Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Nikias Stavroulakis

Sur les espaces riemanniens avec bords singuliers

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 2, nº 3 (1975), p. 389-419
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1975_4_2_3_389_0>

Sur les Espaces Riemanniens avec Bords Singuliers.

NIKIAS STAVROULAKIS (*)

Motivation.

Des métriques riemanniennes avec singularités sont utilisées souvent d'une façon plus ou moins implicite. Ainsi la forme $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$, appelée abusivement *métrique euclidienne de R^2 en coordonnées polaires*, est définie sur la variété à bord $[0, +\infty[\times S$ et dégénère sur le bord $\{0\} \times S$. Un cas analogue est celui de la métrique $ds^2 = dr^2 + 2rf(\varphi)\, dr\, d\varphi + r^2 d\varphi^2$ qui définit une nappe logarithmique [5]. De même l'élément linéaire d'une surface développable

$$ds^2 = du^2 + 2du\,dv + \big(1 + u^2\sigma^2(v)\big)\,dv^2\,, \qquad \sigma(v) \neq 0\,,$$

considéré, par exemple, sur $R \times R$, dégénère sur $\{0\} \times R$.

Dans le présent article nous abordons des situations de ce genre en nous plaçant à un point de vue général qui consiste à envisager les problèmes liés à la dégénérescence d'une métrique riemannienne sur un ensemble fermé rare.

Notations.

$\mathcal{V}_m$ est une variété C^r connexe est paracompacte de dimension m. Nous supposons toujours $r \geqslant 4$ à moins de mention expresse. Par $\mathcal{T}_v$ (resp. $\mathcal{T}$) on désigne l'espace tangent en $v \in \mathcal{V}_m$ (resp. le fibré tangent à $\mathcal{V}_m$). Un champ C^{r-1} de tenseurs covariants symétriques de degré 2, donné sur $\mathcal{V}_m$, est noté g. La forme bilinéaire correspondante en $v \in \mathcal{V}_m$ est notée g_v ou $g_v(\xi, \xi')$ avec $\xi \in \mathcal{T}_v$, $\xi' \in \mathcal{T}_v$. D'autre part U_g^+ (resp. S_g^+) désigne l'ensemble

(*) Indirizzo dell'A.: U.E.R. des Sciences de Limoges, 87100 Limoges.
Pervenuto alla redazione il 10 Gennaio 1974.

maximal des points de $\mathcal{V}_m$ tels que g_v soit définie positive (resp. tels que $g_v(\xi, \xi) \geqslant 0$, $\forall \xi \in \mathcal{T}_v$) pour tout $v \in U_g^+$ (resp. pour tout $v \in S_g^+$). L'ensemble U_g^+ est supposé non vide et non identique à $\mathcal{V}_m$. Un chemin de $\mathcal{V}_m$ sera dit *admissible* s'il est C^1 par morceaux. Une partie Y de $\mathcal{V}_m$ sera dite *connexe par arcs admissibles* si, pour tout couple de points u et v de Y, il existe un chemin admissible $\varphi: [a, b] \to \mathcal{V}_m$ tel que $\varphi([a, b]) \subset Y$, $\varphi(a) = u$ et $\varphi(b) = v$.

1. – Préliminaires.

Il est évident que U_g^+ est une partie ouverte de $\mathcal{V}_m$. D'autre part, g_v étant définie négative sur le complémentaire de S_g^+, il s'ensuit que S_g^+ est une partie fermée de $\mathcal{V}_m$.

Les composantes connexes de U_g^+ constituent un ensemble fini ou infini dénombrable de parties ouvertes de $\mathcal{V}_m$. Soient U l'une des composantes connexes de U_g^+, $\mathcal{F}$ la frontière de U. Puisque $U \subset S_g^+$ et que S_g^+ est fermé, il s'ensuit $\overline{U} = U \cup \mathcal{F} \subseteq S_g^+$, donc g_v est semi-définie positive sur $\mathcal{F}$, c'est-à-dire que g dégénère sur $\mathcal{F}$. Nous allons nous occuper des singularités qui en résultent.

Tout d'abord $\overline{U}$ étant déterminé par le champ g lui-même, cette dégénérescence conduit à introduire un espace topologique approprié moyennant $\overline{U}$ et g.

Comme $\overline{U} \subseteq S_g^+$, si $\varphi: [a, b] \to \overline{U}$, $a < b$, est un chemin admissible, $g(\varphi'(t), \varphi'(t))$ n'a aucune valeur négative pour $a \leqslant t \leqslant b$, donc l'intégrale $\int_a^b \sqrt{g(\varphi'(t), \varphi'(t))}\, dt$ a un sens dans le corps des réels et s'appellera la g-mesure du chemin φ.

L'ouvert U étant connexe par arcs admissibles, soit G la partie maximale de $\overline{U}$ qui contient U et qui est connexe par arcs admissibles. Pour tout couple de points u et v de G, soit $e(u, v)$ la borne inférieure des g-mesures des chemins admissibles de G qui joignent u à v. Il est évident que e est un écart fini [1] sur G et détermine en conséquence une relation d'équivalence

$$u \equiv v (\mathrm{mod}\, \varrho) \Leftrightarrow (u, v) \in G \times G \quad \text{et} \quad e(u, v) = 0\,.$$

La fonction $\bar{e}$, qui résulte de e par passage au quotient, est une distance sur l'ensemble G/ϱ *qui sera désormais muni de la topologie d'espace métrique correspondante.* Mais alors la restriction à U de l'application canonique $G \to G/\varrho$ est un isomorphisme. Si l'on considère le complémentaire L de U dans G, nous pouvons donc identifier $G/\varrho = (U \cup L)/\varrho$ à $U \cup L/\varrho$ et, prenant la restriction de g à G, introduire le couple

$$\left(\frac{G}{\varrho}, g\right) = \left(U \cup \frac{L}{\varrho}, g\right)$$

qui sera appelé *un espace riemannien ayant* L/ϱ *comme bord singulier.* Cette définition laisse de côté le complémentaire de G dans $\overline{U}$. Nous verrons plus loin dans quel sens on peut en tenir compte.

La topologie d'espace métrique que nous venons de définir sur $(U \cup L)/\varrho$ *est en général distincte de la topologie quotient de* $(U \cup L)/\varrho$, c'est-à-dire de la topologie la plus fine rendant continue l'application canonique de l'espace topologique $U \cup L$, sous-espace de $\mathcal{V}_m$, sur $(U \cup L)/\varrho$. Toutefois ces deux topologies sont parfois comparables et même identiques dans certains cas simples. C'est pourquoi nous allons aborder en premier lieu quelques problèmes relatifs à l'espace topologique quotient X/ϱ qui résulte d'un espace topologique X par identification des points d'une partie fermée rare $F \subset X$. Le cas le plus intéressant est celui où X est la variété $\mathcal{V}_m$. Si F_n est une sous-variété propre fermé C^r, $r \geqslant 1$, de $\mathcal{V}_m$ de dimension $n < m - 1$, l'espace topologique quotient engendré par identification des points de F_n est homéomorphe à un espace topologique quotient résultant de l'identification des points du bord d'une variété à bord. On se ramène ainsi au cas où $n = m - 1$, mais les problèmes qui s'y rattachent présentent des aspects différents suivant que F_{m-1} est à un côté ou à deux côtés dans $\mathcal{V}_m$.

En deuxième lieu nous considérons l'espace métrique $(U \cup L)/\varrho$ dans ses rapports avec l'espace topologique quotient $(U \cup L)/\varrho$. Parmi les résultats obtenus il convient de signaler le suivant: *Si la frontière* $\mathcal{F}$ *de* U *est compacte et si elle est tout entière une classe d'équivalence suivant* ϱ, *la topologie d'espace métrique de* $(U \cup L)/\varrho = (U \cup \mathcal{F})/\varrho$ *et sa topologie quotient sont identiques.*

En troisième lieu considérant un espace riemannien avec bord singulier $(U \cup L/\varrho, g)$, nous introduisons les géodésiques comportant des points singuliers, c'est-à-dire des points de L/ϱ. *Si l'on se donne deux points quelconques* $z \in U \cup L/\varrho$ *et* $z' \in U \cup L/\varrho$, *est-ce qu'il existe une telle géodésique* (*ou éventuellement une géodésique ordinaire*) *joignant* z *à* z' *et ayant pour longueur la distance* $\bar{e}(z, z')$? On verra *qu'il est possible de donner des conditions suffisantes pour que la réponse à cette question soit affirmative.*

En quatrième lieu nous considérons une classe particulière d'espaces riemanniens avec bord singulier. Ce sont les espaces pour lequels $g_v(\xi, \xi)$ est identiquement nulle en tout point $v \in L$, donc aussi en tout point $v \in \mathcal{F}$. Les difficultés relatives aux problèmes qui s'y rattachent sont de deux sortes: D'une part si l'on considère une composante connexe $\mathcal{K}$ de L, l'annulation de g n'implique pas nécessairement que $\mathcal{H}$ fait partie d'une classe d'équivalence suivant ϱ. D'autre part, si l'on se donne un ouvert connexe U, il ne sera pas en général possible de construire un champ g défini positif sur U et s'annulant identiquement sur $\mathcal{F}$. Dans le cas particulier où U est le complémentaire d'une sous-variété C^r connexe F, ces deux difficultés disparaissent; l'espace obtenu $(U \cup F/\varrho, g)$ admet F/ϱ comme singularité ponctuelle unique. On verra que la construction est encore possible dans des cas où $\mathcal{F}$ est de forme plus compliquée.

2. – Sur la topologie quotient résultant de l'identification des points d'un fermé rare.

Tous les espaces quotient de ce paragraphe sont munis de leur topologie quotient naturelle.

PROPOSITION 2.1. *Soient X un espace localement compact et paracompact, F une partie fermée rare non vide de X. Dans X on considère la relation d'équivalence ϱ dont les classes sont le fermé F et les points du complémentaire $X - F$ de F dans X. L'espace quotient X/ϱ, qui s'obtient ainsi par identification des points de F, est localement compact si, et seulement si, F est compact.*

DÉMONSTRATION. Soit $f\colon X \to X/\varrho$ l'application canonique. X/ϱ étant évidemment séparé, il sera localement compact si, et seulement si, $f(F)$ possède dans X/ϱ un voisinage compact.

Nous montrons d'abord que la condition de l'énoncé est nécessaire. Supposons donc que $f(F)$ possède un voisinage compact W et considérons un recouvrement (A_ι) de F par des ouverts de X relativement compacts contenus dans $f^{-1}(W)$. Comme $\big(X - F, (A_\iota)\big)$ est un recouvrement ouvert de X, il existe un autre recouvrement ouvert $\big(B, (B_i)\big)$ plus fin et localement fini et tel que $B \subset X - F$. *Supposons que F ne soit pas compact.* Alors (B_i) ne contient aucun recouvrement fini de F. Étant donné d'ailleurs que chaque ouvert de la famille (B_i) ne peut être rencontré que par un nombre fini d'ouverts de la même famille, il est possible d'extraire de (B_i) une suite $B\nu_1, B\nu_2, \ldots, B\nu_j, \ldots$ telle que, pour tout $j \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, $B\nu_j \cap F \neq \emptyset$ et que $B\nu_j$ ne rencontre pas la réunion $B\nu_1 \cup B\nu_2 \cup \ldots \cup B\nu_{j-1}$. Puisque F est rare, nous pouvons choisir dans chaque $B\nu_j$ un compact $K\nu_j$ ne rencontrant pas F. Les compacts de la suite $K\nu_1, K\nu_2, \ldots, K\nu_j, \ldots$ sont disjoints deux à deux et leur réunion Y est un fermé *non compact* ne rencontrant pas F. La restriction de f à $X - F$ étant un homéomorphisme, $f(Y)$ est un fermé contenu dans W et ne rencontrant pas $f(F)$ et, comme W est compact, $f(Y)$ doit aussi être compact, ce qui est impossible puisque $f(Y)$ est homéomorphe à Y. Cette contradiction prouve que F est compact.

La condition de l'énoncé est aussi suffisante. En effet, si F est compact, il possède dans X un voisinage compact K et l'image $f(K)$ de K dans l'espace séparé X/ϱ est aussi compacte. Cela prouve notre assertion puisque $f(K)$ est un voisinage de $f(F)$ dans X/ϱ.

Remarque. La proposition peut être en défaut lorsque le fermé F n'est pas rare. Si l'on considère, par exemple, dans R^2, le fermé $F: x_1^2 + x_2^2 \geqslant 1$, qui n'est pas compact, l'espace quotient correspondant R^2/ϱ est compact.

Corollaire 2.1.1. *Soient X un espace localement compact et paracompact, U une partie ouverte de X, $\mathcal{F}$ la frontière de U. Dans $\overline{U} = U \cup \mathcal{F}$ on considère la relation d'équivalence ϱ dont les classes sont $\mathcal{F}$ et les points de U. L'espace topologique quotient $\overline{U}/\varrho$ est localement compact si, et seulement si, $\mathcal{F}$ est compacte.*

Remarque. *Soit encore X un espace localement compact et paracompact. Si U est un ouvert de X dont la frontière $\mathcal{F}$ n'est pas compacte, son adhérence $\overline{U} = U \cup \mathcal{F}$ possède dans X un système fondamental de voisinages à frontières non compactes.*

En effet, quelque soit le voisinage W de $\mathcal{F}$, on peut considérer un recouvrement localement fini (A_ι) de $\mathcal{F}$ par des ouverts relativement compacts de X et tels que $\bigcup A_\iota \subset W$. Nous pouvons ensuite extraire de (A_ι) une suite $A\nu_1, A\nu_2, \ldots, A\nu_j, \ldots$ telle que $A\nu_j \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$ et que $A\nu_j$ ne rencontre pas $A\nu_1 \cup A\nu_2 \cup \ldots \cup A\nu_{j-1}$. Pour tout $j \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, soit $K\nu_j$ un compact contenu dans $A\nu_j \cap (X - \overline{U})$. La réunion $Y = \bigcup_{j=1}^{\infty} K\nu_j$ est un fermé non compact contenu dans $(\bigcup A_\iota) \cap (X - \overline{U})$. Comme la frontière de $(\bigcup A_\iota) \cap (X - Y) \cap \cap (X - \overline{U})$ contient la frontière de Y qui n'est pas compacte, il s'ensuit que $((\bigcup A_\iota) \cap (X - Y)) \cup \overline{U}$ est un voisinage de $\overline{U}$ à frontière non compacte contenue dans $W \cup \overline{U}$.

Corollaire 2.1.2. *Soient X un espace localement compact et paracompact, U une partie ouverte de X, $(\mathcal{F}_i)$ une partition localement finie de la frontière $\mathcal{F}$ de U en parties fermées. Dans $\overline{U} = U \cup \mathcal{F}$ on considère la relation d'équivalence ϱ dont les classes sont les ensembles $\mathcal{F}_i$ et les points de U. L'espace quotient $\overline{U}/\varrho$ est localement compact si et seulement si tous les fermés $\mathcal{F}_i$ sont compacts.*

Corollaire 2.1.3. *Soient X un espace localement compact et $(K_i)_{i \in I}$ une famille de compacts de X jouissant de la propriété suivante. Il existe une famille $(U_i)_{i \in I}$ d'ensembles ouverts de X deux à deux disjoints et tels que*

$K_i \subset U_i$ pour tout $i \in I$. Dans X on considère la relation d'équivalence ϱ dont les classes sont les compacts K_i et les points du complémentaire de $\bigcup_{i\in I} K_i$ dans X. Alors l'espace quotient X/ϱ est localement compact.

Identification des points de la section nulle d'un fibré vectoriel.

Etant donné un fibré vectoriel $Y \xrightarrow{p} A \xrightarrow{i} Y$ à groupe Θ_q (groupe orthogonal de transformations de R^q), les images d'un point $y \in Y$, relativement aux homéomorphismes admissibles, sont de la forme $(p(y), \xi) \in A \times R^q$. Comme la norme euclidienne $\|\xi\|$ reste invariante par les changements admissibles, il convient d'introduire la fonction $d(y, p(y)) = \|\xi\|$ qui représente intuitivement la « distance » de y à la section nulle A. Étant donné un nombre positif ε, soit Y_ε (resp. A_ε) l'ensemble des $y \in Y$ pour lesquels $d(y, p(y)) \geqslant \varepsilon$ $\big($resp. $d(y, p(y)) = \varepsilon\big)$. La restriction de p à A_ε définit un fibré $A_\varepsilon \to A$ à groupe Θ_q et à fibres isomorphes à la sphère $\|\xi\| = \varepsilon$. D'autre part Y_ε est aussi muni canoniquement d'une structure fibrée

$$Y_\varepsilon \xrightarrow{p_\varepsilon} A_\varepsilon \xrightarrow{i} Y_\varepsilon\,, \qquad \big(pp_\varepsilon(y) = p(y),\ \forall y \in Y_\varepsilon\big)\,,$$

à groupe Θ_q et à fibres isomorphes à $R^q - B^q_\varepsilon$, en désignant par B^q_ε la boule $\|\xi\| < \varepsilon$.

Proposition 2.2. *Soit, dans Y (resp. dans Y_ε), ϱ (resp. ϱ_ε) la relation d'équivalence dont les classes sont A (resp. A_ε) et les points du complémentaire de A (resp. de A_ε). Il existe une surjection continue φ_ε: $Y_\varepsilon \to Y$ telle que $\varphi_\varepsilon(A_\varepsilon) = A$ et que sa restriction à $Y - A_\varepsilon$ soit un homéomorphisme, et aussi un homéomorphisme φ: $Y_\varepsilon/\varrho_\varepsilon \to Y/\varrho$ rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
A_\varepsilon \arrow[rrr, "p/A_\varepsilon"] \arrow[dr, phantom] \arrow[ddr, "f_\varepsilon/A_\varepsilon"'] & & & A \arrow[ddl, "f/A"] \\
& Y_\varepsilon \arrow[ul] \arrow[r, "\varphi_\varepsilon"] \arrow[d, "f_\varepsilon"] & Y \arrow[ur] \arrow[d, "f"'] & \\
& \dfrac{Y_\varepsilon}{\varrho_\varepsilon} \arrow[r, "\varphi"] & \dfrac{Y}{\varrho} &
\end{tikzcd}$$

f et f_ε étant les applications canoniques.

DÉMONSTRATION. Soit α un homéomorphisme de la demi-droite $t \geqslant \varepsilon$ sur la demi-droite $u \geqslant 0$, par exemple l'homéomorphisme obtenu en prenant $\alpha(t) = t - \varepsilon$. On obtient une surjection continue $h: R^q - B^q_\varepsilon \to R^q$ en posant $h(t\xi) = \alpha(t)\cdot\xi$ avec $\|\xi\| = 1$. Se rapportant aux homéomorphismes de définition du fibré vectoriel, $\sigma_j: W_j \to U_j \times R^q$, on constate que les surjections

$$\sigma_j^{-1}(i \times h)\sigma_j: \sigma_j^{-1}\big(U_j \times (R^q - B^q_\varepsilon)\big) \to \sigma_j^{-1}(U_j \times R^q)$$

définissent une surjection fibrée continue unique $\varphi_\varepsilon: Y_\varepsilon \to Y$ dont la restriction à $Y_\varepsilon - A_\varepsilon$ est un homéomorphisme. Comme $\varphi_\varepsilon(A_\varepsilon) = A$, $f\varphi_\varepsilon$ est compatible avec la relation d'équivalence ϱ_ε. Par passage aux quotients on obtient l'application $\varphi: Y_\varepsilon/\varrho_\varepsilon \to Y/\varrho$ qui est bijective et qui rend commutatif le diagramme indiqué. Il est évident que la restriction de φ au complémentaire de $f_\varepsilon(A_\varepsilon)$ est un homéomorphisme. Pour prouver que φ est un homéomorphisme de $Y_\varepsilon/\varrho_\varepsilon$ sur Y/ϱ, il suffit donc de montrer que φ^{-1} applique tout ouvert U de Y/ϱ contenant $f(A)$ sur un ouvert de $Y_\varepsilon/\varrho_\varepsilon$. Or $f^{-1}(U)$ est un ouvert de Y contenant A et $(f\varphi_\varepsilon)^{-1}(U) = \varphi_\varepsilon^{-1}\big(f^{-1}(U)\big)$ est un ouvert de Y_ε (pour la topologie induite par celle de Y) contenant A_ε, donc $\varphi^{-1}(U) = f_\varepsilon\big(\varphi_\varepsilon^{-1}(f^{-1}(U))\big)$ est un ouvert de $Y_\varepsilon/\varrho_\varepsilon$.

REMARQUE. Il est évident que Y_ε est muni d'une structure de produit $A_\varepsilon \times [\varepsilon, +\infty[$.

Identification des points d'une sous-variété.

Nous considérons d'abord un cas particulier.

PROPOSITION 2.3. *Soit $\mathcal{V}_q$ une variété topologique connexe et paracompacte de dimension q. Dans le produit topologique $\mathcal{V}_q \times [0, +\infty[$, soit ϱ la relation d'équivalence correspondant à l'identification des points de $\mathcal{V}_q \times \{0\}$. Pour que $(\mathcal{V}_q \times [0, \infty[)/\varrho$ soit une variété topologique (de dimension $q+1$), il faut que $\mathcal{V}_q$ soit compacte et que les groupes d'homotopie $\pi_1(\mathcal{V}_q), \pi_2(\mathcal{V}_q), \ldots, \pi_{q-1}(\mathcal{V}_q)$ se réduisent à l'élément neutre.*

DÉMONSTRATION. Tout d'abord $\mathcal{V}_q$ doit être compacte, d'après la proposition 2.1.

Ensuite on remarque que si $(\mathcal{V}_q \times [0, +\infty[)/\varrho$ est une variété topologique, $\mathcal{V}_q \times \{0\}$ possède dans $\mathcal{V}_q \times [0, +\infty[$ un voisinage U tel que $U - (\mathcal{V}_q \times \{0\})$ soit homéomorphe à $R^{q+1} - \{0\}$. Choisissons un nombre $t_0 > 0$ tel que $\mathcal{V}_q \times [0, t_0[\subset U$. Un élément de $\pi_j(\mathcal{V}_q)$ est la classe d'homotopie d'une application continue $f: (B^j, S^{j-1}) \to (\mathcal{V}_q, v_0)$, $v_0 \in \mathcal{V}_q$, en désignant par

B^j et S^{j-1} la boule $\|\xi\| \leqslant 1$ et la sphère $\|\xi\| = 1$, $\xi \in R^j$. Cette application admet un relèvement trivial $f_{t_0}: v \to (f(v), t_0)$ dans $U - (\mathcal{V}_q \times \{0\})$, par conséquent $f_{t_0} \sim 0$ dans $U - (\mathcal{V}_q \times \{0\})$ pour $j = 1, 2, \ldots, q-1$, et aussi, p étant la première projection, $f = pf_{t_0} \sim 0$, donc $\pi_j(\mathcal{V}_q) = 0$ pour $j = 1, 2, \ldots, q-1$.

REMARQUE. Pour $j \geqslant q$, f_{t_0} définit un élément de $\pi_j(S^q)$ dans $U - (\mathcal{V}_q \times \{0\})$, donc $\pi_j(\mathcal{V}_q)$ est l'image de $\pi_j(S^q)$ par l'homomorphisme associé à p.

COROLLAIRE 2.3. *Soit $\mathcal{V}_q$ une variété C^r, $r \geqslant 1$, connexe et paracompacte de dimension q. Pour que $(\mathcal{V}_q \times [0, \infty[)/\varrho$ soit une variété topologique, il faut que $\mathcal{V}_q$ soit compacte, que les groupes $\pi_1(\mathcal{V}_q)$, $\pi_2(\mathcal{V}_q), \ldots, \pi_{q-1}(\mathcal{V}_q)$ se réduisent à l'élément neutre et que $\pi_q(\mathcal{V}_q)$ soit cyclique infini.*

En effet, $\mathcal{V}_q$ étant différentiable, elle est triangulable, donc une pseudovariété combinatoire. Par conséquent $\mathcal{V}_q \times \{t_0\}$ est homéomorphe à une pseudovariété compacte de R^{q+1} de dimension q. D'après le théorème d'Alexander, une telle pseudovariété est orientable et son groupe d'homologie H_q est cyclique infini. Comme $\pi_j(\mathcal{V}_q) = 0$ pour $j = 1, 2, \ldots, q-1$, le théorème d'isomorphisme de Hurewicz montre que $\pi_q(\mathcal{V}_q) \simeq H_q(\mathcal{V}_q)$, d'où le résultat.

Considérons maintenant une variété $\mathcal{V}_m$ connexe paracompacte C^r, $r \geqslant 0$, de dimension m, et désignons par F_n une sous-variété fermée de $\mathcal{V}_m$ de dimension $n \leqslant m-1$, plate et connexe, et telle que sa topologie interne soit identique à la topologie induite par celle de $\mathcal{V}_m$.

On voit facilmenet que, si $n < m-1$, le complémentaire $\mathcal{V}_m - F_n$ de F_n dans $\mathcal{V}_m$ est un ouvert connexe. Si $n = m-1$, $\mathcal{V}_m - F_n$ possède au plus deux composantes connexes.

Lorsque $n = m-1$, nous dirons que $F_n = F_{m-1}$ est *à deux côtés* ou *à un côté* dans $\mathcal{V}_m$ suivant que le nombre des composantes connexes de $\mathcal{V}_m - F_n$ est 2 ou 1.

Soit $n = m-1$. Nous dirons que F_n est *à un côté au sens large dans* $\mathcal{V}_m$ si $\mathcal{V}_m - F_n$ est connexe et s'il existe un voisinage ouvert connexe de F_n dans lequel F_n est à deux côtés. Les génératrices d'un cylindre, les méridiens et les parallèles ainsi que les noeuds d'un tore sont des sous-variétés à un côté au sens large.

Soit $n = m-1$. Nous dirons que F_n est *à un côté au sens strict dans* $\mathcal{V}_m$, si, dans tout ouvert connexe contenant F_n, le complémentaire de F_n est connexe.

L'espace quotient qui résulte de $\mathcal{V}_m$ par identification des points de F_n sera noté $\mathcal{V}_m/F_n$. Cet espace est localement compact si et seulement si F_n est compacte. En conséquence pour que $\mathcal{V}_m/F_n$ soit une variété topologique, il faut que F_n soit compacte.

Soit $f\colon \mathcal{V}_m \to \mathcal{V}_m/F_n$ l'application canonique. La restriction de f à $\mathcal{V}_m - F_n$ étant un homéomorphisme, il en résulte que, si $n < m-1$, le complémentaire du point $f(F_n)$ dans $\mathcal{V}_m/F_n$ est un ouvert connexe. Lorsque $n = m-1$, ce même complémentaire est connexe si et seulement si F_n est à un côté dans $\mathcal{V}_m$. On voit donc que, dans le cas où F_{m-1} est à un côté au sens large ou à deux côtés dans $\mathcal{V}_m$, $\mathcal{V}_m/F_n$ ne peut pas être une variété topologique.

Lorsque F_{m-1} est à deux côtés dans $\mathcal{V}_m$, nous pouvons aussi considérer séparément les deux composantes connexes W_1 et W_2 de $\mathcal{V}_m - F_{m-1}$ et les deux variétés à bord correspondantes $W_1 \cup F_{m-1}$ et $W_2 \cup F_{m-1}$. L'identification des points de F_{m-1} dans chacune des ces variétés donne lieu aux espaces quotient $(W_1 \cup F_{m-1})/F_{m-1}$ et $(W_2 \cup F_{m-1})/F_{m-1}$.

L'identification des points du bord d'une variété à bord présente un intérêt particulier, parce que, si F_n est C^r avec $1 \leqslant r \leqslant +\infty$, et de dimension strictement inférieure à $m-1$, l'espace quotient $\mathcal{V}_m/F_n$ est homéomorphe à un espace résultant de l'identification des points du bord d'une variété à bord convenable. D'une façon plus précise, on a le résultat suivant.

PROPOSITION 2.4. *Si la sous-variété F_n est C^r, $1 \leqslant r \leqslant +\infty$, et de dimension $n < m-1$, il existe un voisinage ouvert connexe U de F_n donnant lieu aux propriétés suivantes.*

a) La frontière $\mathcal{F}_{m-1}$ de U est une sous-variété C^{r-1} de dimension $m-1$, plate, connexe, et à deux côtés dans $\mathcal{V}_m$.

b) Aux espaces quotient $\mathcal{V}_m/F_n$ et $(\mathcal{F}_{m-1} \cup (\mathcal{V}_m - \overline{U}))/\mathcal{F}_{m-1}$ et aux applications canoniques correspondantes

$$f\colon \mathcal{V}_m \to \frac{\mathcal{V}_m}{F_n} \qquad et \qquad f_1\colon \mathcal{F}_{m-1} \cup (\mathcal{V}_m - \overline{U}) \to \frac{\mathcal{F}_{m-1} \cup (\mathcal{V}_m - \overline{U})}{\mathcal{F}_{m-1}}$$

est associé un homéomorphisme

$$\varphi\colon \frac{\mathcal{F}_{m-1} \cup (\mathcal{V}_m - \overline{U})}{\mathcal{F}_{m-1}} \to \frac{\mathcal{V}_m}{F_n}$$

tel que $\varphi f_1(\mathcal{F}_{m-1}) = f(F_n)$ et que sa restriction au complémentaire de $f_1(\mathcal{F}_{m-1})$ soit C^{r-1}.

DÉMONSTRATION. F_n possède un voisinage ouvert Y muni d'une structure de fibré vectoriel C^{r-1} à groupe Θ_{m-n} (groupe orthogonal de transformations de R^{m-n}) [6]

$$Y \xrightarrow{p} F_n \xrightarrow{i} Y\,.$$

Se rapportant à la proposition 2.2, on définit U par la condition $y \in U \Leftrightarrow \Leftrightarrow d(y, p(y)) < \varepsilon$. C'est un ouvert connexe puisque F_n est aussi connexe. D'autre part la frontière $\mathcal{F}_{m-1}$ de U est munie d'une structure fibrée C^{r-1}, $\mathcal{F}_{m-1} \to F_n$, à groupe Θ_{m-n} et à fibres isomorphes à $S^{m-n-1} = \{\xi \in R^{m-n}, \|\xi\| = 1\}$. Donc $\mathcal{F}_{m-1}$ est une sous-variété plate connexe C^{r-1} de dimension $m-1$. Puisque son complémentaire comporte deux ouverts connexes disjoints, à savoir U et $\mathcal{V}_m - \overline{U}$, il s'ensuit bien que $\mathcal{F}_{m-1}$ est à deux côtés dans $\mathcal{V}_m$.

Nous définissons maintenant $\alpha(t)$ de la façon suivante: Choisissons un nombre $t_0 > \varepsilon$ et considérons la fonction numérique $\beta(t)$ obtenue en posant

$$\beta(t) = \exp\left(\frac{1}{t - t_0}\right) \quad \text{pour } \varepsilon \leqslant t < t_0 \qquad \text{et} \qquad \beta(t) = 0 \quad \text{pour } t \geqslant t_0 .$$

La fonction α s'obtient en posant

$$\alpha(t) = t - \varepsilon\beta(t) \exp\left(\frac{1}{t_0 - \varepsilon}\right)$$

et détermine un difféomorphisme C^∞,

$$\alpha\colon [\varepsilon, +\infty[\to [0, +\infty[$$

dont la restriction à $[t_0, +\infty[$ est l'application identique. Par conséquent l'application φ_ε qui s'en déduit est C^{r-1} et se réduit à l'application identique sur Y_{t_0}. Nous pouvons donc définir $\varphi_m\colon \mathcal{F}_{m-1} \cup (\mathcal{V}_m - \overline{U}) \to \mathcal{V}_m$ en posant $\varphi_m(y) = \varphi_\varepsilon(y)$ pour $y \in Y_\varepsilon - Y_{t_0}$ et $\varphi_m(y) = y$ pour tout autre y. Par passage aux quotients, nous obtenons bien un homéomorphisme φ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}_{m-1} \cup (\mathcal{V}_m - \overline{U}) & \xrightarrow{\varphi_m} & \mathcal{V}_m \\
\downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\
\dfrac{\mathcal{F}_{m-1} \cup (\mathcal{V}_m - \overline{U})}{\mathcal{F}_{m-1}} & \xrightarrow{\varphi} & \dfrac{\mathcal{V}_m}{F_n}
\end{array}$$

et répondant aux conditions de l'énoncé.

COROLLAIRE 2.4.1. *Supposons que F_{m-1} soit C^r, $1 \leqslant r \leqslant +\infty$, et à un côté au sens strict dans $\mathcal{V}_m$. Il existe un voisinage Y de F_{m-1} muni d'une structure fibrée $Y \xrightarrow{p} F_{m-1} \xrightarrow{i} Y$ à fibres $R =]-\infty, +\infty[$ et à groupe $\Theta_1 = \{1, -1\}$. La frontière $\mathcal{F}_{m-1}$ de l'ouvert U, défini par $d(y, p(y)) < \varepsilon$, est une variété C^r, revêtement à deux feuillets de F_{m-1}, et Y_ε possède une structure de produit*

$\mathcal{F}_{m-1} \times [\varepsilon, +\infty[$. *En outre il existe un homéomorphisme*

$$\varphi \colon \frac{\mathcal{F}_{m-1} \cup (\mathcal{V}_m - \overline{U})}{\mathcal{F}_{m-1}} \to \frac{\mathcal{V}_m}{F_{m-1}}$$

tel que $\varphi f_1(\mathcal{F}_{m-1}) = f(F_{m-1})$ *et que sa restriction au complémentaire de* $f_1(\mathcal{F}_{m-1})$ *soit* C^r *par rapport à cette structure produit (mais* C^{r-1} *par rapport à la structure* C^r *de départ).*

La démonstration s'obtient en prenant $t_0 > \varepsilon$ et définissant d'abord β,

$$\beta(t) = \exp\left(\frac{1}{t - t_0}\right) \text{ pour } \varepsilon \leqslant t < t_0\,, \quad \beta(t) = 0 \text{ pour } t \geqslant t_0$$

$$\beta(t) = \exp\left(-\frac{1}{t + t_0}\right) \text{ pour } -t_0 < t \leqslant -\varepsilon\,, \quad \beta(t) = 0 \text{ pour } t \leqslant -t_0,$$

et ensuite α,

$$\alpha(t) = t - \varepsilon\beta(t) \exp\left(\frac{1}{t_0 - \varepsilon}\right) \text{ pour } t \geqslant \varepsilon$$

$$\alpha(t) = t - \varepsilon\beta(t) \exp\left(-\frac{1}{t_0 - \varepsilon}\right) \text{ pour } t \leqslant -\varepsilon\,.$$

COROLLAIRE 2.4.2. *Supposons que* F_{m-1} *soit* C^r, $1 \leqslant r \leqslant +\infty$ *et à un côté au sens large ou à deux côtés dans* $\mathcal{V}_m$. *Il existe un voisinage* Y *de* F_{m-1} *ayant une structure de produit* C^r *(par rapport à la structure* C^r *de départ)* $F_{m-1} \times]-\infty, +\infty[$. *La sous-variété* $\mathcal{F}_{m-1}$ *est réunion de deux composantes connexes* $F_{m-1} \times \{-\varepsilon\}$ *et* $F_{m-1} \times \{\varepsilon\}$ *et l'on a un homéomorphisme*

$$\varphi \colon \frac{(F_{m-1} \times \{-\varepsilon\}) \cup (F_{m-1} \times \{\varepsilon\}) \cup (\mathcal{V}_m - \overline{U})}{(F_{m-1} \times \{-\varepsilon\}) \cup (F_{m-1} \times \{\varepsilon\})} \to \frac{\mathcal{V}_m}{F_{m-1}}$$

tel que $\varphi f_1[(F_{m-1} \times \{-\varepsilon\}) \cup (F_{m-1} \times \{\varepsilon\})] = f(F_{m-1})$ *et que sa restriction au complémentaire de* $f_1(\mathcal{F}_{m-1})$ *soit* C^r.

REMARQUE. Le cas où F_{m-1} est à deux côtés donne lieu à des considérations concernant séparément chacune des composantes connexes W_1 et W_2 de $\mathcal{V}_m - F_{m-1}$. Supposons, par exemple, que $F_{m-1} \times [0, +\infty[$ soit contenu dans $F_{m-1} \cup W_1$. Si $\mathcal{U}$ est le complémentaire de $F_{m-1} \times [0, \varepsilon]$ dans $F_{m-1} \cup W_1$, nous aurons l'homéomorphisme

$$\varphi \colon \frac{(F_{m-1} \times \{\varepsilon\}) \cup \mathcal{U}}{F_{m-1} \times \{\varepsilon\}} \to \frac{F_{m-1} \cup W_1}{F_{m-1}}\,.$$

PROPOSITION 2.5. *Supposons que la sous-variété* F_{m-1} *soit* C^r, $r \geqslant 1$, *compacte et à deux côtés dans* $\mathcal{V}_m$. *Soit* W *l'une des composantes connexes de* $\mathcal{V}_m - F_{m-1}$. *Pour que l'espace* $(F_{m-1} \cup W)/F_{m-1}$ *soit une variété topologique, il faut que chacun des groupes d'homotopie* $\pi_1(F_{m-1})$, $\pi_2(F_{m-1}), \ldots, \pi_{m-2}(F_{m-1})$ *se réduise à l'élément neutre et que* $\pi_{m-1}(F_{m-1})$ *soit cyclique infini.*

C'est une conséquence immédiate du corollaire 2.3, puisque F_{m-1} possède dans $F_{m-1} \cup W$ un voisinage ayant la structure d'un produit $F_{m-1} \times [0, +\infty[$ de classe C^r.

PROPOSITION 2.6. *Supposons que la sous-variété* F_{m-1} *soit* C^r, $r \geqslant 1$, *compacte et à un côté au sens strict dans* $\mathcal{V}_m$. *Pour que* $\mathcal{V}_m/F_{m-1}$ *soit une variété topologique, il faut que le groupe de Poincaré* $\pi_1(F_{m-1})$ *soit d'ordre* 2, *que chacun des* $\pi_2(F_{m-1}), \ldots, \pi_{m-2}(F_{m-1})$ *se réduise à l'élément neutre et que* $\pi_{m-1}(F_{m-1})$ *soit cyclique infini.*

DÉMONSTRATION. Se rapportant au corollaire 2.4.1, on voit que, pour tout $t \in]0, +\infty[$, $\mathcal{F}_{m-1}(t) = \{y \in Y, d(y, p(y)) = t\}$ est un revêtement à deux feuillets de F_{m-1}. Si $p_t\colon \mathcal{F}_{m-1}(t) \to F_{m-1}$ est la projection canonique, la fibre $p_t^{-1}(v)$, pour tout $v \in F_{m-1}$, est l'ensemble de deux points y_1 et y_2, et l'application $h\colon \mathcal{F}_{m-1}(t) \to \mathcal{F}_{m-1}(t)$, définie par $h(y_1) = y_2$, donc aussi $h(y_2) = y_1$, est un automorphisme de $\mathcal{F}_{m-1}(t)$ tel que $p_t h = p_t$. Si l'on considère un lacet $\sigma\colon [0,1] \to F_{m-1}$, donc un chemin tel que $\sigma(0) = \sigma(1) = v_0$, et les points y_{01} et y_{02} de la fibre $p_t^{-1}(v_0)$, nous pouvons déterminer un relèvement σ_t de σ dans $\mathcal{F}_{m-1}(t)$ en partant de y_{01}. Si l'extrémité de σ_t est le point y_{02}, $h\sigma_t$ est aussi un relèvement de σ d'origine y_{02} et d'extrémité y_{01}. Par conséquent le chemin composé $\sigma_t * h\sigma_t$ est un lacet de $\mathcal{F}_{m-1}(t)$. Si $\mathcal{V}_m/F_{m-1}$ est une variété topologique, il existe un voisinage W de F_{m-1} tel que $W - F_{m-1}$ soit homéomorphe à $R^m - \{0\}$, et nous pouvons choisir un $t > 0$ tel que $\mathcal{F}_{m-1}(t)$ se trouve dans $W - F_{m-1}$. Mais alors $\sigma_t * h\sigma_t \sim 0$ dans $W - F_{m-1}$, donc $p(\sigma_t * h\sigma_t) \sim 0$ ou $\sigma * \sigma \sim 0$ dans F_{m-1}, ce qui prouve que $\pi_1(F_{m-1})$ est d'ordre 2.

Soit $\mathcal{U}(t)$ la composante connexe de $\mathcal{V}_m - \mathcal{F}_{m-1}(t)$ qui ne contient pas F_{m-1}. L'existence de l'homéomorphisme

$$\frac{\mathcal{F}_{m-1}(t) \cup \mathcal{U}(t)}{\mathcal{F}_{m-1}(t)} \to \frac{\mathcal{V}_m}{F_{m-1}}$$

entraîne que $(\mathcal{F}_{m-1}(t) \cup \mathcal{U}(t))/\mathcal{F}_{m-1}(t)$ est une variété topologique, donc, d'après la proposition 2.5, que $\pi_q(\mathcal{F}_{m-1}(t)) = 0$ pour $q = 1, 2, \ldots, m-2$, le groupe $\pi_{m-1}(\mathcal{F}_{m-1}(t))$ étant cyclique infini. Comme $\mathcal{F}_{m-1}(t)$ est un revêtement de F_{m-1}, il existe un isomorphisme $\pi_q(\mathcal{F}_{m-1}(t)) \simeq \pi_q(F_{m-1})$ pour tout $q \geqslant 2$. Par conséquent les groupes $\pi_2(F_{m-1}), \ldots, \pi_{m-2}(F_{m-1})$ se réduisent à l'élément neutre et $\pi_{m-1}(F_{m-1})$ est cyclique infini.

PROPOSITION 2.7. *Soit $n < m-1$, et supposons que F_n soit C^r, $r \geqslant 2$, et compacte. Avec les notations de la proposition 2.4, pour que $\mathcal{V}_m/F_n$ soit une variété topologique, il faut que les conditions suivantes soient remplies:*

a) Les groupes $\pi_1(\mathcal{F}_{m-1}), \pi_2(\mathcal{F}_{m-1}), \ldots, \pi_{m-2}(\mathcal{F}_{m-1})$ se réduisent à l'élément neutre et $\pi_{m-1}(\mathcal{F}_{m-1})$ est cyclique infini.

b) Les groupes $\pi_1(F_n)$, $\pi_2(F_n), \ldots$, $\pi_{m-n-1}(F_n)$ se réduisent à l'élément neutre.

c) $\pi_q(F_n) \simeq \pi_q(\mathcal{F}_{m-1}) + \pi_{q-1}(S^{m-n-1})$ pour tout $q \geqslant m-n$, ce qui entraîne en particulier $\pi_q(F_n) \simeq \pi_{q-1}(S^{m-n-1})$ pour $m-n \leqslant q \leqslant m-2$, donc aussi que $\pi_{m-n}(F_n)$ est cyclique infini.

DÉMONSTRATION. *a*) C'est une conséquence immédiate de la proposition 2.4 et du fait que $\mathcal{F}_{m-1}$ admet dans Y_ε un voisinage ayant la structure d'un produit (voir proposition 2.2, remarque).

b) Considérant le fibré $Y \xrightarrow{p} F_n \xrightarrow{i} Y$ de la proposition 2.4, on voit que la restriction de p à $\mathcal{F}_{m-1}$ définit encore un fibré et il est immédiat que tout lacet ψ de F_n se relève suivant un lacet ψ_1 de $\mathcal{F}_{m-1}$, et puisque $\psi_1 \sim 0$, d'après *a*), on aura $\psi = p\psi_1 \sim 0$ dans F_n, donc $\pi_1(F_n) = 0$.

Comme $\pi_q(\mathcal{F}_{m-1}) = 0$ pour $1 \leqslant q \leqslant m-2$, et $m-n-1 \leqslant m-2$, il s'ensuit $\pi_{m-n-1}(\mathcal{F}_{m-1}) = 0$. Cela prouve que toute fibre de $\mathcal{F}_{m-1}$, isomorphe à S^{m-n-1}, est contractile sur $\mathcal{F}_{m-1}$ à un point. Par conséquent [3]

$$\pi_q(\mathcal{F}_{m-1}, S^{m-n-1}) \simeq \pi_q(\mathcal{F}_{m-1}) + \pi_{q-1}(S^{m-n-1}), \qquad q \geqslant 2 .$$

D'autre part, $\mathcal{F}_{m-1}$ admettant une structure fibrée sur F_n, on a $\pi_q(\mathcal{F}_{m-1}, S^{m-n-1}) \simeq \pi_q(F_n)$, en écrivant S^{m-n-1} au lieu d'une fibre et sans préciser les points de base, parce que $\mathcal{F}_{m-1}$ et F_n sont simplement connexes. Il en résulte

$$\pi_q(F_n) \simeq \pi_q(\mathcal{F}_{m-1}) + \pi_{q-1}(S^{m-n-1}), \qquad q \geqslant 2 .$$

Si $n = 1$, F_n est difféomorphe à une circonférence qui n'est pas simplement connexe contrairement à la condition établie $\pi_1(F_n) = 0$. Par conséquent $n \geqslant 2$. Pour $2 \leqslant q \leqslant m-n-1$ on a $\pi_q(\mathcal{F}_{m-1}) = 0$ et $\pi_{q-1}(S^{m-n-1}) = 0$, donc aussi $\pi_q(F_n) = 0$. D'après ce que nous venons de voir, la relation $\pi_q(F_n) \simeq$ $\simeq \pi_q(\mathcal{F}_{m-1}) + \pi_{q-1}(S^{m-n-1})$ est trivialement vraie pour $2 \leqslant q \leqslant m-n-1$. Il suffit donc de la considérer pour $q \geqslant m-n$. D'autre part $m-n \leqslant q \leqslant m-2$ entraîne $\pi_q(\mathcal{F}_{m-1}) = 0$, donc aussi $\pi_q(F_n) \simeq \pi_{q-1}(S^{m-n-1})$. Le groupe $\pi_{m-n-1}(S^{m-n-1})$ étant cyclique infini, il en est de même de $\pi_{m-n}(F_n)$.

3. – Sur la topologie d'un espace riemannien avec bord singulier.

Revenant aux notions définies dans § 1, considérons un espace riemannien avec bord singulier

$$\left(U \cup \frac{L}{\varrho}, g\right).$$

L'intérêt du bord singulier L/ϱ provient du fait que L n'est jamais vide, donc du fait que U est strictement contenu dans G. Cette assertion s'obtient moyennant la notion suivante.

Soient W un ouvert de $\mathcal{V}_m$ et $\mathcal{H}$ sa frontière. Nous dirons qu'un point $u \in \mathcal{H}$ est accessible à partir de W, s'il existe un chemin admissible φ: $[0, 1] \to \mathcal{V}_m$ tel que $\varphi(0) = u$ et $\varphi(]0, 1]) \subset W$. L'ensemble des points de $\mathcal{H}$ accessibles à partir de W est dense dans $\mathcal{H}$ comme cela résulte d'un raisonnement connu.

Cela dit, considérant la composante connexe choisie U de U_g^+, on voit que, l'intérieur $\mathring{\overline{U}}$ de $\overline{U}$, qui est en général plus large que U, étant connexe, donc aussi connexe par arcs admissibles, il s'ensuit $\mathring{\overline{U}} \subseteq G$. Par conséquent $\mathring{\overline{U}} \cap \mathcal{F} \subset L$.

Soit $F \subseteq \mathcal{F}$ la frontière de $\mathring{\overline{U}}$. Si F n'est pas vide, nous pouvons considérer l'ensemble F_a des points de F accessibles à partir de $\mathring{\overline{U}}$. C'est un ensemble dense dans F et l'on a $F_a \subseteq L$. Si F est vide, $\overline{U}$ est l'ensemble plein, donc $\mathring{\overline{U}} = \overline{U} = \mathcal{V}_m = G$ et $L = \mathcal{F}$. On peut résumer tout cela comme suit

PROPOSITION 3.1. *Si $\overline{U}$ est strictement contenu dans $\mathcal{V}_m$, on a $(\mathring{\overline{U}} \cap \mathcal{F}) \cup \cup F_a \subseteq L$. Si $\overline{U} = \mathcal{V}_m$, on a $L = \mathcal{F}$.*

REMARQUE 1. On peut concevoir des cas tels que F_a soit strictement contenu dans F et que $G = \overline{U}$. Considérons, par exemple, dans R^2, la suite des pavés $[1/2n, 1/(2n-1)] \times [0, 1]$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Le complémentaire de leur réunion dans le demi-plan $x_1 > 0$ est un ouvert U tel que $\overline{U} = G$ bien que $\{0\} \times (]0, 1[)$ soit une partie de sa frontière non contenue dans F_a.

REMARQUE 2. On peut aussi concevoir des cas tels que $G = \mathring{\overline{U}} \cup F_a$ et que G soit strictement contenu dans $\overline{U}$. Pour le voir, il suffit de remplacer la suite précédente par la suite des pavés $[1/2n, 1/(2n-1)] \times [-n, n]$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Aucun point de la droite $x_1 = 0$ n'appartient alors à G.

La relation d'équivalence ϱ,

$$u \equiv v (\operatorname{mod} \varrho) \Leftrightarrow (u, v) \in G \times G, \qquad e(u, v) = 0,$$

nous a permis de définir l'ensemble quotient G/ϱ.

PROPOSITION 3.2. *Soit f_g l'application ensembliste canonique $G \to G/\varrho$. La restriction de f_g à U est un homéomorphisme de U, muni de sa topologie naturelle de sous-espace de $\mathcal{V}_m$, sur le sous-espace U/ϱ de l'espace métrique G/ϱ. En outre, si $u \in U$ et $v \in L$, on a $f_g(u) \neq f_g(v)$.*

DÉMONSTRATION. Comme $r \geqslant 4$, l'introduction de coordonnées normales prouve que $e = \bar{e}$ sur U et que la distance $\bar{e}$ définit la topologie naturelle de U, d'où la première partie de notre assertion. Prenons encore des coordonnées normales $(u^1, u^2, \ldots, u^m)$ d'origine u et un nombre $\varepsilon > 0$ tel que l'adhérence de la boule géodésique $\sum_1^m (u^i)^2 < \varepsilon$ soit contenue dans U. Comme $v \in L$, tout chemin admissible de G joignant u à v rencontre la frontière de cette boule et a en conséquence une g-mesure supérieure à ε, d'où $f_g(u) \neq f_g(v)$.

Considérons maintenant le complémentaire L' de G dans $\overline{U}$. Si $(u, v) \in L' \times L'$ et s'il existe des chemins admissibles $\varphi\colon [a, b] \to L'$ tels que $\varphi(a) = u$ et $\varphi(b) = v$, nous désignerons par $e'(u, v)$ la borne inférieure de leurs g-mesures. La fonction e' n'est pas en général un écart sur L', mais elle définit quand même une relation d'équivalence ϱ',

$$u \equiv v (\operatorname{mod} \varrho') \Leftrightarrow \text{les points } u \text{ et } v \text{ appartiennent à une partie de } L' \text{ connexe par arcs admissibles et } e'(u, v) = 0.$$

Le cas général est celui où la classe d'équivalence de $u \in L'$ suivant ϱ' se réduit à $\{u\}$.

Comme $G \cap L' = \emptyset$, la considération simultanée des ϱ, ϱ' détermine une rélation d'équivalence $\mathfrak{R}$ dans $G \cup L' = \overline{U}$,

$$u \equiv v (\operatorname{mod} \mathfrak{R}) \text{ si, et seulement si, ou bien } u \equiv v (\operatorname{mod} \varrho) \text{ ou bien } u \equiv v (\operatorname{mod} \varrho').$$

Seulement la partie $(U \cup L)/\varrho = U \cup L/\varrho$ de l'ensemble quotient $\overline{U}/\mathfrak{R} = (U \cup L)/\varrho \cup L'/\varrho'$ est munie d'une topologie. L'/ϱ' ne présente pratiquement pas d'intérêt, mais si l'on veut en tenir compte, il convient de dire que $((U \cup L/\varrho) \cup L'/\varrho', g)$ *est un espace riemannien avec un bord singulier comportant deux parties: la partie accessible L/ϱ et la partie inaccessible L'/ϱ'.*

REMARQUE 1. Partant de l'espace topologique $\overline{U}$, sous-espace de $\mathcal{V}_m$, on peut mettre sur $\overline{U}/\mathfrak{R}$ la topologie quotient correspondante. *Nous ne le ferons pas.* Cette topologie n'est pas en général séparée et n'induit pas toujours sur $(U \cup L)/\varrho$ la topologie d'espace métrique déjà introduite.

REMARQUE 2. La topologie de $(U \cup L)/\varrho$ s'obtient moyennant l'écart e qui n'est pas défini pour $(u, v) \in G \times L'$ et $(u, v) \in L' \times L'$. Il serait commode d'introduire, par rapport à la topologie de $\overline{U}$, la limite inférieure de e en un tel point (u, v). La fonction ainsi obtenue

$$e_{\overline{U}}(u, v) = \varliminf_{\substack{(u',v')\in G\times G \\ (u',v')\to(u,v)}} e(u', v')$$

prolonge e, mais elle n'est pas nécessairement un écart. Soient

$$(x, y) \in \frac{G}{\varrho} \times \frac{L'}{\varrho'} \qquad \text{et} \qquad \alpha(x, y) = \inf_{\substack{u\in x \\ v\in y}} e_{\overline{U}}(u, v)\ .$$

Fixant y, on voit que si $\alpha(x, y) < +\infty$ pour un certain point $x \in G/\varrho$, il en sera de même pour tout autre $x \in G/\varrho$. La fonction $\alpha(x, y)$ induit donc une partition de L'/ϱ' en deux ensembles suivant que $\alpha(x, y) < +\infty$ ou $\alpha(x, y) = +\infty$. On pourrait s'en servir pour délimiter les difficultés liées au cas où $L' \neq \emptyset$.

PROPOSITION 3.3. *Si $\overline{U} = \mathcal{V}_m$, ce qui implique $L = \mathcal{F}$, la classe d'équivalence suivant ϱ de tout point $u \in \mathcal{F}$ est une partie fermée de $\mathcal{F}$.*

DÉMONSTRATION. Soient C_u la classe d'équivalence de u et x adhérent à C_u. On considère un voisinage ouvert W de x donnant lieu à une carte admissible $\sigma\colon W \to R^m$ telle que $\sigma(x) = O$. Soit $W_1, W_2, \ldots, W_q, \ldots$ une suite d'ouverts contenus dans W et tels que $\sigma(W_q)$ soit la boule de centre O et de rayon ε_q, avec $\varepsilon_q \to 0$ pour $q \to +\infty$. Soit $u_1, u_2, \ldots, u_q, \ldots$ une suite de points de W telle que $u_q \in W_q$ et $u_q \in C_u$ pour tout q. Quel que soit q, on considère un chemin $\varphi_q\colon [0, 1] \to W_q$ tel que $\sigma\varphi_q([0, 1])$ soit le segment rectiligne joignant O à $\sigma(u_q)$. La g-mesure $l(x, u_q)$ de ce chemin vérifie la condition $e(u, x) \leqslant e(u, u_q) + l(x, u_q) = l(x, u_q)$ et puisque $l(x, u_q) \to 0$ pour $u_q \to x$, il s'ensuit $e(u, x) = 0$ ou $x \in C_u$.

REMARQUE 1. C_u n'est pas toujours connexe. Considérons, par exemple, l'ouvert U obtenu en supprimant de R^2 la demi-droite $(x_1 \geqslant 0, x_2 = 0)$ et la courbe $(x_1 \geqslant 1, x_1 x_2 = 1)$. Soit g un champ défini positif sur U et nul sur le complémentaire de U. Tous les points de ce complémentaire forment une classe d'équivalence suivant ϱ.

REMARQUE 2. On peut concevoir des exemples montrant que la proposition 3.3 n'est pas vraie en général lorsque $\overline{U}$ est strictement contenu dans $\mathcal{V}_m$. Mais on a évidemment le

COROLLAIRE 3.3. *Si un point* $u \in \overset{\circ}{\overline{U}}$ *est adhérent à une classe d'équivalence suivant* ϱ, *il appartient à cette classe.*

La théorie de la dimension permet aussi de formuler la proposition suivante:

Si la dimension de $\mathcal{F}$ *est strictement inférieure à* $m-1$, *on a* $L = \mathcal{F}$ *et la relation d'équivalence* $\mathcal{R}$ *se réduit à* ϱ. *En outre toutes les classes d'équivalence de* ϱ *sont des parties fermées, nécessairement rares, de* $\mathcal{V}_m$.

La nature des singularités du bord de $\big((U \cup L/\varrho) \cup L'/\varrho', g\big)$ dépend d'une part de la façon dont g dégénère sur $\mathcal{F}$, d'autre part de la « pathologie » de $\mathcal{F}$. La dégénérescence sera notamment considérée dans les cas où son comportement peut se définir globalement sans difficulté. En ce qui concerne la frontière $\mathcal{F}$, elle sera souvent une sous-variété ou un ensemble de parties de forme simple de sous-variétés.

La topologie naturelle de $(U \cup L)/\varrho$ est celle d'espace métrique définie par la distance $\bar{e}$. Toutefois, il sera parfois utile de savoir si elle est comparable à la topologie quotient de $(U \cup L)/\varrho$. On peut formuler sur ce sujet quelques résultats partiels.

PROPOSITION 3.4. *Si* L *tout entier est une classe d'équivalence suivant* ϱ, *la topologie quotient de* $(U \cup L)/\varrho$ *est plus fine que sa topologie d'espace métrique.*

DÉMONSTRATION. Comme $(U \cup L)/\varrho = U \cup L/\varrho$ comporte le seul point singulier L/ϱ, il suffit de montrer que toute boule de $(U \cup L)/\varrho$ de centre L/ϱ,

$$B\left(\frac{L}{\varrho}, \varepsilon\right) = \left\{z;\ z \in \frac{U \cup L}{\varrho},\ \bar{e}\left(\frac{L}{\varrho}, z\right) < \varepsilon\right\},$$

est un voisinage de L/ϱ pour la topologie quotient, c'est-à-dire que l'image réciproque V_ε de cette boule par l'application canonique $f_\varrho\colon U \cup L \to (U \cup L)/\varrho$ est un ouvert de $U \cup L$ pour sa topologie de sous-espace de $\mathcal{V}_m$. Nous allons donc démontrer que V_ε est un voisinage de chacun de ses points.

Soit d'abord $v \in L$ et considérons une carte admissible σ de $\mathcal{V}_m$ définie sur un voisinage de v et telle que $\sigma(v) = O \in R^m$. Soient $\bar{B}_\theta\colon |x| \leqslant \theta$ une boule fermée de R^m contenue dans l'image de ce voisinage par σ, $B_\theta\colon |x| < \theta$ la boule ouverte correspondante. Il suffit de montrer que, pour θ suffisamment petit, on a $\sigma^{-1}(B_\theta) \cap (U \cup L) \subset V_\varepsilon$. Prenant un point quelconque $x \in \sigma\big(\sigma^{-1}(B_\theta) \cap U\big)$ et parcourant de x à O le segment rectiligne joignant x à O, on désigne par x_0 le premier point de rencontre avec $\sigma\big(\sigma^{-1}(\bar{B}_\theta) \cap \mathcal{F}\big)$.

On a évidemment $\sigma^{-1}(x_0)\in L$. D'autre part, comme les composantes $g_{ij}(\sigma(u))$ de g, par rapport aux coordonnées locales introduites par σ, sont majorées en valeur absolue, sur $\sigma(\sigma^{-1}(\bar{B}_\theta)\cap \overline{U})$, par un nombre fixe $M>0$, la g-mesure de $\sigma^{-1}(\overline{x_0 x})$ est inférieure à $(\sqrt{m^2 M})\theta=(m\sqrt{M})\theta$.

Puisque $e(v,\sigma^{-1}(x))\leqslant e(v,\sigma^{-1}(x_0))+e(\sigma^{-1}(x_0),\sigma^{-1}(x))$ et que $e(v,\sigma^{-1}(x_0))=0$, il en résulte $e(v,\sigma^{-1}(x))<\varepsilon$ si l'on choisit θ de façon que $(m\sqrt{M})\theta<\varepsilon$. Cela entraîne bien $\sigma^{-1}(B_\theta)\cap(U\cup L)\subset V_\varepsilon$.

Soit maintenant $v\in V_\varepsilon$ mais $v\notin L$, ce qui implique $v\in U$. Prenant

$$0<\varepsilon'<\inf\left\{\bar{e}\left(\frac{L}{\varrho}, f_\varrho(v)\right), \quad \varepsilon-\bar{e}\left(\frac{L}{\varrho}, f_\varrho(v)\right)\right\},$$

la boule ouverte $B(f_\varrho(v),\varepsilon')$ est contenue dans $B(L/\varrho,\varepsilon)$ et ne contient pas le point singulier L/ϱ. Par conséquent il existe un voisinage ouvert V de v tel que $f_\varrho|V$ soit un homéomorphisme et que $f_\varrho(V)\subset B(f_\varrho(v),\varepsilon')$, donc tel que $V\subset V_\varepsilon$.

Proposition 3.5. *Si la frontière $\mathcal{F}$ de U n'est pas compacte, et si l'ensemble L, qui est toujours dense dans $\mathcal{F}$, est une classe d'équivalence suivant ϱ, la topologie quotient de $(U\cup L)/\varrho$ est strictement plus fine que sa topologie naturelle d'espace métrique.*

Démonstration. Puisque $\mathcal{V}_m$ est dénombrable à l'infini, il en est de même des $\overline{U}$ et $\mathcal{F}$. Il existe donc une suite d'ouverts relativement compacts W_n de $\mathcal{V}_m$ formant un recouvrement de $\mathcal{F}$, donc aussi de L, et tels que $\overline{W}_n\subset W_{n+1}$ pour tout n. Considérons d'autre part la suite des boules ouvertes $B(L/\varrho, 1/n)$, $(n=1,2,3,\ldots)$, qui forment un système fondamental de voisinages de L/ϱ pour la topologie d'espace métrique. Chacune d'elles est aussi un voisinage ouvert de L/ϱ pour la topologie quotient, d'après la proposition 3.4. Soit V_n l'image réciproque de $B(L/\varrho, 1/n)$ par l'application canonique f_ϱ. La réunion $Y=\bigcup_{n=1}^{\infty}(W_n\cap V_n)$ est un voisinage ouvert de L ne contenant aucun des V_n. Son image par f_ϱ est donc un voisinage de L/ϱ pour la topologie quotient ne contenant aucune des boules $B(L/\varrho, 1/n)$. Cela prouve la proposition.

Proposition 3.6. *Supposons que $L=\mathcal{F}$ et que $\mathcal{F}$ soit compact. Si $\mathcal{F}$ est une classe d'équivalence suivant ϱ, la topologie d'espace métrique de $(U\cup L)/\varrho=$ $=(U\cup\mathcal{F})/\varrho$ est identique à sa topologie quotient.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que tout voisinage de L/ϱ pour la topologie quotient contient une boule $B(L/\varrho,\varepsilon)$. En d'autres termes il s'agit de montrer que, pour tout voisinage ouvert W de $\mathcal{F}$ dans $U\cup\mathcal{F}=\overline{U}$, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que l'ensemble V_ε des points $v \in \overline{U}$ vérifiant $e(v, v') < \varepsilon$, $\forall v' \in \mathcal{F}$, soit contenu dans W. Nous pouvons prendre $W = \overline{U} \cap Q$, Q étant un voisinage ouvert relativement compact de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{V}_m$. Laissant de côté le cas trivial où $W = \overline{U}$, ce qui n'est d'ailleurs possible que si $\overline{U}$ est compact, la frontière FW de W dans $\overline{U}$ sera un compact contenu dans U.

Soit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_q, \ldots$ une suite de nombres positifs tendant vers zéro et supposons que, quelque soit q, V_{ε_q} ne soit pas contenu dans W. Pour chaque q, nous pouvons donc choisir un point $u_q \in V_{\varepsilon_q}$ appartenant au complémentaire de W dans $U \cup \mathcal{F}$. Soit $v_0' \in \mathcal{F}$ et considérons un chemin admissible $\varphi_q \colon [0, 1] \to U \cup \mathcal{F}$ joignant v_0' à u_q et tel que sa g-mesure soit $\leqslant e(u_q, v_0') + \varepsilon_q$. Comme $e(u_q, v_0') < \varepsilon_q$, cette g-mesure est $< 2\varepsilon_q$. Le chemin choisi rencontre la frontière FW, en conséquence il existe une valeur $t_q \in [0, 1]$ telle que $v_q = \varphi_q(t_q) \in FW$, ce qui donne

$$e(v_q, v_0') \leqslant e(u_q, v_0') < 2\varepsilon_q$$

et prouve que $e(v_q, v_0') \to 0$ pour $q \to \infty$. D'autre part la suite des points v_q a au moins un point limite $v \in FW$, et l'on aura, en vertu de la continuité de e, $e(v, v_0') = 0$, ce qui est impossible puisque $v \notin \mathcal{F}$. Cette contradiction montre qu'il existe un ε_q pour lequel $V_{\varepsilon_q} \subset W$, d'où le résultat.

PROPOSITION 3.7. *Soient $H \subset L$ une classe d'équivalence suivant ϱ, $\overline{H}$ son adhérence et supposons qu'il existe un voisinage ouvert W de $\overline{H}$ dans $\mathcal{V}_m$ tel que $W \cap \mathcal{F} = \overline{H}$. Dans ces conditions, s'il existe une boule ouverte $B(H/\varrho, \varepsilon)$ contenant le seul point singulier H/ϱ, $B(H/\varrho, \varepsilon)$ est aussi un voisinage de H/ϱ pour la topologie quotient. Cette topologie est, sur $B(H/\varrho, \varepsilon)$, plus fine que la topologie d'espace métrique. Elle l'est strictement si $\overline{H}$ n'est pas compacte.*

DÉMONSTRATION. Si V_ε est l'image réciproque de $B(H/\varrho, \varepsilon)$ par f_g, on a $V_\varepsilon \cap L = V_\varepsilon \cap H$. Pour démontrer que V_ε est un ouvert dans $U \cup L$ on procède comme dans la démonstration de la proposition 3.4, mais en faisant attention de choisir le rayon de la boule $\overline{B}_\theta$ suffisamment petit de façon que $\sigma^{-1}(\overline{B}_\theta) \cap \mathcal{F} = \sigma^{-1}(\overline{B}_\theta) \cap \overline{H}$. Cela est possible en vertu de l'hypothèse $W \cap \mathcal{F} = \overline{H}$. Pour montrer que, lorsque $\overline{H}$ n'est pas compacte, la topologie quotient est strictement plus fine que la topologie d'espace métrique, on procède comme dans la démonstration de la proposition 3.5 en utilisant la suite des boules $B(H/\varrho, \varepsilon/n)$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

PROPOSITION 3.8. *Supposons qu'une classe d'équivalence $H \subset L$ suivant ϱ soit un compact possédant dans $\mathcal{V}_m$ un voisinage ouvert Q tel que $Q \cap \mathcal{F} = H$.*

Il existe alors une boule $B(H/\varrho, \varepsilon)$ sur laquelle la topologie quotient et la topologie d'espace métrique sont identiques.

En effet, comme dans la démonstration de la proposition 3 6, supposant que Q soit relativement compact, ce qui est loisible, on voit qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que l'ensemble V_ε des $v \in U \cup L$ vérifiant $e(v, v') < \varepsilon$, $\forall v' \in H$, soit contenu dans Q. L'image de V_ε par l'application canonique est une boule $B(H/\varrho, \varepsilon)$ satisfaisant aux conditions de l'énoncé.

Dans les problèmes concrets, $\mathcal{F}$ est souvent compact et l'on se trouve ainsi dans des cas où les propositions 3.6 et 3.8 peuvent être applicables. Il convient de noter à ce propos la validité du pendant du corollaire 2.1.1.

PROPOSITION 3.9. *Supposons que la frontière $\mathcal{F}$ de U soit tout entière une classe d'équivalence suivant ϱ. Pour que l'espace métrique $\overline{U}/\varrho = U \cup \mathcal{F}/\varrho$ soit localement compact, il faut et il suffit que $\mathcal{F}$ soit compacte.*

DÉMONSTRATION. Désignons par $(\overline{U}/\varrho)_q$ et $(\overline{U}/\varrho)_d$ respectivement les espaces obtenus en munissant $\overline{U}/\varrho$ de la topologie quotient et de la topologie naturelle d'espace métrique. L'application identique du premier sur le deuxième est continue, d'après la proposition 3.4. On a donc les applications continues

$$\overline{U} \xrightarrow{f_\varrho} \left(\frac{\overline{U}}{\varrho}\right)_q \xrightarrow{i} \left(\frac{\overline{U}}{\varrho}\right)_d$$

et cela prouve que, pour tout voisinage W de $\mathcal{F}/\varrho$ dans $(\overline{U}/\varrho)_d$, $f_\varrho^{-1}(W)$ est un voisinage de $\mathcal{F}$ dans $\overline{U}$. Par conséquent, nous pouvons raisonner comme dans la démonstration de la proposition 2.1 et montrer que la condition de l'énoncé est nécessaire. Elle est aussi suffisante, parce que, si K est un voisinage compact de $\mathcal{F}$ dans $\overline{U}$, son image $if_\varrho(K)$ dans l'espace séparé $(\overline{U}/\varrho)_d$ est un voisinage compact de $\mathcal{F}/\varrho$.

COROLLAIRE 3.9. *Supposons que la frontière $\mathcal{F}$ de U admette une partition (K_i) en un nombre fini ou en une infinité dénombrable de parties compactes jouissant de la propriété suivante. Il existe une famille (U_i) de parties ouvertes de $\mathcal{V}_m$ deux à deux disjointes et telles que $K_i \subset U_i$ pour tout $i \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Si chaque K_i est une classe d'équivalence suivant ϱ, l'espace métrique $\overline{U}/\varrho$ est localement compact et isomorphe à l'espace quotient $\overline{U}/\varrho$.*

Les propositions 3.4 et 3.6 permettent de traduire facilement toutes les propositions de § 2 en termes de la topologie d'espace métrique de $\overline{U}/\varrho$. Par exemple les propositions 2.3, 2.5, 2.6, 2.7, restent valables sans aucune modification.

4. – Géodésiques.

Considérant un espace riemannien avec bord singulier $(U \cup L/\varrho, g)$, espace dont la topologie est définie par la distance $\bar{e}$, on voit que la restriction de g à U définit un espace riemannien ordinaire qui sera toujours supposé muni de la connexion symétrique compatible avec g. Un chemin différentiable $t \to u(t) \in U$ est alors une géodésique ordinaire, appelée simplement géodésique, si, moyennant un choix convenable du paramètre t, la dérivée covariante de son vecteur tangent est partout nulle. Mais nous pouvons aussi considérer des géodésiques contenant des points singuliers.

Une courbe $\varphi\colon]a, b] \to U \cup L/\varrho$, $-\infty \leqslant a < b < +\infty$, sera dite *une S_1-géodésique aboutissant à un point singulier,* si $\varphi(]a, b[) \subset U$ et $\varphi(b) \in L/\varrho$ et si la restriction de φ à $]a, b[$ est une géodésique.

De la même façon *une S_1-géodésique issue d'un point singulier* est une courbe $\varphi\colon [a, b[\to U \cup L/\varrho$, $a < b$, telle que $\varphi(]a, b[) \subset U$ et $\varphi(a) \in L/\varrho$ et que la restriction de φ à $]a, b[$ soit une géodésique.

Une S_2-géodésique sera, par exemple, un chemin

$$\varphi\colon [a, b] \to U \cup \frac{L}{\varrho}, \qquad -\infty < a < b < +\infty ,$$

$$\varphi(]a, b[) \subset U , \qquad \varphi(a) \in \frac{L}{\varrho}, \qquad \varphi(b) \in \frac{L}{\varrho},$$

dont la restriction à $]a, b[$ est une géodésique.

D'une façon plus générale, considérons dans $[a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, une partie compacte T totalement discontinue. Le complémentaire $[a, b] - T$ de T comporte une réunion dénombrable d'intervalles ouverts et éventuellement deux intervalles de la forme $[a, \varepsilon_1[$ et $]\varepsilon_2, b]$ ou l'un d'eux. Un chemin $\varphi\colon [a, b] \to U \cup L/\varrho$ sera appelé une S_T-géodésique si $\varphi(t) \in L/\varrho$ pour tout $t \in T$, si $\varphi([a, b] - T) \subset U$ et si la restriction de φ à chaque intervalle de $[a, b] - T$ est une géodésique.

Nous allons chercher à étendre aux S_T-géodésiques le théorème classique qui dit que deux points quelconques d'un espace de Riemann complet peuvent se joindre par une géodésique ayant pour longueur la distance des deux points. En tout cas l'existence de points singuliers ne nous permet pas de raisonner sur un espace riemannien complet au sens habituel.

PROPOSITION 4.1. *Soit $(U \cup L/\varrho, g)$ un espace riemannien avec bord singulier et supposons que L tout entier soit une classe d'équivalence suivant ϱ. Si, par rapport à la distance $\bar{e}$, toute boule fermée contenue dans U est compacte, tout point $z \in U$ peut se joindre au point singulier L/ϱ par une S_1-géodésique ayant pour longueur la distance $l = \bar{e}(z, L/\varrho)$.*

Démonstration. Le résultat s'obtient par une adaptation d'un procédé dû à Hilbert [2].

La distance l est la borne inférieure des g-mesures des chemins admissibles φ: $[a, b] \to U \cup L$ pour lesquels $\varphi(a) = z$ et $\varphi(b) \in L$. Choisissons une suite φ_i: $[a_i, b_i] \to U \cup L$ de tels chemins de façon que la suite correspondante de leurs g-mesures tende vers l. Si t_i est la borne inférieure des $t \in [a_i, b_i]$ pour lesquels $\varphi_i(t) \in L$, on a $l \leqslant \int_a^{t_i} \sqrt{g(\varphi_i'(t), \varphi_i'(t))}\, dt$, par conséquant nous pouvons supposer que $t_i = b_i$. Mais il existe une valeur $c_i \in]a_i, b_i[$ telle que

$$\int_{a_i}^{c_i} \sqrt{g(\varphi_i'(t), \varphi_i'(t))}\, dt = \int_{c_i}^{b_i} \sqrt{g(\varphi_i'(t), \varphi_i'(t))}\, dt\,.$$

Si $\mu_i = \varphi_i(c_i)$ est le point correspondant de U, la distance $\bar{e}(z, \mu_i)$ sera, à partir d'un certain rang, inférieure à $l/2 + \varepsilon$ avec $\varepsilon < l/2$. La boule fermée de centre z et de rayon $l/2 + \varepsilon$ se trouve dans U, par conséquent la suite des μ_i admet au moins un point limite noté $z(\frac{1}{2})$. Puisque

$$\bar{e}\left(z, z\left(\frac{1}{2}\right)\right) \leqslant \frac{l}{2} \quad \text{et} \quad \bar{e}\left(z\left(\frac{1}{2}\right), \frac{L}{\varrho}\right) \leqslant \frac{l}{2}$$

et que

$$l = \bar{e}\left(z, \frac{L}{\varrho}\right) \leqslant \bar{e}\left(z, z\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \bar{e}\left(z\left(\frac{1}{2}\right), \frac{L}{\varrho}\right)$$

il en résulte

$$\bar{e}\left(z, z\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{l}{2} \quad \text{et} \quad \bar{e}\left(z\left(\frac{1}{2}\right), \frac{L}{\varrho}\right) = \frac{l}{2}\,.$$

Posant $z = z(0)$ et $L/\varrho = z(1)$, et raisonnant par récurrence, on obtient, pour tout entier $n > 0$, les points

$$z(0),\ z\left(\frac{1}{2^n}\right) \in U,\ \ldots,\ z\left(\frac{p}{2^n}\right) \in U,\ \ldots,\ z\left(\frac{2^n - 1}{2^n}\right) \in U,\ z(1)\,,$$

avec

$$\bar{e}\left(z\left(\frac{p}{2^n}\right),\ z\left(\frac{q}{2^n}\right)\right) = \frac{|p-q|}{2^n}\, l\,, \qquad (0 \leqslant p \leqslant 2^n,\ 0 \leqslant q \leqslant 2^n)\,.$$

Soient α et β tels que $0 < \alpha < 1$ et $0 < \beta < 1$. Choisissons $p_0/2^{n_0}$, (p_0, n_0 des entiers positifs, $p_0 < 2^{n_0}$), de façon que $\alpha < p_0/2^{n_0}$ et $\beta < p_0/2^{n_0}$, et considérons deux suites $(p_j/2^j)$ et $(q_j/2^j)$ tendant respectivement vers α et β et telles que $p^j/2^j < p_0/2^{n_0}$ et $q_j/2^j < p_0/2^{n_0}$ pour tout j.

Comme

$$\bar{e}\left(z(0), z\left(\frac{p_j}{2^j}\right)\right) = \frac{p_j}{2^j}l \quad \text{et} \quad \bar{e}\left(z(0), z\left(\frac{p_0}{2^{n_0}}\right)\right) = \frac{p_0}{2^{n_0}}l,$$

tous les points $z(p_j/2^j)$ appartiennent à la boule fermée de centre $z(0)$ et de rayon $(p_0/2^{n_0})l < l$, boule qui est contenue dans U. Par conséquent la suite des points $z(p_j/2^j)$ admet un point limite $z(\alpha) \in U$ et ce point est unique, parce que, s'il en existe un autre $z'(\alpha)$, on aura $\bar{e}(z(\alpha), z'(\alpha)) = 0$ en vertu de l'inégalité

$$\bar{e}(z(\alpha), z'(\alpha)) \leqslant \bar{e}\left(z(\alpha), z\left(\frac{p_j}{2^j}\right)\right) + \bar{e}\left(z\left(\frac{p_j}{2^j}\right), z'(\alpha)\right).$$

De la même façon on voit que la suite des points $z(q_j/2^j)$ admet un point limite unique $z(\beta) \in U$.

Étant donné que

$$\bar{e}\left(z\left(\frac{p_j}{2^j}\right), z\left(\frac{q_j}{2^j}\right)\right) = \frac{|p_j - q_j|}{2^j}l,$$

la continuité de la distance $\bar{e}$ entraîne

$$\bar{e}(z(\alpha), z(\beta)) = |\alpha - \beta| l.$$

En raison de cette même continuité, les relations

$$\bar{e}\left(z(0), z\left(\frac{p_j}{2^j}\right)\right) = \frac{p_j}{2^j}l, \quad \bar{e}\left(z\left(\frac{p_j}{2^j}\right), z(1)\right) = \left(1 - \frac{p_j}{2^j}\right)l$$

donnent

$$\bar{e}(z(0), z(\alpha)) = \alpha l, \quad \bar{e}(z(\alpha), z(1)) = (1-\alpha)l.$$

Par conséquent on a finalement

$$\bar{e}(z(\alpha), z(\beta)) = |\alpha - \beta| l$$

quels que soient les réels $\alpha \in [0, 1]$ et $\beta \in [0, 1]$.

Nous avons ainsi déterminé une injection continue

$$\varphi\colon [0, 1] \to U \cup \frac{L}{\varrho}$$

telle que $\varphi([0,1[)\subset U$, $\varphi(0)=z$, $\varphi(1)=L/\varrho$ et que sa restriction à $[0,1[$ satisfasse à la condition

$$\bar{e}(\varphi(t_1),\varphi(t_2))=|t_1-t_2|\,l\,.$$

Cela prouve [4] que la restriction de φ à $[0,1[$ est une géodésique avec longueur d'arc tl.

Remarque. Nous avons supposé que toute boule fermée contenue dans U soit compacte. Toutefois la restriction de g à U n'est pas une métrique riemannienne complète. En effet, choisissons, sur la S_1-géodésique construite, un point $z'\in U$ tel que $\bar{e}(z',L/\varrho)<\bar{e}(z',z)$ et considérons la boule fermée de $U\cup L/\varrho$ de centre z' et de rayon $\bar{e}(z',z)$. L'intersection de U et de cette boule n'est pas compacte.

Corollaire 4.1. *Supposons vérifiées les hypothèses de la proposition* 4.1, *et soient $z\in U$, $z'\in U$. Si $\bar{e}(z,z')\leqslant\bar{e}(z,L/\varrho)$ ou si $\bar{e}(z,z')\leqslant\bar{e}(z',L/\varrho)$, les deux points z et z' peuvent se joindre par une géodésique ayant pour longueur $\bar{e}(z,z')$. Si $\bar{e}(z,z')=\bar{e}(z,L/\varrho)+\bar{e}(z',L/\varrho)$, il existe une S_1-géodésique (ou éventuellement une géodésique) joignant z à z' et ayant encore la longueur $\bar{e}(z,z')$.*

En effet, dans le cas où l'on a, par exemple, $\bar{e}(z,z')\leqslant\bar{e}(z,L/\varrho)$, la démonstration s'obtient sans modification en utilisant des boules fermées de centre z. Lorsque $\bar{e}(z,z')=\bar{e}(z,L/\varrho)+\bar{e}(z',L/\varrho)$, nous prenons le chemin composé de deux S_1- géodésiques, l'une joignant z à L/ϱ, l'autre L/ϱ à z', et de longueurs respectives $\bar{e}(z,L/\varrho)$ et $\bar{e}(L/\varrho,z')$.

Remarque. Le raisonnement n'est plus applicable lorsque

$$\bar{e}(z,z')>\bar{e}\left(z,\frac{L}{\varrho}\right),\quad \bar{e}(z,z')>\bar{e}\left(z',\frac{L}{\varrho}\right)\quad \text{et}\quad \bar{e}(z,z')<\bar{e}\left(z,\frac{L}{\varrho}\right)+\bar{e}\left(z',\frac{L}{\varrho}\right).$$

Proposition 4.2. *Considérons un espace riemannien avec bord singulier $(U\cup L/\varrho,g)$ tel que $L=\mathcal{F}$, et supposons que la frontière $\mathcal{F}$ tout entière soit une classe d'équivalence suivant ϱ. Si toute boule fermée de l'espace métrique $U\cup\mathcal{F}/\varrho$ par rapport à la distance $\bar{e}$, est compacte, deux points quelconques $z\in U\cup\mathcal{F}/\varrho$ et $z'\in U\cup\mathcal{F}/\varrho$ peuvent se joindre par une géodésique ou par une S_1-géodésique ayant la longueur $\bar{e}(z,z')$.*

Remarquons que, puisque le point singulier $\mathcal{F}/\varrho$ possède par hypothèse un voisinage compact, la frontière $\mathcal{F}$ est compacte d'après la proposition 3.9.

En ce qui concerne la démonstration, nous pouvons raisonner comme dans la démonstration de la proposition 4.1 avec la modification suivante:

Supposons $z \in U$, $z' \in U$ (parce que c'est le cas vraiment nouveau), et considérons une suite de chemins

$$\varphi_i\colon [a_i, b_i] \to U \cup \mathcal{F}\,, \qquad \big(\varphi_i(a_i) = z, \varphi_i(b_i) = z',\ a_i < b_i\big)\,,$$

dont les g-mesures tendent vers $\bar{e}(z, z')$. Si $\mathcal{F} \cap \varphi_i(]a_i, b_i[) \neq \emptyset$, soit t_i (resp. t'_i) la borne inférieure (resp. la borne supérieure) des valeurs $t \in]a_i, b_i[$ pour lesquelles $\varphi_i(t) \in \mathcal{F}$. Le chemin φ_i sera alors remplacé par les deux chemins

$$\varphi_i|[a_i, t_i] \quad \text{et} \quad \varphi_i|[t'_i, b_i]\,.$$

COROLLAIRE 4.2. *Supposons que $L = \mathcal{F}$ et qu'il existe une partition localement finie de $\mathcal{F}$ en compacts dont chacun soit une classe d'équivalence suivant ϱ. Si toute boule fermée de $U \cup L/\varrho$, par rapport à $\bar{e}$, est compacte, deux points quelconques, $z \in U \cup \mathcal{F}/\varrho$ et $z' \in U \cup \mathcal{F}/\varrho$, peuvent se joindre par une géodésique ou par une S_j-géodésique (j entier positif convenable) de longueur $\bar{e}(z, z')$.*

S_ϱ-géodésiques. Il convient d'introduire cette notion qui sera notamment exploitée dans le cas où $\mathcal{F}$ est réunion de sous-variétés. Supposons donc que $L = \mathcal{F}$ et que $\mathcal{F}$ soit connexe par arcs admissibles. Soient $z \in U \cup \mathcal{F} = \overline{U}$ et $z' \in \overline{U}$. S'il existe un chemin admissible $\varphi\colon [a, b] \to \overline{U}$, $a < b$, joignat z à z' et tel que

$$\int_a^b \sqrt{g(\varphi'(t), \varphi'(t))}\, dt = e(z, z')\,,$$

nous dirons que $\varphi([a, b])/\varrho$ est une S_ϱ-géodésique joignant $\{z\}/\varrho$ à $\{z'\}/\varrho$, en désignant par $\{z\}$ et $\{z'\}$ les classes d'équivalence des points z et z'. Il est évident que l'intersection de U et d'une S_ϱ-géodésique est formée d'arcs de géodésiques.

5. – Singularités riemanniennes du type P_0.

Soit un espace riemannien avec bord singulier $(U \cup L/\varrho, g)$. Si la forme quadratique $g_v(\xi, \xi)$ est identiquement nulle en tout point $v \in L$, donc aussi en tout point $v \in \mathcal{F}$, nous dirons que cet espace présente *un bord singulier du type P_0*.

EXEMPLE. Soient $\alpha\colon \mathcal{V}_m \to R$ une fonction C^{r-1}, U^+_α (resp. U^-_α) l'ensemble des points $u \in \mathcal{V}_m$ pour lesquels $\alpha(u) > 0$ (resp. $\alpha(u) < 0$), g^* un champ C^{r-1} défini positif sur $\mathcal{V}_m$ (c'est-à-dire une métrique riemannienne sur $\mathcal{V}_m$). Si U est une composante connexe de l'ouvert U_α^+ (resp. de l'ouvert U_α^-) et $\mathcal{F}$ sa frontière, la restriction de $g = \alpha g^*$ (resp. de $-g = -\alpha g^*$) à $\overline{U} = U \cup \mathcal{F}$ donne lieu à un espace riemannien avec bord singulier du type P_0.

Revenant au cas général, on a la

PROPOSITION 5.1. *Supposons que g s'annulle identiquement sur $\mathcal{F}$ et soit g^* une métrique riemannienne sur $\mathcal{V}_m$. Etant donné un nombre réel $\varepsilon > 0$ aussi petit que l'on veut, il est possible de déterminer, dans $\mathcal{V}_m$, un voisinage ouvert W de $\mathcal{F}$ tel que*

$$0 \leqslant g_u(\xi, \xi) \leqslant \varepsilon g_u^*(\xi, \xi)\,, \qquad \xi \in \mathcal{C}_u, \textit{ pour tout } u \in W \cap \overline{U}\,.$$

DÉMONSTRATION. Soient $u_0 \in \mathcal{F}$ et $\sigma\colon W_0'' \to R^m$ une carte admissible, W_0'' étant un voisinage ouvert de u_0. Par rapport aux coordonnées locales correspondantes, $g_u(\xi, \xi)$ et $g_u^*(\xi, \xi)$ sont données par des expressions de la forme $\mu \cdot A(u) \cdot \mu^t$ et $\mu \cdot A^*(u) \cdot \mu^t$, si l'on introduit les matrices

$$\mu = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^m)\,, \qquad A(u) = \big(g_{ij}(\sigma(u))\big)\,, \qquad A^*(u) = \big(g_{ij}^*(\sigma(u))\big)\,.$$

Pour $\mu \neq 0$ on a $\mu \cdot A^*(u) \cdot \mu^t > 0$ et le rapport $(\mu \cdot A(u) \cdot \mu^t)/(\mu \cdot A^*(u) \cdot \mu^t)$ ne change pas si l'on remplace μ par $k\mu$, quelque soit le réel $k \neq 0$. On peut donc supposer $\|\mu\| = \Big(\sum_1^m (\xi^i)^2\Big)^{\frac{1}{2}} = 1$ et il est alors possible de choisir un nombre positif ε_1 et un voisinage ouvert $W_0' \subset W_0''$ de u_0 de façon que $\mu \cdot A^*(u) \cdot \mu^t > \varepsilon_1$ pour tout $u \in W_0'$. Puisque $A(u_0) = O$, il existe un voisinage ouvert $W_0 \subset W_0'$ de u_0 tel que

$$|g_{ij}(\sigma(u))| < \frac{\varepsilon \varepsilon_1}{m^2} \qquad \text{pour } i, j = 1, 2, \ldots, m \text{ et } u \in W_0\,.$$

Compte tenu de $\|\mu\| = 1$, il en résulte

$$|\mu \cdot A(u) \cdot \mu^t| \leqslant \sum_{i,j=1}^m |g_{ij}(\sigma(u))\xi^i \xi^j| \leqslant \sum_{i,j=1}^m |g_{ij}(\sigma(u))| < \varepsilon \varepsilon_1\,,$$

donc aussi

$$\frac{|\mu \cdot A(u) \cdot \mu^t|}{\mu \cdot A^*(u) \cdot \mu^t} < \varepsilon\,.$$

Cette condition reste valable pour tout $\mu \neq 0$, par conséquent $0 \leqslant g_u(\xi, \xi) \leqslant \varepsilon g_u^*(\xi, \xi)$ quels que soient $u \in W_0 \cap \overline{U}$ et $\xi \in \mathcal{C}_u$, l'égalité n'étant vraie que si $\xi = 0$.

Lorsque u_0 parcourt $\mathcal{F}$ nous obtenons un recouvrement ouvert de $\mathcal{F}$, donc un voisinage ouvert de $\mathcal{F}$ tel que la condition de l'énoncé y soit partout valable.

COROLLAIRE 5.1.1. *Supposons que g s'annule identiquement sur une partie fermée connexe H de $\mathcal{F}$ contenue dans l'intérieure $\mathring{U}$ de $\overline{U}$, et soit g^* une métrique riemannienne C^{r-1} sur $\mathcal{V}_m$. Soit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_q, \dots$ une suite de nombres positifs tendant vers zéro. H possède un système fondamental dénombrable de voisinages ouverts connexes $W_1, W_2, \dots, W_q, \dots$ contenus dans $\mathring{U}$ et tels que*

$$0 \leqslant g_u(\xi, \xi) \leqslant \varepsilon_q g_u^*(\xi, \xi) \qquad \textit{pour tout } u \in W_q .$$

COROLLAIRE 5.1.2. *Sous les hypothèses du corollaire précédent, désignons par d_q la distance définie par la restriction de g^* à W_q. Si, pour tout couple de points u et v de H, $d_q(u, v)$ reste bornée lorsque $q \to +\infty$, tous les points de H appartiennent à une même classe d'équivalence suivant ϱ.*

En effet, soit θ un nombre positif fixe. Pour chaque q, nous pouvons choisir un chemin admissible $\varphi\colon [0,1] \to W_q$ joignant u à v et tel que

$$\int_0^1 \sqrt{g^*(\varphi'(t), \varphi'(t))}\, dt < d_q(u, v) + \theta .$$

Par conséquent

$$\int_0^1 \sqrt{g(\varphi'(t), \varphi'(t))}\, dt < \sqrt{\varepsilon_q}\big(d_q(u, v) + \theta\big)$$

tend vers zéro avec ε_q.

REMARQUE 1. Si $d_q(u, v)$ ne reste pas bornée, l'annulation de g sur H n'induit pas nécessairement l'identification des points de H.

REMARQUE 2. L'identification est certaine lorsque, pour tout couple de points u et v de H, il existe une courbe rectifiable (mais pas nécessairement C^1 par morceaux) de H joignant u à v.

REMARQUE 3. Si $(U \cup L/\varrho, g)$ est un espace riemannien avec bord singulier du type P_0, toute partie de L connexe par arcs admissibles appartient à une classe d'équivalence suivant ϱ.

Annulation de g sur une sous-variété F_n, $n \leqslant m-1$.

Comme d'habitude, F_n sera supposée C^r connexe fermée et telle que sa topologie soit identique à la topologie induite par $\mathcal{V}_m$.

PROPOSITION 5.2. *Lorsque le complémentaire U de F_n est connexe (c'est-à-dire lorsque $n < m-1$ ou lorsque $n = m-1$ et que F_{m-1} est à un côté dans $\mathcal{V}_m$) on peut déterminer sur $\mathcal{V}_m$, d'une infinité de manières, un champ g donnant lieu à un espace riemannien $(U \cup F_n/\varrho, g)$ avec bord singulier du type P_0. Cet espace admet F_n/ϱ comme singularité ponctuelle unique.*

DÉMONSTRATION. Soit (U_i) un recouvrement de F_n par des ouverts de $\mathcal{V}_m$ tels que, si $U_i \cap F_n = V_i$, il existe des difféomorphismes C^r,

$$\sigma_i\colon U_i \to \sigma_i(U_i) \subset R^m,$$

satisfaisant à la condition $\sigma_i(U_i) = b_i^{m-n} \times \sigma_i(V_i)$, b_i^{m-n} étant une boule ouverte de R^{m-n} de centre O. Soit $\alpha_i\colon U_i \to R$ une fonction C^r nulle sur V_i et strictement positive sur le complémentaire de V_i dans U_i. Si $(x_i, y_i) \in b_i^{m-n} \times \sigma_i(V_i)$, une telle fonction s'obtient, par exemple, en posant

$$\alpha_i(u) = x_i^2 = \sum_{j=1}^{m-n} (x_i^j)^2$$

avec $u = \sigma_i^{-1}(x_i, y_i)$ et $x_i = (x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^{m-n})$. Soit encore $\alpha_0\colon \mathcal{V}_m - F_n \to R$ la constante $\alpha_0(u) = 1$. Considérons une partition C^r de l'unité $\big((h_i), h_0\big)$ subordonnée au recouvrement ouvert $\big((U_i), \mathcal{V}_m - F_n\big)$ de $\mathcal{V}_m$. La fonction $\alpha = \big(\sum h_i \alpha_i\big) + h_0 \alpha_0$ est strictement positive sur $\mathcal{V}_m - F_n$ et nulle sur F_n. Si g^* est une métrique riemannienne sur $\mathcal{V}_m$, le champ $g = \alpha g^*$ répond aux conditions de l'énoncé.

Il convient de remarquer que la topologie de l'espace métrique $U \cup F_n/\varrho$ est identique à sa topologie quotient si F_n est compacte. Elle est strictement moins fine que la topologie quotient si F_n n'est pas compacte (cf. propositions 3.5 et 3.6).

COROLLAIRE 5.2. *Supposons que F_{m-1} soit à deux côtés dans $\mathcal{V}_m$ et soit W l'une des deux composantes connexes de $\mathcal{V}_m - F_{m-1}$. On peut déterminer sur $\mathcal{V}_m$, d'une infinité de manières, un champ g défini positif sur W et nul sur F_{m-1}, donc un champ tel que $(W \cup F_{m-1}/\varrho, g)$ soit un espace riemannien admettant F_{m-1}/ϱ comme singularité ponctuelle unique.*

REMARQUE 1. Si W' est la deuxième composante connexe de $\mathcal{V}_m - F_{m-1}$, le champ $g = \alpha g^*$ définit aussi un deuxième espace riemannien $(W' \cup F_{m-1}/\varrho, g)$ ayant F_{m-1}/ϱ comme singularité ponctuelle. Nous pouvons considérer $(W \cup F_{m-1}/\varrho, g)$ et $(W' \cup F_{m-1}/\varrho, g)$ comme deux « nappes » d'un « cône généralisé » ayant pour sommet le point F_{m-1}/ϱ.

REMARQUE 2. On peut aussi déterminer une fonction α strictement positive sur W et nulle sur $W' \cup F_{m-1}$, ou encore une fonction α strictement positive sur W, strictement négative sur W' et nulle sur F_{m-1}. Le champ correspondant $g = \alpha g^*$ satisfait toujours aux conditions du corollaire 5.2.

Nous venons de construire un espace $(U \cup F_n/\varrho, g)$, (resp. un espace $(W \cup F_{m-1}/\varrho, g)$), moyennant une fonction α définie globalement sur $\mathcal{V}_m$ et nulle sur F_n. Bien évidemment il est possible de procéder autrement. Se rapportant, par exemple, à la proposition 5.2, on peut déterminer séparément sur chaque U_i un champ g_i nulle sur V_i et défini positif sur le complémentaire de V_i dans U_i. Si $((h_i), h)$ est une partition C^r de l'unité subordonnée au recouvrement $((U_i), \mathcal{V}_m - F_n)$ de $\mathcal{V}_m$, on prendra $g = hg^* + \sum h_i g_i$.

Généralisation.

Dans les problèmes traités ci-dessus l'ouvert $U = \mathcal{V}_m - F_n$ est donné d'avance, mais sa frontière est très régulière. Si l'on se donne un ouvert connexe quelconque $U \subset \mathcal{V}_m$, il ne sera pas toujours possible de déterminer un champ g donnant lieu à un espace riemannien $(U \cup L/\varrho, g)$ avec bord singulier du type P_0. De toute façon s'il est possible d'obtenir une fonction α, C^r sur $\mathcal{V}_m$, strictement positive sur U et nulle sur la frontière $\mathcal{F}$ de U, la détermination d'un tel champ est immédiate moyennant une métrique riemannienne g^* sur $\mathcal{V}_m$ et prenant $g = \alpha g^*$.

PROPOSITION 5.3. *Si la frontière $\mathcal{F}$ de U admet une partition localement finie en sous-variétés C^r, il est possible de construire un espace riemannien $(U \cup \mathcal{F}/\varrho, g)$ avec bord singulier du rype P_0.* (Bien entendu, on suppose toujours que les sous-variétés soient fermées et que leur topologie interne coïncide avec la topologie induite par $\mathcal{V}_m$).

DÉMONSTRATION. La partition étant localement finie, elle est constituée par un nombre fini ou une infinité dénombrable $\{F_{n_i}\}_{i=1,2,3,\dots}$, $0 < n_i \leqslant m-1$, de sous-variétés. Nous pouvons donc déterminer une suite d'ouverts $\{W_i\}$ de $\mathcal{V}_m$ deux à deux disjoints et tels que $F_{n_i} \subset W_i$ pour tout i. Cela permet de construire sur $\mathcal{V}_m$ une fonction α de classe C^r, strictement positive sur U et nulle sur $\mathcal{F}$.

Définition. Etant donnée une sous-variété F_{m-1} à deux côtés, il convient d'appeler *demi-espace ouvert de* $\mathcal{V}_m$ chacune des composantes connexes de $\mathcal{V}_m - F_{m-1}$.

Proposition 5.4. *Si un ouvert connexe $U \subset \mathcal{V}_m$ est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces ouverts $W_1, W_2, \ldots, W_q$, il existe un champ g donnant lieu à un espace riemannien $(U \cup \mathcal{F}/\varrho, g)$ avec bord singulier du type P_0. Chaque composante connexe de la frontière $\mathcal{F}$ de U appartient à une classe d'équivalence suivant ϱ. (Cela entraîne que $\mathcal{F}/\varrho = L/\varrho$ est constitué par un nombre fini de points singuliers).*

En effet, soit F^i_{m-1} la frontière de $W_i, (i=1,2,\ldots,q)$. Il existe une fonction α_i, C^r sur $\mathcal{V}_m$, strictement positive sur W_i et nulle sur F^i_{m-1}. Posant $\alpha = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_q$ on peut prendre $g = \alpha g^*$.

Exemples obtenus en prenant $\mathcal{V}_m = R^m$ et une métrique riemannienne g^* sur R^m.

1) $g = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{m-1}^2) g^*$ induit l'identification des points de l'axe des x_m. De même $g = x_m g^*$ induit, sur le demi-espace fermé $x_m \geqslant 0$, l'identification des points du plan $x_m = 0$. Dans les deux cas, l'espace riemannien obtenu a une topologie strictement moins fine que la topologie quotient correspondante.

2) Soit $\psi(t) = \exp(-1/(t^2-1))$ pour $|t| > 1$ et $\psi(t) = 0$ pour $|t| \leqslant 1$. La fonction $\alpha(x) = x_m^2 + \psi(\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_{m-1}^2})$ est nulle sur le disque $\mathcal{F}: (x_1^2 + \ldots + x_{m-1}^2 \leqslant 1, x_m = 0)$ et strictement positive sur le complémentaire de $\mathcal{F}$. Par conséquent $g = \alpha g^*$ induit l'identification des points de $\mathcal{F}$. L'espace riemannien obtenu est homéomorphe à R^m, parce que sa topologie est identique à la topologie quotient de R^m/ϱ.

3) Prenant $\psi(t) = \exp(1/(t^2-1))$ pour $|t| < 1$ et $\psi(t) = 0$ pour $|t| \geqslant 1$, ensuite $\alpha(x) = x_m^2 + \psi(\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_{m-1}^2})$, on voit que $g = \alpha g^*$ s'annule sur le fermé $(x_1^2 + \ldots + x_{m-1}^2 \geqslant 1, x_m = 0)$. L'espace de Riemann correspondant comporte un point singulier si $m \geqslant 3$, deux points singuliers si $m = 2$. Sa topologie est strictement moins fine que la topologie quotient.

RÉFÉRENCES

[1] N. Bourbaki, *Topologie générale*, chapitre 9, Hermann, Paris, 1958.
[2] É. Cartan, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Gauthier-Villars, Paris, 1951.

[3] P. J. HILTON, *An introduction to Homotopy theory*, Cambridge University Press, 1961.

[4] S. KOBAYASHI - K. NOMIZU, *Foundations of Differential Geometry*, Vol. I, Interscience publishers, New York-London, 1963.

[5] N. STAVROULAKIS, *Nappes logarithmiques d'un espace riemannien à deux dimensions*, C. R. Acad. Sc. Paris, **246** (1958), pp. 1149-1152.

[6] N. STAVROULAKIS, *Microfibrés et fibrés associés à certaines immersions*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa (Classe di Scienze), **27** (1973), pp. 309-338.