

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

C. M. BRAUNER

P. PENEL

R. TEMAM

**Sur une équation d'évolution non linéaire liée à la
théorie de la turbulence**

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4^e série, tome 4, n° 1
(1977), p. 101-128

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1977_4_4_1_101_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sur une équation d'évolution non linéaire liée à la théorie de la turbulence.

C. M. BRAUNER - P. PENEL - R. TEMAM (*)

dédié à Jean Leray

Introduction.

A la suite des travaux de R. H. Kraichnan sur la turbulence (cf. par exemple [2]), U. Frisch et M. Lesieur ont introduit un modèle de turbulence dit modèle M.R.C.M. (Markovian Random Coupling Model), cf. [1]. Le modèle MRCM est applicable à l'équation de Navier-Stokes, à l'équation de Burgers et aussi bien à d'autres équations de la physique.

L'équation MRCM associée à l'équation de Burgers est remarquablement simple sans toutefois être standard: la fonction $u = u(t, x)$ qui joue le rôle d'une covariance est solution de

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u(t, 0) - u(t, x))^2 = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R};$$

$\nu > 0$ est un paramètre de viscosité.

Cette équation, on le verra, possède de très nombreuses particularités qui ne sont pas étrangères à certaines particularités mathématiques des équations d'Euler et Navier-Stokes; en particulier l'apparition pour $\nu = 0$ de singularités (cf. n. II.3). Il nous a donc semblé intéressant de procéder à une étude mathématique de cette équation, indépendamment de sa signification réelle pour la théorie de la turbulence. C'est notre objet ici et en [17].

Comme u est une covariance, $x \rightarrow u(t, x)$ est, pour tout t , une fonction

(*) Mathématiques Bâtiment 425, Université Paris Sud, 91405 Orsay, France.
Pervenuto alla Redazione il 20 Aprile 1976.

de type positif et elle atteint donc son maximum à l'origine, $x = 0$. Il est alors intéressant de réécrire l'équation maîtresse sous la forme

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\nu + 2(u(t, 0) - u(t, x)) \right) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right\} = 0$$

et il apparaît alors que pour $\nu \geq 0$, cette équation reste de type parabolique tant que

$$u(t, 0) \geq u(t, x), \quad \forall x \in \mathbf{R},$$

et donc en particulier si $u(t, \cdot)$ est de type positif.

C'est un des objets de notre étude de montrer que si $u(0, \cdot)$ est de type positif, alors $u(t, \cdot)$ est aussi de type positif pour $t > 0$, ce qui assure le caractère parabolique de (1)-(2).

Au chapitre I nous procédons à l'étude d'un problème de valeur initiale associé à (1)-(2) lorsque $\nu > 0$. On obtient l'existence de solutions faibles, l'existence et l'unicité de solutions un peu plus régulières. L'existence de solution est obtenue par deux méthodes différentes tenant compte des particularités de l'équation: méthode de Galerkin avec une base spéciale, et par ailleurs approximation de l'équation par une équation régularisée. On montre aussi un principe du maximum.

Au chapitre II on procède au passage à la limite $\nu \rightarrow 0$, ce qui permet d'obtenir l'existence de solutions à $\nu = 0$ comme limites de solutions correspondant à $\nu > 0$. Le problème de l'unicité reste ouvert. D'autre part on montre qu'il n'existe pas de solutions de (1), à $\nu = 0$, qui soit C^4 pour tout t .

L'étude systématique de la régularité des solutions pour $\nu > 0$, est faite en [17]: le résultat essentiel est le suivant: si $u_0 = u(0, \cdot)$ est C^∞ , alors u est C^∞ en t et x si $\nu > 0$; si $\nu = 0$, u est C^∞ en t et pour $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Des discontinuités apparaissent obligatoirement en $x = 0$, au bout d'un temps fini, si $\nu = 0$.

Les auteurs remercient U. Frisch et M. Lesieur qui ont attiré leur attention sur ce problème.

Le plan sera le suivant

CHAPITRE I. *Résultats d'existence et d'unicité à viscosité non nulle ($\nu > 0$ fixé).*

- I.1. Un théorème d'existence.
- I.2. Fonctions de type positif et espaces $\mathcal{F}H^p(\mathbf{R})$.
- I.3. Mise en œuvre de la méthode de Galerkin.
- I.4. Estimations a priori.
- I.5. Passage à la limite.
- I.6. Une deuxième démonstration d'existence.
- I.7. Un théorème d'existence et d'unicité.

CHAPITRE II. *Résultats d'existence à viscosité nulle* ($\nu = 0$).

- II.1. Résultats d'existence et estimations à priori ($\nu \rightarrow 0$).
 II.2. Passage à la limite.
 II.3. Perte de régularité.

CHAPITRE I

RESULTATS D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ A VISCOSITÉ
NON NULLE ($\nu > 0$ fixée)

I.1. — Un théorème d'existence.

A viscosité $\nu > 0$ fixée, $u = u_\nu = u_\nu(t, x)$ est donc défini sur $[0, \infty[\times \mathbf{R}$ par

$$(I.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[\nu + 2(u(t, 0) - u(t, x)) \right] \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right\} = 0,$$

$$(I.2) \quad u(t, x) \rightarrow 0 \quad \text{quand } |x| \rightarrow \infty$$

$$(I.3) \quad u(0, x) = u_0(x).$$

THÉORÈME I.1. *Pour tout $\nu > 0$ fixé, pour u_0 donné avec*

$$(I.4) \quad u_0 \in L^2(\mathbf{R}),$$

$$(I.5) \quad u_0 \geq 0 \quad \text{c'est-à-dire } \hat{u}_0 \geq 0 \text{ } ^{(1)},$$

il existe une solution du problème (I.1)-(I.3) telle que :

$$(I.6) \quad u \in L^\infty([0, \infty[; L^2(\mathbf{R})), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \in L^2([0, \infty[\times \mathbf{R}),$$

$$(I.7) \quad u(t, \cdot) \geq 0, \quad \hat{u}(t, \cdot) \geq 0 \quad \forall t \geq 0.$$

Si on suppose que :

$$(I.8) \quad u_0 \in L^\infty(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R}),$$

alors il existe u qui vérifie (I.1)-(I.3), (I.6), (I.7) et en outre

$$(I.9) \quad u \in L^\infty([0, \infty[\times \mathbf{R})$$

et

$$(I.10) \quad \|u\|_{L^\infty([0, \infty[\times \mathbf{R})} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbf{R})}.$$

(1) Cf. § I.2.

Certains caractères fondamentaux de l'équation considérée étant liés à la transformée de Fourier de u (en x , à t fixé), il est clair que l'équation transformée de Fourier de (I.1) sera intéressante à considérer. La méthode que nous employons pour démontrer l'existence est la suivante: construction d'une solution approchée pour l'équation transformée de Fourier de (I.1) et passage à la limite par compacité.

Dans ce qui suit nous commençons par quelques remarques sur les espaces $\mathcal{F}H^p(\mathbf{R})$, nous explicitons la transformée de Fourier de (I.1) et nous donnons ensuite deux variantes de construction d'une solution approchée: l'une en utilisant la méthode de Galerkin (§ I.3), l'autre basée sur une régularisation de l'équation (approximation par des opérateurs localement lipschitziens).

I.2. – Fonctions de type positif et espaces $\mathcal{F}H^p(\mathbf{R})$.

On rappelle qu'une fonction σ est dite de type positif, et on note $\sigma \gg 0$, si la forme quadratique

$$\lambda_1, \dots, \lambda_N \rightarrow \sum_{i,j=1}^N \sigma(x_i - x_j) \lambda_i \bar{\lambda}_j$$

est semi-définie positive pour tout ensemble fini de points x_1, \dots, x_N dans \mathbf{R} .

Comme conséquences immédiates de la définition, on a les propriétés:

$$\overline{\sigma(-x)} = \sigma(x),$$

$$\sigma(0) \text{ est réel positif,}$$

$$|\sigma(x)| \leq \sigma(0) \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

Lorsque σ est une fonction continue, si $\sigma(0) = 0$ et $\sigma \gg 0$, alors nécessairement σ est identiquement nulle; si $\sigma(0) = \sigma(x_0)$, avec $x_0 \neq 0$, et $\sigma \gg 0$, alors nécessairement σ est périodique de période x_0 .

D'autre part, en vertu du théorème de Bochner, une fonction $\sigma \gg 0$ peut être caractérisée par le fait que sa transformée de Fourier, notée $\hat{\sigma}$, est positive ou nulle.

Nous renvoyons à L. H. Loomis [11], Bochner [12] pour l'étude des fonctions de type positif; cf. aussi L. Schwartz [13] pour les distributions de type positif.

En vue de l'étude du problème (I.1), (I.2), (I.3), nous introduisons donc l'espace $H^1(\mathbf{R})$ et son image, par transformation de Fourier, $\mathcal{F}H^1(\mathbf{R})$, qui sera l'espace naturel de travail (à t fixé). Nous utiliserons aussi parfois les espaces $H^p(\mathbf{R})$, p entier ≥ 0 , et leurs images de Fourier $\mathcal{F}H^p(\mathbf{R})$. On rap-

pelle que $H^p(\mathbf{R})$ désigne l'espace de Hilbert des fonctions de $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, qui sont de carré sommable, ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leq p$. On notera $u = u(x)$, $v = v(x)$ des fonctions appartenant par exemple à $L^2(\mathbf{R}_x)$ et $\varphi = \varphi(\xi)$ ou $\psi = \psi(\xi)$ des fonctions appartenant à l'espace des transformées de Fourier $L^2(\mathbf{R}_\xi)$. Ainsi l'espace $\mathcal{F}H^p(\mathbf{R})$ désigne l'espace des fonctions complexes ψ ,

$$(I.11) \quad \left\{ \psi \in L^2(\mathbf{R}_\xi) \mid \overline{\psi(-\xi)} = \psi(\xi), \int_{\mathbf{R}} (1 + |\xi|^2)^p |\psi(\xi)|^2 d\xi < +\infty \right\}.$$

Il est de Hilbert pour la norme :

$$\left\{ \int_{\mathbf{R}} (1 + |\xi|^2)^p |\psi(\xi)|^2 d\xi \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

L'espace $\mathcal{F}H^p(\mathbf{R})$ contient d'après (I.11) toutes les fonctions étagées à support compact vérifiant $\overline{\psi(-\xi)} = \psi(\xi)$. Nous verrons que ces fonctions forment un sous-espace dense de $\mathcal{F}H^p(\mathbf{R})$ (cf. lemme I.1), et nous mettrons en oeuvre la méthode de Galerkin dans des sous-espaces de $\mathcal{F}H^1(\mathbf{R})$ formés de telles fonctions (cf. § I.3).

De manière plus précise nous introduisons les espaces Φ_h suivants :

Soit N un entier > 0 , $h = 2^{-N}$ et soit Φ_h le sous-espace de $\mathcal{F}H^1(\mathbf{R})$ formé des fonctions étagées, constantes sur des intervalles de longueur h centrés aux points jh , $|j| \leq M(h) = 1/h^2 = 2^{2N}$ (1), et nulles en dehors de ces intervalles.

Désignant par χ la fonction caractéristique de l'intervalle $(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$, on définit Φ_h comme l'espace des fonctions φ telles que :

$$(I.12) \quad \varphi(\xi) = \sum_{j=-M(h)}^{M(h)} \varphi_j \chi\left(\frac{\xi}{h} - j\right), \quad \varphi_j = \varphi(jh) \in \mathbf{C},$$

$$(I.13) \quad \overline{\varphi(-\xi)} = \varphi(\xi) \quad \forall \xi, \text{ c'est-à-dire } \varphi_{-j} = \overline{\varphi_j}.$$

Nous avons :

LEMME I.1. *Pour tout entier $p \geq 0$ fixé,*

$$(I.14) \quad \bigcup_h \Phi_h \text{ est dense dans } \mathcal{F}H^p(\mathbf{R})$$

$$(I.15) \quad \mathcal{F}^{-1}\left(\bigcup_h \Phi_h\right) \text{ est dense dans } H^p(\mathbf{R}).$$

(1) On peut remplacer $M(h)$ par n'importe quel autre entier tel que $hM(h) \rightarrow \infty$ lorsque $h \rightarrow 0$.

DÉMONSTRATION. Il suffit de démontrer (I.14).

Pour tout $\psi \in \mathcal{FH}^p(\mathbf{R})$, et pour tout h donné, on considère la fonction $\psi_h \in \mathcal{F}_h$ définie par:

$$(I.16) \quad \psi_h(jh) = \frac{1}{h} \int_{(j-\frac{1}{2})h}^{(j+\frac{1}{2})h} \psi(\xi) d\xi, \quad |j| < M(h).$$

On vérifie que $\overline{\psi_h(-jh)} = \psi_h(jh)$. Ainsi l'application $\psi \rightarrow \psi_h$ est linéaire de $\mathcal{FH}^p(\mathbf{R})$ dans \mathcal{F}_h et on vérifie par un calcul élémentaire que:

$$(I.17) \quad \|\psi_h\|_{\mathcal{FH}^p(\mathbf{R})} \leq C(p) \|\psi\|_{\mathcal{FH}^p(\mathbf{R})}.$$

Le résultat sera établi si nous montrons que pour tout $\psi \in \mathcal{FH}^p(\mathbf{R})$,

$$(I.18) \quad \psi_h \rightarrow \psi \quad \text{dans } \mathcal{FH}^p(\mathbf{R}), \quad \text{lorsque } h \rightarrow 0.$$

D'après (I.17), il suffit de démontrer (I.18) pour tous les ψ d'un sous-espace dense de $\mathcal{FH}^p(\mathbf{R})$, donc pour ψ C^∞ à support compact en vertu du lemme I.2 ci-après. Pour de telles fonctions, on vérifie très aisément que:

$$\int_{\mathbf{R}} (1 + \xi^2)^p |\psi_h(\xi) - \psi(\xi)|^2 d\xi \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0). \quad \blacksquare$$

LEMME I.2. $\mathcal{D}(\mathbf{R}_\xi)$ est dense dans $\mathcal{FH}^p(\mathbf{R})$.

DÉMONSTRATION. Puisque $\mathcal{D}(\mathbf{R}_x)$ est dense dans $H^p(\mathbf{R})$, par transformation de Fourier, les fonctions C^∞ sont denses dans $\mathcal{FH}^p(\mathbf{R})$. On se ramène ensuite aux fonctions à support compact par troncature: soit $\theta \in \mathcal{D}(\mathbf{R}_\xi)$, $0 < \theta < 1$, telle que:

$$\theta = 1 \quad \text{pour } |\xi| < 1 \quad \text{et} \quad \theta = 0 \quad \text{pour } |\xi| \geq 2;$$

on vérifie que pour tout $\psi \in \mathcal{FH}^p(\mathbf{R})$ et pour tout $\varepsilon > 0$, $\theta(\varepsilon \cdot) \psi(\cdot) \in \mathcal{FH}^p(\mathbf{R})$ et, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$(I.19) \quad \theta(\varepsilon \cdot) \psi(\cdot) \rightarrow \psi \quad \text{dans } \mathcal{FH}^p(\mathbf{R}). \quad \blacksquare$$

I.3. - Mise en œuvre de la méthode de Galerkin.

Soit $u = u(t, x)$ une solution de (I.1) et soit $\varphi = \varphi(t, \xi)$ la transformée de Fourier en x de u .

L'équation (I.1) s'écrit sous la forme:

$$(I.20) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - (\nu + 2u(t, 0)) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(u(t, x))^2] = 0$$

et devient après transformation de Fourier (on notera $u = \mathcal{F}^{-1}\varphi = \tilde{\varphi}$)

$$(I.21) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \xi) + 4\pi^2 \xi^2 (\nu + 2\tilde{\varphi}(t, 0)) \varphi(t, \xi) = 4\pi^2 \xi^2 \varphi * \varphi(t, \xi).$$

Pour φ et ψ donnés, on définit, lorsque ces intégrales ont un sens,

$$(I.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\varphi, \psi) = \int_{\mathbf{R}} \varphi(\xi) \overline{\psi(\xi)} d\xi, \\ \alpha(\varphi, \psi) = \int_{\mathbf{R}} 4\pi^2 \xi^2 \varphi(\xi) \overline{\psi(\xi)} d\xi, \\ \beta(\varphi, \psi) = \int_{\mathbf{R}} 4\pi^2 \xi^2 \varphi * \varphi(\xi) \overline{\psi(\xi)} d\xi. \end{array} \right.$$

Dans les espaces Φ_h précédents, nous allons chercher une approximation de $\hat{u}(t, \cdot) = \varphi(t, \cdot)$ sous la forme:

$$\varphi_h(t, \xi) = \sum_{j=-M(h)}^{+M(h)} \varphi_{j,h}(t) \chi\left(\frac{\xi}{h} - j\right).$$

Les fonctions $\varphi_h: (0, T_h) \rightarrow \Phi_h$ seront solutions de:

$$(I.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}(\varphi_h(t), \psi_h) + (\nu + 2\tilde{\varphi}_h(t, 0))\alpha(\varphi_h(t), \psi_h) = \beta(\varphi_h(t), \psi_h), \quad \forall \psi_h \in \Phi_h, \\ \varphi_h(0) \in \Phi_h \quad \text{donné.} \end{array} \right.$$

Avant d'étudier ce système différentiel, précisons le choix de la condition initiale dans (I.23). Par hypothèse $u_0 \in L^2(\mathbf{R})$ et donc $\hat{u}_0 \in L^2(\mathbf{R}_\xi^2)$. D'après la démonstration du lemme I.1, nous pouvons définir pour tout h , un élément \hat{u}_{0h} dans Φ_h , à valeurs réelles, tel que:

$$|\hat{u}_{0h}| \leq |\hat{u}_0| \quad \text{et} \quad \hat{u}_{0h} \rightarrow \hat{u}_0 \quad \text{dans} \quad L^2(\mathbf{R}_\xi^2) \quad \text{lorsque} \quad h \rightarrow 0.$$

En outre, d'après (I.11) et (I.5), $\hat{u}_{0h} \geq 0$.

Nous choisissons donc en (I.23)

$$(I.24) \quad \varphi_h(0) = \hat{u}_{0h} \geq 0.$$

LEMME I.3. *Le système différentiel (I.23) est équivalent au système différentiel :*

$$(I.25) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \varphi_{j\hbar}(t) + 4\pi^2 \hbar^2 \left(j^2 + \frac{1}{12} \right) (\nu + 2\tilde{\varphi}_\hbar(t, 0)) \varphi_{j\hbar}(t) = \\ \phantom{\frac{d}{dt} \varphi_{j\hbar}(t)} = 4\pi^2 \sum_{k,l=-M(\hbar)}^{+M(\hbar)} \theta_{jkl} \varphi_{k\hbar}(t) \varphi_{l\hbar}(t), \\ \varphi_{j\hbar}(0) = \hat{u}_{0j}(j\hbar) \geq 0, \end{cases}$$

où

$$(I.26) \quad \theta_{jkl} = \int_{(j-\frac{1}{2})\hbar}^{(j+\frac{1}{2})\hbar} \chi * \chi \left(\frac{\xi}{\hbar} - k - l \right) \xi^2 d\xi.$$

Il possède une solution maximale définie sur un intervalle $[0, T_\hbar[$, ($0 < T_\hbar < +\infty$), et en outre :

$$(I.27) \quad \varphi_\hbar(t, \xi) \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbf{R}, \quad \forall t < T_\hbar.$$

DÉMONSTRATION. Pour obtenir le système différentiel (I.25) à partir de sa forme variationnelle (I.23), nous prenons ψ_\hbar défini par :

$$\psi_\hbar(\xi) = \frac{1}{\hbar} \chi \left(\frac{\xi}{\hbar} - j \right).$$

Un calcul élémentaire montre que :

$$\begin{aligned} \alpha(\varphi_\hbar(t), \psi_\hbar) &= \frac{4\pi^2}{\hbar} \varphi_{j\hbar}(t) \int_{(j-\frac{1}{2})\hbar}^{(j+\frac{1}{2})\hbar} \xi^2 d\xi = 4\pi^2 \hbar^2 \left(j^2 + \frac{1}{12} \right) \varphi_{j\hbar}(t), \\ \beta(\varphi_\hbar(t), \psi_\hbar) &= \sum_{k,l=-M(\hbar)}^{+M(\hbar)} \frac{4\pi^2}{\hbar} \varphi_{k\hbar}(t) \varphi_{l\hbar}(t) \int_{(j-\frac{1}{2})\hbar}^{(j+\frac{1}{2})\hbar} \chi_{k\hbar} * \chi_{l\hbar}(\xi) \xi^2 d\xi \quad \text{où } \chi_{k\hbar}(\xi) = \chi \left(\frac{\xi}{\hbar} - k \right). \end{aligned}$$

Mais :

$$\begin{aligned} \chi_{k\hbar} * \chi_{l\hbar}(\xi) &= \int_{\mathbf{R}} \chi \left(\frac{\xi - \eta}{\hbar} - k \right) \chi \left(\frac{\eta}{\hbar} - l \right) d\eta = \\ &= \hbar \int_{\mathbf{R}} \chi \left(\frac{\xi}{\hbar} - k - l - \eta \right) \chi(\eta) d\eta = \hbar \chi * \chi \left(\frac{\xi}{\hbar} - k - l \right) \end{aligned}$$

et le résultat suit.

Pour démontrer l'existence d'une solution de (I.25), il suffit de montrer que l'application linéaire:

$$\psi_h \rightarrow \tilde{\psi}_h(0) = \mathcal{F}^{-1} \psi_h(0)$$

est continue de \mathcal{D}_h dans \mathbf{C} , et cela est tout à fait élémentaire.

Pour montrer que (I.25) admet une solution réelle positive, on applique le raisonnement qui précède au système

$$\begin{aligned} \text{(I.25')} \quad \frac{d}{dt} \varphi_{jh}(t) + 4\pi^2 h^2 \left(j^2 + \frac{1}{12} \right) (\nu + 2|\tilde{\varphi}_h(t, 0)|) \varphi_{jh}(t) &= \\ &= 4\pi^2 \sum_{k,l=-M(h)}^{+M(h)} \theta_{jkl} |\varphi_{kh}(t)| \cdot |\varphi_{lh}(t)| \end{aligned}$$

avec la même condition initiale.

Or toute solution de (I.25') est réelle positive. Il est facile de voir qu'elle est nécessairement réelle; pour vérifier qu'elle est positive, nous remarquons que les θ_{jkl} sont positifs et que:

$$\frac{d}{dt} \varphi_{jh}(t) + \varrho_h(t) \varphi_{jh}(t) \geq 0$$

où

$$\varrho_h(t) = 4\pi^2 h^2 \left(j^2 + \frac{1}{12} \right) (\nu + 2|\tilde{\varphi}_h(t, 0)|) \geq 0;$$

ceci implique

$$\varphi_{jh}(t) \geq \varphi_{jh}(0) \exp \left\{ - \int_0^t \varrho_h(\sigma) d\sigma \right\} \geq 0.$$

Ayant observé qu'une solution de (I.25') est réelle positive, nous affirmons que c'est aussi une solution de (I.25). En effet, les seconds membres sont identiques et dans le membre de gauche on a bien $|\tilde{\varphi}_h(t, 0)| = \tilde{\varphi}_h(t, 0)$: $\tilde{\varphi}_h(t, \cdot)$ est de type positif et $\tilde{\varphi}_h(t, \cdot) \in H^p(\mathbf{R})$, $p > 0$, en particulier s'annule à l'infini en sorte que:

$$\tilde{\varphi}_h(t, 0) = \text{Sup } \tilde{\varphi}_h(t, \cdot) \geq 0. \quad \blacksquare$$

I.4. — Estimations à priori.

Nous allons établir à présent les estimations a priori qui nous permettront de montrer que $T_h = +\infty$ et qui permettront ensuite le passage à la limite $h \rightarrow 0$ (§ I.5).

Au préalable, nous donnons une autre forme du système (I.23):

LEMME I.4. *Avec les notations:*

$$\begin{aligned} u_h(t, \cdot) &= \tilde{\varphi}_h(t, \cdot) = \mathcal{F}^{-1} \varphi_h(t, \cdot) \\ v_h(\cdot) &= \tilde{\varphi}_h(\cdot) \end{aligned}$$

et

$$(I.28) \quad a(u_h(t), v_h) = \int_{\mathbf{R}} \frac{\partial u_h(t)}{\partial x} \cdot \frac{dv_h}{dx} dx.$$

Nous avons:

$$(I.29) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (u_h(t), v_h) + (\nu + 2u_h(t, 0))a(u_h(t), v_h) &= \\ &= 2 \int_{\mathbf{R}} u_h(t, x) \frac{\partial u_h}{\partial x}(t, x) \frac{dv_h}{dx}(x) dx. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Dans (I.23), il suffit de transformer l'équation à l'aide du théorème de Parseval.

En effet, nous avons successivement,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \varphi_h(t), \psi_h \right) &= \int_{\mathbf{R}} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_h(t, \xi) \overline{\psi_h(\xi)} d\xi = \int_{\mathbf{R}} \frac{\partial}{\partial t} u_h(t, x) v_h(x) dx, \\ \alpha(\varphi_h(t), \psi_h) &= \int_{\mathbf{R}} 4\pi^2 \xi^2 \varphi_h(t, \xi) \overline{\psi_h(\xi)} d\xi = \int_{\mathbf{R}} \frac{\partial u_h}{\partial x}(t, x) \frac{dv_h}{dx}(x) dx, \\ \beta(\varphi_h(t), \psi_h) &= \int_{\mathbf{R}} 4\pi^2 \xi^2 \varphi_h * \varphi_h(t, \xi) \overline{\psi_h(\xi)} d\xi = \int_{\mathbf{R}} (2i\pi\xi \varphi_h * \varphi_h(t, \xi)) \overline{(2i\pi\xi \psi_h(\xi))} d\xi = \\ &= \int_{\mathbf{R}} \frac{\partial}{\partial x} (u_h(t, x))^2 \frac{d}{dx} v_h(x) dx = 2 \int_{\mathbf{R}} u_h(t, x) \frac{\partial u_h}{\partial x}(t, x) \frac{dv_h}{dx}(x) dx. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Nous établissons maintenant les majorations a priori.

LEMME I.5. *On a*

$$(i) \quad T_h = +\infty;$$

et, lorsque $h \rightarrow 0$,

(ii) *Les fonctions φ_h demeurent dans des ensembles bornés de*

$$L^\infty([0, \infty[; L^2(\mathbf{R}_\xi)) \quad \text{et} \quad L^2([0, \infty[; \mathcal{F}H^1(\mathbf{R})).$$

(iii) Les fonctions $u_h = \tilde{\varphi}_h$ demeurent dans des ensembles bornés de

$$L^\infty([0, \infty[; L^2(\mathbf{R})) \quad \text{et} \quad L^2_{\text{loc}}([0, \infty[; H^1(\mathbf{R})).$$

DÉMONSTRATION. Il convient de noter que (i) résulte immédiatement de (iii).

Soit d'abord t fixé, $0 < t < T_h$, nous prenons $v_h = u_h(t)$ dans (I.29), ce qui correspond à $\psi_h = \varphi_h(t)$ dans (I.23):

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_h(t)|^2 + \nu a(u_h(t), u_h(t)) + 2 \int_{\mathbf{R}} (u_h(t, 0) - u_h(t, x)) \left(\frac{\partial u_h}{\partial x}(t, x) \right)^2 dx = 0.$$

Utilisant le fait que $u_h(t, \cdot) \geq 0$, nous avons

$$u_h(t, 0) \geq u_h(t, x) \quad \forall x,$$

et nous obtenons alors en particulier

$$|u_h(t)|^2 \leq |u_h(0)|^2,$$

ce qui montre que nécessairement $T_h = +\infty$. Intégrons maintenant de 0 à s ($s > 0$ quelconque):

$$|u_h(s)|^2 + 2\nu \int_0^s a(u_h(t), u_h(t)) dt \leq |u_h(0)|^2.$$

Le lemme I.1, (I.24) et le théorème de Parseval justifiant l'inégalité $|u_h(0)|^2 = |\hat{u}_{0h}|^2 < |\hat{u}_0|^2$, nous obtenons finalement

$$(I.30) \quad |u_h(s)|^2 \leq |u_0|^2 \quad \forall s > 0,$$

$$(I.31) \quad \int_{\mathbf{R}} \left| \frac{\partial u_h}{\partial x}(t) \right|^2 dt \leq \frac{1}{2\nu} |u_0|^2.$$

Le lemme est établi. ■

Il nous manque maintenant une estimation a priori sur la dérivée par rapport à t de u_h , ce qui est l'objet du lemme:

LEMME I.6. Lorsque $h \rightarrow 0$,

$$\frac{\partial u_h}{\partial t} \text{ demeure dans un borné de } L^{4/3}_{\text{loc}}([0, \infty[; H^{-1}(\mathbf{R})).$$

DÉMONSTRATION. Soit $T > 0$ quelconque. Nous considérons

$$I_h = \int_0^T \left\| \frac{\partial u_h}{\partial t}(t) \right\|_{H^{-1}(\mathbf{R})}^{4/3} dt.$$

Via la transformation de Fourier et parce que

$$\varphi_h(t, \xi) = \hat{u}_h(t, \cdot) = \sum_{j=-M(h)}^{+M(h)} \varphi_{jh}(t) \chi\left(\frac{\xi}{h} - j\right),$$

nous avons,

$$\begin{aligned} I_h &= \int_0^T \left\{ \int_{\mathbf{R}} \left(\frac{\partial \varphi_h}{\partial t}(t, \xi) \right)^2 \frac{d\xi}{1 + \xi^2} \right\}^{\sharp} dt = \\ &= \int_0^T \left\{ \sum_{j=-M(h)}^{+M(h)} \left(\frac{d\varphi_{jh}}{dt}(t) \right)^2 \left(\int_{(j-\frac{1}{2})h}^{(j+\frac{1}{2})h} \frac{d\xi}{1 + \xi^2} \right) \right\}^{\sharp} dt \leq \int_0^T \left\{ \sum_{j=-M(h)}^{+M(h)} \gamma_j(h) \left(\frac{d\varphi_{jh}}{dt}(t) \right)^2 \right\}^{\sharp} dt \end{aligned}$$

$$\text{où } \gamma_j(h) = \frac{h}{1 + (j - \frac{1}{2})^2 h^2}.$$

La recherche d'une équation « explicite » donnant $(d\varphi_{jh}/dt)(t)$ en (I.25) (la démonstration du lemme I.3) fut menée à bien par choix de

$$\psi_{jh}(\xi) = \frac{1}{h} \chi\left(\frac{\xi}{h} - j\right)$$

dans

$$(I.32) \quad \frac{d}{dt} \varphi_{jh}(t) = -(\nu + 2u_h(t, 0))\alpha(\varphi_h(t), \psi_{jh}) + \beta(\varphi_h(t), \psi_{jh}).$$

Les formes α et β sont données en (I.22) et calculées dans la démonstration du lemme I.3. Procédant ici un peu différemment, nous avons d'après l'inégalité de Schwarz,

$$\begin{aligned} |\alpha(\varphi_h(t), \psi_{jh})|^2 &\leq 4\pi^2 h \left(j^2 + \frac{1}{12} \right) \cdot \int_{(j-\frac{1}{2})h}^{(j+\frac{1}{2})h} 4\pi^2 \xi^2 [\varphi_h(t, \xi)]^2 d\xi, \\ |\beta(\varphi_h(t), \psi_{jh})|^2 &\leq 4\pi^2 h \left(j^2 + \frac{1}{12} \right) \cdot \int_{(j-\frac{1}{2})h}^{(j+\frac{1}{2})h} 4\pi^2 \xi^2 [\varphi_h * \varphi_h(t, \xi)]^2 d\xi. \end{aligned}$$

Poursuivant le travail de majoration de I_h , nous regroupons les inégalités précédentes d'après (I.32), alors (les c désignant des constantes posi-

tives diverses):

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=-M(h)}^{+M(h)} \gamma_j(h) \left(\frac{d}{dt} \varphi_{jh}(t) \right)^2 &< c_1 (1 + |u_h(t, 0)|^2) \cdot \int_{\mathbf{R}} 4\pi^2 \xi^2 |\varphi_h(t, \xi)|^2 d\xi + \\
 &+ c_2 \int_{\mathbf{R}} 4\pi^2 \xi^2 |\varphi_h * \varphi_h(t, \xi)|^2 d\xi < c_3 (1 + |u_h(t, 0)|^2) \cdot \int_{\mathbf{R}} \left(\frac{\partial u_h}{\partial x}(t, x) \right)^2 dx + \\
 &+ c_4 \int_{\mathbf{R}} \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot u_h^2(t, x) \right)^2 dx .
 \end{aligned}$$

Il faut ensuite utiliser la majoration classique

$$(I.33) \quad |v|_{C(\mathbf{R})} < \sqrt{2} |v|_{L^1(\mathbf{R})}^{\frac{1}{2}} \left| \frac{dv}{dx} \right|_{L^2(\mathbf{R})}^{\frac{1}{2}} \quad \forall v \in H^1(\mathbf{R}) ,$$

et le fait que $u_h(t, \cdot) \gg 0$, c'est-à-dire $u_h(t, 0) \geq u_h(t, x)$, $\forall x$.

$$\begin{aligned}
 I_h &< \int_0^T \left\{ \sum_j \gamma_j(h) \left(\frac{d}{dt} \varphi_{jh}(t) \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} dt < \\
 &< \int_0^T \left\{ c_5 \left| \frac{\partial u_h}{\partial x}(t) \right|^2 + c_6 \left(|u_h(t)|^{\frac{1}{2}} \cdot \left| \frac{\partial u_h}{\partial x}(t) \right|^{\frac{1}{2}} \cdot \left| \frac{\partial u_h}{\partial x}(t) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} dt < \\
 &< c_7 \int_0^T \left| \frac{\partial u_h}{\partial x}(t) \right|^{\frac{4}{3}} dt + c_8 \int_0^T |u_h(t)|^{\frac{1}{2}} \cdot \left| \frac{\partial u_h}{\partial x}(t) \right|^2 dt < \\
 &< c_9 \int_0^T \left| \frac{\partial u_h}{\partial x}(t) \right|^{\frac{4}{3}} dt + c_{10} \int_0^T |u_h(t)|^{\frac{1}{2}} \cdot \left| \frac{\partial u_h}{\partial x}(t) \right|^2 dt .
 \end{aligned}$$

Nous terminons avec le lemme I.5 (iii):

$$I_h < c = c(T) \quad \text{indépendant de } h . \quad \blacksquare$$

I.5. - Passage à la limite.

Il existe une suite $h' \rightarrow 0$, et il existe $u \in L^\infty([0, \infty[; L^2(\mathbf{R}))$ avec $\partial u / \partial x \in L^2(]0, \infty[\times \mathbf{R})$ tels que:

$$(I.34) \quad \begin{cases} u_{h'} \rightarrow u & \text{dans } L^\infty([0, \infty[; L^2(\mathbf{R})) \text{ faible étoile,} \\ \frac{\partial u_{h'}}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} & \text{dans } L^2([0, \infty[\times \mathbf{R}) \text{ faible.} \end{cases}$$

En raison du lemme I.6 et d'un théorème de compacité d'Aubin, nous avons des propriétés de convergence forte de $u_{h'}$ vers u .

Nous savons que l'injection de $H^1([-M, +M])$ dans $H^s([-M, +M])$ est compacte pour tout $M > 0$, pour tout s , $0 < s < 1$; alors nous avons par exemple

$$(I.35) \quad u_{h'} \rightarrow u \quad \text{dans } L^2([0, T]; H^3([-M, +M])) \text{ fort, } \forall T > 0, \forall M > 0.$$

Or $H^s(\mathbf{R})$ s'injecte continûment dans $C^0(\mathbf{R})$ si $s > \frac{1}{2}$.

Donc

$$(I.36) \quad u_{h'} \rightarrow u \quad \text{dans } L^2([0, T]; C^0([-M, +M])) \text{ fort, } \forall T > 0, \forall M > 0.$$

En particulier,

$$(I.37) \quad u_{h'}(\cdot, 0) \rightarrow u(\cdot, 0) \quad \text{dans } L^2_{\text{loc}}([0, \infty[) \text{ fort.}$$

Comme d'habitude, partant des équations approchées (I.29), les convergences faibles données en (I.34) suffisent pour justifier le passage à la limite dans les termes linéaires, et les convergences fortes (I.36) (I.37) nous permettent de passer à la limite dans les termes non linéaires.

Plus précisément, soit $v \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ et $\psi = \vartheta$. Nous savons trouver pour tout h' des éléments $\psi_{h'} \in \Phi_{h'}$ tels que $\psi_{h'} \rightarrow \psi$ dans $\mathcal{F}H^1(\mathbf{R})$ lorsque $h' \rightarrow 0$.

On pose $v_{h'} = \mathcal{F}^{-1}\psi_{h'} = \tilde{\psi}_{h'}$ et par conséquent $v_{h'} \rightarrow v$ dans $H^1(\mathbf{R})$.

Avec ce choix de $v_{h'}$ nous déduisons de (I.34) que

$$(I.38) \quad \begin{cases} (u_{h'}(\cdot), v_{h'}) \rightarrow (u(\cdot), v) \\ a(u_{h'}(\cdot), v_{h'}) \rightarrow a(u(\cdot), v) \end{cases}$$

dans $L^2([0, \infty[)$ faible.

Alors, grâce à (I.37),

$$(I.39) \quad u_{h'}(\cdot, 0) a(u_{h'}(\cdot), v_{h'}) \rightarrow u(\cdot, 0) a(u(\cdot), v)$$

au sens des distributions sur $]0, \infty[$.

Il reste à justifier le passage à la limite dans les termes non linéaires du second membre de (I.29):

LEMME I.7. Lorsque $h' \rightarrow 0$,

$$(I.40) \quad \int_{\mathbf{R}} u_{h'}(\cdot, x) \frac{\partial u_{h'}}{\partial x}(\cdot, x) \frac{dv_{h'}}{dx}(x) dx \rightarrow \int_{\mathbf{R}} u(\cdot, x) \frac{\partial u}{\partial x}(\cdot, x) \frac{dv}{dx}(x) dx$$

au sens des distributions sur $]0, \infty[$.

DÉMONSTRATION. Les fonctions $v_{h'}$ choisies ne sont pas nécessairement à support compact, toutefois v est telle que $\text{supp}(v) \subset [-M, +M]$; étant donné que $v_{h'} \rightarrow v$ dans $H^1(\mathbf{R})$, nous avons

$$\left| \frac{dv_{h'}}{dx} \right|_{L^1(]-\infty, -M[\cup]M, +\infty[)} \rightarrow 0, \quad \text{lorsque } h' \rightarrow 0.$$

Des résultats de convergence (I.34), (I.36), il résulte que

$$u_{h'} \frac{\partial u_{h'}}{\partial x} \rightarrow u \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{dans} \quad L^1_{\text{loc}}([0, \infty[; L^2(-M, +M)) \text{ faible } ^{(1)}$$

et alors

$$\int_{|x| \leq M} u_{h'}(\cdot, x) \frac{\partial u_{h'}}{\partial x}(\cdot, x) \frac{dv_{h'}}{dx}(x) dx \rightarrow \int_{|x| \leq M} u(\cdot, x) \frac{\partial u}{\partial x}(\cdot, x) \frac{dv}{dx}(x) dx$$

(au sens des distributions sur $]0, \infty[$).

Nous écrivons d'autre part

$$\begin{aligned} \left| \int_{|x| \geq M} u_{h'}(t, x) \frac{\partial u_{h'}}{\partial x}(t, x) \frac{dv_{h'}}{dx}(x) dx \right| &< \\ &\leq |u_{h'}(t)|_{L^\infty(\mathbf{R})} \left| \frac{\partial u_{h'}}{\partial x}(t) \right|_{L^2(\mathbf{R})} \left| \frac{dv_{h'}}{dx} \right|_{L^1(]-\infty, -M[\cup]M, +\infty[)} \leq \\ &< c(t) \left| \frac{dv_{h'}}{dx} \right|_{L^1(]-\infty, -M[\cup]M, +\infty[)} \end{aligned}$$

où la fonction $c(t)$ est localement bornée en t (cf. (iii) du lemme I.5). Nous avons donc (I.40). ■

Fin de la démonstration du Théorème d'existence I.1.

A la limite, u vérifie donc

$$(I.41) \quad u \in L^\infty([0, \infty[; L^2(\mathbf{R})) \cap L^2_{\text{loc}}([0, \infty[; H^1(\mathbf{R}))$$

$$(I.42) \quad \frac{\partial}{\partial t} (u(t), v) + (v + 2u(t, 0))a(u(t), v) = 2 \int_{\mathbf{R}} u(t, x) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \frac{dv}{dx}(x) dx$$

$\forall v \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ et par continuité, $\forall v \in H^1(\mathbf{R})$, $\forall t > 0$; c'est l'équation (I.1).

La fonction $u(t, \cdot)$ est du type positif, puisqu'il en est ainsi des fonctions $u_{h'}(t, \cdot)$, $\forall t > 0$; d'où (I.7).

⁽¹⁾ Topologie $\sigma(L^1, L^\infty)$.

Nous avons également

$$(I.43) \quad u_n(0, \cdot) \rightarrow u(0, \cdot) = u_0(\cdot) \quad \text{dans } H^{-1}(\mathbf{R}) \text{ faible.}$$

Cela résulte aisément du lemme I.6 et du choix de φ_n en (I.23), (I.24) et cela termine la démonstration de l'existence d'une solution lorsque $u_0 \in L^2(\mathbf{R})$.

REMARQUE I.1. La démonstration de (I.9), (I.10) (principe du maximum) sera donnée après le théorème I.2 (§. I.7). Evidemment ces propriétés ne seront pas utilisées dans la démonstration du théorème I.2.

I.6. - Une deuxième démonstration d'existence.

Une autre approche du problème est fondée sur une régularisation de l'équation par troncature dans les espaces-images de Fourier. Nous introduisons pour m entier > 0 , l'espace Φ_m des fonctions de carré sommable sur $[-m, +m]$ qui vérifient $\varphi(-\xi) = \varphi(\xi)$. Cet espace est identifiable à un sous-espace hilbertien de $L^2(\mathbf{R}_\xi)$ et nous cherchons une approximation de $\hat{u}(t, \cdot) = \varphi(t, \xi)$ à valeur dans Φ_m . Posant

$$(I.44) \quad \chi_m = \text{la fonction caractéristique de l'intervalle } [-m, +m],$$

nous considérons donc les fonctions $\varphi_m = [0, T_m) \rightarrow \Phi_m$ solutions de

$$(I.45) \quad \frac{\partial \varphi_m}{\partial t} + 4\pi^2 \xi^2 (\nu + 2|\tilde{\varphi}_m(\cdot, 0)|) \varphi_m = 4\pi^2 \xi^2 |\varphi_m * \varphi_m| \cdot \chi_m,$$

$$(I.46) \quad \varphi_m(0, \cdot) = \chi_m \cdot \hat{u}_0,$$

avec les mêmes notations qu'en (I.21), (I.25), $\tilde{\varphi} = \mathcal{F}^{-1}\varphi$.

LEMME I.8. *Le système différentiel (I.45), (I.46) est de la forme*

$$(I.47) \quad \begin{cases} \frac{d\varphi_m}{dt}(t, \cdot) = B_m \varphi_m(t, \cdot), \\ \varphi_m(0, \cdot) \in \Phi_m, \end{cases}$$

B_m est un opérateur localement lipschitzien sur Φ_m . Le système (I.47) possède une solution maximale positive définie sur un intervalle $[0, T_m[$, $0 < T_m < +\infty$.

DÉMONSTRATION. Nous posons $B_m = C + D_m$ avec, pour $\varphi \in \Phi_m$

$$C\varphi(\xi) = -4\pi^2 \xi^2 (\nu + 2|\tilde{\varphi}(0)|) \varphi(\xi)$$

$$D_m \varphi(\xi) = 4\pi^2 \xi^2 |(\varphi * \varphi)(\xi)| \cdot \chi_m(\xi).$$

Nous observons que

$$|\tilde{\varphi}(0)| = \left| \int_{-m}^{+m} \varphi(\xi) d\xi \right| \leq \sqrt{2m} |\varphi|_{\Phi_m}$$

et par suite

$$|\tilde{\varphi}(0) - \tilde{\psi}(0)| \leq \sqrt{2m} |\varphi - \psi|_{\Phi_m}.$$

Alors nous avons les inégalités successives,

$$\begin{aligned} |C\varphi - C\psi|_{\Phi_m} &\leq 4\pi^2 m^2 \sqrt{2m} |\varphi|_{\Phi_m} (2|\tilde{\varphi}(0) - \tilde{\psi}(0)|) \\ &\quad + 4\pi^2 m^2 \sqrt{2m} |\varphi - \psi|_{\Phi_m} (\nu + 2|\tilde{\psi}(0)|) \\ &\leq 16\pi^2 m^3 (1 + |\varphi|_{\Phi_m} + |\psi|_{\Phi_m}) \cdot |\varphi - \psi|_{\Phi_m}, \end{aligned}$$

ce qui montre que C est localement lipschitzien sur Φ_m ($m > 0$ fixé).

De même

$$\begin{aligned} |D_m \varphi(\xi) - D_m \psi(\xi)| &\leq 4\pi^2 \xi^2 \chi_m(\xi) \{ |\varphi * (\varphi - \psi)(\xi)| + |(\varphi - \psi) * \psi(\xi)| \} \\ |D_m \varphi - D_m \psi|_{\Phi_m} &\leq 4\pi^2 m^2 \{ |\varphi * (\varphi - \psi)|_{\Phi_m} + |(\varphi - \psi) * \psi|_{\Phi_m} \} \end{aligned}$$

et utilisant l'inégalité de convolution classique,

$$\begin{aligned} |D_m \varphi - D_m \psi|_{\Phi_m} &\leq 4\pi^2 m^2 \{ |\varphi|_{L^1(\mathbb{R}_t)} + |\psi|_{L^1(\mathbb{R}_t)} \} |\varphi - \psi|_{\Phi_m} \\ |D_m \varphi - D_m \psi|_{\Phi_m} &\leq 4\sqrt{2} \pi^2 m^{\frac{5}{2}} (|\varphi|_{\Phi_m} + |\psi|_{\Phi_m}) |\varphi - \psi|_{\Phi_m}, \end{aligned}$$

et l'opérateur D_m est, lui aussi, localement lipschitzien sur Φ_m . Donc B_m est localement lipschitzien et on en déduit l'existence d'une solution de (I.47) sur un intervalle $[0, T_m[$.

Pour vérifier la positivité de la solution, on procède comme au lemme I.3. D'après (I.5), $\hat{u}_0 \geq 0$ et $\varphi_m(0, \cdot) \geq 0$. Pour ξ fixé on écrit l'équation différentielle (I.45) sous la forme

$$\frac{d}{dt} \varphi_m(t, \xi) + K_m \varphi_m(t, \xi) \geq 0,$$

d'où $\varphi_m(t, \xi) \geq 0$, $\forall |\xi| < m$, et on rappelle que $\varphi_m(t, \xi) = 0$ si $|\xi| > m$.

Ayant l'existence locale d'une solution positive nous poursuivons l'étude comme au §. I.4 et I.5.

LEMME I.9. Soit $g_m = \mathcal{F}^{-1} \chi_m$. Alors $u_m(t, \cdot) = \mathcal{F}^{-1} \varphi_m(t, \cdot)$ est solution pour $t \in [0, T_m[$ de l'équation

$$(I.48) \quad \frac{\partial u_m}{\partial t}(t, x) - (\nu + 2u_m(t, 0)) \frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2}(t, x) = - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (g_m * u_m^2)(t, x).$$

LEMME I.10. $T_m = +\infty$ et, lorsque $m \rightarrow +\infty$ on a pour u_m , $\partial u_m / \partial x$ et $\partial u_m / \partial t$ des estimations a priori identiques à celles du §. I.4.

Les démonstrations sont techniquement identiques et utilisent le théorème de Parseval.

Le passage à la limite (cf. § I.5) quand $m \rightarrow +\infty$ termine la seconde démonstration du théorème d'existence.

REMARQUE I.2. Il est intéressant pour la suite (cf. § II.1) de remarquer que les fonctions u_h , et donc la fonction u , vérifient des estimations indépendantes de ν . En effet au cours de la démonstration du lemme I.5, nous avons:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_h(t)|^2 + \nu \left| \frac{\partial u_h}{\partial x}(t) \right|^2 + 2 \int_{\mathbf{R}} (u_h(t, 0) - u_h(t, x)) \left(\frac{\partial u_h}{\partial x}(t, x) \right)^2 dx = 0$$

d'où

$$(I.49) \quad \begin{cases} |u_h(t)|^2 < |u_0|^2, \\ \nu \left\| \frac{\partial u_h}{\partial x} \right\|_{L^2(]0, \infty[\times \mathbf{R})}^2 < \frac{1}{2} |u_0|^2, \\ 2 \int_0^\infty \int_{\mathbf{R}} (u_h(t, 0) - u_h(t, x)) \left(\frac{\partial u_h}{\partial x}(t, x) \right)^2 dx dt < \frac{1}{2} |u_0|^2. \end{cases}$$

Des inégalités analogues pour u sont obtenues par un passage à la limite utilisant la semi-continuité inférieure:

$$(I.50) \quad \begin{cases} |u(t)|^2 < |u_0|^2, \\ \nu \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^2(]0, \infty[\times \mathbf{R})}^2 < \frac{1}{2} |u_0|^2, \\ \int_0^\infty \int_{\mathbf{R}} (u(t, 0) - u(t, x)) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right)^2 dx dt < \frac{1}{4} |u_0|^2. \end{cases}$$

Evidemment des estimations analogues à (I.49) existent pour u_m (§ I.6) et donnent aussi (I.50) à la limite.

I.7. – Un théorème d'existence et d'unicité.

L'étude de la régularité des solutions u de (I.1)-(I.3) sera abordée dans [17]: le problème est de savoir si u est régulière lorsqu'on suppose que la donnée initiale u_0 satisfait à des conditions de régularité supplémentaires. La réponse est affirmative et on arrive ainsi en [17] jusqu'à la régularité C^∞ (à $\nu > 0$ fixé).

Dans ce paragraphe on donne un premier résultat de régularité, ce qui nous permettra d'établir ensuite un résultat d'existence et d'unicité.

THÉORÈME I.2. *Pour $\nu > 0$ fixé, pour u_0 donné avec*

$$(I.50) \quad u_0 \in H^1(\mathbf{R}),$$

$$(I.51) \quad u_0 \gg 0,$$

il existe une solution unique u du problème (I.1), (I.2), (I.3) telle que:

$$(I.52) \quad u \in L^\infty([0, \infty[; H^1(\mathbf{R})), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in L^2([0, \infty[\times \mathbf{R}).$$

DÉMONSTRATION. On commence par l'existence. On utilise le procédé d'approximation du §. I.6, et il s'agit donc d'obtenir des estimations a priori supplémentaires pour u_m .

On multiplie (I.45) par $2\xi^2 \bar{\varphi}_m$ et on intègre en ξ . Compte tenu de la positivité de φ_m (lemme I.8) et de ce que $\chi_m \cdot \bar{\varphi}_m = \bar{\varphi}_m$, on obtient

$$(I.53) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \xi^2 |\varphi_m|^2 d\xi + 8\pi^2 \int \xi^4 (\nu + 2\bar{\varphi}_m(t, 0)) |\varphi_m|^2 d\xi = \\ = 8\pi^2 \int \xi^4 (\varphi_m * \varphi_m) \cdot \bar{\varphi}_m d\xi. \end{aligned}$$

En multipliant par $4\pi^2$ et utilisant le théorème de Parseval on voit que (I.53) est équivalent à

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left| \frac{\partial u_m}{\partial x} \right|^2 + 2(\nu + 2u_m(t, 0)) \left| \frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} \right|^2 = 2 \int \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u_m^2) \cdot \frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} dx = \\ = 4 \int u_m \frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} dx - 4 \int \left(\frac{\partial u_m}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} dx. \end{aligned}$$

Toutes les intégrales ont un sens puisque pour tout t , $\varphi_m(t, \cdot) \in \bigcap_{\nu \geq 0} \mathcal{F}H^\nu(\mathbf{R})$ et donc $u_m(t, \cdot) \in \bigcap_{\nu \geq 0} H^\nu(\mathbf{R})$. La dernière intégrale ci-dessus est évidemment nulle, puisque $\partial u_m / \partial x \rightarrow 0$ quand $|x| \rightarrow \infty$. Finalement il reste

$$(I.54) \quad \frac{d}{dt} \left| \frac{\partial u_m}{\partial x} \right|^2 + 2\nu \left| \frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} \right|^2 + 4 \int (u_m(t, 0) - u_m(t, x)) \left(\frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} \right)^2 dx = 0.$$

Il est facile d'en déduire que

$$(I.55) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_m}{\partial x} \text{ est borné dans } L^\infty([0, \infty[; L^2(\mathbf{R})), \\ \frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} \text{ est borné dans } L^2([0, \infty[\times \mathbf{R}), \end{cases}$$

et le résultat d'existence suit.

Pour l'unicité, supposons qu'il existe deux solutions u , v de (I.1)-(I.3) qui vérifient (I.52), et soit $w = u - v$.

On soustrait membre à membre les équations (I.1) pour u et v et on obtient

$$(I.56) \quad \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[\nu + 2(u(t, 0) - u(t, x)) \right] \frac{\partial w}{\partial x} \right\} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (w(t, 0) - w(t, x)) \frac{\partial v}{\partial x} \right\}.$$

On rappelle que $H^1(\mathbf{R}) \subset L^\infty(\mathbf{R})$ (cf. plus précisément (I.33)). Alors $u, v, w \in L^\infty([0, \infty[\times \mathbf{R})$. En multipliant (I.56) par $2w$ et en intégrant en x on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |w|^2 + 2\nu \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right|^2 &\leq -2 \int (w(t, 0) - w(t, x)) \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx < \\ &\leq 4 |w|_{L^\infty(\mathbf{R})} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right| \\ &\leq \text{par (I.33)} \\ &\leq 4\sqrt{2} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| |w|^{\frac{1}{2}} \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right|^{\frac{3}{2}} \\ &\leq (\text{par l'inégalité de Young}) \\ &\leq \nu \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right|^2 + c \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|^4 |w|^2. \end{aligned}$$

Finalement

$$\frac{d}{dt} |w|^2 \leq \sigma(t) |w|^2,$$

où $\sigma(t) = c|(\partial v/\partial x)(t, \cdot)|^4$ est sommable, et $w(0, \cdot) = 0$. L'unicité ($w \equiv 0$) découle alors de l'inégalité de Gronwall. ■

REMARQUE I.3. Par passage à la limite inférieure dans (I.54), on obtient pour u des estimations indépendantes de ν :

$$(I.57) \quad \left| \frac{\partial u}{\partial x}(t, \cdot) \right|^2 + 2 \int_0^t [\nu + (u(t, 0) - u(t, x))] \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx ds < \left| \frac{du_0}{dx} \right|^2.$$

Principe du maximum.

Nous démontrons à présent le principe du maximum, i.e. (I.9) (I.10), qui est valable sous les seules hypothèses du théorème I.1.

Pour u_0 donné dans $L^2(\mathbf{R})$, $u_0 \gg 0$ (cf. (I.4), (I.5)) et pour tout entier m , on considère $u_{0m} = \mathcal{F}^{-1}(\chi_m \mathcal{F} u_0)$. Il est clair que $u_{0m} \in H^1(\mathbf{R})$, $u_{0m} \gg 0$ et aussi

$$(I.58) \quad |u_{0m}|_{L^\infty(\mathbf{R})} = u_{0m}(0) = \int \chi_m \hat{u}_0(\xi) d\xi \leq \int \hat{u}_0(\xi) d\xi = u_0(0) = |u_0|_{L^\infty(\mathbf{R})}.$$

Pour tout m , il existe donc une fonction u_m unique (différente de celle considérée au §. I.6), qui vérifie (I.1), (I.2), (I.52) et

$$(I.59) \quad u_m(0, \cdot) = u_{0m}(\cdot).$$

On établit aisément pour u_m des estimations a priori analogues à celles des lemmes I.5 et I.6.

Il existe une suite $m' \rightarrow \infty$, telle que $u_{m'} \rightarrow u$ dans les topologies convenables, u solution de (I.1)-(I.3).

A présent pour m fixé, l'équation (I.1) peut s'écrire

$$(I.60) \quad \frac{\partial u_m}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_m \frac{\partial u_m}{\partial x} \right) = 0$$

où

$$\alpha_m = \nu + 2(u_m(t, 0) - u_m(t, x)).$$

On remarque comme ci-dessus que u_m et donc $\alpha_m \in L^\infty([0, \infty[\times \mathbf{R})$. On peut considérer (I.60) comme une équation linéaire en u_m , et le principe du maximum usuel donne alors

$$|u_m|_{L^\infty([0, \infty[\times \mathbf{R})} \leq |u_{0m}|_{L^\infty(\mathbf{R})} \leq |u_0|_{L^\infty(\mathbf{R})}.$$

D'où, à limite $m' \rightarrow \infty$,

$$|u|_{L^\infty([0, \infty[\times \mathbf{R})} \leq |u_0|_{L^\infty(\mathbf{R})}. \quad \blacksquare$$

CHAPITRE II

RESULTATS D'EXISTENCE A VISCOSITE NULLE ($\nu = 0$)

Nous abordons à présent l'étude de l'existence de solutions de (I.1)-(I.3) lorsque $\nu = 0$. On montre aux §. II. 1 et II.2 l'existence de solutions faibles du problème, et au §. II.3 on montre que ce système ne possède pas de solution très régulière (C^4 en x et t par exemple).

II.1. - Résultats d'existence et estimations à priori ($\nu \rightarrow 0$).

Pour $\nu > 0$, nous désignons désormais par u_ν une solution de (I.1)-(I.3) donnée par le théorème I.1 ou I.2. Le comportement de u_ν , lorsque $\nu \rightarrow 0$, est précisé par le théorème II.1 qui permet aussi de donner un résultat d'existence relatif au problème (I.1), (I.2), (I.3) à viscosité nulle.

THÉORÈME II.1. *Les hypothèses faites sont*

$$(II.1) \quad u_0 \in L^\infty(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$$

$$(II.2) \quad u_0 \gg 0.$$

Soit $\{u_\nu\}_{\nu > 0}$ la famille des solutions données par le théorème I.1; il existe une suite $\nu' \rightarrow 0$ et une fonction u telles que

$$(II.3) \quad u_{\nu'} \rightarrow u \quad \text{dans } L^\infty([0, \infty[; L^2(\mathbf{R})) \text{ et } L^\infty([0, \infty[\times \mathbf{R})$$

faibles-étoile,

$$(II.4) \quad u \in L^\infty([0, \infty[; L^2(\mathbf{R})) \cap L^\infty([0, \infty[\times \mathbf{R}),$$

$$(II.5) \quad u(t, \cdot) \gg 0, \quad \forall t \geq 0,$$

$$(II.6) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - 2 \frac{\partial}{\partial x} \left[(u(t, 0) - u(t, x)) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right] = 0,$$

$$(II.7) \quad u(0, x) = u_0(x),$$

$$(II.8) \quad \|u\|_{L^\infty([0, \infty[\times \mathbf{R})} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbf{R})},$$

$$(II.9) \quad \int_0^\infty \int_{\mathbf{R}} (u(t, 0) - u(t, x)) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right)^2 dx dt \leq \frac{1}{4} \|u_0\|^2.$$

Le choix de l'hypothèse (II.1) est essentiel. La démonstration du théorème II.1 résulte d'une part de la remarque I.2 reprise dans le lemme II.1 (et de (I.9) et (I.10) qui nous donnent une majoration de u_ν pour la norme uniforme); elle résulte d'autre part du lemme II.2 suivant, qui donne une estimation de $\partial u_\nu / \partial t$ également indépendante de ν .

LEMME II.1. *Lorsque $\nu \rightarrow 0$, les u_ν demeurent dans des ensembles bornés de $L^\infty([0, \infty[; L^2(\mathbf{R}))$ et de $L^\infty([0, \infty[\times \mathbf{R})$; $\sqrt{\nu}(\partial u_\nu / \partial x)$ demeure dans un ensemble borné de $L^2([0, \infty[\times \mathbf{R})$ et enfin*

$$(II.10) \quad \int_0^\infty \int_{\mathbf{R}} (u_\nu(t, 0) - u_\nu(t, x)) \left(\frac{\partial u_\nu}{\partial x}(t, x) \right)^2 dx dt < C.$$

LEMME II.2 *Lorsque $\nu \rightarrow 0$,*

$$\frac{\partial u_\nu}{\partial t} \text{ demeure dans un ensemble borné de } L^2([0, \infty[; H^{-1}(\mathbf{R})).$$

DÉMONSTRATION. Dans l'équation (I.1) nous écrivons

$$\frac{\partial u_\nu}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u_\nu}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (u_\nu(t, 0) - u_\nu) \frac{\partial u_\nu}{\partial x} \right\}$$

où le membre de droite demeure borné dans $L^2([0, \infty[; H^{-1}(\mathbf{R}))$.

En effet nous avons:

$$\nu \frac{\partial^2 u_\nu}{\partial x^2} \text{ borné dans } L^2([0, \infty[; H^{-1}(\mathbf{R})),$$

et

$$(u_\nu(t, 0) - u_\nu) \frac{\partial u_\nu}{\partial x} \text{ borné dans } L^2([0, \infty[\times \mathbf{R}). \quad \blacksquare$$

II.2. — Passage à la limite.

Nous déduisons aisément du lemme II.1 qu'il existe une suite $\nu' \rightarrow 0$ et une fonction u , avec

$$u \in L^\infty([0, \infty[; L^2(\mathbf{R})) \cap L^\infty([0, \infty[\times \mathbf{R})$$

$$\|u\|_\infty < |u_0|_\infty$$

et $u_{\nu'} \rightarrow u$ dans $L^\infty([0, \infty[; L^2(\mathbf{R}))$ et $L^\infty([0, \infty[\times \mathbf{R})$ faible-étoile.

Nous avons aussi:

LEMME II.3. *La suite $v' \rightarrow 0$ peut être choisie en sorte que*

$$(II.11) \quad u_{v'} \rightarrow u \quad \text{dans } L^2(0, T; C^0([-M, +M])) \text{ fort, } \forall T > 0, \forall M > 0.$$

DÉMONSTRATION. Nous utilisons le théorème de compacité de J. A. Dubinskii [14], [15] sous la forme donnée dans J. L. Lions [9] (chap. 1 § 12).

Nous posons:

$$B_0 = C^0([-M, +M])$$

$$B_1 = H^{-1}(-M, +M)$$

$$p_0 = 3, \quad p_1 = 2,$$

$$\mathcal{M}(v) = \left\{ \int_{|x| \leq M} (v(x))^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \int_{|x| \leq M} |v(0) - v(x)| \left(\frac{dv}{dx}(x) \right)^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

et

$$S = \{v | v \in B_0, \mathcal{M}(v) < +\infty\}.$$

Il s'agit de démontrer que l'ensemble

$$(II.12) \quad \mathfrak{B} = \{v | v \in B_0, \mathcal{M}(v) \leq 1\}$$

est relativement compact dans $B_0 = C^0([-M, +M])$. Alors nous serons en mesure de conclure grâce au résultat de compacité mentionné: la suite extraite des $u_{v'}(t, \cdot)$ restreints à $[-M, +M]$ sera relativement compacte dans $L^2(0, T; C^0(-M, +M))$, d'où (II.11).

Nous allons montrer qu'une suite $\{v_m\}$ telle que $\mathcal{M}(v_m) \leq 1$ contient une sous-suite fortement convergente dans $C^0([-M, +M])$.

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(v_m) = & \left\{ \int_{|x| \leq M} (v_m(x))^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} + \\ & + \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{|x| \leq M} \left[\frac{\partial}{\partial x} (v_m(0) - v_m(x)) \sqrt{|v_m(0) - v_m(x)|} \right]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \leq 1. \end{aligned}$$

La suite $\{v_m\}$ est donc dans $L^2(-M, +M)$ et il existe une suite $m' \rightarrow \infty$, telle que

$$v_{m'} \rightarrow v \quad \text{dans } L^2(-M, +M) \text{ faible.}$$

La suite $(\partial/\partial x)[(v_m(0) - v_m)\sqrt{|v_m(0) - v_m|}]$ est également bornée dans $L^2(-M, +M)$; l'inégalité de Poincaré aidant, la suite

$$(v_m(0) - v_m)\sqrt{|v_m(0) - v_m|}$$

est bornée dans $H^1(-M, +M)$ et par conséquent relativement compacte dans $H^{\frac{1}{2}}(-M, +M)$ et dans $C^0([-M, +M])$.

Alors il existe une suite $m' \rightarrow \infty$, telle que

$$(II.13) \quad \begin{cases} v_{m'} \rightarrow v \text{ dans } L^2(-M, +M) \text{ faible,} \\ (v_{m'}(0) - v_{m'})\sqrt{|v_{m'}(0) - v_{m'}|} \rightarrow \psi \text{ dans } C^0([-M, +M]) \text{ fort.} \end{cases}$$

Nous savons que pour $a, b \in \mathbf{R}$,

$$a|a|^{-\frac{1}{2}} - b|b|^{-\frac{1}{2}} < C|a - b|^{\frac{1}{2}}$$

où $C = \text{c.ste}$ indépendante de a et b .

On en déduit que si $\Psi_m = \varphi_m \sqrt{|\varphi_m|}$ converge uniformément vers Ψ , alors $\varphi_m = \Psi_m |\Psi_m|^{-\frac{1}{2}}$ converge uniformément vers $\varphi = \Psi |\Psi|^{-\frac{1}{2}}$ et donc

$$(II.14) \quad \begin{cases} v_{m'}(0) - v_{m'} \rightarrow \Psi |\Psi|^{-\frac{1}{2}} & \text{dans } C^0([-M, +M]) \text{ fort} \\ v_{m'}(0) \rightarrow \lambda = v(0). \end{cases}$$

Ce dernier résultat découle de ce que la suite $v_m(0)$ est bornée, sans quoi $v_m = (v_m - v_m(0)) + v_m(0)$ ne serait pas bornée dans $L^2(-M, +M)$.

De (II.13) et (II.14) on déduit que $\Psi |\Psi|^{-\frac{1}{2}} = \lambda - v$ avec $(\lambda - v)(0) = 0$ d'où $\lambda = v(0)$.

Finalement,

$$(II.15) \quad v_m \rightarrow -\Psi |\Psi|^{-\frac{1}{2}} + v(0) = v \quad \text{dans } C^0([-M, +M]) \text{ fort.}$$

Nous avons donc établi que \mathfrak{B} est relativement compact dans $C^0([-M, +M])$. ■

Appliquons le lemme II.3:

$$(II.16) \quad u_{v'}(\cdot, 0) \rightarrow u(\cdot, 0) \text{ dans } L^2(0, T) \text{ fort,} \quad \forall T > 0$$

$$(II.17) \quad u_{v'}(\cdot, 0) - u_{v'} \rightarrow u(\cdot, 0) - u \text{ dans } L^2(0, T; C^0([-M, +M])) \text{ fort} \\ \forall T > 0, \forall M > 0.$$

(II.10) donne à la limite lorsque $\nu \rightarrow 0$

$$(II.18) \quad \int_0^\infty \int_{\mathbf{R}} (u(t, 0) - u(t, x)) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right)^2 dx dt \leq C.$$

Il n'y a plus aucune difficulté dans l'équation (I.1) lorsque $\nu \rightarrow 0$. A la limite, on trouve:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (u(t, 0) - u) \frac{\partial u}{\partial x} \right\} = 0.$$

On voit facilement que:

$$u_\nu(0, \cdot) = u_0 \rightarrow u(0, \cdot) = u_0 \quad \text{dans } H^{-1}(\mathbf{R})$$

et par conséquent le théorème II.1 est complètement démontré. ■

REMARQUE II.1. Si on suppose que $u_0 \in H^1(\mathbf{R})$, alors les conclusions du théorème II.1 peuvent être précisées en remplaçant (II.3), (II.4) par

$$(II.3') \quad u_\nu \rightarrow u \quad \text{dans } L^\infty([0, \infty[; H^1(\mathbf{R})) \text{ faible étoile}$$

$$(II.4') \quad u \in L^\infty([0, \infty[; H^1(\mathbf{R})).$$

C'est une conséquence immédiate de la remarque I.3. ■

II.3. - Perte de régularité.

Le théorème II.1 fournit un résultat d'existence de solutions faibles lorsque les conditions (II.1) (II.2) sont vérifiées. Toutefois il est à noter que la démonstration ne fait apparaître d'autre information sur le gradient des solutions que la majoration (II.9).

Par une étude systématique des propriétés de régularité des solutions de l'équation (II.6) on peut tirer pleinement parti de la forme originale du terme non linéaire et répondre au problème important de la perte de régularité; nous renvoyons à [17].

Nous signalons ici la perte de régularité en démontrant par une méthode extrêmement simple, le résultat suivant:

THÉORÈME II.2. *L'équation (II.6) ne possède pas de solution de type positif dans $C^4([0, \infty[\times \mathbf{R})$.*

DÉMONSTRATION. Supposons que (II.6) possède une solution dans $C^4([0, \infty[+ \mathbf{R})$. On peut alors dériver deux fois en x l'équation et on trouve:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} - 2(u(\cdot, 0) - u) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 8 \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 6 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 = 0.$$

On fait $x = 0$ et on pose

$$D(t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, 0).$$

Comme $u(t, \cdot)$ est de type positif, $D(t) < 0$ et les dérivées d'ordre impair $(\partial u / \partial x)(t, 0)$ et $(\partial^3 u / \partial x^3)(t, 0)$ s'annulent. Il reste

$$\frac{dD(t)}{dt} + 6D^2(t) = 0$$

d'où en intégrant

$$D(t) = \frac{D_0}{1 + 6tD_0}.$$

$D(t)$ tend vers $+\infty$ lorsque t tend vers $-1/6D_0$ ($D_0 < 0$).

Il y a donc contradiction avec l'hypothèse que u est régulière pour tout t . ■

BIBLIOGRAPHIE

- [1] U. FRISCH - M. LESIEUR - A. BRISSAUD, *Qualitative problems in fully developed turbulence: a solution model*, J. of Fluid Mech., **65** (1974), p. 145.
- [2] R. H. KRAICHNAN, *Dynamics of non linear stochastic systems*, J. Math. Phys., **2** (1961), pp. 124-148.
- [3] A. BRISSAUD - U. FRISCH - J. LEORAT - M. LESIEUR - A. MAZURE - A. POUQUET - R. SADOURNY - P. L. SULEM, *Catastrophe énergétique et nature de la turbulence*, Ann. Géophys., **29**, 4 (1973), pp. 539-546.
- [4] M. LESIEUR, *Contributions à l'étude de quelques problèmes en turbulence pleinement développée*, Thèse, Nice, 1973.
- [5] E. HOPF, *The partial differential equation $u_t + uu_x = \nu u_{xx}$* , Comm. Pure Appl. Math., **3** (1950), pp. 201-230.
- [6] O. A. OLEINIK, *Discontinuous solutions of non-linear differential equations*, Amer. Math. Soc. Transl., **2**, **26** (1963), pp. 95-172.
- [7] O. A. OLEINIK, *Uniqueness and stability of the generalized solution of the Cauchy's problem for a quasi-linear equation*, Amer. Math. Soc. Transl., **2**, **33** (1963), pp. 285-290.

- [8] S. N. KRUKOV, *First order quasi-linear equations in several independent variables*, Math. USSR Sbornik, **10**, 2 (1970), pp. 217-243.
- [9] J. L. LIONS, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod-Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- [10] J. L. LIONS - E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes et applications (I) et (II)*, Dunod-Gauthier-Villars, Paris, 1968.
- [11] L. H. LOOMIS, *An introduction to abstract harmonic analysis*, D. Van Nostrand Company, 1953.
- [12] S. BOCHNER, *Lectures on Fourier integrals*, Princeton University Press, 1959.
- [13] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1966.
- [14] J. A. DUBINSKII, *Certaines inégalités intégrales et résolution de systèmes d'équations elliptiques quasi-linéaires dégénérées*, Math. Sbornik, 64, **106** (1964), pp. 458-480.
- [15] J. A. DUBINSKII, *Convergence faible dans les équations elliptiques paraboliques non linéaires*, Mat. Sbornik, 67, **109** (1965), pp. 609-642.
- [16] C. M. BRAUNER - P. PENEL - R. TEMAM, *Sur une équation d'évolution non linéaire liée à la théorie de la turbulence*, C.R.A.S., Paris, 279, série A (1974), pp. 65-68 et 115-118.
- [17] P. PENEL, *Sur une équation d'évolution non linéaire liée à la théorie de la turbulence. - II: Existence et régularité de solutions « fortes », à paraître.*