Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
*Classe di Scienze*

Mario Miranda

**Sulle singolarità eliminabili delle soluzioni dell'equazione delle superficie minime**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série*, tome 4, nº 1 (1977), p. 129-132
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1977_4_4_1_129_0>

# Sulle singolarità eliminabili delle soluzioni dell'equazione delle superficie minime.

MARIO MIRANDA (*)

*dedicato a Hans Lewy*

Nel 1965 E. De Giorgi e G. Stampacchia [1] hanno dimostrato che: *se $\Omega$ è aperto di $\boldsymbol{R}^n$, se $K$ è compatto in $\Omega$ con $H_{n-1}(K)=0$, se $f$ è soluzione dell'equazione delle superficie minime in $\Omega - K$, allora $f$ è soluzione dell'equazione delle superficie minime in $\Omega$.*

L'ipotesi di compattezza di $K$ in $\Omega$ è essenziale per il successo della tecnica di De Giorgi-Stampacchia, fondata sul principio del massimo. Tale ipotesi non è esplicitamente fatta nel caso $n=2$, vedi J. C. C. Nitsche, § 6 di [2], in quanto di fatto contenuta nell'ipotesi $H_1(K)=0$.

In questo articolo provo la tesi di De Giorgi-Stampacchia senza l'ipotesi di compattezza di $K$. Il risultato è ottenuto come conseguenza pressochè immediata dello studio delle soluzioni generalizzate dell'equazione delle superficie minime contenuto in [3]. L'osservazione che qui faccio è che *una soluzione classica dell'equazione delle superficie minime in $\Omega - K$, con $K$ chiuso e $H_{n-1}(K)=0$, è soluzione generalizzata in $\Omega$, quindi*, grazie a quanto provato nel § 1 di [3], *è soluzione classica in $\Omega$.*

A titolo di curiosità dirò che la tecnica per lo studio delle soluzioni generalizzate applicata in [3] è essenzialmente fondata sulla diseguaglianza di Harnack per le soluzioni delle equazioni ellittiche su superficie minime (E. Bombieri-E. Giusti [4]) quindi, se si vuole, su un principio di massimo forte.

Ringrazio D. Kinderlehrer e G. Anzellotti con i quali ho discusso il contenuto di questo articolo.

**1.** – Ricordiamo che un insieme di Borel $E$ di $R^k$ ha frontiera di misura minima nell'aperto $A$ di $R^k$ se per ogni aperto limitato $A_0$, contenuto con

(*) Facoltà di Scienze, Libera Università degli Studi, Povo (Trento).
Pervenuto alla Redazione il 3 Maggio 1976.

la sua chiusura in $A(A_0 \subset\subset A)$ si ha

$$(1.1)\qquad |D\varphi_E|(A_0) = \sup\left\{ \int_E \sum_{i=1}^{k} D_i \phi_i \, dx \,|\, \phi \in [C_0^1(A_0)]^k,\ |\phi(x)| \leqslant 1,\ \forall x \right\} < +\infty ,$$

e se per ogni boreliano $M$ tale che $E\Delta M = (M-E) \cup (E-M) \subset\subset A_0$ si ha

$$(1.2)\qquad |D\varphi_E|(A_0) \leqslant |D\varphi_M|(A_0) .$$

Vale ovviamente, se $E$ ha frontiera di misura minima in $A$, per ogni aperto $L \subset\subset A$, con frontiera localmente lipschitziana,

$$(1.3)\qquad |D\varphi_E|(L) \leqslant H_{k-1}(\partial L) .$$

La (1.3) si ottiene dalla (1.2) ponendo $M = E - L$, scegliendo un qualunque $A_0$ tale che $L \subset\subset A_0 \subset\subset A$ e osservando che con tali scelte, grazie al teorema 2 di [5], si ha

$$(1.4)\qquad |D\varphi_M|(A_0) = |D\varphi_E|(A_0 - \bar{L}) + \int_{\partial L} T\varphi_E \, dH_{k-1} ,$$

dove $T\varphi_E$ è la traccia della funzione caratteristica di $E$ su $\partial L$ (dall'esterno).

Per applicare i risultati del § 1 di [3] al problema di eliminazione di singolarità che qui c'interessa ho bisogno del seguente

LEMMA. « *Se $A$ è aperto di $R^k$, se $N$ è chiuso con $H_{k-1}(N) = 0$, se $E$ è boreliano con frontiera di misura minima in $A - N$, allora $E$ ha frontiera di misura minima in $A$* ».

DIMOSTRAZIONE. – Osserviamo innanzitutto che per ogni aperto $A_0 \subset\subset A$ si ha

$$(1.5)\qquad |D\varphi_E|(A_0) = |D\varphi_E|(A_0 - N) .$$

Infatti, essendo $N$ chiuso e $H_{k-1}(N) = 0$, esiste una successione di aperti $B_j$ di $R^k$ con frontiera localmente lipschitziana tali che

$$(1.6)\qquad N \subset B_j,\ \forall j ; \quad \lim_j H_k(B_j) = 0 ; \quad \lim_j H_{k-1}(\partial B_j) = 0 .$$

Pertanto $\forall \phi \in [C_0^1(A_0)]^k$ si ha

$$(1.7)\qquad \int_E \sum_{i=1}^{k} D_i \phi_i \, dx = \lim_j \int_{E-B_j} \sum_{i=1}^{k} D_i \phi_i \, dx = \lim_j \cdot \\ \cdot \left\{ -\sum_{i=1}^{k} \int_{A_0 - \bar{B}_j} \phi_i \, d\alpha_i + \int_{\partial B_j} T\varphi_E \phi \cdot \nu \, dH_{k-1} \right\} ,$$

dove $\alpha_i$ è la misura di Radon, derivata $i$-ma della funzione caratteristica di $E$, $T\varphi_E$ è la traccia esterna su $\partial B_j$ della $\varphi_E$, $\nu$ è la normale a $\partial B_j$:

Dalla (1.7), se $|\phi(x)|\leqslant 1$, $\forall x$, si ricava

$$\int_E \sum_{i=1}^k D_i\phi_i\,dx \leqslant \max\lim_j \{|D\varphi_E|(A_0 - \bar{B}_j) + H_{k-1}(\partial B_j)\} \leqslant |D\varphi_E|(A_0 - N)\,. \tag{1.8}$$

Dalle (1.8) e (1.1) segue (1.5).

Per quanto riguarda la finitezza di $|D\varphi_E|(A_0)$ osserviamo che se $A_0$ ha frontiera localmente lipschitziana allora applicando la (1.3) a $L = A_0 - \bar{B}_j$ ($B_j$ può essere scelto in modo che $A_0 - \bar{B}_j$ abbia anch'esso frontiera localmente lipschitziana) si ha

$$|D\varphi_E|(A_0 - \bar{B}_j) \leqslant H_{k-1}(\partial A_0) + H_{k-1}(\partial B_j)\,, \tag{1.9}$$

da cui segue che

$$|D\varphi_E|(A_0) \leqslant H_{k-1}(\partial A_0)\,. \tag{1.10}$$

Finalmente la proprietà di minimo di $E$ in $A$ si prova, come conseguenza della proprietà di minimo in $A - N$, nel modo seguente. Se $M$ è un boreliano con $M \Delta E \subset\subset A_0 \subset\subset A$, posto $M_j = (M - B_j) \cup (E \cap B_j)$ abbiamo che

$$M_j \Delta E \subset\subset A_0 - N\,.$$

Possiamo allora scrivere la diseguaglianza

$$|D\varphi_E|(A_0 - N) \leqslant |D\varphi_{M_j}|(A_0 - N)\,. \tag{1.11}$$

Dal già usato teorema 2 di [5] abbiamo

$$|D\varphi_{M_j}|(A_0 - N) \leqslant |D\varphi_E|(B_j) + |D\varphi_M|(A_0 - \bar{B}_j) + H_{k-1}(\partial B_j)\,. \tag{1.12}$$

Dalle (1.5), (1.10), (1.11) e (1.12) si ha

$$|D\varphi_E|(A_0) \leqslant |D\varphi_M|(A_0) + 2H_{k-1}(\partial B_j)\,, \tag{1.13}$$

da cui, passando al limite per $j \to \infty$ e tenendo conto della (1.6) si ha la (1.2). c.v.d.

**2.** – Venendo al problema di eliminazione delle singolarità osserviamo che se $\Omega$ è aperto di $R^n$, se $K$ è chiuso e $f$ è soluzione classica dell'equazione delle superficie minime in $\Omega - K$, l'insieme $E = \{(x, t) | x \in \Omega - K,\, t < f(x)\}$ ha frontiera di misura minima nell'aperto $(\Omega - K)\times R$ di $R^{n+1}$ (questo fatto è conseguenza della convessità dell'integrale dell'area e del teorema 2.4 di [6]). Se poi $H_{n-1}(K) = 0$ allora avremo anche $H_n(K\times R) = 0$ e quindi applicando il Lemma del § 1 all'aperto $A = \Omega\times R$ di $R^{n+1}$ e al chiuso $K\times R$ avremo che $E$ ha frontiera di misura minima in $\Omega\times R$, cioè, secondo la denominazione introdotta in [3], abbiamo che $f$ è soluzione generalizzata della equazione delle superficie minime in $\Omega$.

Applicando ora i risultati dello studio degli insiemi di punti in cui $f$ può assumere valori $+\infty$, $-\infty$ al caso presente abbiamo che tali insiemi hanno misura nulla in quanto sottoinsiemi di $K$, d'altra parte dovendo avere frontiera di misura minima in $\Omega$ debbono essere vuoti. La $f$ è quindi, per i risultati del § 1 di [3], soluzione classica dell'equazione delle superficie minime in $\Omega$.

## BIBLIOGRAFIA


[1] E. De Giorgi - G. Stampacchia, *Sulle singolarità eliminabili delle ipersuperficie minimali*, Rend. Acc. Lincei, **38** (1965), pp. 352-357.

[2] J. C. C. Nitsche, *On new results in the theory of minimal surfaces*, Bull. A.M.S., **71** (1965), pp. 195-270.

[3] M. Miranda, *Superficie minime illimitate*, di prossima pubblicazione sugli Ann. Scuola Norm. Sup,, Pisa.

[4] E. Bombieri - E. Giusti, *Harnack's inequality for elliptic differential equations on minimal surfaces*, Inv. Math., **15** (1972), pp. 24-46.

[5] M. Miranda, *Comportamento delle successioni convergenti di frontiere minimali*, Rend. Sem. Mat. Padova, **38** (1967), pp. 238-257.

[6] M. Miranda, *Superfici cartesiane generalizzate ed insiemi di perimetro finito sui prodotti cartesiani*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **18** (1964), pp. 515-542.