ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

ERMANNO LANCONELLI

Sul modulo di continuità alla frontiera della soluzione del problema di Dirichlet relativo ad una classe di operatori parabolici

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 2, nº 3 (1975), p. 335-358
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1975_4_2_3_335_0>

Sul modulo di continuità alla frontiera della soluzione del problema di Dirichlet relativo ad una classe di operatori parabolici.

ERMANNO LANCONELLI (*) (**)

Summary. – *In this paper, we estimate the modulus of continuity of the solution of Dirichlet problem in the boundary points for a class of linear parabolic operators of the second order in divergence form with measurable coefficients.*

Introduzione.

Sia Ω un aperto limitato dello spazio euclideo $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}$ e sia $\varphi \in C(\partial\Omega)$; in una nota precedente ([8]) utilizzando risultati di Aronson ([1]), Trudinger ([10]) e Bauer ([3]) abbiamo provato l'esistenza di una soluzione generalizzata (nel senso di Perron-Wiener) del problema di Dirichlet

$$(\mathfrak{D}) \qquad \begin{cases} Lu = 0 & \text{in } \Omega \\ u/\partial\Omega = \varphi \end{cases}$$

essendo L un operatore parabolico del tipo seguente

$$(1) \qquad Lu = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sum_{j=1}^{n} c_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_j} + c_i u\right] + \sum_{i=1}^{n} d_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + eu - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Nella nota suddetta abbiamo inoltre caratterizzato i punti *parabolicamente regolari* della frontiera di Ω, cioè i punti $z_0 \in \partial\Omega$ per i quali, indicando con ${}^{L}H_{\varphi}^{\Omega}$ la soluzione generalizzata del problema $(\mathfrak{D})$, riesce

$$\lim_{z\to z_0} {}^{L}H_{\varphi}^{\Omega}(z) = \varphi(z_0)$$

(*) Istituto Matematico - Bologna.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del GNAFA del C.N.R.
Pervenuto alla Redazione il 2 Agosto 1974.

per ogni $\varphi \in C(\partial\Omega)$ e per ogni L del tipo (1) (verificante le ipotesi che preciseremo fra poco).

In questo lavoro utilizzando una tecnica dovuta sostanzialmente a Kellog (*) otteniamo una stima del modulo di continuità di ${}^L H_\varphi^\Omega$ nei punti parabolicamente regolari di $\partial\Omega$.

Tale stima generalizza al caso di aperti arbitrari un risultato dimostrato da Trudinger ([10]) nell'ipotesi di aperti verificanti la «condizione (A)» di Ladyzenskaja e Ural'ceva ([6], pag. 9).

Valutazioni analoghe a quelle provate nella presente nota ma relative ad una classe di operatori ellittici in forma non variazionale sono state ottenute recentemente da Novrusov ([9]).

Concludiamo il paragrafo precisando le ipotesi sui coefficienti di L ed introducendo le notazioni delle quali faremo uso sistematico nel seguito. $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}$ è lo spazio euclideo delle $(n+1)$-ple ordinate di numeri reali; poniamo $|||z||| = \left(\|x\|^2 + |y|\right)^{\frac{1}{2}}$ e $\|x\| = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

$L_{p,q}(\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R})$ è lo spazio delle (classi di) funzioni u misurabili su $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}$ e tali che

$$+\infty > \|u;\, L_{pq}(\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R})\| = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_{\boldsymbol{R}} \|u(\cdot, y);\, L_p(\boldsymbol{R}^n)\|^q dy\right)^{1/q} & \text{se } q < \infty \\ \sup\limits_{y \in \boldsymbol{R}} \operatorname{ess} \|u(\cdot, y);\, L_p(\boldsymbol{R}^n)\| & \text{se } q = \infty \end{cases}$$

($L_p(\boldsymbol{R}^n)$ è lo spazio di Lebesgue delle (classi di) funzioni di p-esima potenza sommabile su $\boldsymbol{R}^n$ con la consueta norma).

Sui coefficienti dell'operatore L facciamo le seguenti ipotesi:

(I) $c_{i,j} = c_{j,i} \in L_\infty(\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R})$, $i, j = 1, \ldots, n$ ed esiste $r > 0$ tale che

$$r^{-1}\|\xi\|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^n c_{i,j}(z)\xi_i\xi_j \leqslant r\|\xi\|^2, \qquad \forall z \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R},\ \forall \xi \in \boldsymbol{R}^n.$$

(II) $c_i, d_i \in L_{p,q}(\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R})$, $i = 1, \ldots, n$, con $2 < p, q \leqslant \infty$, $n/2p + 1/q < \frac{1}{2}$;

$e \in L_{p_1,q_1}(\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R})$ con $1 < p_1, q_1 \leqslant \infty$, $n/2p_1 + 1/q_1 < 1$.

(III) Esiste $P > 0$ tale che $Lu \equiv \Delta u - \partial u/\partial y$ nell'aperto $\{z \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R};\ |||z||| \geqslant P\}$; Δ è l'operatore di Laplace in $\boldsymbol{R}^n$.

(*) Cfr. [5]: precisamente la dimostrazione del criterio di Wiener sulla regolarità dei punti di frontiera per l'operatore di Laplace.

Se L è un operatore del tipo (1), verificante quindi (I)-(III), poniamo

$$|L| = r + \sum_{i=1}^{n} (\|c_i\| + \|d_i\|) + \|e\| + P + \theta^{-1}$$

dove $\|c_i\|$, $\|d_i\|$, $\|e\|$ indicano le norme dei coefficienti nei rispettivi spazi e θ è un numero positivo tale che $1-\theta \geqslant 2/p$, $n/p + 2/q$, $n/2p_1 + 1/q_1$, $2/q$, $1/p_1$, $1/q_1$.

Diremo che $u \in C(\Omega)$, Ω aperto di $\boldsymbol{R}^n$, è L-parabolica in Ω se essa è soluzione debole dell'equazione $Lu = 0$ in Ω.

Un aperto limitato Ω si dice L-regolare se, per ogni $\varphi \in C(\partial\Omega)$ esiste una ed una sola funzione ${}^L H_\varphi^\Omega$ L-parabolica in Ω e tale che

$$\lim_{z \to z_0} {}^L H_\varphi^\Omega(z) = \varphi(z_0) \qquad \forall z_0 \in \partial\Omega \, .$$

Una funzione u di dominio un aperto Ω_1 di $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}$ si dice super L-parabolica se:

i) $-\infty < u \leqslant +\infty$, $u < +\infty$ su di un sottoinsieme denso in Ω_1;

ii) u è inferiormente semicontinua;

iii) per ogni aperto regolare Ω tale che $\overline{\Omega} \subset \Omega_1$, se $\varphi \in (\partial\Omega)$ e $\varphi \leqslant u/\partial\Omega$, allora ${}^L H_\varphi^\Omega \leqslant u$ in Ω.

Ciò posto, se Ω è un aperto limitato di $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}$, *la soluzione generalizzata* del problema $(\mathfrak{D})$ è la funzione

$${}^L H_\varphi^\Omega = \inf\{v;\ v \textit{ super } L\textit{-parabolica in } \Omega,\ \varliminf_{z \to \zeta} v(z) \geqslant \varphi(\zeta),\ \forall \zeta \in \partial\Omega\};$$

essa è L-parabolica, e quindi continua, in Ω (cfr. [3], [8]); nel seguito scriveremo sempre H_φ^Ω anzichè ${}^L H_\varphi^\Omega$.

Indichiamo poi con $K^{(a)}$, $a > 0$, la funzione

$$K^{(a)}(z) = \begin{cases} a^{n/2-1}(4\pi y)^{-n/2} \exp\left[-a \dfrac{\|x\|^2}{4y}\right], & \text{se } y > 0\,, \\ 0\,, & \text{se } y \leqslant 0\,. \end{cases}$$

Per ogni compatto $F \subset \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}$ denotiamo con $\mathcal{M}^+(F)$ l'insieme delle misure di Radon non negative col supporto contenuto in F e poniamo

$$\mathcal{C}_a(F) = \sup\left\{m(\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R});\ m \in \mathcal{M}^+(F),\ \int\limits_{\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}} K^{(a)}(z-\zeta)\, dm(\zeta) \leqslant 1 \ \ \forall z \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}\right\};$$

se $a = 1$ scriveremo $\mathcal{C}$ anzichè C_a.

1. – Risultati principali ed esempi.

D'ora in poi indicheremo con Ω un aperto limitato di $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}$. Se $z_0 = (x_0, y_0) \in \partial\Omega$ col simbolo $\Omega'_{h,k}(z_0; \lambda)$ indichiamo l'insieme

$$\Omega'_{h,k}(z_0; \lambda) = \left\{(x, y) \in \Omega';\ \lambda^{k+1} \leqslant y_0 - y < \lambda^k,\ \lambda^{-h+1} \leqslant \exp \frac{\|x - x_0\|^2}{4(y_0 - y)} < \lambda^{-h}\right\}$$

con $h, k \in N$ e $\lambda \in]0, 1[$.

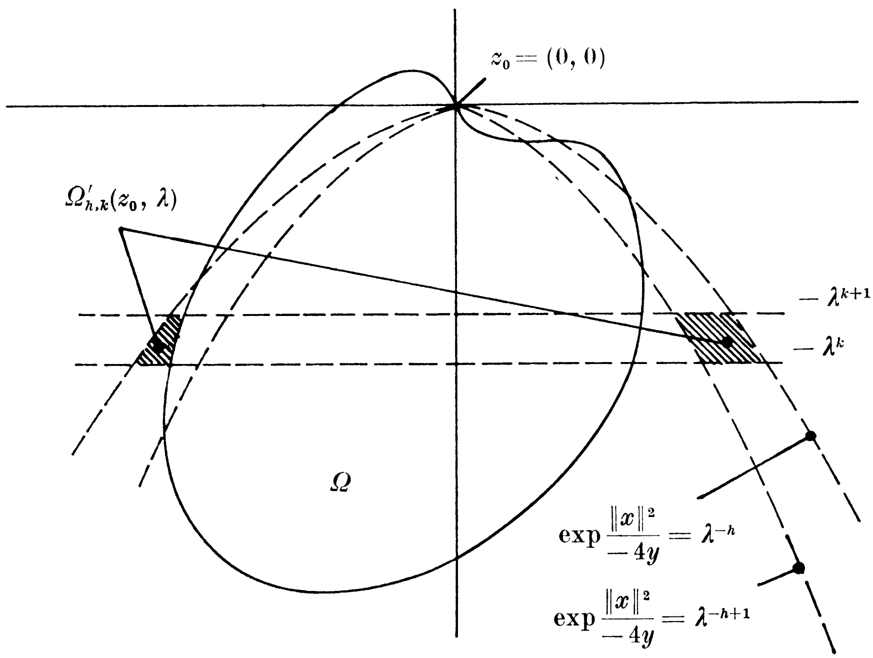

Fig. 1.

Per ogni $z \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}$ e per ogni a e b positivi poniamo

$$H^{(\lambda)}_{a,b}(z; z_0) = \sup_{M \geqslant 1} \sum_{h \leqslant bM} \sum_{k \leqslant [z]_\lambda - M} \frac{\mathcal{C}(\Omega'_{h,k}(z_0; \lambda))}{\lambda^{k(n/2) - ha}} \quad (*) \tag{2}$$

dove $[z]_\lambda = \ln |||z - z_0|||^2 / \ln \lambda$.

(*) Conveniamo di attribuire il valore zero alla somma indicata se $[z]_\lambda - M < 1$.

Sia $\varphi \in C(\partial\Omega)$ e sia H_φ^Ω la soluzione generalizzata del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} Lu \quad = 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u/\partial\Omega = \varphi, \end{cases}$$

essendo L un operatore del tipo (1). Posto

$$\omega(\varphi, t) = \sup\{|\varphi(z) - \varphi(\zeta)|;\ z, \zeta \in \partial\Omega,\ |||z - z_0||| \leq t,\ |||\zeta - z_0||| \leq t\}$$

vale il seguente

TEOREMA. *Fissata $\lambda \in]0, 1[$, esistono c, ϱ, α, β, a e b positive e dipendenti solo da $|L|$ e da λ, tali che*:

$$(3) \qquad |H_\varphi^\Omega(z) - \varphi(z_0)| \leq c \inf_{t \in]0,1[} \{\omega(\varphi, t) + \sup|\varphi| t^\alpha + \sup|\varphi| t^{-\varrho} \exp[-\beta H_{a,b}^{(\lambda)}(z; z_0)]\}$$

per ogni $z \in \Omega$.

Questo Teorema, la cui dimostrazione è rinviata al paragrafo 3, costituisce il principale risultato del presente lavoro.

A chiarimento della (3) facciamo la seguente osservazione; ricordiamo che il punto z_0 si dice L-regolare per Ω se il $\lim_{z \to z_0} H_\varphi^\Omega(z) = \varphi(z_0)$ per ogni $\varphi \in C(\partial\Omega)$; d'altra parte, in [8], abbiamo provato che z_0 è L-regolare per ogni operatore del tipo (1) (brevemente: *parabolicamente regolare*) se e solo se la serie

$$\sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathcal{C}(\Omega'_{h,k}(z_0; \lambda))}{\lambda^{k(n/2)-ha}}$$

è divergente per ogni $a > 0$; ma allora (cfr. (2)):

$$\exp[-H_{a,b}^{(\lambda)}(z; z_0)] \xrightarrow[z \to z_0]{} 0, \qquad \forall a, b > 0,$$

se e solo se z_0 è parabolicamente regolare per Ω.

Nel caso che φ sia hölderiana in z_0, $\omega(\varphi, t) \leq c(\varphi) t^\delta$ $(0 < \delta \leq 1)$, dalla (3) si deduce

$$(3') \qquad |H_\varphi^\Omega(z) - \varphi(z_0)| \leq c'(c(\varphi) + \sup|\varphi|) \exp[-\gamma H_{a,b}^{(\lambda)}(z; z_0)] \qquad \forall z \in \Omega,$$

con $\gamma = \min\{\delta, \alpha\}\beta/(\delta + \varrho)$; basta infatti osservare che, comunque si prendano c_1, c_2, ed E costanti positive, $E \leqslant \min\{\delta, \alpha\}/\varrho$, risulta

$$\inf_{t\in]0,1[} (c_1 t^\delta + c_2 t^\alpha + c_2 E t^{-\varrho}) \leqslant (c_1 + c_2) \inf_{t\in]0,1[} (t^{\min\{\delta,\alpha\}} + E t^{-\varrho}) = \\ = (c_1 + c_2)\, c(\delta, \alpha, \varrho)\, E^{\gamma/\beta}. \ (*)$$

Mostriamo adesso alcuni esempi di applicazione dei risultati sopra esposti.

ESEMPIO 1. Sia $z_0 = (x_0, y_0) \in \partial\Omega$ ed esista $\sigma > 0$ tale che

$$(4) \qquad m_{n+1}\big(\Omega' \cap \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R};\ \|x - x_0\|^2 \leqslant r,\ 0 \leqslant y_0 - y \leqslant r\}\big) \geqslant \sigma r^{(n/2)+1} \quad \forall r \in]0, 1[$$

(m_{n+1} è la misura di Lebesgue in $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}$); per la funzione $H^{(\lambda)}_{a,b}(z; z_0)$ vale allora la valutazione

$$(5) \qquad H^{(\lambda)}_{a,b}(z; z_0) \geqslant \beta_1 \left[\ln \frac{1}{|||z - z_0|||} - \frac{1}{\beta_1^2}\right] \qquad \forall z \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R},\ |||z - z_0||| < 1\,,$$

essendo $\beta_1 = \beta_1(\sigma, a, b, \lambda)$ (la dimostrazione di (5) è svolta nel paragrafo 2); ciò, a causa della (3), implica

$$|H^\Omega_\varphi(z) - \varphi(z_0)| \leqslant c'\{\omega(\varphi, t) + \sup|\varphi| t^\alpha + \sup|\varphi| t^{-\varrho} |||z - z_0|||^{\beta\beta_1}\}$$

per ogni $t \in]0, 1[$ e per ogni $z \in \Omega$.

Ora, per ogni fissato $z \in \Omega$, con $|||z - z_0||| < 1$, scegliamo $t = |||z - z_0|||^\gamma$ con $\gamma = \beta\beta_1/(\alpha + \varrho)$; riesce allora

$$(6) \qquad |H^\Omega_\varphi(z) - \varphi(z_0)| \leqslant 2c'\{\omega(\varphi, |||z - z_0|||^\gamma) + \sup|\varphi|\, |||z - z_0|||^{\alpha\gamma}\} \ \forall z \in \Omega\,, \\ |||z - z_0||| < 1\,.$$

Questo risultato si deve a Trudinger ([10], Teorema 4.2).

ESEMPIO 2. Siano ϱ: $]0, 1] \to [2, +\infty[$ una funzione non crescente e $z_0 = (x_0, y_0) \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}$; chiamiamo *$\varrho$-cono di vertice z_0* ogni insieme del tipo seguente

$$P_\varrho = \left\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R};\ 0 < y_0 - y \leqslant 1,\ c\varrho(y_0 - y) \leqslant \exp\left[\frac{\|x - x_0\|^2}{4(y_0 - y)}\right] \leqslant \varrho(y_0 - y)\right\}, \\ 0 < c < 1.$$

(*) Con $c(\cdot, \ldots, \cdot)$ indicheremo sempre delle costanti positive dipendenti solo dalle variabili indicate ed, eventualmente, da n e dal diametro di Ω.

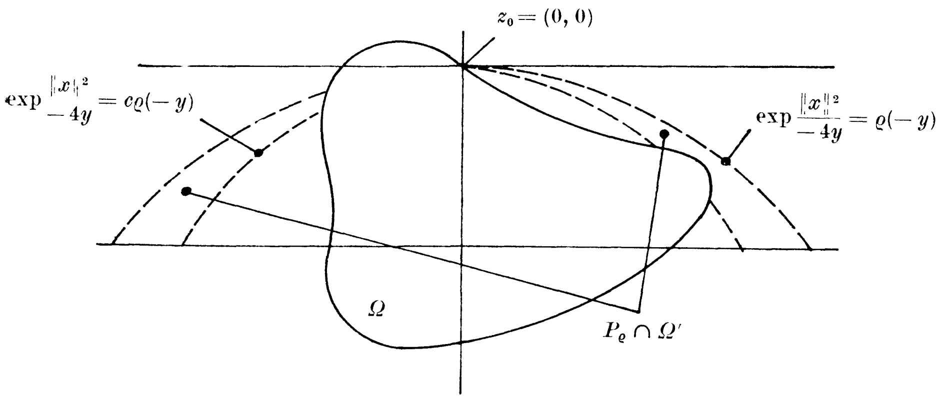

Fig. 2.

Sia ora $z_0 \in \partial\Omega$ ed esista un ϱ-cono di vertice z_0, P_ϱ, tale che

$$m_n(\{x \in \boldsymbol{R}^n;\ (x, y) \in P_\varrho \cap \Omega'\}) \geqslant \sigma |y - y_0|^{n/2} (\ln \varrho(y_0 - y))^{n/2-1}$$

per ogni $y \in [y_0 - 1, y_0[$, essendo σ una costante positiva indipendente da y (questa condizione è sicuramente soddisfatta se $P_\varrho \subset \Omega'$; m_n è la misura di Lebesgue in $\boldsymbol{R}^n$). Esiste allora una costante positiva $\beta_1 = \beta_1(\sigma, a, b, \lambda)$ tale che

$$H^{(\lambda)}_{a,b}(z; z_0) \geqslant \beta_1 \left[\int_{|||z-z_0|||}^{1} \frac{(\ln \varrho(t))^{n/2-1}}{t(\varrho(t))^a}\, dt - \frac{1}{\beta_1^2} \right], \qquad |||z - z_0||| < 1 \tag{7}$$

(anche questa disuguaglianza sarà provata nel paragrafo 2).

Se poniamo

$$h_a(z - z_0) = (\ln |||z - z_0|||^{-1})^{-1} \int_{|||z-z_0|||}^{1} \frac{(\ln \varrho(t))^{n/2-1}}{t(\varrho(t))^a}\, dt\,,$$

riesce $\exp[-H^{(\beta)}_{a,b}(z; z_0)] \leqslant c(\beta_1) |||z - z_0|||^{\beta_1 h_a(z-z_0)}$ e quindi, per la (3),

$$|H^\Omega_\varphi(z) - \varphi(z_0)| \leqslant c' \{\omega(\varphi, t) + \sup|\varphi| t^\alpha + \sup|\varphi| t^{-\varrho} |||z - z_0|||^{\beta\beta_1 h_a(z-z_0)}\}$$
$$\forall t \in\,]0, 1[\text{ e } \forall z \in \Omega,\ |||z - z_0||| < 1\,.$$

Ora, per ogni $z \in \Omega$ con $|||z - z_0||| < 1$ scegliamo $t = |||z - z_0|||^{\gamma_a(z-z_0)}$ con $\gamma_a(z - z_0) = \beta\beta_1 h_a(z - z_0)/(\alpha + \varrho)$; allora

$$|H^\Omega_\varphi(z) - \varphi(z_0)| \leqslant 2c' \{\omega(\varphi, |||z - z_0|||^{\gamma_a(z-z_0)}) + \sup|\varphi|\ |||z - z_0|||^{\alpha\gamma_a(z-z_0)}\}\,, \tag{8}$$
$$\forall z \in \Omega,\ |||z - z_0||| < 1\,.$$

In particolare, se ϱ è costante anche γ_a è costante e la (8) coincide con la (6).

2. – Alcune proprietà della funzione $H_{a,b}^{(\lambda)}$.

Osserviamo anzitutto che il comportamento di $H_{a,b}^{(\lambda)}$ è indipendente da λ. Infatti, se, per brevità, poniamo

$$\Sigma_{a,b}(M,\lambda) = \sum_{h\leqslant bM}\ \sum_{k\leqslant [z]_\lambda - M} \frac{\mathcal{C}(\Omega_{h,k}^{(\lambda)}(z_0;\lambda))}{\lambda^{k(n/2)-ha}},$$

risulta

PROPOSIZIONE 1. *Per ogni $\alpha \geqslant 0$ e per ogni $\lambda, \mu \in]0,1[$ esiste una costante positiva $c = c(\alpha, a, \lambda, \mu)$ tale che*

$$\sup_{M\geqslant 1} \Sigma_{a,b}(M,\lambda) \leqslant c\Big[\sup_{M\geqslant\alpha} \Sigma_{a,b}(M,\mu) + 1\Big].$$

DIMOSTRAZIONE. Esiste una costante positiva $c_1 = c_1(\lambda,\mu)$ tale che

$$\Sigma_{a,b}(M,\lambda) \leqslant c_1[\Sigma_{a,b}(M,\mu) + 1] \qquad \forall M \geqslant 1$$

(ciò si prova esattamente come la proposizione 1.2 di [7]).
Se $\alpha \leqslant 1$ non vi è altro da dimostrare.

Siano ora $M \geqslant 1$ e $\beta \geqslant 0$ e valutiamo $\Sigma_{a,b}(M+\beta,\mu)$; riesce:

$$\Sigma_{a,b}(M+\beta,\mu) = \sum_{h\leqslant b(M+\beta)}\ \sum_{k\leqslant [z]_\mu - M} \cdot - \sum_{h\leqslant b(M+\beta)}\ \sum_{[z]_\mu - M-\beta < k \leqslant [z]_\mu - M} \cdot$$
$$\cdot \geqslant \Sigma_{a,b}(M,\mu) - c_2 \sum_{h=1}^{\infty} \beta h^{n/2} \mu^{ah}$$

(l'ultima disuguaglianza segue dal fatto che $\mathcal{C}(\Omega'_{h,k}(z_0;\mu))\mu^{-k(n/2)+ha} \leqslant c_2 h^{n/2}\mu^{ha}$ essendo c_2 una costante positiva dipendente solo da n e da μ: cfr. [7] proposizione 6.1); allora si ha

$$\Sigma_{a,b}(M,\lambda) \leqslant c_1(\lambda,\mu)\Big\{\Sigma_{a,b}(M+\beta,\mu) + c_2\beta\sum_{h=1}^{\infty} h^{n/2}\mu^{ha}\Big\},$$

e quindi l'asserto.

PROPOSIZIONE 2. *Esiste una costante positiva $c = c(a, b, \lambda)$ tale che*

$$H_{a,b}^{(\lambda)}(z;z_0) \leqslant c[\ln |||z - z_0|||^{-1} + 1], \qquad 0 < |||z - z_0||| < 1.$$

DIMOSTRAZIONE. Per la proposizione 6.1 di [7] risulta $\mathcal{C}(\Omega'_{h,k}(z_0;\lambda)) \leqslant c_1(\lambda)\lambda^{k(n/2)} h^{n/2}$ e quindi, se $[z]_\lambda > 0$, cioè se $|||z - z_0||| < 1$, si ha

$$\Sigma_{a,b}(M,\lambda) \leqslant c_1(\lambda) \sum_{h \leqslant bM} \sum_{k \leqslant [z]_\lambda - M} h^{n/2}\lambda^{ha} \leqslant [z]_\lambda c_1(\lambda) \sum_{h=1}^{\infty} h^{n/2}\lambda^{ha} =$$
$$= c_2(\lambda, a)[z]_\lambda = \frac{2c_2(\lambda, a)}{|\ln \lambda|} \ln |||z - z_0|||^{-1}$$

per ogni $M \geqslant 1$. Da ciò segue l'asserto.

Per ogni $\tau \in \boldsymbol{R}$ poniamo ora

$$S_a^{(\lambda)}(\tau) = \sum_{k \leqslant \tau} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\mathcal{C}(\Omega'_{h,k}(z_0;\lambda))}{\lambda^{k(n/2)-ha}}, \qquad a > 0 \,. \, (*)$$

Ebbene si ha:

PROPOSIZIONE 3. *Esiste una costante positiva $c = c(a, b, \lambda)$ tale che*

$$H_{a,b}^{(\lambda)}(z - z_0) \geqslant S_a^{(\lambda)}(\tfrac{1}{2}[z]_\lambda) - c \tag{9}$$

per ogni $z \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}$.

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un numero naturale $k_0 = k_0(a, b, \lambda)$ tale che $\forall t \geqslant k_0$ risulti $ab|\ln \lambda| t \geqslant 4 \ln t$.

Prendiamo ad arbitrio $z \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}$; se $[z]_\lambda \leqslant k_0$ la (9) è vera.

Supponiamo allora $[z]_\lambda \geqslant k_0$. Posto per brevità $\alpha_{h,k} = \mathcal{C}(\Omega'_{h,k}(z_0;\lambda))\lambda^{-k(n/2)+ha}$, dalla definizione di $H_{a,b}^{(\lambda)}$ si trae

$$H_{a,b}^{(\lambda)}(z; z_0) \geqslant \sum_{k \leqslant [z]_\lambda - M(z)} \sum_{h \leqslant bM(z)} \alpha_{h,k}, \qquad \text{con } M(z) = 2\frac{\ln [z]_\lambda}{ab|\ln \lambda|}.$$

Ora

$$\sum_{k \leqslant [z]_\lambda - M(z)} \sum_{h=1}^{\infty} \alpha_{h,k} = \sum_{k \leqslant [z]_\lambda - M(z)} \sum_{h \leqslant bM(z)} \alpha_{h,k} + \sum_{k \leqslant [z]_\lambda - M(z)} \sum_{h > bM(z)} \alpha_{h,k};$$

d'altra parte, poichè $\alpha_{h,k} \leqslant c_1(\lambda) h^{n/2}\lambda^{ah}$,

$$\sum_{k \leqslant [z]_\lambda - M(z)} \sum_{h \geqslant bM(z)} \alpha_{h,k} \leqslant c_1(\lambda)([z]_\lambda - M(z)) \sum_{h \geqslant bM(z)} h^{n/2}\lambda^{ah} \leqslant$$
$$\leqslant c_1(a, \lambda)[z]_\lambda \sum_{h \geqslant bM(z)} \lambda^{ah/2} \leqslant c_2(a, \lambda)[z]_\lambda \lambda^{abM(z)/2} = c_2(a, \lambda).$$

In definitiva

$$H_{a,b}^{(\lambda)}(z; z_0) \geqslant \sum_{k \leqslant [z]_\lambda - M(z)} \sum_{h=1}^{\infty} \alpha_{h,k} - c_2 \,. \tag{10}$$

(*) Conveniamo di porre $S_a^{(\lambda)}(\tau) = 0$ se $\tau < 1$.

Osserviamo adesso che la scelta di k_0 assicura che

$$[z]_\lambda - M(z) \geqslant \tfrac{1}{2}[z]_\lambda \qquad \text{se } [z]_\lambda \geqslant k_0\,;$$

allora dalla (10) si ricava

$$H^{(\lambda)}_{a,b}(z;z_0) \geqslant \sum_{k\leqslant\frac{1}{2}[z]_\lambda}\sum_{h=1}^{\infty}\alpha_{h,k} - c_2 = S^{(\lambda)}_a\left(\tfrac{1}{2}[z]_\lambda\right) - c_2$$

e quindi l'asserto.

Con l'ausilio di questa proposizione proviamo adesso la (7) e la (5) del precedente paragrafo.

Nelle ipotesi assunte nell'esempio 2, posto $P_k = \{x\in \boldsymbol{R}^n;\ (x, y_0 - \lambda^k)\in \in P_\varrho \cap \Omega'\}$, riesce $m_n(P_k) \geqslant \sigma\lambda^{k(n/2)}(\ln\varrho(\lambda^k))^{n/2-1}$ e quindi (cfr. [7] proposizione 5.1)

$$\mathcal{C}(P_k\{y_0-\lambda^k\}) = m_n(P_k) \geqslant \sigma\lambda^{k(n/2)}(\ln\varrho(\lambda^k))^{n/2-1}\,;$$

d'altra parte, se $x\in P_k$, risulta

$$c\varrho(\lambda^k) \leqslant \exp\frac{\|x\|^2}{4\lambda^k} \leqslant \varrho(\lambda^k)\,;$$

siano ora $h'(k)$ ed $h''(k)$ i numeri interi rispettivamente più grande e più piccolo, per i quali riesce

$$\lambda^{-h'(k)+1} \leqslant c\varrho(\lambda^k) < \varrho(\lambda^k) \leqslant \lambda^{-h''(k)}\,;$$

ovviamente $P_k\{y_0-\lambda^k\} \subseteq \bigcup_{h=h'(k),h\geqslant 1}^{h''(k)} \Omega'_{h,k}(z_0;\lambda)$ e $h''(k) - h'(k) \leqslant c_1 \equiv c_1(\lambda, c)$.

Allora, per ogni $t > 1$, si ha

$$\begin{aligned} S^{(\lambda)}_a(t) &\geqslant \sum_{k\leqslant t}\ \sum_{h=h'(k),h\geqslant 1}^{h''(k)} \frac{\mathcal{C}(\Omega'_{h,k}(z_0;\lambda))}{\lambda^{k(n/2)-ha}} \geqslant \sum_{k\leqslant t}\lambda^{-k(n/2)+h''(k)a}\,\mathcal{C}\Big(\bigcup_{h=h'(k),h\geqslant 1}^{h''(k)}\Omega'_{h,k}(z_0;\lambda)\Big) \geqslant \\ &\geqslant \sum_{k\leqslant t}\lambda^{-k(n/2)+h''(k)a}\,\mathcal{C}(P_k\times\{y_0-\lambda^k\}) \geqslant \sum_{k\leqslant t}\sigma\frac{(\ln\varrho(\lambda^k))^{n/2-1}}{(\varrho(\lambda^k))^a} \geqslant \\ &\geqslant c_2(\sigma,\lambda)\sum_{k\leqslant t}\int_{\lambda^{k+1}}^{\lambda^k}\frac{(\ln\varrho(\tau))^{n/2-1}}{\tau(\varrho(\tau))^a}\,d\tau \geqslant c_2(\sigma,\lambda)\left[\int_{\lambda^t}^{1}\frac{(\ln\varrho(\tau))^{n/2-1}}{\tau(\varrho(\tau))^a}\,d\tau - c_3(\lambda)\right]. \end{aligned}$$

Questa disuguaglianza, unitamente alla Proposizione 3, prova la (7).

OSSERVAZIONE. La disuguaglianza precedente è valida nell'ipotesi meno restrittiva: *per ogni* $k \in N$ *esiste* $y \in [y_0 - \lambda^k, y_0 - \lambda^{k+1}]$ *tale che* $m_n(\{x \in \boldsymbol{R}^n;\ (x, y) \in \Omega' \cap P_\varrho\}) \geqslant \sigma |y_0 - y|^{n/2} (\ln \varrho(y_0 - y))^{n/2-1}$ *con* $\sigma > 0$ *indipendente da* k.

Mostriamo adesso la (5) del paragrafo 1.

Sia $\varrho(t) = M$ per ogni $t \in]0, 1]$, essendo M un'opportuna costante che, per il momento, supponiamo $\geqslant e$. Poniamo

$$P_M = \left\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R};\ 0 < y_0 - y \leqslant 1,\ \exp \frac{\|x - x_0\|^2}{4(y_0 - y)} \leqslant M\right\}.$$

Riesce (cfr. (4))

$$\begin{aligned} & m_{n+1}(\Omega' \cap P_M \cap (\boldsymbol{R}^n \times [y_0 - r, y_0])) \geqslant \\ & \geqslant m_{n+1}(\Omega' \cap \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R};\ \|x - x_0\|^2 \leqslant r,\ 0 < y_0 - y \leqslant r\}) - \\ & - m_{n+1}\left(\Omega' \cap \left\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R};\ \|x - x_0\|^2 \leqslant r,\ 0 < y_0 - y \leqslant r, \exp \frac{\|x - x_0\|^2}{4(y_0 - y)} \geqslant M\right\}\right) \geqslant \\ & \qquad \geqslant \sigma r^{n/2+1} - \frac{\omega}{\ln M} r^{n/2+1}, \qquad \forall r \in]0, 1[\,, \end{aligned}$$

essendo $\omega > 0$ dipendente solo da n. Di qui si trae

$$\begin{aligned} & m_{n+1}(\Omega' \cap P_M \cap (\boldsymbol{R}^n \times [y_0 - \lambda^k, y_0])) - m_{n+1}(\Omega' \cap P_M \cap (\boldsymbol{R}^n \times [y_0 - \lambda^{k+1}, y_0])) \geqslant \\ & \qquad \geqslant \left(\sigma - \frac{\omega}{\ln M}\right) \lambda^{k(n/2+1)} - \omega_1 (\ln M)^{n/2} \lambda^{(k+1)(n/2+1)} = \\ & \qquad\qquad = \lambda^{k(n/2+1)} \left[\sigma - \frac{\omega}{\ln M} - \omega_1 (\ln M)^{n/2} \lambda^{n/2+1}\right]; \end{aligned}$$

È possibile scegliere $M \geqslant e$ e $\lambda \in]0, 1[$ tali che

$$\sigma - \frac{\omega}{\ln M} - \omega_1 (\ln M)^{n/2} \lambda^{n/2+1} = \frac{\sigma}{2};$$

esiste allora $y \in [y_0 - \lambda^k, y_0 - \lambda^{k+1}]$ tale che

$$m_n(\Omega' \cap P_\varrho \cap (\boldsymbol{R}^n \times \{y\})) \geqslant \frac{\sigma}{2} |y - y_0|^{n/2}$$

ciò, a causa dell'osservazione precedente e della (7) prova che esiste

$c = c(a, b, \lambda, \sigma)$ per cui, se $|||z - z_0||| < 1$, riesce

$$H_{a,b}^{(\lambda)}(z; z_0) \geqslant c \int_{|||z-z_0|||}^{1} \frac{1}{t}\, dt - \frac{1}{c} = c \ln \frac{1}{|||z - z_0|||} - \frac{1}{c}$$

che è la (5).

3. – Dimostrazione del teorema.

Nel corso del paragrafo supporremo sempre $z_0 = 0 = (0, 0)$; indicheremo inoltre con $X = \boldsymbol{R}^n \times]t_1, t_2[$ una striscia di $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}$ contenente $\bar{\Omega}$.

Sia L un operatore a coefficienti di classe C^∞ e del tipo seguente

$$(1') \qquad Lu = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sum_{j=1}^{n} c_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j}\right] + \sum_{i=1}^{n} d_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial y};$$

l'equazione $Lu = 0$ ammette in X una soluzione fondamentale g verificante le disuguaglianze

$$(11) \qquad \gamma_2' K^{(a_2')}(z - \zeta) \leqslant g(z - \zeta) \leqslant \gamma_2 K^{(a_2)}(z - \zeta) \qquad \forall z, \zeta \in X,$$

dove γ_2, γ_2' e a_2, a_2' sono costanti positive dipendenti solo da $|L|$ e da X ([1]).

Per ogni t ed $M \in \boldsymbol{R}$, $0 < t < 1$ ed $M \geqslant e$, poniamo

$$B(M, t) = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R};\ |y| < t,\ \|x\|^2 < 4t \ln M\}\ (*)\,.$$

Per $t \in]0, 1[$ indichiamo con L_t l'operatore

$$L_t u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sum_{j=1}^{n} c_{i,j}(t \cdot z) \frac{\partial u}{\partial x_j}\right] + \sum_{i=1}^{n} t^{\frac{1}{2}} d_i(t \cdot z) \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

dove, se $z = (x, y)$, $t \cdot z = (t^{\frac{1}{2}} x, ty)$. Si osservi che riesce $|L_t| \leqslant |L|$ per ogni $t \in]0, 1[$.

Indichiamo con $\bar{G}(z; \zeta)$ la funzione di Green di L_t relativamente al cilindro $B(M, 1)$ e poniamo

$$G(M, t; z, \zeta) = \bar{G}(t^{-1} \cdot z, t^{-1}\zeta)\, t^{-n/2} \qquad \forall z, \zeta \in B(M, t)\,.$$

(*) Non è restrittivo supporre, come faremo sempre, $X \supseteq B(M, t)$, $\forall M \geqslant e$, $\forall t \in]0, 1[$.

Fissata $\zeta \in B(M, t)$ la funzione $z \to G(M, t; z, \zeta)$ è L-parabolica nell'aperto $B(M, t) \setminus \{\zeta\}$. Osserviamo inoltre che $G(M, t; z, \zeta) = 0$ se $z \in \partial_l B(M, t)$ oppure se $\zeta \in \partial_l B(M, t)$ $\big(\partial_l B(M, t) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R};\ \|x\|^2 = 4t \ln M,\ |y| < t\}$; inoltre $G(M, t; z, \zeta) = 0$ se $z = (x, y)$, $\zeta = (\xi, \eta)$ ed $y \leqslant \eta$.

LEMMA 1. *Sia $\lambda \in]0, 2^{-4}]$ e siano $t \in]0, 1[$ ed $M \in [e, +\infty[$. Esistono due costanti positive γ_1 ed a_1 dipendenti solo da $|L|$ tali che*

$$G(M, t; z, \zeta) \geqslant \gamma_1 K^{(a_1)}(z - \zeta) \qquad \forall z, \zeta \in B(M, \lambda t) \tag{12}$$

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $z, \zeta \in B(M, \lambda t)$ poniamo $z' = t^{-1} \cdot z$ e $\zeta' = t^{-1} \cdot \zeta$. Allora z' e $\zeta' \in B(M, \lambda)$ e

$$G(M, t; z, \zeta) = \bar{G}(z', \zeta') t^{-n/2}\,. \tag{13}$$

Poniamo adesso $B'' = \{(x'', y'') \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R};\ |y''| < 1,\ \|x''\|^2 = 2(1 + \lambda) \ln M\}$.

Osserviamo allora che per ogni $\zeta' = (\xi', \eta') \in B(M, \lambda)$ e per ogni $(x'', y'') \in B''$ riesce

$$\|\xi' - x''\| \geqslant \big(2(1 + \lambda) \ln M\big)^{\frac12} - (4\lambda \ln M)^{\frac12} \geqslant (\ln M)^{\frac12}(1 - \lambda) \equiv d$$

analogamente per ogni $z' = (x', y') \in B(M, \lambda)$ e per ogni $(x'', y'') \in B''$ riesce

$$\|x' - x''\| \geqslant d\,.$$

Riesce poi $d^2/8 = \ln M(1 - \lambda)^2/8 \geqslant \lambda$.

D'altra parte, per ogni $(x''', y''') \in B(M, 1)$ con $|||x'''||| = (4 \ln M)^{\frac12}$ e per ogni $(x'', y'') \in B''$, riesce

$$\|x''' - x''\| \geqslant (4 \ln M)^{\frac12} - \big(2(1 + \lambda) \ln M\big)^{\frac12} \geqslant (\ln M)^{\frac12}\big(2 - \sqrt{3}\big) \geqslant 2 - \sqrt{3} \equiv \delta\,.$$

Allora, per il Teorema 8 di [1] risulta

$$\bar{G}(z', \zeta') \geqslant \gamma_1 K^{(a_1)}(z' - \zeta') \qquad \forall z', \zeta' \in B(M, \lambda) \tag{14}$$

essendo $\gamma_1 = \gamma_1\big(|L_t|, \delta\big)$ ed $a_1 = a_1\big(|L_t|, \delta\big)$; ma $|L_t| \leqslant |L|$; possiamo quindi ritenere $\gamma_1 = \gamma_1\big(|L|\big)$ ed $a_1 = a_1\big(|L|\big)$.

Poichè $K^{(a_1)}(z' - \zeta') = t^{n/2} K^{(a_1)}(z - \zeta)$ da (13) e (14) segue l'asserto.

Per ogni $t \in]0, 1[$ e per ogni compatto $F \subset B(M, t)$ poniamo

$$\mathcal{C}(M, t; F) = \sup\Big\{m(F);\ m \in \mathcal{M}^+(F),\ \int_F G(M, t; z, \zeta)\, dm(\zeta) \leqslant 1\ \ \forall z \in B(M, t)\Big\}\,.$$

Ebbene:

LEMMA 2. *Per ogni $t \in]0, 1[$, per ogni $\lambda \in]0, 2^{-4}[$ e per ogni $F \subset B(M, \lambda t)$ esiste una costante positiva c dipendente solo da $|L|$ tale che*

$$\mathcal{C}(F) \leqslant c\,\mathcal{C}(M, t; F)$$

DIMOSTRAZIONE. Poichè $\bar{G}$ è la funzione di Green di L_t relativamente a $B(M, 1)$ e poichè $|L_t| \leqslant |L|$ in forza della (11) riesce

$$\bar{G}(z', \zeta') \leqslant \gamma_2 K^{(a_2)}(z' - \zeta') \qquad \forall z', \; \zeta' \in B(M, 1),$$

e quindi, poichè $K^{(a_2)}\big(t^{-1} \cdot (z - \zeta)\big) = t^{n/2} K^{(a_2)}(z - \zeta)$, risulta

$$G(M, t; z, \zeta) \leqslant \gamma_2 K^{(a_2)}(z - \zeta) \qquad \forall z, \zeta \in B(M, t)\,; \tag{15}$$

d'altra parte se $m \in \mathcal{M}^+(F)$ ed $F \subset B(M, t)$ risulta

$$K_m^{(a_2)}(z) \equiv \int\limits_{\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}} K^{(a_2)}(z - \zeta)\, dm(\zeta) \leqslant 1 \qquad \forall z \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}$$

se e solo se $K_m^{(a_2)}(z) \leqslant 1 \;\; \forall z \in B(M, t)$.

Allora dalle definizioni di $\mathcal{C}(M, t; F)$ e di $\mathcal{C}_{a_2}(F)$ si trae

$$\mathcal{C}_{a_2}(F) \leqslant \gamma_2^{-1}\, \mathcal{C}(M, t; F)\,;$$

essendo $\mathcal{C}_{a_2}$ equivalente a $\mathcal{C}$ $\big($[8], proposizione 2$\big)$ questa disuguaglianza prova l'asserto.

Se F è sottoinsieme compatto di $B(M, t)$, $t \in]0, 1[$, esiste una misura $\nu \in \mathcal{M}^+(F)$ tale che $\nu(F) = \mathcal{C}(M, t; F)$ $\big($cfr. [4]$\big)$; diremo allora che

$$v(M, t; z) = \int\limits_F G(M, t; z, \zeta)\, d\nu(\xi)\,, \qquad z \in B(M, t)$$

è un potenziale di equilibrio di F relativamente a $B(M, t)$.

LEMMA 3. *Esistono due costanti positive σ e ϱ, dipendenti solo da $|L|$, tali che, comunque si prenda un compatto F contenuto nell'insieme*

$$\left\{(\zeta, \eta) \in B\left(M, \frac{t}{2^4}\right);\; 1 \leqslant \exp \frac{\|\xi\|^2}{-4\eta} \leqslant M,\; \eta \leqslant -\frac{\lambda t}{\tau}\right\}$$

con $t \in]0, 1[$, $\lambda \in]0, 2^{-4}[$, $M \in [e, +\infty[$ *e* $\tau \in]0, \sigma M^{-\varrho}[$, *riesce*

$$v(M, t; z) \geqslant \tfrac{1}{2} v(M, t; 0) \qquad \forall z \in B(M, \lambda t).$$

DIMOSTRAZIONE. Poniamo

$$R = \inf\left\{\frac{G(M, t; z, \zeta)}{G(M, t; 0, \zeta)};\ z \in B(M, \lambda t),\ \zeta \in F\right\}.$$

Allora, per ogni $z \in B(M, \lambda t)$

$$v(M, t; z) = \int_F G(M, t; z, \zeta)\, dv(\xi) \geqslant R v(M, t; 0). \tag{16}$$

Valutiamo R. Fissato $\zeta \in F$ indichiamo con u la funzione

$$z \to \frac{G(M, t; z, \zeta)}{G(M, t; 0, \zeta)};$$

u è L-parabolica in $\{x, y) \in B(M, t); y > \eta\}$, $(\zeta = (\xi, \eta))$ e quindi anche in $B(M, |\eta|/2)$. Se $\tau < \frac{1}{2}$ riesce $B(M, \lambda t) \subset B(M, |\eta|/2)$ in quanto $\lambda t \leqslant \tau|\eta|$; inoltre, in forza della (15) e della (12),

$$\sup_{z \in B(M, |\eta|/2)} u(z) \leqslant \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \sup_{z \in B(M, |\eta|/2)} \left(\frac{y - \eta}{-\eta}\right)^{-n/2} \exp a_1 \frac{\|\xi\|^2}{4(-\eta)} \leqslant \frac{\gamma_2}{\gamma_1} M^{a_1} 2^{n/2}.$$

Allora, per il Teorema 4 di [2] (hölderianità interna delle soluzioni), per ogni $z \in B(M, \lambda t)$ si ottiene

$$|u(z) - u(0)| \leqslant c(|L|) \frac{\gamma_2}{\gamma_1} M^{a_1} 2^{n/2} \frac{(\|x\|^2 + |y|)^\delta}{|\eta|^\delta} \leqslant c'(|L|)\, M^{a_1} \left(\frac{\lambda t}{|\eta|} \ln M\right)^\delta \leqslant$$
$$\leqslant c'(|L|)\, M^{a_1} (\ln M)^\delta \tau^\delta,$$

dove δ è una certa costante positiva dipendente solo da $|L|$.

Di qui si ricava

$$R \geqslant \inf_{z \in B(M, \lambda t)} [u(0) - |u(z) - u(0)|] \geqslant 1 - c' M^{a_1} (\ln M)^\delta \tau^\delta$$

e quindi $R \geqslant \frac{1}{2}$ se $\tau \leqslant (2c' M^{a_1 + \delta})^{-1/\delta} \equiv \sigma M^{-\varrho}$. Ciò, per la (16), completa la dimostrazione.

Fissati $\lambda \in]0, 2^{-4}[$ ed $M \in [e, +\infty[$ poniamo

$$\Gamma_k^{(l)}(M) = \Omega' \cap B(M, \lambda^k) \cap \Big\{(\xi, \eta) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R};\ 1 \leqslant \exp \frac{\|\xi\|^2}{-4\eta} \leqslant$$
$$\leqslant M,\ \|\xi\|^2 < \lambda^l,\ \eta \leqslant -\lambda^{k+1}\Big\}, \qquad l \in N\,.$$

Siano poi $\nu_k \in \mathcal{M}^+(\Gamma_k^{(l)}(M))$ tale che $\nu_k(\Gamma_k^{(l)}(M)) = \mathrm{C}(M, \lambda_k^{-1}; \Gamma_k^{(l)}(M))$ e

$$v_k^{(l)}(z) \equiv v(M, \lambda^{k-1}; z) \equiv \int_{\Gamma_k^{(l)}(M)} G(M, \lambda^{k-1}; z, \zeta)\, d\nu_k(\zeta)\,, \qquad z \in B(M, \lambda^{k-1})\,,$$

un potenziale di equilibrio di $\Gamma_k^{(l)}(M)$ relativamente a $B(M, \lambda^{k-1})$. Poniamo inoltre

$$\Omega_l' = \Omega' \cap \{(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R};\ 0 \leqslant -y < \lambda^l,\ \|x\|^2 < \lambda^l\}$$

e

$$\text{(17)} \qquad \begin{cases} \Phi_l = \{v;\ v \textit{ super L-parabolica in } X,\ v \geqslant 0,\ v \geqslant 1 \textit{ su } \Omega_l'\}\,; \\ W_l = \inf\{v;\ v \in \Phi_l\}\,; \\ V_l(\zeta) = \varliminf_{z \to \zeta} W_l(z)\,, \qquad \zeta \in X\,. \end{cases}$$

Passiamo ora alla dimostrazione vera e propria del Teorema.

Procederemo a tappe.

A) *Esiste una costante positiva $D = D(|L|, \lambda)$ tale che, posto*

$$p = \textit{parte intera di } \frac{\ln M}{D}$$

riesce

$$v_{pk}^{(l)}(z) \geqslant \tfrac{1}{2} v_{pk}^{(l)}(0) \qquad \forall z \in B(M, \lambda^{p(k+1)-1})$$

(qui, e nelle successive tappe *B*, *C*, *D*, *E* ed *F*, supponiamo *L* del tipo (1′) e a coefficienti C^∞).

Infatti

$$\Gamma_{pk}^{(l)}(M) \subseteq \left\{(\xi, \eta) \in \overline{B(M, \lambda^{pk})};\ 1 \leqslant \exp \frac{\|\xi\|^2}{4(-\eta)} \leqslant M,\ \eta \leqslant -\lambda^{pk+1}\right\}$$

od anche, posto $\tau = \lambda^{p-2}$,

$$\Gamma_{pk}^{(l)}(M) \subseteq \left\{(\xi, \eta) \in B\left(M, \frac{\lambda^{pk-1}}{2^4}\right);\ 1 \leqslant \exp \frac{\|\xi\|^2}{4(-\eta)} \leqslant M,\ \eta \leqslant -\lambda^p \frac{\lambda^{pk-1}}{\tau}\right\};$$

l'affermazione discende allora dal Lemma 3.

B) Esiste $j = 1, \ldots, p$ tale che

$$\sum_{\substack{i=0 \\ pi+j \geqslant l}}^{k-1} v_{pi+j \geqslant l}^{(l)}(0) \geqslant \frac{1}{p} \sum_{i=l}^{pk} v_i^{(l)}(0);$$

non è restrittivo supporre $j = p$; allora

$$\sum_{\substack{i=1 \\ pi \geqslant l}}^{k} v_{pi}^{(l)}(0) \geqslant \frac{1}{p} \sum_{i=l}^{pk} v_i^{(l)} .$$

C) *Per ogni* $z \in B(M, \lambda^{p(k+1)-1})$ *riesce*

$$V_l(z) \geqslant 1 - \prod_{\substack{i=1 \\ pi \geqslant l}}^{k} \left(1 - \tfrac{1}{2} v_{pi}^{(l)}(0)\right) (*) . \tag{18}$$

Per semplicità supponiamo $p \geqslant l$ cosicchè la (18) diventa

$$V_l(z) \geqslant 1 - \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \tfrac{1}{2} v_{pi}^{(l)}(0)\right) . \tag{18'}$$

Proviamo anzitutto che riesce $V_l \geqslant v_p^{(l)}$ su $B(M, \lambda^{p-1})$.

Sia $v \in \Phi_l$; poichè $v_p^{(l)}$ è L-parabolica in $B(M, \lambda^{p-1}) \cap \left(\Gamma_p^{(l)}(M)\right)' \equiv \mathcal{V}_1$, la funzione $v - v_{pl}^{(l)}$ è super L-parabolica in $\mathcal{V}_1$; inoltre

$$\varliminf_{z \to \zeta} [v(z) - v_p^{(l)}(z)] \geqslant 0 \qquad \forall \zeta \in \overline{(\partial \mathcal{V}_1) \cap \{(\xi, \eta);\ \eta < \lambda^{p-1}\}}$$

in quanto su $\Gamma_p^{(l)}$ è $v \geqslant 1$ e $v_p^{(l)} \leqslant 1$ mentre se $\zeta \in \overline{\left(\partial B(M, \lambda^{p-1})\right) \cap \{(\xi, \eta); \eta < \lambda^{p-1}\}}$ è $\varliminf_{z \to \zeta} v(z) \geqslant 0$ (v è sempre $\geqslant 0$) e $\lim_{z \to \zeta} v_p^{(l)}(z) = 0$ $\left(G(M, t; z, \zeta) = 0\right.$ in ogni punto z, ζ della frontiera « parabolica » di $\left.B(M, t)\right)$.

Allora per il principio di minimo (cfr. [8], Lemma 3.4) risulta $v \geqslant v_p^{(l)}$ su $\mathcal{V}_1$ e quindi su tutto $B(M, \lambda^{p-1})$ in quanto $v \geqslant 1 \geqslant v_p^{(l)}$ su $\Gamma_p^{(l)}(M)$.

Data l'arbitrarietà di v in Φ_l ciò prova che $W_l \geqslant v_p^{(l)}$ e quindi, poichè $v_p^{(l)}$ è inferiormente semicontinua, $V_l \geqslant v_p^{(l)}$ (cfr. (17)). Per quanto provato in *A* riesce allora

$$V_l \geqslant \tfrac{1}{2} v_p^{(l)}(0) \qquad \text{su } B(M, \lambda^{2p-1}) . \tag{19}$$

(*) Se $l/p > k$ conveniamo di attribuire il valore 1 al prodotto indicato; allora, in questo caso, la disuguaglianza è ovvia.

Proviamo che è

$$\frac{V_l - \frac{1}{2}v_p^{(l)}(0)}{1 - \frac{1}{2}v_p^{(l)}(0)} \geqslant v_{2p}^{(l)} \qquad \text{su } B(M, \lambda^{2p-1})\,.$$

Sia $v \in \Phi_l$; poichè $v_{2p}^{(l)}$ è L-parabolica in $B(M, \lambda^{2p-1}) \cap (\Gamma_{2p}^{(l)}(M))' \equiv \mho_2$, la funzione $(v - \frac{1}{2}v_p^{(l)}(0))/(1 - \frac{1}{2}v_p^{(l)}(0)) - v_{2p}^{(l)} \equiv w_{2p} - v_{2p}^{(l)}$ è super L-parabolica in $\mho_2$; inoltre

$$\varliminf_{z \to \zeta} w_{2p}(z) - v_{2p}^{(l)}(z) \geqslant 0 \qquad \forall \zeta \in (\partial \mho_2) \cap \overline{\{(\xi, \eta);\ \eta < \lambda^{2p-1}\}}$$

in quanto su $\Gamma_{2p}^{(l)}(M)$ è $w_{2p} \geqslant 1$ e $v_{2p}^{(l)} \leqslant 1$ mentre su $(\partial B(M, \lambda^{2p-1})) \cap \overline{\{(\xi, \eta);\ \eta < \lambda^{2p-1}\}}$ è $v_{2p}^{(l)} = 0$ e $w_{2p} \geqslant 0$ (cfr. (19)).

Allora, per il principio di minimo, risulta $w_{2p} - v_{2p}^{(l)} \geqslant 0$ su $\mho_2$ e quindi su tutto $B(M, \lambda^{2p-1})$. Poichè v è un arbitrario elemento di Φ_l da quanto precede si trae $(V_l - \frac{1}{2}v_p^{(l)}(0)(/(1 - \frac{1}{2}v_p^{(l)}(0)) \geqslant v_{2p}^{(l)}$ su $B(M, \lambda^{2p-1})$.

Per quanto provato in A riesce allora

$$\frac{V_l - \frac{1}{2}v_p^{(l)}(0)}{1 - \frac{1}{2}v_p^{(l)}(0)} \geqslant \frac{1}{2}\, v_{2p}^{(l)}(0) \qquad \text{su } B(M, \lambda^{3p-1})$$

od anche, equivalentemente,

$$V_l \geqslant 1 - \prod_{i=1}^{2} \left(1 - \tfrac{1}{2}v_{pi}^{(l)}(0)\right). \tag{20}$$

Ora, esattamente come sopra, si può provare che riesce

$$\frac{V_l - \left(1 - \prod_{i=1}^{2}\left(1 - \frac{1}{2}\, v_{pi}^{(l)}(0)\right)\right)}{\prod_{i=1}^{2}\left(1 - \frac{1}{2}v_{pi}^{(l)}(0)\right)} \geqslant v_{3p}^{(l)} \qquad \text{su } B(M, \lambda^{3p-1})$$

e quindi, per quanto provato in A,

$$\frac{V_l - \left(1 - \prod_{i=1}^{2}\left(1 - \frac{1}{2}\, v_{pi}^{(l)}(0)\right)\right)}{\prod_{i=1}^{2}\left(1 - \frac{1}{2}v_{pi}^{(l)}(0)\right)} \geqslant \frac{1}{2}\, v_{3p}^{(l)}(0) \qquad \text{su } B(M, \lambda^{4p-1})\,,$$

od anche

$$V_l \geqslant 1 - \prod_{i=1}^{3}\left(1 - \tfrac{1}{2}v_{pi}^{(l)}(0)\right) \qquad \text{su } B(M, \lambda^{4p-1})\,.$$

Iterando il procedimento sopra descritto si ottiene la (18′).

D) Esistono a, b, β e c *positive e dipendenti solo da* $|L|$ *e da* λ *tali che*

$$1 - V_l(z) \leqslant \exp\left[-H_{a,b}^{(\lambda)}(z; z_0) + cl\right] \quad \forall z \in X, \ \forall l \in N. \tag{21}$$

Sia $h \in N$ tale che $\lambda^{-h} \leqslant M \leqslant \lambda^{-h-1}$. Per i Lemmi 1 e 2 risulta

$$v_i^{(l)}(0) = \int_{\Gamma_i^{(l)}(M)} G(M, \lambda^{i-1}; 0, \zeta)\, dv_i(\zeta) \geqslant \gamma_1 \int_{\Gamma_i^{(l)}(M)} K^{(a_1)}(-\zeta)\, dv_i(\zeta) \geqslant$$

$$\geqslant \gamma_1' \frac{v_i(\Gamma_i^{(l)}(M))}{\lambda^{i(n/2)-ha_1}} = \gamma_1' \frac{\mathcal{C}(M, \lambda^{i-1}; \Gamma_i^{(l)}(M))}{\lambda^{i(n/2)-ha_1}} \geqslant \gamma_1'' \frac{\mathcal{C}(\Gamma_i^{(l)}(M))}{\lambda^{i(n/2)-ha_1}}.$$

D'altra parte, se $i \in a_h = \{i \in N;\ 4\lambda^i h |\ln \lambda| \leqslant \lambda^l\}$ riesce $\Omega'_{h,i}(z_0, \lambda) \subseteq \Gamma_i^{(l)}(M)$; allora $v_i^{(l)}(0) \geqslant \gamma_1'' \mathcal{C}(\Omega'_{h,i}(z_{0}, \lambda))\, \lambda^{-i(n/2)+ha_1}$.
Scegliamo ora $a > a_1$; utilizzando la B ed osservando che è $i \geqslant l$ se $i \in a_h$, si ha:

$$\sum_{i=1, i\in a_h}^{pk} \frac{\mathcal{C}(\Omega'_{h,i}(z_0; \lambda))}{\lambda^{i(n/2)-ha}} \leqslant \frac{|\ln \lambda|}{\gamma_1''} (h+1)\, \lambda^{h(a-a_1)} \frac{\sum_{i=l}^{pk} v_i^{(l)}(0)}{\ln M} \leqslant \frac{h}{\gamma_1'''} \lambda^{h(a-a_1)} \sum_{i=1, pi\geqslant l}^{k} v_{pi}^{(l)}(0),$$

e quindi, per la (18),

$$\ln\left(1 - V_l(z)\right) \leqslant \sum_{i=1, pi\geqslant l}^{k} \ln\left(1 - \tfrac{1}{2} v_{pi}^{(l)}(0)\right) \leqslant -\sum_{i=1}^{k} \tfrac{1}{2} v_{pi}^{(l)}(0) \leqslant$$

$$\leqslant -\gamma_1''' \frac{\lambda^{h(a_1-a)}}{2h} \sum_{i=1, i\in a_h}^{pk} \frac{\mathcal{C}(\Omega'_{h,i}(z_0; \lambda))}{\lambda^{i(n/2)-ha}}$$

per ogni $z \in B(M, \lambda^{p(k+1)-1})$.

Si osservi ora che, essendo $p =$ *parte intera di* $\ln M/D$, risulta $B(M', \lambda^{p'(k+1)-1}) \subseteq B(M, \lambda^{p(k+1)-1})$ se $p < p'$ e $k \geqslant k_1 \equiv |\ln \lambda|/D$; inoltre, poichè la precedente disuguaglianza è valida per ogni $M \geqslant e$ in essa possiamo sostituire M con λ^{-j} per $j = 1, \ldots, h-1$; dopo di ciò, sommando in j si ottiene

$$\left(\sum_{j=1}^{h} 2j \frac{\lambda^{(a-a_1)j}}{\gamma_1'''}\right) \ln\left(1 - V_l(z)\right) \leqslant -\sum_{j=1}^{h} \sum_{i=1, i\in a_j}^{pk} \frac{\mathcal{C}(\Omega'_{j,i}(z_0; \lambda))}{\lambda^{i(n/2)-ja}}$$

per ogni $z \in B(M, \lambda^{p(k+1)-1})$ e per ogni $k \geqslant k_1$. Di qui, posto $\beta' = \left[\sum_{j=1}^{\infty} 2j \lambda^{(a-a_1)j}/\gamma_1'''\right]^{-1}$, si trae

$$\ln\left(1 - V_l(z)\right) \leqslant -\beta' \sum_{j \leqslant \ln M/|\ln \lambda|} \ \sum_{i \leqslant pk, i\in a_j} \frac{\mathcal{C}(\Omega'_{j,i}(z_0; \lambda))}{\lambda^{i(n/2)-ja}}$$

per ogni $z \in B(M, \lambda^{p(k+1)-1})$, $k \geqslant k_1$.

D'altra parte esiste una costante $c_1 = c_1(\lambda)$ tale che per ogni $i \notin a_j$ risulta $i \leqslant c_1[l + \ln j]$; ricordando che $\mathcal{C}(\Omega'_{j,i}(z_0;\lambda))\lambda^{-i(n/2)+ja} \leqslant c_2 j^{n/2}\lambda^{ja}$, riesce

$$\sum_{j\leqslant \ln M/|\ln\lambda|}\ \sum_{i\leqslant pk, i\notin a_j} \frac{\mathcal{C}(\Omega'_{j,i}(z_0;\lambda))}{\lambda^{i(n/2)-ja}} \leqslant c_3 \sum_{j=1}^{\infty}[l+\ln j]j^{n/2}\lambda^{aj} \leqslant c_4 l\,.$$

Allora

$$\ln\big(1 - V_l(z)\big) \leqslant -\beta' \sum_{j\leqslant \ln M/|\ln\lambda|}\ \sum_{i\leqslant pk} \frac{\mathcal{C}(\Omega'_{j,i}(z_0;\lambda))}{\lambda^{i(n/2)-a}} + \beta' c_4 l$$

per ogni $z \in B(M, \lambda^{p(k+1)-1})$, $k \geqslant k_1$.

Sia ora $z = (x, y)$ un arbitrario punto di X. Se esiste $k \in N$, $k \geqslant k_1$, tale che $\lambda^{p(k+2)-1} \leqslant |||z|||^2 \leqslant \lambda^{pk-1}$ risulta $pk \geqslant [z]_\lambda + 1 - 2p \geqslant [z]_\lambda - (2/D^2)\ln M|\ln\lambda|$ (*) e quindi, per la disuguaglianza precedente,

$$\ln\big(1 - V_l(z)\big) \leqslant -\beta' \sum_{j\leqslant \ln M/|\ln\lambda|}\ \sum_{i\leqslant [z]_\lambda - (2/D^2)\ln M|\ln\lambda|} \frac{\mathcal{C}(\Omega'_{j,i}(z_0;\lambda))}{\lambda^{i(n/2)-ja}} + \beta' c_4; \tag{22}$$

se $|||z|||^2 > \lambda^{pk_1-1}$ riesce $[z]_\lambda - (2/D^2)|\ln\lambda|\ln M < pk_1 - 1 - (2/D^2)\ln M|\ln\lambda| < 0$ e quindi la somma doppia al secondo membro sparisce; d'altra parte $\ln\big(1 - V_\lambda(z)\big) \leqslant 0$ per ogni $z \in X$; possiamo quindi ritenere valida la (22) anche in questo caso. In definitiva (22) è vera per ogni $z \in X$ e per ogni $M \geqslant \lambda^{-1}$; posto $b = D^2/2|\ln\lambda|^2$ riesce pertanto

$$\ln\big(1 - V_\lambda(z)\big) \leqslant -\beta' \sup_{T\geqslant 2/D^2|\ln\lambda|_2}\ \sum_{j\leqslant bT}\ \sum_{i\leqslant [z]_\lambda - T} \frac{\mathcal{C}(\Omega'_{j,i}(z_0;\lambda))}{\lambda^{i(n/2)-ja}} + \beta' c_4 l$$

e quindi, per la Proposizione 1, l'asserto.

E) Poniamo

$$W = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1 - V_l}{d^l} \qquad \text{con } d = 2\exp[c]\,.$$

Poichè ogni V_l è L-parabolica in Ω ([3]) anche W è L-parabolica in Ω ([8], Proposizione 1).

Si ha

$$W(z) \leqslant \exp[-\beta H^{(\lambda)}_{a,b}(z;z_0)] \sum_{l=1}^{\infty} (\tfrac{1}{2})^l = \exp[-\beta H^{(\lambda)}_{a,b}(z;z_0)]$$

per ogni $z \in X$.

(*) Non è restrittivo supporre $D \leqslant 1$.

F) Sia $z = (x, y) \in X$ e poniamo $R = |||z|||$; consideriamo poi V_l per $\lambda^l \in]0, R^2/2[$. Posto $\bar{\zeta} = (0, -\frac{3}{2}\lambda^l)$ e ricordando che, per la soluzione fondamentale g di $Lu = 0$ in X, vale la (11), riesce

$$\inf_{\zeta \in \Omega'_l} g(\zeta; \bar{\zeta}) \geqslant \gamma'_2 \inf_{\zeta \in \Omega'_l} K^{(a'_2)}(\zeta - \bar{\zeta}) \geqslant c^{-1} \lambda^{-l(n/2)}$$

con c indipendente da l; la funzione $\zeta \to c\lambda^{l(n/2)} g(\zeta, \bar{\zeta})$ è, pertanto, un elemento di Φ_l; allora $V_l \leqslant c\lambda^{l(n/2)} g(\cdot, \bar{\zeta})$ e quindi, ancora per (1.1)

$$V_l(z) \leqslant c\gamma_2 \lambda^{l(n/2)} K^{(a_2)}(z - \bar{\zeta}) \leqslant c' \lambda^{l(n/2)} |||z - \bar{\zeta}|||^{-n} \leqslant c'' \lambda^{l(n/2)} R^{-n} = c'' \left(\frac{\lambda^l}{R^2}\right)^{n/2}.$$

Dunque

$$V_l(z) \leqslant c'' \left(\frac{\lambda^l}{|||z|||^2}\right)^{n/2} \qquad \text{se } \lambda^l < \frac{|||z|||^2}{2};$$

indichiamo con $j(z)$ il più piccolo numero naturale per cui $\lambda^l < |||z|||^2/2$ e $c''(\lambda^l/|||z|||^2)^{n/2} \leqslant 1/2$; se W è la funzione introdotta in E, si ha:

$$W(z) \geqslant \sum_{l=j(z)+1}^{\infty} \frac{1 - V_l(z)}{d^l} \geqslant \sum_{j=j(z)+1}^{\infty} \frac{1 - \frac{1}{2}}{d^l} \geqslant c_1 \frac{|||z|||^\varrho}{1 + |||z|||^\varrho}$$

per ogni $z \in X$ (c_1 e ϱ sono costanti positive che dipendono solo da $|L|$ e da λ).

F') Sia ora L un operatore del tipo (1′) a coefficienti misurabili; indichiamo con $L^{(\varepsilon)}$, $\varepsilon \in]0, 1[$, l'operatore che si ottiene da L mollificandone i coefficienti mediante la funzione $\zeta \to \varepsilon^{-n-1} J(\zeta/\varepsilon)$, essendo $J \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R})$, $J \geqslant 0$, $\int_{\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}} J(\zeta)\, d\zeta = 1$. $L^{(\varepsilon)}$ è un operatore a coefficienti C^∞ e, per ogni $\varepsilon \in]0, 1[$, $|L^{(\varepsilon)}| \leqslant 1 + |L|$. Se $W^{(\varepsilon)}$ è la funzione introdotta in E relativamente ad $L^{(\varepsilon)}$, esistono una funzione WL-parabolica in Ω ed una successione $\varepsilon_j \downarrow 0$ tali che $W(z) = \lim_{j \to \infty} W^{(\varepsilon_j)}(z)$ $\forall z \in \Omega$ (cfr. [8], Lemma 3.2). Allora, per quanto provato in E ed in F,

$$c_1 \frac{|||z|||^\varrho}{1 + |||z|||^\varrho} \leqslant W(z) \leqslant \exp[-\beta H^{(\lambda)}_{a,b}(z; z_0)] \qquad \forall z \in \Omega. \tag{23}$$

G) Sia $\varphi \in C(\partial\Omega)$ e sia W la funzione introdotta in F'. Fissato $t \in]0, 1[$ poniamo:

$$M(\varphi) = \sup_{\zeta \in \partial\Omega} |\varphi(\zeta) - \varphi(0)|, \qquad \omega(\varphi, t) = \operatorname*{osc}_{\partial\Omega \cap \{|||z||| \leqslant t\}} \varphi, \qquad w(t) = \inf_{\Omega \cap \{|||z||| \geqslant t\}} W.$$

Proviamo che riesce

$$|H^{\Omega}_{\varphi}(z) - \varphi(0)| \leqslant \omega(\varphi, t) + \frac{M(\varphi)}{w(t)} W(z) \qquad \forall z \in \Omega,\ \forall t \in]0, 1[\,.$$

La funzione $z \to u(z) = \omega(\varphi, t) + \varphi(0) + W(z) M(\varphi)/w(t)$ è L-parabolica in Ω.
Per ogni $\zeta \in \partial\Omega$ si ha

$$\varliminf_{\Omega \ni z \to \zeta} u(z) \geqslant \begin{cases} \varphi(0) + M(\varphi) \geqslant \varphi(\zeta) & \text{se } |||\zeta||| > t\,, \\ \omega(\varphi, t) + \varphi(0) \geqslant \varphi(\zeta) & \text{se } |||\zeta||| \leqslant t\,. \end{cases}$$

Allora, per definizione di H^{Ω}_{φ}, $H^{\Omega}_{\varphi} \leqslant u$ e quindi

$$H^{\Omega}_{\varphi} - \varphi(0) \leqslant \omega(\varphi, t) + \frac{M(\varphi)}{w(t)} W\,. \tag{24}$$

Analogamente è $H^{\Omega}_{-\varphi} + \varphi(0) \leqslant \omega(-\varphi, t) + M(\varphi) W/w(t)$ e quindi, poichè $H^{\Omega}_{-\varphi} = -H^{\Omega}_{\varphi}$ e $\omega(-\varphi, t) = \omega(\varphi, t)$

$$H^{\Omega}_{\varphi} - \varphi(0) \geqslant -\omega(\varphi, t) - \frac{M(\varphi)}{w(t)} W\,.$$

Questa disuguaglianza e la (24) provano l'asserto.

H) Quanto provato in F' e G assicura che per ogni $\varphi \in C(\partial\Omega)$ riesce

$$|H^{\Omega}_{\varphi}(z) - \varphi(0)| \leqslant c[\omega(\varphi, t) + \sup|\varphi| t^{-\varrho} \exp\left(-\beta H^{(\lambda)}_{a,b}(z; z_0)\right)] \tag{25}$$

per ogni $z \in \Omega$ e per ogni $t \in]0, 1[$. In forza della Proposizione 1 la (25) è valida per ogni $\lambda \in]0, 1[$.

I) Il procedimento adottato per provare la (25) nel caso di operatori del tipo (1′) si può utilizzare, con alcune semplici modifiche, anche nel caso di operatori del tipo (1).

Si osservi infatti che il procedimento suddetto non è applicabile nel caso di operatori del tipo (1), per il solo fatto che per essi le funzioni costanti non sono L-paraboliche.

Basta allora scegliere una funzione s L-parabolica nella striscia X tale che $s_2 \leqslant s \leqslant s_1$, con s_2 ed s_1 costanti positive dipendenti solo da $|L|$ e da X, e ragionare sulle funzioni u/s con u L-parabolica (abbiamo fatto ricorso allo stesso espediente anche in [8], paragrafo 4).

Si può allora provare che esiste una funzione W, L-parabolica in Ω per la quale riesce

$$c_2 \frac{|||z|||^\varrho}{1+|||z|||^\varrho} \leqslant W(z) \leqslant c_1 \exp[-\beta_1 H^{(\lambda)}_{a.b}(z;z_0)] \quad \forall z \in \Omega\,, \tag{26}$$

con c_1, c_2, β_1 e ϱ dipendenti solo da $|L|$ e da X.

Sia ora h una funzione L-parabolica in X tale che, se indichiamo rispettivamente con n_1 ed n_2 gli estremi inferiore e superiore di h su Ω, risulti $1/c \geqslant n_2 \geqslant n_1 \geqslant c > 0$ essendo c una costante dipendente solo da $|L|$ e da X. Se φ è un'arbitraria funzione continua su $\partial\Omega$ poniamo, per ogni $t \in]0,1[$,

$$w(t) = \inf_{\Omega \cap \{|||z||| \geqslant t\}} W \quad \text{e} \quad \tilde{M}(\varphi) = \sup_{\zeta \in \Omega} \left| \varphi(\zeta) - \frac{\varphi(0)}{h(0)} h(\zeta) \right|;$$

consideriamo poi la funzione

$$z \to u(z) = \left[\omega\left(\frac{\varphi}{h}, t\right) + \frac{\varphi(0)}{h(0)}\right] h(z) + \tilde{M}(\varphi) \frac{W(z)}{w(t)}$$

(ω ha il significato precisato in G).

La funzione u è L-parabolica in Ω ed inoltre, per ogni $\zeta \in \partial\Omega$,

$$\varliminf_{z \to \zeta} u(z) \geqslant \varphi(\zeta)\,.$$

Allora, ragionando come in G, si ottiene

$$|H^\Omega_\varphi(z) - \varphi(0)| \leqslant \left[\omega\left(\frac{\varphi}{h}, t\right) + \frac{\varphi(0)}{h(0)} - \frac{\varphi(0)}{h(z)}\right] h(z) + \tilde{M}(\varphi) \frac{W(z)}{w(t)}$$

per ogni $z \in \Omega$; d'altra parte poichè h è hölderiana in X esistono c_2 ed α dipendenti solo da $|L|$ (e da X) tali che $|h(z) - h(0)| \leqslant c_2 |||z|||^\alpha$ $\forall z \in \Omega$; dalla precedente disuguaglianza si trae pertanto

$$|H^\Omega_\varphi(z) - \varphi(0)| \leqslant c_3 \left[\omega(\varphi, t) + \sup_{\partial\Omega} |\varphi| (t^\alpha + |||z|||^\alpha) + \tilde{M}(\varphi) \frac{W(z)}{w(t)}\right]$$

per ogni $z \in \Omega \big(c_3 = c_3(|L|)\big)$.

In definitiva, utilizzando la (26) ed il fatto che $|||z|||^\alpha \leqslant c \exp[-\gamma H^{(\lambda)}_{a.b}(z;z_0)]$, risulta:

$$|H^\Omega_\varphi(z) - \varphi(0)| \leqslant c_4 \{\omega(\varphi, t) + \sup |\varphi| t^\alpha + \sup |\varphi| t^{-\varrho} \exp[-\beta H^{(\lambda)}_{a.b}(z;z_0)]\}$$

per ogni $t \in]0,1[$ e per ogni $z \in \Omega$.

BIBLIOGRAFIA

[1] D. G. ARONSON, *Non negative solutions of linear parabolic equations*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa (1969).

[2] D. G. ARONSON - J. SERRIN, *Local behavior of solutions of quasi linear parabolic equations*, Archive for Rat. Mech. and Anal., **25** (1967).

[3] H. BAUER, *Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie*, Lecture Notes in Math., **22**, Springer-Verlag, 1966.

[4] B. FUGLEDE, *On the theory of potential in locally compact spaces*, Acta Math., **103** (1960).

[5] O. D. KELLOG, *Recent progress with the Dirichlet problem*, Bull. Am. Math. Soc., **32** (1926).

[6] O. A. LADYZENSKAJA - V. A. SOLONNIKOV - N. N. URAL'CEVA, *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*, Trans. of Math. Monographs, **23** (1968).

[7] E. LANCONELLI, *Sul problema di Dirichlet per l'equazione del calore*, Ann. di Mat. pura e appl., **97** (1973).

[8] E. LANCONELLI, *Sul problema di Dirichlet per equazioni paraboliche del secondo ordine a coefficienti discontinui*, Ann. di Mat. pura e appl. (in corso di stampa).

[9] A. A. NOVRUSOV, *Sul modulo di continuità della soluzione del problema di Dirichlet nei punti di frontiera regolari*, Mat. Zam., **12**, n. 1 (1972) (in russo).

[10] N. S. TRUDINGER, *Pointwise estimates and quasilinear parabolic equations*, Comm. Pure and Appl. Math., **21** (1968).