma\left(\theta\frac{\|D^{n+m-1}u(t)\|^2}{t} + \frac{t}{\theta}\|D^n(P-\tilde{P})u(t)\|^2\right)&,\end{aligned}$$

où θ est une constante convenablement choisie.

Donc on a

$$\begin{aligned}\left|(\|D^{n+m-1}u(t)\|^2)'\right| &\leq 2\gamma\|D^{n+m-1}u(t)\|^2 + \\ &+ 2\gamma\theta\frac{\|D^{n+m-1}u(t)\|^2}{t} + \frac{\gamma}{\theta}t\|D^n(P-\tilde{P})u(t)\|^2 + \frac{\gamma}{\theta}t\|D^n f(t)\|^2\,.\end{aligned} \tag{6.9}$$

Pour évaluer le troisième terme du second membre, si l'on emploie le

LEMME 6.3. *Pour les opérateurs P et $\tilde{P}$ définis par* (6.2) *et* (6.5), *on a*

$$\|D^n(P-\tilde{P})u(t)\| \leqslant \text{const} \sum_{j=0}^{n} \frac{\|D^{n+m-1-j}u(t)\|}{t^{j+1}}, \tag{6.10}$$

alors on aura

$$\begin{aligned}
\left|(\|D^{n+m-1}u(t)\|^2)'\right| &\leqslant 2\gamma\|D^{n+m-1}u(t)\|^2 + \\
&+ 2\gamma\theta \frac{\|D^{n+m-1}u(t)\|^2}{t} + \frac{\gamma}{\theta} t \left\{\text{const} \sum_{j=0}^{n} \frac{\|D^{n+m-1-j}u(t)\|^2}{t^{2j+2}}\right\} + \frac{\gamma}{\theta} t\|D^n f(t)\|^2 = \\
&= 2\gamma\|D^{n+m-1}u(t)\|^2 + \left(2\gamma\theta + \text{const}\frac{\gamma}{\theta}\right) \frac{\|D^{n+m-1}u(t)\|^2}{t} + \\
&+ \text{const}\frac{\gamma}{\theta} \sum_{j=1}^{n} \frac{\|D^{n+m-1-j}u(t)\|^2}{t^{2j+1}} + \frac{\gamma}{\theta} t\|D^n f(t)\|^2 \leqslant \\
&\leqslant C\left\{\|D^{n+m-1}u(t)\|^2 + \sum_{k=0}^{n} \frac{\|D^{n+m-1-k}u(t)\|^2}{t^{2k+1}} + t\|D^n f(t)\|^2\right\},
\end{aligned}$$

où C est une constante positive. C.Q.F.D.

7. *Preuve du lemme* 6.3.

On voit que, à cause de (6.2) et (6.5),

$$\tilde{p} - p \sim \frac{1}{i}\frac{\tilde{p}_{m-1}}{t} + \frac{1}{i^2}\tilde{p}_{m-2} + \cdots$$

où les $\tilde{p}_{m-j}$ ont les mêmes propriétés que celles de p_{m-j}. Rappelons que

$$\|D^n(P-\tilde{P})u(t)\| = \sup_{0\leqslant i\leqslant n} \|D_t^i(P-\tilde{P})u(t)\|_{n-i}.$$

Etudions le développement asymptotique du symbole d'opérateur pseudo-différentiel $D_t^i(P-\tilde{P})$; par la formule du produit (3.10), on a le symbole de

$$D_t^i(P-\tilde{P}) \sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!}\, \partial_\xi^\alpha(\tau^i) D_x^\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{p_{m-1}}{t} - p_{m-2} + \cdots\right),$$

où ... désigne le symbole de degré $\leqslant m-3$.

En notant $\alpha = (j, 0, \ldots, 0)$, le second membre est égal à

$$\sum_{j=0}^{i} \frac{1}{j!}\, \partial_\tau^j(\tau^i) D_t^j\left(\frac{1}{\sqrt{-1}}\, \frac{\tilde{p}_{m-1}}{t} - \tilde{p}_{m-2} + \ldots\right) = \sum_{j=0}^{i} \frac{i(i-1)\ldots(i-j+1)}{j!}\, \tau^{i-j} \cdot$$

$$\cdot\left\{\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k} D_t^{j-k}\, \tilde{p}_{m-1} D_t^k\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{\sqrt{-1}}\, D_t^j(-\tilde{p}_{m-2} + \ldots)\right\} =$$

$$= \sum_{j=0}^{i}\sum_{k=0}^{j}\binom{i}{j}\tau^{i-j}\frac{1}{\sqrt{-1}}\, D_t^{j-k}\, \tilde{p}_{m-1}\frac{j!}{(j-k)!}(-1)^k\frac{1}{t^{k+1}} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\tau^{i-j} D_t^j(-\tilde{p}_{m-2} + \ldots)\,.$$

Si l'on change l'ordre de sommation par rapport aux k et j, alors on a

$$\sum_{k=0}^{i}\frac{(-1)^k}{t^{k+1}}\sum_{j=k}^{i}\binom{i}{j}\frac{1}{\sqrt{-1}}\,\frac{j!}{(j-k)!}\,\tau^{i-j} D_t^{j-k}\, \tilde{p}_{m-1} + \sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\tau^{i-k} D_t^k(-\tilde{p}_{m-2} + \ldots)\,;$$

c'est-à-dire, on peut constater que, compte tenu de $i - j \leqslant i - k$, le symbole de

$$D_t^i(P - \tilde{P}) \sim \text{const} \sum_{k=0}^{i} \frac{\text{symbole de degré} \leqslant m - 1 + i - k}{t^{k+1}} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\tau^{i-k} D_t^k(-\tilde{p}_{m-2} + \ldots)\,.$$

D'où l'on tire que

$$\|D_t^i(P - \tilde{P})u(t)\|_{n-i} \leqslant \text{const} \sum_{k=0}^{i} \frac{\|D^{m-1+i-k}u(t)\|_{n-i}}{t^{k+1}}\;;$$

en prenant le suprémum pour $0 \leqslant i \leqslant n$, on aura

$$\|D^n(P - \tilde{P})u(t)\| \leqslant \text{const} \sum_{k=0}^{n} \frac{\|D^{n+m-1-k}u(t)\|}{t^{k+1}}\,. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

8. *Cas à caractéristiques doubles.*

On étudie le problème de Cauchy (4.1)′, où $p(t, x; \tau, \xi) \sim \sum_{j=0}^{m} (1/i)^j\, p_{m-j}(t, x; \tau, \xi)$, $p(t, x; \tau, \xi)$ étant le symbole de $P(t, x; D_t, D)$.

Supposons que P soit un opérateur aux dérivées partielles faiblement hyperboliques à caractéristiques doubles avec la factorisation dans la classe des fonctions indéfiniment dérivables; c'est-à-dire, pour $m \geqslant 2s$, on a

$$(8.1) \qquad p_m(t, x; \tau, \xi) = \prod_{i=1}^{m-s}(\tau - \lambda_i(t, x; \xi)) \prod_{j=1}^{s}(\tau - \mu_j(t, x; \xi))\,,$$

où les racines caractéristiques $\{\lambda_i(t, x; \xi)\}_{1\leqslant i\leqslant m-s}$ et $\{\mu_j(t, x; \xi)\}_{1\leqslant j\leqslant s}$ sont réelles et distinctes pour $(t, x; \xi)\in\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{R}^l_\xi\diagdown 0$, et que $\lambda_j(t, x; \xi)$ et $\mu_j(t, x; \xi)$ peuvent coïncider pour chaque j $(1\leqslant j\leqslant s)$.

Définissons

$$(8.2)\qquad \left\{\begin{array}{l} \prod_{i=1}^{m-s}(\tau-\lambda_i(t, x; \xi)) = q_{m-s}(t, x; \tau, \xi)\,, \\ \text{et} \\ \prod_{i=1}^{s}(\tau-\mu_j(t, x; \xi)) = r_s(t, x; \tau, \xi)\,. \end{array}\right.$$

On introduit deux opérateurs pseudo-différentiels $Q(t, x; D_t, D)$ et $R(t, x; D_t, D)$ appartenants aux $\tilde{L}(m-s)$ et $\tilde{L}(s)$ dont les symboles principaux sont $q_{m-s}(t, x; \tau, \xi)$ et $r_s(t, x; \tau, \xi)$; c'est-à-dire

$$(8.3)\qquad q(t, x; \tau, \xi)\sim q_{m-s}+\frac{1}{i}q_{m-s-1}+\frac{1}{i^2}q_{m-s-2}+\cdots\,,$$

$$(8.4)\qquad r(t, x; \tau, \xi)\sim r_s+\frac{1}{i}r_{s-1}+\frac{1}{i^2}r_{s-2}+\cdots$$

où q_i $(i< m-s)$ et r_j $(j< s)$ sont des fonctions indéfiniment dérivables, homogènes en (τ, ξ) et polynômes en τ de degré i et j; elles seront déterminés ci-après convenablement (pour le moment, on suppose qu'elles existent).

En employant Q et R, on considère le problème de Cauchy

$$(8.5)\qquad QRu = -(P-QR)u+i^{-m}f\;,\qquad \text{à la place de } (4.1)'.$$

Compte tenu de (3.10), on obtient le symbole de

$$\begin{aligned}(P-QR)\sim p-\sum_\alpha\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha qD_x^\alpha r &= \sum_{j=0}^m\left(\frac{1}{i}\right)^j p_{m-j}(t, x; \tau, \xi)- \\ &\quad -\sum_\alpha\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha\left(q_{m-s}+\frac{1}{i}q_{m-s-1}+\cdots\right)D_x^\alpha\left(r_s+\frac{1}{i}r_{s-1}+\cdots\right)= \\ &= (p_m-q_{m-s}r_s)+\frac{1}{i}\left\{p_{m-1}-(q_{m-s}r_{s-1}+q_{m-s-1}r_s)-\right. \\ &\quad \left.-\sum_{\alpha=0}^l\frac{\partial q_{m-s}}{\partial\xi_\alpha}\frac{\partial r_s}{\partial x_\alpha}\right\}+(\text{degré}\leqslant m-2)\,;\end{aligned}$$

évidemment, (8.2) donne $p_m=q_{m-s}r_s$.

Pour que le degré du symbole de $P-QR$ soit inférieur à $m-1$, il suffit que l'on ait

$$(8.6) \qquad p_{m-1}-\sum_{\alpha=0}^{l}\frac{\partial q_{m-s}}{\partial \xi_\alpha}\frac{\partial r_s}{\partial x_\alpha}-(q_{m-s}r_{s-1}+q_{m-s-1}r_s)=0 .$$

Pour simplifier l'écriture, on définit

$$(8.7) \qquad L_{m-1}(t, x;\, \tau, \xi)=p_{m-1}-\sum_{\alpha=0}^{l}\frac{\partial q_{m-s}}{\partial \xi_\alpha}\frac{\partial r_s}{\partial x_\alpha} .$$

9. *Conditions généralisées de Levi.*

D'abord, on va supposer ceci;

$$(1) \qquad \frac{L_{m-1}(t, x;\, \mu_j(t, x;\, \xi), \xi)}{\mu_j(t, x;\, \xi)-\lambda_j(t, x;\, \xi)}$$

appartient à $C^\infty(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{R}^l_\xi\setminus 0)$ *pour tout* j $(1\leqslant j\leqslant s)$,

$$(1)' \qquad \frac{L_{m-1}(t, x;\, \lambda_j(t, x;\, \xi), \xi)}{\lambda_j(t, x;\, \xi)-\mu_j(t, x;\, \xi)}$$

appartient à $C^\infty(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{R}^l_\xi\setminus 0)$ *pour tout* j $(1\leqslant j\leqslant s)$.

On y remarque que, dans le cas particulier où les $\mu_j-\lambda_j/t$ sont des fonctions $C^\infty(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{R}^l_\xi\setminus 0)$, alors (1) et (1)$'$ peuvent être affaiblis, et l'on supposera ceci;

$$(2) \qquad \frac{L_{m-1}(t, x;\, \mu_j(t, x;\, \xi), \xi)}{(\mu_j(t, x;\, \xi)-\lambda_j(t, x;\, \xi))/t}$$

appartient à $C^\infty(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{R}^l_\xi\setminus 0)$ *pour tout* j $(1\leqslant j\leqslant s)$,

$$(2)' \qquad \frac{L_{m-1}(t, x;\, \lambda_j(t, x;\, \xi), \xi)}{(\lambda_j(t, x;\, \xi)-\mu_j(t, x;\, \xi))/t}$$

appartient à $C^\infty(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{R}^l_\xi\setminus 0)$ *pour tout* j $(1\leqslant j\leqslant s)$.

NOTE 9.1. Les conditions (1) et (1)$'$ (respectivement (2) et (2)$'$) sont équivalentes, vu la formule de la moyenne;

$$L_{m-1}(\mu_j)=L_{m-1}(\lambda_j)+(\mu_j-\lambda_j)\frac{\partial L_{m-1}}{\partial \tau}(\tilde{\lambda}_j)\,,\ \text{où } \tilde{\lambda}_j \text{ se situe entre } \mu_j \text{ et } \lambda_j .$$

NOTE 9.2. La condition (2), dans le cas particulier où l'on a $\lambda_j(0, x_0;\, \xi_0)=$ $=\mu_j(0, x^0;\, \xi^0)$ et $(\partial\lambda_j/\partial t)\ (t, x^0;\, \xi^0)\neq(\partial\mu_j/\partial t)\ (t, x^0;\, \xi^0)$ $(1\leqslant j\leqslant s)$ pour t près de l'origine, ne donne aucune restriction à l'opérateur d'ordre inférieur; en effet, en employant la formule de la moyenne, on a

$$\frac{\mu_j - \lambda_j}{t} = \frac{\partial \lambda_j}{\partial t}(t, x_0; \xi_0) - \frac{\partial \mu_j}{\partial t}(t, x_0; \xi_0) \neq 0 .$$

Cette remarque montre une relation avec le résultat obtenu par Ivriy [1].

PROPOSITION 9.1. *Sous la condition* (1), *on peut déterminer deux fonctions* q_{m-s-1} *et* r_{s-1} *indéfiniment dérivables, homogènes en* (τ, ξ) *et polynômes en* τ *telles qu'on ait* $P - QR \in \tilde{L}(m-2)$.

PREUVE. En effet, compte tenu de (8.6), pour avoir que $(P - QR) \in \in \tilde{L}(m-2)$, il suffit qu'on ait

$$L_{m-1}(t, x; \tau, \xi) = q_{m-s}r_{s-1} + q_{m-s-1}r_s . \tag{9.1}$$

Compte tenu de (8.2), on aura

$L_{m-1}(t, x; \mu_j(t, x; \xi), \xi) = q_{m-s}(\mu_j)r_{s-1}(\mu_j)$ pour $(t, x; \xi) \in \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{R}^l_\xi \setminus 0$ et $1 \leqslant j \leqslant s$; c'est-à-dire, sous la condition (1),

$$r_{s-1}(\mu_j) = \frac{L_{m-1}(t, x; \mu_j, \xi)}{\mu_j - \lambda_j} \frac{1}{\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m-s}(\mu_j - \lambda_i)} . \tag{9.2}$$

Si l'on désigne $r_{s-1}(t, x; \tau, \xi) = \sum_{i=0}^{s-1} \alpha_i(t, x; \xi)\tau^{s-1-i}$ où les $\alpha_i(t, x; \xi)$ $(0 \leqslant i \leqslant s-1)$ sont des fonctions $C^\infty(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{R}^l_\xi \setminus 0)$ homogènes en ξ de degré i, alors la possibilité de déterminer $\alpha_i(t, x; \xi)$ résulte de (9.2); en effet,

$$\sum_{i=0}^{s-1} \alpha_i(t, x; \xi)\mu_j^{s-1-i} = \frac{L_{m-1}(\mu_j)}{\mu_j - \lambda_j} \frac{1}{\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m-s}(\mu_j - \lambda_i)} \tag{9.3}$$

pour $1 \leqslant j \leqslant s$; donc on a

$$\begin{bmatrix} \mu_1^{s-1}, \mu_1^{s-2}, \dots, 1 \\ \mu_2^{s-1}, \mu_2^{s-2}, \dots, 1 \\ \mu_s^{s-1}, \mu_s^{s-2}, \dots, 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{s-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{L_{m-1}(\mu_1)}{\mu_1 - \lambda_1} \dfrac{1}{\prod(\mu_1 - \lambda_i)} \\ \dfrac{L_{m-1}(\mu_s)}{\mu_s - \lambda_s} \dfrac{1}{\prod(\mu_s - \lambda_i)} \end{bmatrix} .$$

Ce système des équations permet de déterminer $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1})$, puisque le déterminant des coefficients $\prod_{i<j} (\mu_i - \mu_j)$ ne s'annule jamais.

Le même raisonnement détermine $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{m-s-1})$ dans

$$q_{m-s-1} = \sum_{i=0}^{m-s-1} \beta_i(t, x; \xi)\tau^{m-s-1-i} \text{ en partant de (8.6) où } \tau = \lambda_j(t, x; \xi) .$$

C.Q.F.D.

PROPOSITION 9.2. *Sous la condition* (2), *on peut déterminer deux fonctions* $\tilde{q}_{m-s-1}$ *et* $\tilde{r}_{s-1}$ *indéfiniment dérivables, homogènes en* (τ, ξ) *et polynômes en* τ *telles que l'on ait* $P - QR \in \tilde{L}(m-2)$, *et que*

$$q_{m-s-1} = \frac{\tilde{q}_{m-s-1}}{t}, \qquad r_{s-1} = \frac{\tilde{r}_{s-1}}{t} .$$

PREUVE. En posant $\tau = \mu_j(t, x; \xi)$, on peut tirer de (8.6) ceci; $L_{m-1}(\mu_j) = q_{m-s}(\mu_j)r_{s-1}$, ou bien

$$\frac{L_{m-1}(\mu_j)}{(\mu_j - \lambda_j)/t} = \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m-s} (\mu_j - \lambda_j)\{tr_{s-1}(\mu_j)\} \tag{9.4}$$

pour $(t, x; \xi) \in \Omega \times \boldsymbol{R}^l_\xi \setminus 0$ et $1 \leqslant j \leqslant s$.

L'équation (9.4) permet de déterminer $tr_{s-1}(t, x; \tau, \xi) = \tilde{r}_{s-1}(t, x; \tau, \xi)$ par la même méthode que celle de la proposition 9.1. C.Q.F.D.

§ 3. – Inégalité d'énergie.

10. *Sous la condition* (1).

On peut montrer l'inégalité d'énergie compte tenu de la proposition 9.1.

THÉORÈME 10.1. *Pour le problème de Cauchy* (4.1) *sous la condition* (1), *on a l'inégalité d'énergie*

$$\text{(10.1) }(^2)\qquad \|D^{n+m-2}u(t)\| \leqslant C \left\{ \sum_{j=0}^{m-1} \|\varphi_j\|_{m-j+n-1} + \|D^{n-1}f(0)\| + \int_0^t \|D^n f(\tau)\|\, d\tau \right\},$$

où C *est une constante positive,* n *étant un nombre entier non négatif.*

[2] On emploie la convention que $\|D^n f(0)\| = 0$, si $n < 0$; voir la note 12.2.

PREUVE. On met l'équation (4.1)$'$ sous la forme suivante;

$$
\left\{\begin{aligned} Ru &= v \\ Qv &= -(P-QR)u + i^{-m}f\,. \end{aligned}\right. \tag{10.2}
$$

Compte tenu du Lemme 6.1, on a

$$
\|D^{n+s-1}u(t)\|' \leqslant \gamma(\|D^{n+s-1}u(t)\| + \|D^{n}v(t)\|)\,, \tag{10.3}
$$

et

$$
\begin{aligned} \|D^{n+m-s-1}v(t)\|' &\leqslant \gamma(\|D^{n+m-s-1}v(t)\| + \|D^{n}\{-(P-QR)u + i^{-m}f\}\|) \\ &\leqslant \gamma(\|D^{n+m-s-1}v(t)\| + \|D^{n}(P-QR)u(t)\| + \|D^{n}f(t)\|)\,. \end{aligned} \tag{10.4}
$$

Si l'on tient compte de la proposition 9.1, on obtient

$$
\|D^{n+m-s-1}v(t)\|' \leqslant \gamma\|D^{n+m-s-1}v(t)\| + \text{const}\,\|D^{n+m-2}u(t)\| + \gamma\|D^{n}f(t)\|\,. \tag{10.4$'$}
$$

En définissant

$$
\varphi_n(t) = \|D^{n+m-2}u(t)\| + \|D^{n+m-s-1}v(t)\|\,,
$$

si l'on prend $n+m-s-1$ au lieu de n dans (10.3), alors on aura

$$
\varphi_n'(t) \leqslant C(\varphi_n(t) + \|D^{n}f(t)\|)\,,
$$

en ajoutant (10.3) et (10.4)$'$; c'est-à-dire, on a

$$
\varphi_n(t) - \varphi_n(0) \leqslant C\int_0^t \exp[c(t-\tau)]\|D^{n}f(\tau)\|\,d\tau\,. \tag{10.5}
$$

Pour majorer $\|D^{n+m-2}u(0)\|$, admettons pour l'instant le lemme suivant dont la preuve sera donné dans le n. 11.

LEMME 10.1. *Pour le problème de Cauchy* (4.1), *on a*

$$
\|D^{n+m-2}u(0)\| \leqslant \text{const}\left(\sum_{j=0}^{m-1}\|\varphi_j\|_{m-j+n-2} + \|D^{n-2}f(0)\|\right). \tag{10.6}
$$

Compte tenu de

$$
\varphi_n(t) = \|D^{n+m-2}u(t)\| + \|D^{n+m-s-1}v(t)\| \leqslant \text{const}\,\|D^{n+m-1}u(t)\|\,,
$$

à cause de $Ru = v$, l'inégalité (10.5) avec le lemme 10.1 complète la preuve du théorème 10.1. C.Q.F.D.

11. *Preuve du lemme* 10.1.

Vu la définition, on a

$$\|D^{n+m-2}u(0)\| = \sup_{0 \leqslant k \leqslant n+m-2} \|D_t^{n+m-2-k}u(0)\|_k . \tag{11.1}$$

D'abord on va montrer l'inégalité suivante;

$$\|D_t^{m+\alpha}u(0)\|_\beta \leqslant \text{const}\left(\sum_{j=0}^{m-1}\|\varphi_j\|_{m-j+\alpha+\beta} + \|D^\alpha f(0)\|_\beta\right) \tag{11.2}$$

pour tous les nombres entiers non négatifs α et β. Pour $\alpha = 0$, partant de

$$D_t^m u = -\sum_{j=0}^{m-1} a_{m-j}(t, x; D)D_t^j u + i^{-m} f , \tag{11.3}$$

on aura évidemment

$$\|D_t^m u(0)\|_\beta \leqslant \text{const}\left(\sum_{j=0}^{m-1}\|\varphi_j\|_{m-j+\beta} + \|f(0)\|_\beta\right)$$

pour tout β, car $a_{m-j} \in L(m-j)$ dépendant du paramètre t.

Supposons maintenant que (11.2) soit vrai jusqu'à $\alpha - 1$. Compte tenu de (11.3), nous avons

$$D_t^{m+\alpha} u = -\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{\gamma=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{\gamma} D_t^{\alpha-\gamma} a_{m-j} D_t^{j+\gamma} u + i^{-m} D_t^\alpha f ;$$

ceci implique

$$\|D_t^{m+\alpha}u(0)\|_\beta \leqslant \text{const}\left(\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{\gamma=0}^{\alpha}\|D_t^{j+\gamma}u(0)\|_{m-j+\beta} + \|D_t^\alpha f(0)\|_\beta\right). \tag{11.4}$$

Les premiers termes du second membre se majorent à fortiori

$$\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{\gamma=0}^{\alpha}\|D_t^{j+\gamma}u(0)\|_{m-j+\beta} \leqslant (\alpha+1)\sum_{j=0}^{m-1}\|D_t^j u(0)\|_{m-j+\beta} + \sum_{\gamma=1}^{\alpha}\gamma\|D_t^{m+\alpha-\gamma}u(0)\|_{\gamma+\beta} .$$

De l'hypothèse de la méthode par recurrence (11.2) où l'on remplace α par

$\alpha - \gamma$ ($\leqslant \alpha - 1$), on les majore encore par

$$(\alpha + 1)\sum_{j=0}^{m-1} \|\varphi_j\|_{m-j+\beta} + \sum_{\gamma=1}^{\alpha} \gamma \left\{\text{const}\left(\sum_{j=0}^{m-1} \|\varphi_j\|_{m-j+\alpha+\beta} + \sum_{i=0}^{\alpha} \|D_t^i f(0)\|_{\alpha-\gamma-i+\beta}\right)\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \text{const}\left(\sum_{j=0}^{m-1} \|\varphi_j\|_{m-j+\alpha+\beta} + \sum_{i=0}^{\alpha-1} \|D_t^i f(0)\|_{\alpha-i+\beta}\right).$$

En les substituant dans (11.4), on obtient

$$\|D_t^{m+\alpha} u(0)\|_\beta \leqslant \text{const}\left\{\sum_{j=0}^{m-1} \|\varphi_j\|_{m-j+\alpha+\beta} + \|D^\alpha f(0)\|_\beta\right\}; \tag{11.5}$$

ce qui prouve que (11.2) est vrai pour tout α. En choisissant $\alpha = n - 2 - k$ et $\beta = k$, on a

$$\|D_t^{n+m-2-k} u(0)\|_k \leqslant \text{const}\left\{\sum_{j=0}^{m-1} \|\varphi_j\|_{m-j+n-2} + \|D^{n-2-k} f(0)\|_k\right\}; \tag{11.6}$$

d'où il résulte que

$$\|D^{n+m-2} u(0)\| \leqslant \text{const}\left\{\sum_{j=0}^{m-1} \|\varphi_j\|_{m-j+n-2} + \|D^{n-2} f(0)\|\right\}. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

12. *Sous la condition* (2).

On a le

Théorème 12.1. *Pour le problème de Cauchy* (4.1), *sous la condition* (2), *on a l'inégalité d'énergie*

$$\|D^{n+m-2} u(t)\|^2 \leqslant C\left\{\sum_{j=0}^{m-1} \|\varphi_j\|^2_{m-j+n+m+N} + \|D^N f(0)\|^2_{n+m} + \int_0^t \|D_\tau^{N+1} f(\tau)\|^2 d\tau\right\} \tag{12.1}$$

où C est une constante positive, N étant un nombre entier positif convenablement choisi et n étant un nombre entier non négatif.

Preuve. On rappelle

$$\begin{cases} Ru = v \\ Qv = -(P - QR)u + i^{-m} f; \end{cases} \tag{12.2}$$

remarquons cette fois-ci que l'on a

$$q(t, x; \tau, \xi) \sim q_{m-s} + \frac{1}{i} q_{m-s-1} + \frac{1}{i^2} q_{m-s-2} + \dots ,$$

$$r(t, x; \tau, \xi) \sim r_s + \frac{1}{i} r_{s-1} + \frac{1}{i^2} r_{s-2} + \dots ,$$

vu la proposition 9.2.

Avant d'appliquer directement le lemme 6.1 aux équations (12.2), on fait le changement de fonction inconnue $u(t, x)$ à $w(t, x)$ par $u(t, x) = tw(t, x)$. Alors on a

$$(12.2)' \qquad \begin{cases} Rw = \dfrac{1}{t}(v - [R, t]w) , \\ Qv = -(P - QR)(tw) + i^{-m} f , \end{cases}$$

où $[R, t]w = R(tw) - tRw$.

Pour la première équation de (12.2)$'$, le lemme 6.2 donne

$$(12.3) \qquad (\|D^{n+s-1}w(t)\|^2)' \leqslant \\ \leqslant \gamma\left\{\|D^{n+s-1}w(t)\|^2 + \sum_{k=0}^{n} \frac{\|D^{n+s-1-k}w(t)\|^2}{t^{2k+1}} + t\left\|D^n\left(\frac{v - [R, t]w}{t}\right)\right\|^2\right\}.$$

Pour majorer le terme dernier du second membre, on prouve le

LEMME 12.1.

$$(12.4) \qquad \left\|D^n\left(\frac{v - [R, t]w}{t}\right)\right\| \leqslant \text{const}\left\{\sum_{k=0}^{n} \frac{\|D^{n-k}v(t)\|}{t^{k+1}} + \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\|D^{n+s-1-k}w(t)\|}{t^{k+1}}\right\}.$$

PREUVE. Le symbole de $[R, t]$ se calcule par la formule du produit (3.10);

$$\sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha \left\{r_s + \frac{1}{i}\frac{\tilde{r}_{s-1}}{t} + \frac{1}{i^2} r_{s-2} + \dots\right\} D_x^\alpha(t) - tr = \\ = \partial_\tau\left(r_s + \frac{1}{i}\frac{\tilde{r}_{s-1}}{t} + \frac{1}{i^2} r_{s-2} + \dots\right) = \frac{1}{i}\frac{\partial_\tau \tilde{r}_{s-1}}{t} + \text{symbole de } \tilde{L}(s-1) .$$

Donc le symbole de $-[R, t]/t$ s'exprime par

$$i\frac{\partial_\tau \tilde{r}_{s-1}}{t^2} - \frac{\text{symbole de } \tilde{L}(s-1)}{t} .$$

Compte tenu de

$$\left\| D^n\left(-\frac{[R,t]w}{t}\right)\right\| = \sup_{s\in\tilde{L}(n)}\left\| S\left(-\frac{[R,t]w}{t}\right)\right\|$$

pour le symbole de $S = s \sim \sum_{j=0}^{\infty} s_{n-j}$, on voit que le symbole de

$$S\left(-\frac{[R,t]w}{t}\right) \sim \sum_{\alpha}\frac{1}{\alpha!}\,\partial_\xi^\alpha\left(\sum_{j=0}^{\infty} s_{n-j}\right) D_x^\alpha\left(i\,\frac{\partial_\tau \tilde{r}_{s-1}}{t^2} - \frac{\text{symbole de } \tilde{L}(s-1)}{t}\right) =$$

$$= \sum_{\alpha}\frac{1}{\alpha!}\,\partial_{\xi_0}^{\alpha_0}\partial_{\xi}^{\alpha'}\left(\sum_{j=0}^{\infty} s_{n-j}\right) D_{x'}^{\alpha}\left(i\sum_{\beta_0=0}^{\alpha_0}\binom{\alpha_0}{\beta_0}\frac{(-1)^{\beta_0}(\beta_0+1)!\,D_{x_0}^{\alpha_0-\beta_0}\,\partial_\tau\tilde{r}_{s-1}}{t^{\beta_0+2}} - \right.$$

$$\left. - \sum\binom{\alpha_0}{\beta_0}\frac{D_{x_0}^{\alpha_0-\beta_0}\,(\text{symbole de } \tilde{L}(s-1))}{t^{\beta_0+1}}\right)$$

où $\alpha = (\alpha_0, \alpha')$, $\xi = (\xi_0, \xi')$ et $x = (x_0, x')$; donc, on a

$$\sim \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\text{symbole de } \tilde{L}(n-k+s-2)}{t^{k+2}} + \frac{\text{symbole de } \tilde{L}(n-k+s-1)}{t^{k+1}}\right),$$

$$\sim \sum_{k=0}^{n+1}\frac{\text{symbole de } \tilde{L}(n+s-1-k)}{t^{k+1}},$$

en notant $|\alpha| = k$. De même, on a successivement

$$\left\| D^n\left(\frac{v}{t}\right)\right\| = \sup_{0\leqslant j\leqslant n}\left\| D_t^j\left(\frac{v}{t}\right)\right\|_{n-j} = \sup_{0\leqslant j\leqslant n}\left\|\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}\frac{(-1)^k k!\,D_t^{j-k}v(t)}{t^{k+1}}\right\|_{n-j} \leqslant$$

$$\leqslant \text{const}\sup_{0\leqslant j\leqslant n}\sum_{k=0}^{j}\frac{\|D_t^{j-k}v(t)\|_{n-j}}{t^{k+1}} \leqslant \text{const}\sum_{k=0}^{n}\frac{\|D^{n-k}v(t)\|}{t^{k+1}}. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Il resulte de (12.3) que

$$(12.3)_1 \qquad (\|D^{n+s-1}w(t)\|^2)' \leqslant \gamma\left\{\|D^{n+s-1}w(t)\|^2 + \sum_{k=0}^{n}\frac{\|D^{n+s-1-k}w(t)\|^2}{t^{2k+1}} + \right.$$

$$\left. + \text{const}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\|D^{n-k}v(t)\|^2}{t^{2k+1}} + \sum_{k=0}^{n+1}\frac{\|D^{n+s-1-k}w(t)\|^2}{t^{2k+1}}\right)\right\}.$$

Ensuite, pour l'équation seconde de $(12.2)'$, on aura

$$(\|D^{n+m-s-1}v(t)\|^2)' \leqslant \gamma\left\{\|D^{n+m-s-1}v(t)\|^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{n}\frac{\|D^{n+m-s-1-k}v(t)\|^2}{t^{2k+1}} + t\|D^n(P-QR)(tw(t))\|^2 + t\|D^n f(t)\|^2\right\}.$$

Pour la majoration du troisième terme du second membre, admettons le lemme suivant dont la preuve se trouve dans le n. 13.

LEMME 12.2.

$$\|D^n(P-QR)u(t)\| \leqslant \mathrm{const} \sum_{k=0}^{n+m-s-1} \frac{\|D^{n+m-2-k}u(t)\|}{t^{k+2}}. \tag{12.5}$$

Alors, nous obtenons

$$(\|D^{n+m-s-1}v(t)\|^2)' \leqslant \gamma \Big\{ \|D^{n+m-s-1}v(t)\|^2 + $$
$$+ \sum_{k=0}^{n} \frac{\|D^{n+m-s-1-k}v(t)\|^2}{t^{2k+1}} + \mathrm{const} \sum_{k=0}^{n+m-s-1} \frac{\|D^{n+m-2-k}(tw(t))\|^2}{t^{2k+3}} + t\|D^n f(t)\|^2 \Big\}.$$

NOTE 12.1. Remarquons que

$$\|D^{n+m-2-k}(tw(t))\| = \sup_{0\leqslant j\leqslant n+m-2-k} \|D_t^j(tw)\|_{n+m-2-k-j} =$$
$$= \sup_{0\leqslant j\leqslant n+m-2-k} \left\| tD_t^j w + \frac{1}{i} jD_t^{j-1} w \right\|_{n+m-2-k-j} =$$
$$= \sup_{0\leqslant j\leqslant n+m-2-k} \{ t\|D_t^j w\|_{n+m-2-k-j} + j\|D_t^{j-1}w\|_{n+m-2-k-j} \} \leqslant$$
$$\leqslant t\|D^{n+m-2-k}w(t)\| + \mathrm{const}\, \|D^{n+m-3-k}w(t)\|;$$

d'où il résulte que

$$\sum_{k=0}^{n+m-s-1} \frac{\|D^{n+m-2-k}(tw(t))\|^2}{t^{2k+3}} \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{const} \left\{ \sum_{k=0}^{n+m-s-1} \frac{\|D^{n+m-2-k}w(t)\|^2}{t^{2k+1}} + \sum_{k=0}^{n+m-s-1} \frac{\|D^{n+m-3-k}w(t)\|^2}{t^{2k+3}} \right\} \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{const} \sum_{k=0}^{n+m-s} \frac{\|D^{n+m-2-k}w(t)\|^2}{t^{2k+1}}.$$

Compte tenu de la note 12.1, on a

$$(12.3)_2 \qquad (\|D^{n+m-s-1}v(t)\|^2)' \leqslant \gamma \Big\{ \|D^{n+m-s-1}v(t)\|^2 + $$
$$+ \sum_{k=0}^{n} \frac{\|D^{n+m-s-1-k}v(t)\|^2}{t^{2k+1}} + \mathrm{const} \sum_{k=0}^{n+m-s} \frac{\|D^{n+m-2-k}w(t)\|^2}{t^{2k+1}} + t\|D^n f(t)\|^2 \Big\}.$$

En choisissant $n+m-s-1$ à la place de n dans $(12.3)_1$, on aura

$$(12.6)_1 \qquad (\|D^{n+m-2}w(t)\|^2)' \leqslant C\Big\{\|D^{n+m-2}w(t)\|^2 + \\ + \sum_{k=0}^{n+m-s-1} \frac{\|D^{n+m-s-1-k}v(t)\|^2}{t^{2k+1}} + \sum_{k=0}^{n+m-s} \frac{\|D^{n+m-2-k}w(t)\|^2}{t^{2k+1}}\Big\},$$

et

$$(12.6)_2 \qquad (\|D^{n+m-s-1}v(t)\|^2)' \leqslant C\Big\{\|D^{n+m-s-1}v(t)\|^2 + \\ + \sum_{k=0}^{n} \frac{\|D^{n+m-s-1-k}v(t)\|^2}{t^{2k+1}} + \sum_{k=0}^{n+m-s} \frac{\|D^{n+m-2-k}w(t)\|^2}{t^{2k+1}} + t\|D^n f(t)\|^2\Big\},$$

où C est une constante positive.

NOTE 12.2. Au cas des équations du second ordre, on n'aura pas le terme $\|D^{s-2}w(t)\|^2/t^{2(n+m-s)+1}$ qui apparaît dans les seconds membres de $(12.6)_1$ et $(12.6)_2$, car $s=1$.

Dans la suite, on emploie la convention; pour $n<0$, on a $\|D^n u(t)\|=0$. Cette convention nous permet de mettre $(12.6)_1$ et $(12.6)_2$ sous les formes suivantes;

$$(12.7)_1 \qquad (\|D^{n+m-2-j}w(t)\|^2 \leqslant C\Big\{\|D^{n+m-2-j}w(t)\|^2 + \\ + \sum_{k=0}^{n+m-s-1-j} \frac{\|D^{n+m-s-1-j-k}v(t)\|^2}{t^{2k+1}} + \sum_{k=0}^{n+m-s-j} \frac{\|D^{n+m-2-j-k}w(t)\|^2}{t^{2k+1}}\Big\},$$

et

$$(12.7)_2 \qquad (\|D^{n+m-s-1-j}v(t)\|^2)' \leqslant C\Big\{\|D^{n+m-s-1-j}v(t)\|^2 + \\ + \sum_{k=0}^{n-j} \frac{\|D^{n+m-s-1-j-k}v(t)\|^2}{t^{2k+1}} + \sum_{k=0}^{n+m-s-j} \frac{\|D^{n+m-2-j-k}w(t)\|^2}{t^{2k+1}} + t\|D^{n-j}f(t)\|^2\Big\}.$$

En divisant $(12.7)_1$ et $(12.7)_2$ par t^{2j}, et prenant $\sum_{j=0}^{n+m-s}$ pour $(12.7)_1$ et $\sum_{j=0}^{n+m-s-1}$ pour $(12.7)_2$, on aura à fortiori

$$(12.8)_1 \qquad \sum_{j=0}^{n+m-s} \frac{(\|D^{n+m-2-j}w(t)\|^2)'}{t^{2j}} \leqslant C\Big\{\sum_{j=0}^{n+m-s} \frac{\|D^{n+m-2-j}w(t)\|^2}{t^{2j}} + \\ + \sum_{j=0}^{n+m-s-1} (j+1)\frac{\|D^{n+m-s-1-j}v(t)\|^2}{t^{2k+1}} + \sum_{j=0}^{n+m-s} (j+1)\frac{\|D^{n+m-2-j}w(t)\|^2}{t^{2j+1}}\Big\},$$

et

$$(12.8)_2 \quad \sum_{j=0}^{n+m-s-1} \frac{\left(\|D^{n+m-s-1-j}v(t)\|^2\right)'}{t^{2j}} \leqslant C\left\{\sum_{j=0}^{n+m-s-1} \frac{\|D^{n+m-s-1-j}v(t)\|^2}{t^{2j}} + \right.$$

$$+ \sum_{j=0}^{n+m-s-1} (j+1)\frac{\|D^{n+m-s-1-j}v(t)\|^2}{t^{2j+1}} + \sum_{j=0}^{n+m-s} (j+1)\frac{\|D^{n+m-2-j}w(t)\|^2}{t^{2j+1}} +$$

$$\left. + \frac{\alpha(t)}{t^{2n-3}}\|D^n f(t)\|^2\right\}, \qquad \text{où } \alpha(t) = \frac{t^{2n}-1}{t^2-1}.$$

Définissons

$$(12.9) \qquad \Phi_n(t) = \sum_{j=0}^{n+m-s-1} \frac{\|D^{n+m-s-1-j}v(t)\|^2}{t^{2j+1}} + \sum_{j=0}^{n+m-s} \frac{\|D^{n+m-2-j}w(t)\|^2}{t^{2j+1}},$$

et notons

$$(12.10) \qquad (t\Phi_n(t))' = \sum_{j=0}^{n+m-s-1} \frac{\left(\|D^{n+m-s-1-j}v(t)\|^2\right)'}{t^{2j}} -$$

$$- \sum_{j=0}^{n+m-s-1} (2j)\frac{\|D^{n+m-s-1-j}v(t)\|^2}{t^{2j+1}} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{n+m-s} \frac{\left(\|D^{n+m-2-j}w(t)\|^2\right)'}{t^{2j}} - \sum_{j=0}^{n+m-s} (2j)\frac{\|D^{n+m-2-j}w(t)\|^2}{t^{2j+1}};$$

compte tenu de $(12.8)_1$, $(12.8)_2$ et (12.10), il s'ensuit que

$$(12.11) \qquad (t\Phi_n(t))' \leqslant C(t\Phi_n(t)) + \sum_{j=0}^{n+m-s-1} (2C(j+1)-2j)\frac{\|D^{n+m-s-1-j}\, v(t)\|^2}{t^{2j+1}} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{n+m-s} (2C(j+1)-2j)\frac{\|D^{n+m-2-j}w(t)\|^2}{t^{2j+1}} + C\alpha(t)\frac{\|D^n f(t)\|^2}{t^{2n-3}};$$

donc, avec une autre constante positive C, on obtient

$$(12.12) \qquad t\Phi_n'(t) \leqslant Ct\Phi_n(t) + (C-1)\Phi_n(t) + C\,\frac{\|D^n f(t)\|^2}{t^{2n-3}}.$$

Si l'on multiplie $t^{-C}\exp[-Ct]$ à (12.12), alors on aura

$$(12.13) \qquad \left(t^{-C+1}\exp[-Ct]\Phi_n(t)\right)' \leqslant Ct^{-C-2n+3}\exp[-Ct]\|D^n f(t)\|^2.$$

Pour intégrer (12.13) sur $[0, t]$, il faut voir si

$$(12.14) \qquad \{t^{-C+1}\exp[-Ct]\Phi_n(t)\}|_{t=0} = 0;$$

ceci sera vérifié dans le n. 14.

Ceci admis, on aura finalement

$$\Phi_n(t) \leqslant Ct^{C-1}\int_0^t \exp[C(t-\tau)]\tau^{-C-2n+3}\|D^n f(\tau)\|^2 d\tau . \tag{12.15}$$

Nous nous arrêtons ici pour le moment pour montrer le lemme 12.2. Pour la suite de la démonstration du théorème 12.1, regardez le n. 15.

13. *Preuve du lemme* 12.2.

D'abord on prouve (12.5) pour $n=0$. Regardons le développement du symbole correspondant au $P-QR$;

$$\text{le symbole de } (P-QR)\sim \tag{13.1}$$
$$\sim p_m + \frac{1}{i}p_{m-1} + \frac{1}{i^2}p_{m-2} + \dots - \sum \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha\left(q^*_{m-s} + \frac{1}{i}\frac{\tilde{q}_{m-s-1}}{t}\right)D_x^\alpha\left(r^*_s + \frac{1}{i}\frac{\tilde{r}_{s-1}}{t}\right),$$

où l'on a désigné

$$\left\{\begin{aligned} q^*_{m-s} &= q_{m-s} + \frac{1}{i^2}q_{m-s-2} + \dots, \\ r^*_s &= r_s + \frac{1}{i^2}r_{s-2} + \dots . \end{aligned}\right. \tag{13.2}$$

Le second membre de (13.1) s'exprime donc

$$\begin{aligned} p_m &+ \frac{1}{i}p_{m-1} + \frac{1}{i^2}p_{m-2} + \dots - \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\left\{\partial_\xi^\alpha q^*_{m-s} D_\xi^\alpha r^*_s + \partial_\xi^\alpha q^*_{-s} D_x^\alpha\left(\frac{1}{i}\frac{\tilde{r}_{s-1}}{t}\right) + \right. \\ &\left. + \partial_\xi^\alpha\left(\frac{1}{i}\frac{\tilde{q}_{m-s-1}}{t}\right)D_x^\alpha r^*_s + \partial_\xi^\alpha\left(\frac{1}{i}\frac{\tilde{q}_{m-s-1}}{t}\right)D_x^\alpha\left(\frac{1}{i}\frac{\tilde{r}_{s-1}}{t}\right)\right\} = \\ &= p_m + \frac{1}{i}p_{m-1} + \frac{1}{i^2}p_{m-2} + \dots - \\ &- \left\{q^*_{m-s}r^*_s + \sum_{\alpha=0}^{l}\frac{\partial q^*_{m-s}}{\partial\xi_\alpha}D_{x_\alpha}r^*_s + \sum_{|\alpha|\geqslant 2}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha q^*_{m-s}D_x^\alpha r^*_s + \right. \\ &+ q^*_{m-s}\frac{1}{i}\frac{\tilde{r}_{s-1}}{t} + \sum_{|\alpha|\geqslant 1}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha q^*_{m-s}D_x^\alpha\left(\frac{1}{i}\frac{\tilde{r}_{s-1}}{t}\right) + \\ &+ \frac{1}{i}\frac{\tilde{q}_{m-s-1}}{t}r^*_s + \sum_{|\alpha|\geqslant 1}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha\left(\frac{1}{i}\frac{\tilde{q}_{m-s-1}}{t}\right)D_x^\alpha r^*_s + \\ &\left. + \sum\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha\left(\frac{1}{i}\frac{\tilde{q}_{m-s-1}}{t}\right)D_x^\alpha\left(\frac{1}{i}\frac{\tilde{r}_{s-1}}{t}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Sous la condition (2), ceci équivaut à

$$\frac{1}{i^2} p_{m-2} + \dots - \Big\{ q^*_{m-s}\Big(\frac{1}{i^2} r_{s-2} + \dots\Big) + \Big(\frac{1}{i^2} q_{m-s-2} + \dots\Big) r^*_s +$$
$$+ \sum_{\alpha=0}^{l} \Big(\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} q^*_{m-s} D_{x_\alpha}\Big(\frac{1}{i^2} r_{s-2} + \dots\Big) + \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\Big(\frac{1}{i^2} q_{m-s-2} + \dots\Big) D_{x_\alpha} r^*_s\Big) +$$
$$+ \sum_{|\alpha|\geqslant 2} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha_\xi q^*_{m-s} D^\alpha_\xi r^*_s + \frac{1}{i} \frac{\tilde q_{m-s-1}}{t}\Big(\frac{1}{i^2} r_{s-2} + \dots\Big) +$$
$$+ \sum_{|\alpha|\geqslant 1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha_\xi \Big(\frac{1}{i} \frac{\tilde q_{m-s-1}}{t}\Big) D^\alpha_x r^*_s +$$
$$+ \sum_{|\alpha|\geqslant 1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha_\xi q^*_{m-s} D^\alpha_x \Big(\frac{1}{i} \frac{\tilde r_{s-1}}{t}\Big) + \sum \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha_\xi \Big(\frac{1}{i} \frac{\tilde q_{m-s-1}}{t}\Big) D^\alpha_x \Big(\frac{1}{i} \frac{\tilde r_{s-1}}{t}\Big)\Big\}.$$

Donc le symbole de $(P-QR)$ se compose de

(13.3) les symboles de $\tilde L(m-2)$ et les symboles de $\dfrac{\tilde L(m-3)}{t}$,

$$\sum_{|\alpha|\geqslant 1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha_\xi q_{m-s} D^\alpha_x \Big(\frac{1}{i} \frac{\tilde r_{s-1}}{t}\Big), \tag{13.4}$$

$$\sum_{|\alpha|\geqslant 1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha_\xi \Big(\frac{1}{i} \frac{\tilde q_{m-s-1}}{t}\Big) D^\alpha_x r_s, \tag{13.5}$$

et de

$$\sum \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha_\xi \Big(\frac{1}{i} \frac{\tilde q_{m-s-1}}{t}\Big) D^\alpha_x \Big(\frac{1}{i} \frac{\tilde r_{s-1}}{t}\Big). \tag{13.6}$$

On veut compter quel ordre de singularité par rapport à t contiennent les termes ci-dessus.

En notant $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_l) = (\alpha_0, \alpha')$, on voit que, pour (13.4), la singularité la plus élevée provient du terme

$$\partial^{\alpha_0}_{\xi_0} q_{m-s} D^{\alpha_0}_{\xi_0} \Big(\frac{1}{i} \frac{\tilde r_{s-1}}{t}\Big)$$

qui donne le symbole de

$$\frac{\tilde L(m-s-\alpha_0+s-1)}{t^{\alpha_0+1}} = \frac{\tilde L(m-1-\alpha_0)}{t^{\alpha_0+1}}. \tag{13.4$'$}$$

Remarquez que α_0 doit être pris pour $\alpha_0 \leqslant m-s$, puisque

$$\partial^{\alpha_0}_{\xi_0} q_{m-s}(t, x; \tau, \xi) = 0 \quad \text{pour } \alpha_0 \geqslant m-s+1.$$

De même, pour (13.6), la singularité la plus élevée apparaît dans le symbole de

$$\text{(13.6)}' \qquad \frac{\tilde{L}(m-s-1-\alpha_0+s-1)}{t^{\alpha_0+2}}=\frac{\tilde{L}(m-2-\alpha_0)}{t^{\alpha_0+2}},$$

où α_0 doit être pris pour $\alpha_0 \leqslant m-s-1$.

Quant à (13.5), ils ne contiennent que la singularité de $1/t$; c'est-à-dire, elle apparaît dans le symbole de

$$\text{(13.5)}' \qquad \frac{\tilde{L}(m-s-1-|\alpha|+s)}{t}=\frac{\tilde{L}(m-1-|\alpha|)}{t}.$$

En employant les calculs ci-dessus, on peut calculer l'ordre des singularités par rapport à t pour les symboles d'ordre $(m-2-k)$.

Prenez $m-1-\alpha_0=m-2-k$ dans (13.4)'; cela donne $\alpha_0=k+1$, donc on a le symbole de

$$\frac{\tilde{L}(m-2-k)}{t^{k+2}} \qquad \text{pour } k \leqslant m-s-1\,.$$

En suite, on prend $m-2-\alpha_0=m-2-k$ dans (13.6)' qui donne $\alpha_0=k$; donc on a le symbole de

$$\frac{\tilde{L}(m-2-k)}{t^{k+2}} \qquad \text{pour } k \leqslant m-s-1\,.$$

Pour (13.5)', on a le symbole de

$$\frac{L(m-2-k)}{t} \qquad \text{pour } k \leqslant m-s-2\,,$$

puisqu'il suffit de prendre $m-1-|\alpha|=m-2-k$ dans (13.5)'.

Au total, on pourra calculer l'ordre de $1/t$ dans le symbole de $(P-QR)$ par le développement

$$\text{(13.7)} \qquad \text{le symbole de } (P-QR) \sim \sum_{k=0}^{m-s-1} \frac{\tilde{\tilde{p}}_{m-2-k}}{t^{k+2}} + \text{symbole de } \tilde{L}(m-2)\,.$$

Pour montrer (12.5) pour n quelconque, on raisonne comme suit.

Rappelons la définition de

$$\|D^n(P-QR)u(t)\| = \sup_{S\in\tilde{L}(n)} \|S(P-QR)u(t)\|$$

où $s(=$ symbole de $S)\sim\sum_{j=0}^{\infty}s_{n-j}(t,x;\tau,\xi)$, s_{n-j} étant des fonctions indéfiniment dérivables, homogènes en (τ,ξ), polynômes en τ de degré $n-j$. Donc le symbole de $S(P-QR)$ a le développement

$$\sum\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha\left(\sum_{j=0}^{\infty}s_{n-j}\right)D_x^\alpha\left(\sum_{k=0}^{m-s-1}\frac{p_{m-2-k}}{t^{k+2}}+\text{symbole de }\tilde{L}(m-2)\right)$$

compte tenu de (13.7).

Le fait que s_n est un polynôme de degré n en τ nous permet de les écrire

$$\sum_{0\leqslant\alpha_0\leqslant n}\frac{1}{\alpha!}\partial_{\xi_0}^{\alpha_0}\partial_\xi^{\alpha'}\left(\sum_{j=0}^{\infty}s_{n-j}\right)\cdot$$

$$\cdot D_x^{\alpha'}\left(\sum_{k=0}^{m-s-1}\sum_{\beta_0=0}^{\alpha_0}\binom{\alpha_0}{\beta_0}(-1)^{\beta_0}\frac{(k+2)!}{(k+2-\beta_0)!}\frac{D_{x_0}^{\alpha_0-\beta_0}\tilde{\tilde{p}}_{m-2-k}}{t^{k+2+\beta_0}}+\right.$$

$$\left.+D_{x_0}^{\alpha_0}(\text{symbole de }\tilde{L}(m-2))\right);$$

ils se sont mis sous la forme suivante

$$\sum_{\substack{\alpha\\0\leqslant\alpha_0\leqslant n}}\left(\sum_{k=0}^{m-s-1}\frac{\text{symbole de }\tilde{L}(n+m-2-k-|\alpha|)}{t^{k+2+\alpha_0}}+\right.$$

$$\left.+\text{symbole de }\tilde{L}(n+m-2-|\alpha|)\right).$$

Donc, on peut constater que

$$\text{le symbole de }S(P-QR)\sim\sum_{k=0}^{n+m-s-1}\frac{\text{symbole de }\tilde{L}(n+m-2-k)}{t^{k+2}}+$$

$$+\text{symbole de }\tilde{L}(n+m-2)\ ;$$

d'où résulte l'inégalité énoncée dans le lemme 12.2. C.Q.F.D.

14. *Vérification de* (12.14).

Dans le problème de Cauchy

$$(4.1)'\qquad\left\{\begin{array}{l}Pu=i^{-m}f\\[2mm] D_t^ju\,(0,x)=i^{-j}\varphi_j(x)\qquad(0\leqslant j\leqslant m-1),\end{array}\right.$$

on considère, à la place de fonction inconnue $u(t, x)$,

$$z(t, x) = u(t, x) - \sum_{j=0}^{N+m} \frac{(it)^j}{j!} D_t^j u(0, x) , \tag{14.1}$$

où N est un nombre entier non négatif; alors, le problème se transforme à

$$\begin{cases} Pz = g \\ D_t^j z(0, x) = 0 \qquad (0 \leqslant j \leqslant N + m) , \end{cases} \tag{14.2}$$

où

$$g(t, x) = i^{-m} f(t, x) - P(t, x; D_t, D)\left(\sum_{j=0}^{N+m} \frac{(it)^j}{j!} D_t^j u(0, x)\right).$$

NOTE 14.1. Par la définition de $g(t, x)$, on a

$$D_t^k g(0, x) = 0 \qquad (k \leqslant N) , \qquad \text{puisque } Pz = g , \tag{14.3}$$

où

$$D_t^k z(0, x) = 0 \qquad (k \leqslant N + m) . \tag{14.4}$$

Voyons de plus près ce que l'inégalité (12.15) implique en nous rappelant que $u(t, x) = tw(t, x)$; compte tenu de la note 12.1, nous avons

$$\frac{\|D^{n+m-2} u(t)\|^2}{t^3} \leqslant \text{const} \left(\frac{\|D^{n+m-2} w(t)\|^2}{t} + \frac{\|D^{n+m-3} w(t)\|^2}{t^3}\right) \leqslant \text{const}\, \Phi_n(t) .$$

Donc (12.15) donne à fortiori,

$$\|D^{n+m-2} u(t)\|^2 \leqslant \text{const}\, t^{C+2} \int_0^t \tau^{-C-2n+3} \|D^n f(\tau)\|^2 d\tau . \tag{14.5}$$

Si l'on emploie cette majoration au problème de Cauchy (14.2), alors on aura

$$\|D^{n+m-2} z(t)\|^2 \leqslant \text{const}\, t^{C+2} \int_0^t \tau^{-C-2n+3} \|D^n g(\tau)\|^2 d\tau , \tag{14.6}$$

sous réserve que la vérification

$$\left\{ t^{-C+1} \sum_{j=0}^{n+m-s} \frac{\|D^{n+m-2-j} w(t)\|^2}{t^{2j+1}} \right\} \Bigg|_{t=0} = 0 . \tag{14.7}$$

Voici le lemme qui nous aide à majorer le second membre de (14.6).

LEMME 14.1. *Si* $g(t, x)$ *satisfait* (14.3), *on a*

$$\|g(s)\|^2 \leqslant \text{const}\, s^{2N+1}\int_0^s \|D^{N+1}g(\tau)\|^2 d\tau\,.$$

PREUVE. En effet, partant de la formule de la moyenne

$$g(s, x) = \frac{1}{N!}\int_0^s (s-\tau)^N (iD_\tau)^{N+1} g(\tau, x)\, d\tau\,,$$

on aura

$$|g(s, x)|^2 = \left(\frac{1}{N!}\right)^2 \left|\int_0^s (s-\tau)^N (iD_\tau)^{N+1} g(\tau, x)\, d\tau\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{N!}\right)^2 \left(\int_0^s (s-\tau)^{2N} d\tau\right)\left(\int_0^s |D_\tau^{N+1} g(\tau, x)|^2 d\tau\right);$$

d'où il résulte que

$$\|g(s)\|^2 \leqslant \text{const}\, s^{2N+1}\int_0^s \|D_\tau^{N+1}g(\tau)\|^2 d\tau\,. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Le lemme 14.1 implique évidemment

$$\|D_s^k g(s)\|^2 \leqslant \text{const}\, s^{2(N-k)+1}\int_0^s \|D_\tau^{N+1}g(\tau)\|^2 d\tau\,;$$

donc on a

$$\|D^n g(s)\|^2 = \left(\sup_{0\leqslant k\leqslant n} \|D_s^k g(s)\|_{n-k}\right)^2 \leqslant \tag{14.8}$$

$$\leqslant \text{const} \sup_{0\leqslant k\leqslant n}\left\{s^{2(N-k)+1}\int_0^s \|D_\tau^{N+1}g(\tau)\|_{n-k}^2 d\tau\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \text{const}\, s^{2(N-n)+1}\int_0^s \|D_\tau^{N+1}g(\tau)\|_n^2\, d\tau\,.$$

NOTE 14.2. Le lemme 14.1 permet aussi de vérifier (14.7); en effet, en notant que $D_t^k w(0, x) = 0$ pour $k \leqslant N + m - 1$, car $z = tw$, si l'on raisonne comme ci-dessus, alors on aura

$$\|w(t)\|^2 \leqslant \text{const}\, t^{2(N+m-1)+1} \int_0^t \|D_\tau^{N+m} w(\tau)\|^2 d\tau .$$

Donc on obtient

$$\|D_t^k w(t)\|^2 \leqslant \text{const}\, t^{2(N+m-1-k)+1} \int_0^t \|D_\tau^{N+m} w(\tau)\|^2 d\tau$$

qui entraîne

$$\|D_t^{n+m-2-j} w(t)\|^2 \leqslant \text{const}\, t^{2\{N+m-1-(n+m-2-j)\}+1} \int_0^t \|D_\tau^{N+m} w(\tau)\|^2 d\tau .$$

Or, compte tenu de

$$t^{-C} \sum_{j=0}^{n+m-s} \frac{\|D_t^{n+m-2-j} w(t)\|^2}{t^{2j}} \leqslant \text{const}\, t^{2(N-n+1)+1-C} \int_0^t \|D_\tau^{N+m} w(\tau)\|^2 d\tau ,$$

on voit que (14.7) sera vérifié, si l'on choisit N tel que

$$2(N - n + 1) + 1 \geqslant C . \tag{14.9}$$

De (14.6) et (14.8), on déduit

$$\begin{aligned} \|D^{n+m-2} z(t)\|^2 &\leqslant \text{const}\, t^{C+2} \int_0^t \tau^{-C-2n+3} \tau^{2(N-n)+1} \int_0^\tau \|D_s^{N+1} g(s)\|_n^2 ds\, d\tau \\ &= \text{const}\, t^{C+2} \int_0^t \|D_s^{N+1} g(s)\|_n^2 \int_s^t \tau^{2(N-2n)-C+4} d\tau\, ds \\ &\leqslant \text{const}\, t^{2(N-2n)+7} \int_0^t \|D_\tau^{N+1} g(\tau)\|_n^2 d\tau . \end{aligned} \tag{14.10}$$

15. *Fin de la preuve du théorème* 12.1.

Remplaçons les $z(t, x)$ et $g(t, x)$ de (14.10) par la fonction inconnue $u(t, x)$ et la fonction donnée $f(t, x)$.

Compte tenu de (14.1) et (14.2) on aura

$$(15.1)\qquad \left\| D^{n+m-2}\left(u(t,x)-\sum_{j=0}^{N+m}\frac{(it)^j}{j!}D_t^j u(0,x)\right)\right\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \text{const}\, t^{2(N-2n)+7}\int_0^t \left\| D_\tau^{N+1}\left\{ i^{-m} f(\tau,x) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - P(\tau,x;D_\tau,D)\left(\sum_{j=0}^{N+m}\frac{(i\tau)^j}{j!}D_\tau^j u(0,x)\right)\right\}\right\|_n^2 d\tau\,, \qquad \text{vu (14.10)}\,.$$

NOTE 15.1. Etant donnés les deux nombres complexes quelconques a et b, on a l'inégalité

$$(15.2)\qquad |a-b|^2 \geqslant (1-\varepsilon)|a|^2 - \left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)|b|^2 \qquad \text{pour } 0<\varepsilon<1\,.$$

Si l'on emploie (15.2) au premier membre de (15.1), alors on aura

$$(15.3)\qquad (1-\varepsilon)\|D^{n+m-2}u(t)\|^2 \leqslant \left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)\left\| D^{n+m-2}\left(\sum_{j=0}^{N+m}\frac{(it)^j}{j!}D_t^j u(0,x)\right)\right\|^2 +$$

$$+\ \text{const}\, t^{2(N-2n)+7}\left[\int_0^t \|D_\tau^{N+1} f(\tau)\|_n^2 d\tau \,+\right.$$

$$\left. +\int_0^t \left\| D_\tau^{N+1}\left\{ P(\tau,x;D_\tau,D)\left(\sum_{j=0}^{N+m}\frac{(i\tau)^j}{j!}D_\tau^j u(0,x)\right)\right\}\right\|_n^2 d\tau\right].$$

D'abord, on considère le premier terme du second membre;

$$\left\| D^{n+m-2}\left(\sum_{j=0}^{N+m}\frac{(it)^j}{j!}D_t^j u(0,x)\right)\right\| = \sup_{0\leqslant\alpha\leqslant n+m-2}\left\| D_t^\alpha\left(\sum_{j=0}^{N+m}\frac{(it)^j}{j!}D_t^j u(0,x)\right)\right\|_{n+m-2-\alpha},$$

où

$$D_t^\alpha\left(\sum_{j=0}^{N+m}\frac{(it)^j}{j!}D_t^j u(0,x)\right) = \sum_{j=\alpha}^{m-1}\frac{(it)^{j-\alpha}}{(j-\alpha)!}D_t^j u(0,x) + \sum_{j=m}^{N+m}\frac{(it)^{j-\alpha}}{(j-\alpha)!}D_t^j u(0,x) =$$

$$= \sum_{j=\alpha}^{m-1}\frac{(it)^{j-\alpha}}{(j-\alpha)!}D_t^j u(0,x) + \sum_{j=0}^{N}\frac{(it)^{j+m-\alpha}}{(j+m-\alpha)!}D_t^{j+m} u(0,x)\,.$$

En remarquant que l'on peut déduire de (11.2)

$$\|D_t^{j+m}u(0)\|_{n+m-2-\alpha} \leqslant \text{const}\left(\sum_{k=0}^{m-1}\|\varphi_k\|_{m-k+n+m-2-\alpha+j} + \|D^j f(0)\|_{n+m-2-\alpha}\right),$$

on a

$$\left\|D^{n+m-2}\left(\sum_{j=0}^{N+m}\frac{(it)^j}{j!}D_t^j u(0, x)\right)\right\| \leqslant \text{const} \sup_{0\leqslant\alpha\leqslant n+m-2}\left\{\sum_{j=\alpha}^{m-1}\|D_t^j u(0)\|_{n+m-2-\alpha} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=0}^{N}\sum_{k=0}^{m-1}\|\varphi_k\|_{m-k+n+m-2-\alpha+j} + \sum_{j=0}^{N}\|D^j f(0)\|_{n+m-2-\alpha}\right\};$$

c'est-à-dire

$$\left\|D^{n+m-2}\left(\sum_{j=0}^{N+m}\frac{(it)^j}{j!}D_t^j u(0, x)\right)\right\| \leqslant \tag{15.4}$$

$$\leqslant \text{const}\left\{\sum_{j=0}^{m-1}\|\varphi_j\|_{m-j+n+m-2+N} + \|D^N f(0)\|_{n+m-2}\right\}.$$

Ensuite, on considère

$$\left\|D_\tau^{N+1}\left\{P(\tau, x; D_\tau, D)\left(\sum_{j=0}^{N+m}\frac{(i\tau)^j}{j!}D_\tau^j u(0, x)\right)\right\}\right\|_n$$

où

$$P(\tau, x; D_\tau, D)\left(\sum_{j=0}^{N+m}\frac{(i\tau)^j}{j!}D_\tau^j u(0, x)\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} a_{m-k}(\tau, x; D)\, D_\tau^{m-k}\left(\sum_{j=0}^{N+m}\frac{(i\tau)^j}{j!}D_\tau^j u(0, x)\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} a_{m-k}(\tau, x; D)\sum_{j=0}^{N+m}\frac{(i\tau)^{j-m+k}}{(j-m+k)!}D_\tau^j u(0, x).$$

L'application D_τ^{N+1} donne

$$D_\tau^{N+1}\left(P\sum_{j=0}^{N+m}\frac{(i\tau)^j}{j!}D_\tau^j u(0, x)\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{N+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{N+1}{i}D_\tau^{N+1-i}a_{m-k}(\tau, x; D)\sum_{j=0}^{N+m}\frac{(i\tau)^{j-m+k-i}}{(j-m+k-i)!}D_t^j u(0, x);$$

donc on aura, à cause de $a_{m-k} \in L(m-k)$,

$$\left\| D_\tau^{N+1}\left\{P(\tau, x; D_\tau, D)\left(\sum_{j=0}^{N+m} \frac{(i\tau)^j}{j!} D_\tau^j u(0, x)\right)\right\}\right\|_n \leqslant$$

$$\leqslant \text{const} \sum_{i=0}^{N+1} \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{N+m} \|D_t^j u(0)\|_{n+m-k} \leqslant$$

$$\leqslant \text{const} \sum_{k=0}^{m} \left\{\sum_{j=0}^{m-1} \|D_t^j u(0)\|_{n+m-k} + \sum_{j=m}^{N+m} \|D_t^j u(0)\|_{n+m-k}\right\}.$$

A l'aide d'inégalité

$$\|D_\tau^{j+m} u(0)\|_{n+m-k} \leqslant \text{const}\left(\sum_{\alpha=0}^{m-1} \|\varphi_j\|_{m-\alpha+n+m-k+j} + \|D^j f(0)\|_{n+m-k}\right)$$

qui provient de (11.2), on a

$$\left\| D_\tau^{N+1}\left\{P(\tau, x; D_\tau, D)\left(\sum_{j=0}^{N+m} \frac{(i\tau)^j}{j!} D_\tau^j u(0, x)\right)\right\}\right\|_n \leqslant \tag{15.5}$$

$$\leqslant \text{const}\left\{\sum_{j=0}^{m-1} \|\varphi_j\|_{m-j+n+m+N} + \|D^N f(0)\|_{n+m}\right\}.$$

Il résulte de (15.3), compte tenu de (15.4) et (15.5), que

$$\|D^{n+m-2} u(t)\|^2 \leqslant \text{const}\left\{\sum_{j=0}^{m-1}\left(\|\varphi_j\|^2_{m-j+n+m-2+N} + t^2\|\varphi_j\|^2_{m-j+n+m+N}\right) + \right. \tag{15.6}$$

$$\left. + \left(\|D^N f(0)\|^2_{n+m-2} + t^2\|D^N f(0)\|^2_{n+m}\right) + t^{2(N-2n)+7}\int_0^t \|D_\tau^{N+1} f(\tau)\|_n^2 d\tau\right\};$$

ou bien, plus simplement, on aura

$$\|D^{n+m-2} u(t)\|^2 \leqslant \text{const}\left\{\sum_{j=0}^{m-1} \|\varphi_j\|^2_{m-j+n+m+N} + \right. \tag{15.7}$$

$$\left. + \|D^N f(0)\|^2_{n+m} + \int_0^t \|D_\tau^{N+1} f(\tau)\|_n^2 \, d\tau\right\}$$

si l'on choisit N tel que

$$2(N-2n) + 7 \geqslant 0 \,. \quad \text{C.Q.F.D.} \tag{15.8}$$

NOTE 15.2. On choisit N qui satisfait (14.9) et (15.8).

§ 4. – Existence et unicité.

16. *Sur le système adjoint.*

Enonçons d'abord le théorème d'existence correspondant au théorème 10.1. Considérons le problème de Cauchy;

$$\text{(16.1)}\qquad \begin{cases} P(t, x; D_t, D)u(t, x) = i^{-m}f(t, x) \\ D_t^j u(0, x) = 0 \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant j \leqslant m-1\,, \end{cases}$$

où l'opérateur $P(t, x; D_t, D)$ satisfait la condition (1). Alors, compte tenu du théorème 10.1, on obtiendra

$$\text{(10.1)}'\qquad \|D^{n+m-2}u(t)\| \leqslant C\int_0^t \|D^n f(\tau)\|\, d\tau\,,$$

car on a évidemment

$$\|D^{n-2}f(0)\| \leqslant \int_0^t \|D^n f(\tau)\|\, d\tau\,.$$

Définissons une forme sesqui-linéaire sur $\boldsymbol{\Omega}$ par

$$\text{(16.2)}\qquad \langle u, v\rangle = \int_0^T \big(u(t), v(t)\big)\, dt = \int_0^T\int_{\boldsymbol{R}^l} u(t, x)\,\overline{v(t, x)}\, dx dt$$

pour $u,\ v \in L^2\big(L^2(\boldsymbol{R}^l)\big)$ ([3]).

On adjoint $P^*(t, x; D_t, D)$ à l'opérateur P par cette forme;

$$\text{(16.3)}\qquad \langle Pu, v\rangle = \langle u, P^*v\rangle \qquad \text{pour } u, v \in C^\infty\big(C_0^\infty(\boldsymbol{R}^l)\big) \qquad \text{et } D_t^j v(T, x) = 0 \quad (j \leqslant m-1)\,.$$

Si l'on considère le problème de Cauchy adjoint pour $v(t, x)$, alors on aura

$$\text{(16.4)}\qquad \|D^{n+m-2}v(t)\| \leqslant C\int_t^T \big\|D^n\big(P^*v(\tau)\big)\big\|\, d\tau\,,$$

puisque la condition (1) se conserve pour ce problème adjoint; en effet, si

([3]) Par $u(t) \in E(F)$, on entend que $t \mapsto u(t) \in E$ à valeurs dans F.

l'on considère le problème de Cauchy adjoint

$$\left\{\begin{array}{l} P^* v = h \\ D_t^j v(T) = 0\,, \qquad 0 \leqslant j \leqslant m-1\,, \end{array}\right. \tag{16.5}$$

alors on aura

(16.6) le symbole de $P^* \sim \sum \frac{1}{\alpha!}\, \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \overline{p(t, x;\, \tau, \xi)} =$

$$= \overline{p}_m - \frac{1}{i}\left(\overline{p}_{m-1} - \sum_{\alpha=0}^{l} \frac{\partial^2 \overline{p}_m}{\partial \xi_\alpha\, \partial x_\alpha}\right) + (\text{degré } \leqslant m-2)$$

où l'on remarque

$$\sum_{\alpha=0}^{l} \frac{\partial^2 p_m}{\partial \xi_\alpha\, \partial x_\alpha} = \tag{16.6)$'$}$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{l} \left\{ \frac{\partial^2 q_{m-s}}{\partial \xi_\alpha\, \partial x_\alpha}\, r_s + q_{m-s} \frac{\partial^2 r_s}{\partial \xi_\alpha\, \partial x_\alpha} + \frac{\partial q_{m-s}}{\partial \xi_\alpha}\, \frac{\partial r_s}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial q_{m-s}}{\partial x_\alpha}\, \frac{\partial r_s}{\partial \xi_\alpha} \right\}.$$

Pour résoudre (16.5), si l'on considère

$$RQv + (P^* - QR)v = h\,, \tag{16.5)$'$}$$

alors le degré du symbole de $(P^* - RQ)$ est inférieur à $m-1$, sous chaque condition (1) ou (2). En effet, en calculant $P^* - RQ$, les termes du degré $m-1$ sont égaux à

$$-\overline{p}_{m-1} + \sum_{\alpha=0}^{l} \frac{\partial^2 p_m}{\partial \xi_\alpha\, \partial x_\alpha} - \sum_{\alpha=0}^{l} \frac{\partial r_s}{\partial \xi_\alpha}\, \frac{\partial q_{m-s}}{\partial x_\alpha} - (r_s q_{m-s-1} + r_{s-1} q_{m-s})\,. \tag{16.7}$$

Compte tenu de (16.6) et (16.6)$'$, (16.7) est équivalent à

$$-\overline{p}_{m-1} + \sum_{\alpha=0}^{l} \frac{\partial q_{m-s}}{\partial \xi_\alpha}\, \frac{\partial r_s}{\partial x_\alpha} + \sum_{\alpha=0}^{l} \left\{ \frac{\partial^2 q_{m-s}}{\partial \xi_\alpha\, \partial x_\alpha}\, r_s + q_{m-s} \frac{\partial^2 r_s}{\partial \xi_\alpha\, \partial x_\alpha} \right\} - (r_s q_{m-s-1} + r_{s-1} q_{m-s})\,.$$

Notant que les q_{m-s} et r_s sont les symboles réels, on a donc

$$\overline{\left[p_{m-1} - \sum \frac{\partial q_{m-s}}{\partial \xi_\alpha}\, \frac{\partial r_s}{\partial x_\alpha}\right]_{\tau=\mu_j}} + (r_s q_{m-s-1} + r_{s-1} q_{m-s})_{\tau=\mu_j} = q_{m-s}(\mu_j) \left[\sum_{\alpha=0}^{l} \frac{\partial^2 r_s}{\partial \xi_\alpha\, \partial x_\alpha}\right]_{\tau=\mu^j}$$

pour $1 \leqslant j \leqslant s$, qui donne exactement chacune des deux conditions (1) et (2), puisque le second membre contient le facteur $(\mu_j - \lambda_j)$.

Finalement, à la place de (6.4) du lemme 6.1, on a l'inégalité pour le problème de Cauchy pour le passé

$$(6.4)' \qquad -\|D^{n+m-1}u(t)\|' \leqslant c(\|D^{n+m-1}u(t)\| + \|D^n f(t)\|) ,$$

et aussi la même modification pour tous les autres inégalités qui suivent.

Pour (16.5)', on considère

$$(16.8) \qquad \begin{cases} Qv = w \\ Rw = -(P^* - RQ)v + h . \end{cases}$$

Alors, on obtient

$$(10.3)' \qquad -\|D^{n+m-s-1}v(t)\|' \leqslant \gamma(\|D^{n+m-s-1}v(t)\| + \|D^n w(t)\|) ,$$

$$(10.4)'' \qquad -\|D^{n+s-1}w(t)\|' \leqslant \gamma(\|D^{n+s-1}w(t)\| + \|D^{n+m-2}v(t)\| + \|D^n h(t)\|)$$

d'après (10.3) et (10.4)' respectivement. Si l'on définit

$$\varphi_n^*(t) = \|D^{n+m-2}v(t)\| + \|D^{n+s-1}w(t)\| ,$$

alors on aura

$$-(\varphi_n^*(t))' \leqslant C(\varphi_n^*(t) + \|D^n h(t)\|) ,$$

en prenant $n+s-1$ au lieu de n dans (10.3)'. L'intégration sur $[t, T]$ donne (16.4).

Notons qu'il resulte de (16.4);

$$(16.9) \qquad \begin{aligned} \int_0^T \|D^{n+m-2}v(t)\|^2 dt &\leqslant C^2 \int_0^T \left(\int_t^T \|D^n(P^* v(\tau))\| \, d\tau \right)^2 dt \leqslant \\ &\leqslant C^2 \int_0^T \left\{ \int_t^T \|D^n(P^* v(\tau))\|^2 d\tau \int_t^T 1^2 \, d\tau \right\} dt = \\ &= C^2 \int_0^T (T-t) \int_t^T \|D^n(P^* v(\tau))\|^2 d\tau \, dt \leqslant \\ &\leqslant C^2 \int_t^T \|D^n(P^* v(\tau))\|^2 d\tau \left[Tt - \frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^T \leqslant \\ &\leqslant C^2 T^2 \int_0^T \|D^n(P^* v(\tau))\|^2 d\tau . \end{aligned}$$

Soient $v(t, x)$ une fonction indéfiniment dérivable et $f(t, x)$ une distribution à support compact par rapport à x; on calcule

$$|\langle f, v\rangle| \leq \left(\int_0^T \|f(\tau)\|_{-s}^2 \, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|v(\tau)\|_s^2 \, d\tau\right)^{\frac{1}{2}},$$

qui se majorent encore par

$$\left(\int_0^T \|f(\tau)\|_{-s}^2 \, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|D^s v(\tau)\|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Donc, compte tenu de (16.4), on a

$$(16.10) \qquad |\langle f, v\rangle| \leq C^2 T \left(\int_0^T \|f(\tau)\|_{-s}^2 \, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|D^{s-(m-2)}(P^* v(\tau))\|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}};$$

ce qui implique que $\langle f, v\rangle$ est une forme linéaire continue par la norme

$$\left(\int_0^T \|D^{s-m+2}(P^* v(\tau))\|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Le théorème de représentation habituel montre qu'il existe une distribution $u(t, x)$ telle que

$$(16.11) \qquad \langle f, v\rangle = \langle u, P^* v\rangle$$

où $u \in H_{-k}(H_{-s+m-2+k})$, puisque $P^* v \in H_k(H_{s-m+2-k})$ pour $0 \leq k \leq s - m + 2$.

En remarquant $v \in H_k(H_{s-k})$, on constate que $f \in H_{-k}(H_{-s+k})$; de plus, compte tenu de $D_t^m u = -\sum_{j=0}^{m-1} a_{m-j} D_t^j u + i^{-m} f$, $D_t^m u \in H_{-k-m+1}(H_{-s-2+k})$ qui entraîne $u \in H_{-k+1}(H_{-s-2+k})$. Si l'on répète ce raisonnement α-fois, alors on aura $u \in H_{-k+\alpha}(H_{-s+m(1-\alpha)-2+k})$. En prenant s un nombre entier négatif assez grand, on peut conclure qu'il existe une solution indéfiniment dérivable de (t, x) pour $f(t, x) \in C^\infty(\boldsymbol{\Omega})$ à support compact par rapport à x.

17. *Théorèmes d'existence* [4].

On a montré le

THÉORÈME 17.1. *Etant donné l'opérateur aux dérivées partielles faiblement hyperbolique P satisfaisant la condition* (1), *le problème de Cauchy* (4.1) *pour*

[4] La résolution dans des espaces de Sobolev s'ensuit aisément des théorèmes 10.1 et 12.1.

$f(t,x)\in C^\infty(\mathbf{\Omega})$ à support compact par rapport à x et $\varphi_j(x)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^l)$ pour $0\leqslant j\leqslant m-1$ a une solution $u(t,x)\in C^\infty(\mathbf{\Omega})$.

On obtient le théorème d'existence analogue pour P sous la condition (2).

THÉORÈME 17.2. *Etant donné l'opérateur aux dérivées partielles faiblement hyperbolique P satisfaisant la condition* (2), *le problème de Cauchy* (4.1) *pour $f(t,x)\in C^\infty(\mathbf{\Omega})$ à support compact par rapport à x et $\varphi_j(x)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^l)$ pour $0\leqslant j\leqslant m-1$ a une solution $u(t,x)\in C^\infty(\mathbf{\Omega})$.*

PREUVE. Tout d'abord, pour le problème de Cauchy (16.1), on a l'inégalité d'énergie

$$\|D^{n+m-2}u(t)\|^2\leqslant C\int_0^t\|D^{N+1}f(\tau)\|_{n+m}^2\,d\tau\,, \tag{17.1}$$

d'après le théorème 12.1. Ensuite, on va montrer la

PROPOSITION 17.1. *Si l'on considère le problème de Cauchy pour P^* l'opérateur adjoint de P;*

$$\begin{cases} P^*v(t) = h(t) & \textit{dans } \mathbf{\Omega} \\ D_t^j v(T) = \psi_j & \textit{pour } 0\leqslant j\leqslant m-1\,, \end{cases} \tag{17.2}$$

alors on a l'inégalité sous la condition (2)

$$\int_0^T \|D^{n+m-2}v(t)\|^2\,dt\leqslant \text{const}\left\{\sum_{j=0}^{m-1}\|\psi_j\|_{m-j+n-1+N}^2+\right.$$
$$\left.+\ \|D^{2n-3}h(T)\|_{N-n+2}^2+\int_0^T\|D^{n+N-2}h(t)\|_{N-n+2}^2\,dt\right\} \tag{17.3}$$

pour tout $n(\geqslant 1)$ et $N=$ (le plus petit entier plus grand que $(n+s)(\gamma+1)+$ $+\gamma-1)+1$, où γ est une constante positive.

Pour la montrer, on résout d'abord (17.2) par

$$\begin{cases} Qv = w \\ Rw = -(P^*-RQ)v+h\,. \end{cases} \tag{17.4}$$

En employant successivement le lemme 6.2, on obtient

$$(17.5)_1 \quad -\sum_{j=0}^{n+s} \frac{(\|D^{n+m-2-j}\tilde{v}(t)\|_N^2)'}{t^{2j}} \leqslant \gamma \left\{ \sum_{j=0}^{n+s} \frac{\|D^{n+m-2-j}\tilde{v}(t)\|_N^2}{t^{2j}} + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=0}^{n+s-1} (j+1) \frac{\|D^{n+s-1-j}w(t)\|_N^2}{t^{2j+1}} + \sum_{j=0}^{n+s} (j+1) \frac{\|D^{n+m-2-j}\tilde{v}(t)\|_N^2}{t^{2j+1}} \right\},$$

$$(17.5)_2 \quad -\sum_{j=0}^{n+s-1} \frac{(\|D^{n+s-1-j}w(t)\|_N^2)'}{t^{2j}} \leqslant \gamma \left\{ \sum_{j=0}^{n+s-1} \frac{\|D^{n+s-1-j}w(t)\|_N^2}{t^{2j}} + \right.$$
$$+ \sum_{j=0}^{n+s-1} (j+1) \frac{\|D^{n+s-1-j}w(t)\|_N^2}{t^{2j+1}} + \sum_{j=0}^{n+s} (j+1) \frac{\|D^{n+m-2-j}\tilde{v}(t)\|_N^2}{t^{2j+1}} +$$
$$\left. + \alpha(t)\, t^{-2n+3} \|D^n h(t)\|_N^2 \right\}, \qquad \text{où } v = t\tilde{v} \text{ et } \alpha(t) = \frac{t^{2n}-1}{t^2-1},$$

concordant aux $(12.8)_1$ et $(12.8)_2$ respectivement.

Posons $A = 2\{(n+s)(\gamma+1)+\gamma\}$ pour simplifier l'écriture. Il est facile de voir que

$$(17.6) \qquad -\left(t^{A+1} e^{\gamma t} \Phi n^*(t)\right)' \leqslant C t^{A-2n+3} e^{\gamma t} \|D^n h(t)\|_N^2,$$

où

$$\Phi n^*(t) = \sum_{j=0}^{n+s} \frac{\|D^{n+m-2-j}\tilde{v}(t)\|_N^2}{t^{2j+1}} + \sum_{j=0}^{n+s-1} \frac{\|D^{n+s-1-j}w(t)\|_N^2}{t^{2j+1}}, \qquad \text{et } C = \gamma \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \alpha(t).$$

L'intégration de (17.6) sur $[t, T]$ donne

$$(17.7) \qquad t^{A+1} e^{\gamma t} \Phi n^*(t) \leqslant T^{A+1} e^{\gamma T} \Phi n^*(T) + c \int_t^T \tau^{A-2n+3} e^{\gamma\tau} \|D^n h(\tau)\|_N^2 \, d\tau;$$

c'est-à-dire

$$(17.7)' \quad t^{A+1} e^{\gamma t} \left\{ \sum_{j=0}^{n+s} \frac{\|D^{n+m-2-j}\tilde{v}(t)\|_N^2}{t^{2j+1}} + \sum_{j=0}^{n+s-1} \frac{\|D^{n+s-1-j}w(t)\|_N^2}{t^{2j+1}} \right\} \leqslant$$
$$\leqslant T^{A+1} e^{\gamma T} \Phi n^*(T) + c \int_t^T \tau^{A-2n+3} e^{\gamma\tau} \|D^n h(\tau)\|_N^2 \, d\tau.$$

Notons que

$$\|D^{n+m-2} v(t)\|_N^2 \leqslant \text{const}\left(t^2 \|D^{n+m-2} v(t)\|_N^2 + \|D^{n+m-3} v(t)\|_N^2\right), \qquad \text{car } v = t\tilde{v}.$$

Il resulte de (17.7)' à fortiori que

$$(17.8)\qquad t^{A+1}\frac{\|D^{n+m-2}v(t)\|_N^2}{t^3}\leqslant \text{const}\left\{T^{A+1}\Phi n^*(T)+\int_t^T \tau^{A-2n+3}\|D^n h(\tau)\|_N^2\,d\tau\right\}.$$

On prépare deux lemmes.

LEMME 17.1. *Etant donné σ un nombre réel quelconque, on a*

$$(17.9)\qquad \|D^{n+m-2}v(t)\|_\sigma^2\geqslant \delta_1^k\|D^{n+m-2+k}v(t)\|_{\sigma-k}^2-\sum_{i=0}^{k-1}\delta_2\delta_1^i\|D^{n-1+i}h(t)\|_{\sigma-1-i}^2$$

pour k et n deux entiers positifs, δ_j $(j=1,2)$ étant des constantes positives.

PREUVE [5]. On peut mettre (17.2) sous la forme suivante;

$$D_t^m v=\sum_{j=0}^{m-1} b_{m-j}D_t^j v+h \qquad \text{où } b_{m-j}\in L(m-j)\,,$$

puisque P est un opérateur différentiel du type kowalewskien.

En appliquant D_t^{n-1-k}, on a

$$D_t^{n-1-k+m}v=\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{n-1-k}\binom{n-1-k}{i}D_t^{n-1-k-i}(b_{m-j})D_t^{i+j}v+D_t^{n-1-k}h\,,$$

ce qui implique

$$\|D_t{}^{n+m-1-k}v(t)\|_{\sigma-1+k}\leqslant \text{const}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{n-1-k}\|D_t^{i+j}v(t)\|_{m-j+\sigma-1+k}+$$
$$+\sup_{0\leqslant i\leqslant n-1-k}\|D_t^i h(t)\|_{\sigma-1+k}\,,\qquad \text{pour } 0\leqslant k\leqslant n+m-1, \text{ et pour tout } \sigma\,.$$

Si l'on prend le suprémum par rapport à k, alors on aura

$$\|D^{n+m-1}v(t)\|_{\sigma-1}\leqslant \text{const}\ \|D^{n+m-2}v(t)\|_\sigma+\|D^{n-1}h(t)\|_{\sigma-1}\,,$$

puisque

$$m-j+\sigma-1+k=n+m-2-(i+j)+\sigma+\big(i-(n-1-k)\big)\leqslant$$
$$\leqslant n+m-2-(i+j)+\sigma\,.$$

[5] L'auteur doit ce raisonnement à S. Tarama.

On a par conséquent

$$\|D^{n+m-2}v(t)\|_\sigma^2 \geqslant \delta_1\|D^{n+m-1}v(t)\|_{\sigma-1}^2 - \delta_2\|D^{n-1}h(t)\|_{\sigma-1}^2 . \tag{17.10}$$

Le raisonnement par recurrence prouve le lemme 17.1. C.Q.F.D.

LEMME 17.2. *Pour m et n deux entiers positifs quelconques, il existent les constantes positives $\{A_{i+1}\}_{0\leqslant i\leqslant n}$ et $\{\beta_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ telles que l'on ait*

$$A_1\int_0^T \|D_t^{m-n}v(t)\|_\sigma^2 f dt - \sum_{i=1}^n A_{i+1}\beta_i T^{2i-1}\|D_t^{m-n+i-1}v(T)\|_\sigma^2 \leqslant \leqslant \int_0^T t^{2n}\|D_t^m v(t)\|_\sigma^2\, dt, \quad \textit{pour } \sigma \textit{ un nombre réel quelconque}. \tag{17.11}$$

PREUVE. Montrons le par recurrence sur n. Pour $n = 1$, on a d'abord

$$\int_0^T t^2\|D_t^m v(t)\|_\sigma^2\, dt = \int_0^T (tD_t^m v(t), tD_t^m v(t))_\sigma\, dt =$$

$$= \int_0^T \left(D_t(tD_t^{m-1}v) - \frac{1}{i}D_t^{m-1}v, D_t(tD_t^{m-1}v) - \frac{1}{i}D_t^{m-1}v\right)_\sigma dt =$$

$$= \int_0^T \|D_t(tD_t^{m-1}v(t))\|_\sigma^2\, dt - 2Im\int_0^T (D_t^{m-1}v, D_t(tD_t^{m-1}v))_\sigma\, dt + \int_0^T \|D_t^{m-1}v(t)\|_\sigma^2\, \mathrm{d}t\,;$$

d'où l'on tire

$$\int_0^T \|D_t^{m-1}v(t)\|_\sigma^2 dt = \int_0^T t^2\|D_t^m v(t)\|_\sigma^2 dt +$$

$$+ 2Im\int_0^T \left(D_t^{m-1}v(t), D_t(tD_t^{m-1}v(t)\right)_\sigma dt - \int_0^T \|D_t(tD_t^{m-1}v(t))\|_\sigma^2 dt .$$

Si l'on note que

$$\frac{1}{i}\int_0^T (D_t^{m-1}v, D_t(tD_t^{m-1}v))_\sigma\, dt = \frac{1}{i}\int_0^T \{D_t(D_t^{m-1}v, tD_t^{m-1}v)_\sigma - (D_t^m v, tD_t^{m-1}v)_\sigma\}\, dt =$$

$$= -\left[(D_t^{m-1}v, tD_t^{m-1}v)_\sigma\right]_{t=0}^T - \frac{1}{i}\int_0^T (D_t^m v, tD_t^{m-1}v)_\sigma\, dt\,,$$

alors on a

$$\left|2Im\int_0^T (D_t^{m-1}v,\, D_t(tD_t^{m-1}v))_\sigma\, dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2T\|D_t^{m-1}v(T)\|_\sigma^2 + \varepsilon\int_0^T \|D_t^{m-1}v(t)\|_\sigma^2\, dt + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T t^2\,\|D_t^m v(t)\|_\sigma^2\, dt \qquad \text{pour } 0<\varepsilon<1\,.$$

Enfin, on a obtenu

$$(17.11)_1 \qquad (1-\varepsilon)\int_0^T \|D_t^{m-1}v(t)\|_\sigma^2\, dt \leqslant 2T\|D_t^{m-1}v(T)\|_\sigma^2 + \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\int_0^T t^2\,\|D_t^m v(t)\|_\sigma^2\, dt\,,$$

ce qui prouve (17.11) pour $n=1$.

Supposons que (17.11) soit vrai jusqu'à $n-1$.

En répétant la même méthode, on obtiendra

$$(17.11)_n \qquad \left(n^2+2n(n-1)-n\varepsilon\right)\int_0^T t^{2(n-1)}\,\|D_t^{m-1}v(t)\|_\sigma^2\, dt \leqslant \leqslant 2nT^{2n-1}\,\|D_t^{m-1}v(T)\|_\sigma^2 + \left(1+\frac{n}{\varepsilon}\right)\int_0^T t^{2n}\,\|D_t^m v(t)\|_\sigma^2\, dt\,.$$

Si l'on définit $\alpha_n=(1+n/\varepsilon)^{-1}(n^2+2n(n-1)-n\varepsilon)$, $\beta_n=(1+n/\varepsilon)^{-1}(2n)$, et $A_i=\alpha_1\ldots\alpha_i$ où $A_{n+1}=1$, et si l'on raisonne par la recurrence, alors on obtiendra l'inégalité (17.11) pour n quelconque. C.Q.F.D.

18. *Preuve de la proposition* 17.1.

Les deux inégalités (17.8) et (17.9) entraînent

$$(18.1) \qquad t^{A-2}\,\|D^{n+m-2+k}v(t)\|_{N-k}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \text{const}\left\{T^{A+1}\Phi n^*(T) + t^{A-2}\sum_{i=0}^{k-1}\|D^{n-1+i}h(t)\|_{N-1-i}^2 + \int_t^T \tau^{A-2n+3}\,\|D^n h(\tau)\|_N^2\, d\tau\right\}.$$

Définissons $\tilde{A}$ comme le plus petit entier positif tel que $(n+s)(\gamma+1)+ +\gamma-1\leqslant\tilde{A}$; alors on a $A-2\leqslant 2\tilde{A}$. Cela nous permet de remplacer le premier membre de (18.1) par $t^{2\tilde{A}}\|D^{n+m-2+k}v(t)\|^2_{N-k}$.

Donc on a

$$(18.2)\qquad t^{2\tilde{A}}\|D^{n+m-2+k}v(t)\|^2_{N-k}\leqslant$$
$$\leqslant \text{const}\left\{T^{A+1}\Phi n^*(T)+t^{A-2}\sum_{i=0}^{k-1}\|D^{n-1+i}h(t)\|^2_{N-1-i}+\int_0^T\tau^{A-2n+3}\|D^n h(\tau)\|^2_N\,d\tau\right\}.$$

Voyons ce que (18.2) implique; pour tout j $(0\leqslant j\leqslant n+m-2+k)$, on a

$$(18.2)'\qquad t^{2\tilde{A}}\|D_t^{n+m-2+k-j}v(t)\|^2_{N-k+j}\leqslant$$
$$\leqslant \text{const}\left\{T^{A+1}\Phi n^*(T)+t^{A-2}\sum_{i=0}^{k-1}\|D^{n-1+i}h(t)\|^2_{N-1-i}+\int_0^T\tau^{A-2n+3}\|D^n h(\tau)\|^2_N\,d\tau\right\}.$$

Après avoir intégré (18.2)′ sur $[0,T]$, si l'on emploie (17.11), alors on obtient

$$(18.3)\qquad \int_0^T\|D_t^{n+m-2+k-j-\tilde{A}}v(t)\|^2_{N-k+j}\,dt\leqslant$$
$$\leqslant \text{const}\left\{T^{A+2}\Phi n^*(T)+\sum_{i=1}^{n}T^{2i-1}\|D_t^{n+m-2+k-j-\tilde{A}+i-1}v(T)\|^2_{N-k+j}+\right.$$
$$\left.+\sum_{i=0}^{k-1}\int_0^T\tau^{A-2}\|D^{n-1+i}h(\tau)\|^2_{N-1-i}\,d\tau+\int_0^T\tau^{A-2n+4}\|D^n h(\tau)\|^2_N\,d\tau\right\}.$$

Nous allons arranger le second membre. Notez d'abord que

$$(18.4)\qquad T^{A+2}\Phi n^*(T)\leqslant \text{const}\ \|D^{n+m-1}v(T)\|^2_N;$$

en effet,

$$T^{A+2}\Phi n^*(T)=T^{A+2}\left\{\sum_{j=0}^{n+s}\frac{\|D^{n+m-2-j}\tilde{v}(T)\|^2_N}{T^{2j+1}}+\sum_{j=0}^{n+s-1}\frac{\|D^{n+s-1-j}w(T)\|^2_N}{T^{2j+1}}\right\}$$

est majoré par const $(\|D^{n+m-2}\tilde{v}(T)\|^2_N+\|D^{n-s-1}w(T)\|^2_N)$ pour un nombre positif T fixé parceque $\tilde{v}=v/t$. Cette dernière expression sera majorée par

$$\text{const}\ (\|D^{n+m-2}v(T)\|^2_N+\|D^{n+s-1}w(T)\|^2_N)\,,$$

puisque

$$\|D_t^k \tilde{v}(T)\| \leqslant \text{const} \sup_{0 \leqslant i \leqslant k} \|D_t^i v(T)\| .$$

Finalement, en faisant rappel à $Qv = w$, on a employé

$$\|D^{n+s-1} w(T)\|_N \leqslant \text{const} \|D^{n+m-1} v(T)\|_N .$$

En suite, si l'on choisit $k = \tilde{A}$ et $N = k + 1$, alors on aura

$$\sum_{i=1}^{n} T^{2i-1} \|D_t^{n+m-2+k-j-\tilde{A}+i-1} v(T)\|_{N-k+j}^2 \leqslant \tag{18.5}$$
$$\leqslant \text{const} \|D^{n+m-2+n-1} v(T)\|^2 ;$$

puisque

$$\sum_{i=1}^{n} T^{2i-1} \|D_t^{n+m-2-j+i-1} v(T)\|_{j+1}^2 \leqslant \text{const} \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \|D_t^{n+m-2+i-(j+1)} v(T)\|_{j+1}^2 =$$
$$= \text{const} \|D^{n+m-2+n-1} v(T)\|^2 .$$

De même, on a

$$\sum_{i=0}^{k-1} \|D^{n-1+i} h(\tau)\|_{N-1-i}^2 \leqslant \text{const} \|D^{n-1+N-1} h(\tau)\|^2 . \tag{18.6}$$

En remplaçant le second membre de (18.3) par (18.4) (18.5) et (18.6), on obtiendra

$$\int_0^T \|D^{n+m-2} v(t)\|^2 dt \leqslant$$
$$\leqslant \text{const} \Big\{ \|D^{n+m-1} v(T)\|_N^2 + \|D^{n+m-2+n-1} v(T)\|^2 + \int_0^T \tau^{A-2} \|D^{n-1+N-1} h(\tau)\|^2 d\tau +$$
$$+ \int_0^T \tau^{A-2n+4} \|D^n h(\tau)\|_N^2 d\tau \Big\} .$$

Compte tenu du lemme 10.1, on a d'abord

$$\|D^{n+m-1} v(T)\|_N^2 \leqslant \text{const} \Big(\sum_{j=0}^{m-1} \|\psi_j\|_{m-j+n-1+N}^2 + \|D^{n-1} h(T)\|_N^2 \Big) ,$$

et aussi

$$\|D^{n+m-2+n-1}v(T)\|_N^2 \leqslant \text{const}\left(\sum_{j=0}^{m-1}\|\varphi_j\|_{m-j+2n-3}^2 + \|D^{2n-3}h(T)\|^2\right).$$

Or

$$\|D^{n+m-1}v(T)\|_N^2 + \|D^{n+m-2+n-1}v(T)\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \text{const}\left(\sum_{j=0}^{m-1}\|\varphi_j\|_{m-j+n-1+N}^2 + \|D^{2n-3}h(T)\|_{N-n+2}^2\right), \qquad \text{car } N > n+1\,.$$

C.Q.F.D.

Le raisonnement qui suit est complètement identique à celui du théorème 17.1; en effet, on aura pour $v \in C^\infty(\boldsymbol{\Omega})$,

$$|\langle f, v\rangle| \leqslant \left(\int_0^T \|f(\tau)\|_{-s}^2\,d\tau\right)^{\frac12}\left(\int_0^T \|v(\tau)\|_s^2\,d\tau\right)^{\frac12} \leqslant \left(\int_0^T \|f(\tau)_{-s}^2\,d\tau\right)^{\frac12}\left(\int_0^T \|D^s v(\tau)\|^2\,d\tau\right)^{\frac12} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_0^T \|f(\tau)\|_{-s}^2\,d\tau\right)^{\frac12}\sqrt{C}\left(\int_0^T \|D^{s-(m-2)+N-2}(P^* v(\tau))\|_{N-s+(m-2)+2}^2\,d\tau\right)^{\frac12},$$

puisque l'inegalité (17.3) nous donne

$$\int_0^T \|D^{n+m-2}v(t)\|^2\,dt \leqslant C\int_0^T \|D^{n+N-2}(P^* v(t))\|_{N-n+2}^2\,dt \tag{18.6}$$

grâce à $N > n+1$.

D'où l'on tire que $P^* v(t) \in H_k(H_{2N-k})$; donc il existe une distribution $u \in H_{-k}(H_{-2N+k})$ telle que $\langle f, v\rangle = \langle u, P^* v\rangle$, ce qui termine la démonstration du théorème 17.2.

19. *Domaine d'influence.*

Dans les deux théorèmes du n. 17, on ne pouvait pas conclure que la solution était à support compact, malgré que les données initiales et le second membre l'étaient. Il s'agit de montrer s'il y a un domaine d'influence ou non. Dans les études antérieures du problème de Cauchy à caractéristiques multiples, nous avons dit qu'il y a l'hyperbolicité quand il y a domaine d'influence (p. 167 de [4]). Evidemment l'existence de domaine d'influence resulte de l'unicité locale de la solution. Pour montrer l'unicité locale, il suffit de prouver que les conditions (1) et (2) sont invariantes par le changement de coordonnées « space-like ».

Dans cet article, on va supposer encore les conditions suivantes;

(1)″ pour chaque j $(1\leqslant j\leqslant s)$,

$$\frac{\displaystyle\sum_{\alpha=0}^{l}\left(\frac{\partial q_{m-s}}{\partial \xi_\alpha}\frac{\partial r_s}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial q_{m-s}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial r_s}{\partial \xi_\alpha}\right)\Bigg|_{\tau=\mu_j}}{\mu_j-\lambda_j}$$

est une fonction indéfiniment dérivable pour $(t, x; \xi)\in\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{R}^l_\xi\diagdown 0$,

(2)″ pour chaque j $(1\leqslant j\leqslant s)$,

$$\frac{\displaystyle\sum_{\alpha=0}^{l}\left(\frac{\partial q_{m-s}}{\partial \xi_\alpha}\frac{\partial r_s}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial q_{m-s}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial r_s}{\partial \xi_\alpha}\right)\Bigg|_{\tau=\mu_j}}{\mu_j-\lambda_j/t}$$

est une fonction indéfiniment dérivable pour $(t, x; \xi)\in\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{R}^l_\xi\diagdown 0$.

On voit facilment que, sous les conditions (1) et (1)″ (resp. (2) et (2)″), on peut mettre la condition (1) (resp. (2)) sous la forme suivante:

(I) pour chaque j $(1\leqslant j\leqslant s)$,

$$\frac{\left\{p_{m-1}-\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{\alpha=0}^{l}\frac{\partial^2 p_m}{\partial\xi_\alpha\,\partial x_\alpha}\right\}\Bigg|_{\tau=\mu_j}}{\mu_j-\lambda_j}$$

est une fonction indéfiniment dérivable de $\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{R}^l_\xi\diagdown 0$,

(II) pour chaque $j(1\leqslant j\leqslant s)$,

$$\frac{\left\{p_{m-1}-\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{\alpha=0}^{l}\frac{\partial^2 p_m}{\partial\xi_\alpha\,\partial x_\alpha}\right\}\Bigg|_{\tau=\mu_j}}{\mu_j-\lambda_j/t}$$

est une fonction indéfiniment dérivable de $\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{R}^l_\xi\diagdown 0$.

En effet, de (8.1) et (8.2) on peut tirer ceci;

$$\frac{\partial p_m}{\partial x_\alpha}=q_{m-s}\frac{\partial r_s}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial q_{m-s}}{\partial x_\alpha}r_s\,,$$

et

$$\left\{\sum_{\alpha=0}^{l}\frac{\partial^2 p_m}{\partial\xi_\alpha\,\partial x_\alpha}\right\}\bigg|_{\tau=\mu_j}=\left\{\sum_{\alpha=0}^{l}\left(\frac{\partial q_{m-s}}{\partial\xi_\alpha}\frac{\partial r_s}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial q_{m-s}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial r_s}{\partial\xi_\alpha}\right)\right\}\bigg|_{\tau=\mu_j}+$$
$$+\,q(\mu_j)\left\{\sum_{\alpha=0}^{l}\frac{\partial^2 r_s}{\partial\xi_\alpha\,\partial x_\alpha}\right\}\bigg|_{\tau=\mu_j}.$$

Donc on aura

$$\left\{\sum_{\alpha=0}^{l}\frac{\partial^2 p_m}{\partial\xi_\alpha\,\partial x_\alpha}\right\}\bigg|_{\tau=\mu_j}=2\left\{\sum_{\alpha=0}^{l}\frac{\partial q_{m-s}}{\partial\xi_\alpha}\frac{\partial r_s}{\partial x_\alpha}\right\}\bigg|_{\tau=\mu_j}-$$
$$-A(\mu_j-\lambda_j)+q(\mu_j)\left\{\sum_{\alpha=0}^{l}\frac{\partial^2 r_s}{\partial\xi_\alpha\,\partial x_\alpha}\right\}\bigg|_{\tau=\mu_j},$$

puisque la condition (1)$''$ entraîne

$$\left\{\sum_{\alpha=0}^{l}\frac{\partial q_{m-s}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial r_s}{\partial\xi_\alpha}\right\}\bigg|_{\tau=\mu_j}=\left\{\sum_{\alpha=0}^{l}\frac{\partial q_{m-s}}{\partial\xi_\alpha}\frac{\partial r_s}{\partial x_\alpha}\right\}\bigg|_{\tau=\mu_j}-A(\mu_j-\lambda_j)$$

où $A\in C^\infty(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{R}^l_\xi\diagdown 0)$. D'où il résulte que

$$\left\{p_{m-1}-\frac{1}{2}\sum_{\alpha=0}^{l}\frac{\partial^2 p_m}{\partial\xi_\alpha\,\partial x_\alpha}\right\}\bigg|_{\tau=\mu_j}=\left\{p_{m-1}-\sum_{\alpha=0}^{l}\frac{\partial q_{m-s}}{\partial\xi_\alpha}\frac{\partial r_s}{\partial x_\alpha}\right\}\bigg|_{\tau=\mu_1}+B(\mu_j-\lambda_j),$$

où

$$B=\frac{A}{2}-\frac{q(\mu_j)}{2(\mu_j-\lambda_j)}\left\{\sum_{\alpha=0}^{l}\frac{\partial^2 r_s}{\partial\xi_\alpha\,\partial x_\alpha}\right\}\bigg|_{\tau=\mu_j}$$

est une fonction indéfiniment dérivable pour $(t,x;\xi)\in\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{R}^l_\xi\diagdown 0$ et $1\leqslant j\leqslant s$. Il est évident que le même raisonnement est valable pour la condition (II).

Donc on a le

THÉORÈME 19.1. *Sous les conditions* (I) *et* (1)$''$, *il y a domaine d'influence pour la solution du problème de Cauchy* (4.1) *où* $f\equiv 0$; *précisément dit, pour chaque t, le support de* $u(t,x)$ *est contenu dans l'ensemble* $\{x;\ \bigcup_y |x-y|\leqslant\lambda\max$ [6] $\cdot|t-t_0|$, *où y parcourt le support des données* $(\varphi_0(x),\varphi_1(x),\ldots,\varphi_{m-1}(x))$ *sur* $t=t_0\}$.

[6] La définition se trouve dans la preuve ci-après.

PREUVE. Remarquons d'abord que les conditions (I) et (1)$''$ sont équivalentes à supposer (1) et (1)$''$, puisque l'on a identité;

$$p_{m-1}-\sum_{\alpha=0}^{l}\frac{\partial q_{m-s}}{\partial\xi_\alpha}\frac{\partial r_s}{\partial x_\alpha}=p_{m-1}-\frac{1}{2}\sum_{\alpha=0}^{l}\frac{\partial^2 p_m}{\partial\xi_\alpha\,\partial x_\alpha}+$$

$$+\frac{1}{2}\left\{q_{m-s}\sum_{\alpha=0}^{l}\frac{\partial^2 r_s}{\partial\xi_\alpha\,\partial x_\alpha}+r_s\sum_{\alpha=0}^{l}\frac{\partial^2 q_{m-s}}{\partial\xi_\alpha\,\partial x_\alpha}\right\}+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=0}^{l}\left\{\frac{\partial r_s}{\partial\xi_\alpha}\frac{\partial q_{m-s}}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial q_{m-s}}{\partial\xi_\alpha}\frac{\partial r_s}{\partial x_\alpha}\right\}.$$

Ensuite, d'une part, il est évident que la parenthèse de Poisson et le symbole sous-caractéristique sont invariants par le changement de coordonnées locales d'après Leray [3] (voir aussi [18]). D'autre part, on fait le changement de coordonnées « space like » tel que

$$t'=\varphi(t,x)\,,\qquad x'_\alpha=x_\alpha\qquad(1\leqslant\alpha\leqslant l)\,; \tag{19.1}$$

alors on a

$$\frac{\partial}{\partial t}=\varphi_t\frac{\partial}{\partial t'}\,,\qquad\frac{\partial}{\partial x_\alpha}=\varphi_{x_\alpha}\frac{\partial}{\partial t'}+\frac{\partial}{\partial x'_\alpha}\,, \tag{19.2}$$

ce qui implique que (τ,ξ) se transforme à $(\varphi_t\tau,\varphi_x\tau+\xi)$. On dit que la transformation (19.1) est « space-like » quand, $\lambda_i(t,x;\xi)$ étant des racines caractéristiques de P,

$$\varphi_t^2-\lambda_{\max}^2|\varphi_x|^2>0\,,\quad\text{où }\lambda_{\max}=\sup_{1\leqslant i\leqslant m}|\lambda_i(t,x;\xi)|\qquad\text{pour }(t,x;\xi)\in\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{R}^l_\xi\setminus 0\,.$$

On considère l'équation en τ

$$\varphi_t\tau-\lambda_j(t,x;\varphi_x\tau+\xi)=0 \tag{19.3}$$

qui est l'équation subordonnée au changement de coordonnées de

$$\tau-\lambda_j(t,x;\xi)=0\,.$$

Il existe des fonctions $\psi_i(t,x;\tau,\xi)$ $(1\leqslant i\leqslant m)$ indéfiniment dérivables telles que

$$\begin{aligned}\varphi_t\tau-\mu_j(t,x;\varphi_x\tau+\xi)=&\\ =(\varphi_t-\mu_j(t,x;\varphi_x))\,\psi_j(t,x;\tau,\xi)(\tau-\tilde\mu_j(t,x;\xi))&\qquad\text{pour }1\leqslant j\leqslant s\,,\end{aligned} \tag{19.4}$$

et que

$$(19.5)\qquad \varphi_t\tau - \lambda_i(t, x; \varphi_x\tau + \xi) =$$
$$= (\varphi_t - \lambda_i(t, x; \varphi_x))\,\psi_{i+s}(t, x; \tau, \xi)(\tau - \tilde{\lambda}_i(t, x; \xi)) \qquad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant m - s\,,$$

où les $\tilde{\mu}_j(t, x; \xi)$ et $\tilde{\lambda}_i(t, x; \xi)$ sont des fonctions indéfiniment dérivables, homogènes de degré 1 en ξ pour $(t, x; \xi)$ fixé; en effet, il résulte de l'allure d'équation de (19.3) quand on fait tendre $\tau \to \infty$.

Note 19.1. Si l'on désigne $\tilde{p}_m(t, x; \tau, \xi)$ transformé de $p_m(t, x; \tau, \xi)$ par (19.1), alors on aura

$$\tilde{p}_m(t, x; \tau, \xi) = \prod_{i=1}^{m} (\varphi_t - \lambda_i(t, x; \varphi_x))\,p_m(t, x; \tau, \xi)\,;$$

donc on a $\prod_{i=1}^{m} \psi_i(t, x; \tau, \xi) \equiv 1$.

Si l'on pose $\tau = \tilde{\mu}_j(t, x; \xi)$ et $\tilde{\lambda}_j(t, x; \xi)$ dans (18.4) et (18.5), alors on a

$$(19.4)'\qquad \varphi_t\tilde{\mu}_j(t, x; \xi) = \mu_j(t, x; \varphi_x\tilde{\mu}_j(t, x; \xi) + \xi)\,,$$

$$(19.5)'\qquad \varphi_t\tilde{\lambda}_j(t, x; \xi) = \lambda_j(t, x; \varphi_x\tilde{\lambda}_j(t, x; \xi) + \xi)\,.$$

On en déduit que, pour $1 \leqslant j \leqslant s$,

$$\begin{aligned}\varphi_t(\tilde{\lambda}_j(t, x; \xi) - \tilde{\mu}_j(t, x; \xi)) &= \\ &= \lambda_j(t, x; \varphi_x\tilde{\lambda}_j(t, x; \xi) + \xi) - \mu_j(t, x; \varphi_x\tilde{\mu}_j(t, x; \xi) + \xi) = \\ &= \lambda_j(t, x; \varphi_x\tilde{\mu}_j(t, x; \xi) + \xi) - \mu_j(t, x; \varphi_x\tilde{\mu}_j(t, x; \xi) + \xi) + \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^{l} \frac{\partial\lambda_j}{\partial\xi_\alpha}(t, x; \eta)\varphi_{x_\alpha}(\tilde{\lambda}_j(t, x; \xi) - \tilde{\mu}_j(t, x; \xi))\,,\end{aligned}$$

vu la formule de la moyenne, où η est un vecteur, se situant entre $\varphi_x\tilde{\mu}_j(t, x; \xi)$ et $\varphi_x(\tilde{\lambda}_j - \tilde{\mu}_j)$; c'est-à-dire

$$(19.6)\qquad \lambda_j(t, x; \varphi_x\tilde{\mu}_j(t, x; \xi) + \xi) - \mu_j(t, x; \varphi_x\tilde{\mu}_j(t, x; \xi) + \xi) =$$
$$= \left(\varphi_t - \sum_{\alpha=1}^{l} \frac{\partial\lambda_j}{\partial\xi_\alpha}(t, x; \eta)\varphi_{x_\alpha}\right)(\tilde{\lambda}_j(t, x; \xi) - \tilde{\mu}_j(t, x; \xi))\,.$$

Ceci implique que $\lambda_j - \mu_j$ est invariant par la transformation « space-like » (19.1), puisque $\varphi_t - \sum_{\alpha=1}^{l} (\partial\lambda_j/\partial\xi_\alpha)(t, x; \eta)\ \varphi_{x_\alpha} > 0$ dans un voisinage de l'origine.

Celà permet de montrer qu'il y a domaine d'influence. C.Q.F.D.

NOTE 19.2. Pour la solution du problème de Cauchy (4.1) sous les conditions (II) et (2)″, nous ne savons pas s'il y a domaine d'influence ou non par le même raisonnement que ci-dessus, mais nous pouvons vérifier l'existence de domaine d'influence à l'aide de la solution du problème de Cauchy adjoint (voir Tarama [21]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. JA. IVRIY, *Condition suffisante d'hyperbolicité régulière et complètement régulière* (en russe), Travaux de Soc. Math. Moscou, **33** (1975), pp. 3-65.

[2] J. LERAY, *Hyperbolic differential equations*, Institute for adv. study, Princeton, 1953.

[3] J. LERAY, *Particules et singularités des ondes, Applications des équations non-linéaires à la physique théorique* (1962), pp. 35-42.

[4] J. LERAY - Y. OHYA, *Systèmes linéaires, hyperboliques non stricts*, Deuxième Colloque sur l'Analyse fonctionnelle tenu à Liège (1964), pp. 105-152.

[5] J. LERAY - Y. OHYA, *Equations et systèmes non-linéaires, hyperboliques non-stricts*, Math. Ann., **170** (1967), pp. 167-205.

[6] E. E. LEVI, *Caratteristiche multiple e problema di Cauchy*, Ann. Math. Pura Appl., **16** (1909), pp. 109-127.

[7] A. MENIKOFF, *The Cauchy problem for weakly hyperbolic equations*, Amer. J. Math., **97** (1975), pp. 548-558.

[8] S. MIZOHATA - Y. OHYA, *Sur la condition de E. E. Levi concernant des équations hyperboliques*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **4** (1968), pp. 511-526.

[9] S. MIZOHATA - Y. OHYA, *Sur la condition d'hyperbolicité pour les équations à caractéristiques multiples, II*, Japan. J. Math., **40** (1971), pp. 63-104.

[10] L. NIRENBERG, *Pseudo-differential operators in global analysis*, Proc. Sympos. Pure Math., **16** (1970), Amer. Math. Soc., pp. 149-167.

[11] L. NIRENBERG, *Lectures on linear partial differential equations*, Regional Conference Ser. Math., no. 17 (1972).

[12] Y. OHYA, *Le problème de Cauchy pour les équations hyperboliques à caractéristique multiple*, J. Math. Soc. Japan, **16** (1964), pp. 268-286.

[13] Y. OHYA, *On E. E. Levi's functions for hyperbolic equations with triple characteristics*, Comm. pure Appl. Math., **25** (1972), pp. 257-263.

[14] Y. OHYA, *Le problème de Cauchy à caractéristiques multiples-méthode directe pour obtenir la condition (généralisée) de E. E. Levi-*, C. R. Acad. Sc. Paris, **282** (1976), pp. 1433-1436.

[15] O. A. OLEINIK, *On the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations*, Comm. pure Appl. Math., **23** (1970), pp. 569-586.

[16] V. M. PETKOV, *Equations et systèmes hyperboliques à caractéristiques multiples*, Exposé d'analyse numérique et fonctionnelle, Université Paris VI, 1975.

[17] V. M. PETKOV, *Le problème de Cauchy pour une classe d'hyperbolicité non stricte à caractéristiques doubles* (en russe), Serdika. Bulg. Math. Surveys, **1** (1975), pp. 372-380.

[18] J. J. DUISTERMAAT - L. HÖRMANDER, *Fourier integral operators II*, Acta Math., **128** (1972), pp. 183-269.

[19] K. KITAGAWA - T. SADAMATSU, *Sur une condition suffisante pour que le problème de Cauchy faiblement hyperbolique soit bien posé, cas de multiplicité de caractéristiques au plus triple*, à paraître au J. Math. Kyoto Univ.

[20] J. CHAZARAIN, *Opérateurs hyperboliques à caractéristiques de multiplicité constante*, Ann. Inst. Fourier, **24** (1974), pp. 173-202.

[21] S. TARAMA, *Un exemple dans le problème de Cauchy pour les équations faiblement hyperboliques*, à paraître.