ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

JACQUES ROBERT

Équations d'évolution paraboliques fortement non linéaires

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 1, nº 3-4 (1974), p. 247-259

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1974_4_1_3-4_247_0>

Equations d'évolution paraboliques fortement non linéaires.

JACQUES ROBERT

Les équations d'évolution variationnelles non linéaires de la forme:

$$Lu + Au = f \qquad (u \in V,\ f \in V')$$

ont été étudiées par un grand nombre d'auteurs: F. Browder [4], J. L. Lions [8], J. L. Lions et W. A. Strauss [9], H. Brézis [2], C. Bardos et H. Brézis [1].

Les hypothèses utilisées sont généralement les suivantes: V est un espace de Banach *réflexif*, $L: D(L) \subset V \to V'$ une application linéaire, monotone, fermée, avec $D(L)$ dense dans V, et A une application de V dans V', de type monotone, bornée et coercive sur V.

Lorsqu'on applique ces résultats aux équations aux dérivées partielles paraboliques variationnelles, l'hypothèse de réflexivité de V contraint à se restreindre aux équations dont les coefficients ont une croissance à l'infini de type puissance.

Pour atteindre des croissances de type exponentiel (ou plus rapide encore) il faut utiliser des espaces de Sobolev-Orlicz qui ne sont *pas réflexifs*. De plus, l'application A n'est pas définie sur tout l'espace, n'est pas de type monotone (au sens de H. Brézis) et n'est ni bornée, ni coercive.

On se propose d'étudier ici de tels problèmes, dits *fortement non linéaires*. Pour cela, on suppose que L est liée à un semi-groupe convenable d'opérateurs, et on utilise une méthode d'approximations analogue à celle de C. Bardos et H. Brézis. On établit un théorème général d'existence dans un espace de Banach non réflexif en supposant que A est pseudo-monotone au sens introduit par J. P. Gossez [7] et que L vérifie une condition de compatibilité faible (cf. [11]). On vérifie ensuite que ce théorème s'applique à des problèmes fortement non linéaires, par exemple du type:

$$\frac{du}{dt} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \exp\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right) + u \exp u^2 = f\,,$$

en utilisant les espaces de Sobolev-Orlicz inhomogènes (cf. [5]).

(*) Faculté des Sciences (Mathématiques), 25030 Besançon, Cedex.
Pervenuto alla Redazione il 19 Febbraio 1974.

1. – Théorème d'existence.

On considère un espace de Banach réel V, dont on désigne par V' et V'' le dual fort et le bidual fort, et qui possède les propriétés suivantes:

V_1) *Il existe un espace de Hilbert réel* H (que l'on identifiera à son dual fort) *tel que l'on ait les inclusions*:

$$V \subset H \subset V',$$

chaque injection étant continue et à image dense. On a alors aussi:

$$V'' \subset H \subset V'$$

chaque injection étant continue. Si on note i l'injection de H dans V' et j l'injection de V dans V', leurs transposées $i^T\colon V'' \to H$ et $j^T\colon V'' \to V'$ sont continues pour les topologies faibles.

V_2) *Pour tout* $u \in V''$ *et tout* $v \in V''$, *on a*:

$$\langle u, j^T v\rangle_{V'',V'} = \langle i^T u, i^T v\rangle_{H,H}\,.$$

On considère ensuite deux semi-groupes d'opérateurs $\{T_d(s), s \geqslant 0\}$ et $\{T_g(s), s \geqslant 0\}$ fortement continus dans V et possédant les trois propriétés suivantes:

G_1) *Les semi-groupes adjoints* $\{T_d^*(s), s \geqslant 0\}$ et $\{T_g^*(s), s \geqslant 0\}$ *sont fortement continus dans* V'. Alors, les semi-groupes $\{T_d^{**}(s), s \geqslant 0\}$ et $\{T_g^{**}(s), s \geqslant 0\}$ sont faiblement continus dans V''.

G_2) *On a, pour tout* $s \geqslant 0$:

$$T_g^*(s)\circ j = j \circ T_g(s)\,.$$

On a alors aussi:

$$j^T \circ T_d^{**}(s) = T_g^*(s)\circ j^T\,.$$

G_3) *Pour tout* $s \geqslant 0$ *et tout* $v \in V''$:

$$\|i^T \circ T_d^{**}(s)\, v\|_H \leqslant \|i^T v\|_H\,.$$

On désigne par G_d et G_g les générateurs infinitésimaux forts des semigroupes $\{T_d(s), s \geqslant 0\}$ et $\{T_g(s), s \geqslant 0\}$ et par G_d^* et G_g^* les générateurs infinitésimaux forts de $\{T_d^*(s), s \geqslant 0\}$ et $\{T_g^*(s), s \geqslant 0\}$.

On considère alors l'application L de $D(L) \subset V''$ dans V' définie par:

$$D(L) = \{u \in V'' / j^T u \in D(G_g^*)\}$$

et, pour tout $u \in D(L)$:

$$Lu = -G_g^* \circ j^T u .$$

DÉFINITION 1.1. *On dira que l'application $L: D(L) \subset V'' \to V'$ est faiblement compatible avec V'' relativement à V si, quel que soit $u \in V''$, il existe une suite $\{v_n, n \in N\} \subset D(L) \cap V$, dite « suite de compatibilité associée à u », telle que*:

i) $u = \sigma(V'', V') - \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$

ii) $\limsup \langle v_n - u, Lv_n \rangle \leqslant 0$.

DÉFINITION 1.2. Une application $A: D(A) \subset V'' \to V'$ est dite *pseudo-monotone* par rapport à V (cf. [7]) si elle vérifie les deux conditions suivantes:

PM_1) $V \subset D(A)$ et la restriction de A à tout sous-espace de dimension finie V_i de V est continue de V_i dans V' muni de la topologie $\sigma(V', V)$.

PM_2) Pour tout filtre borné $\{u_i, i \in I\}$ de V tel que $u = \sigma(V'', V') - \lim u_i$, $\chi = \sigma(V', V) - \lim Au_i$ et $\limsup \langle u_i, Au_i \rangle \leqslant \langle u, \chi \rangle$, on a $u \in D(A)$, $\chi = Au$ et $\lim \langle u_i, Au_i \rangle = \langle u, Au \rangle$.

DÉFINITION 1.3. *On dira qu'une application $A: D(A) \subset V'' \to V'$ est pseudo-bornée et précoercive s'il existe une famille croissante $\{X_r, r > 0\}$ de parties X_r de V'', convexes, $\sigma(V'', V')$-compactes et contenant O, telle que $V \subset \bigcup\limits_{r>0} X_r \subset D(A)$ et*:

i) *Pour tout $r > 0$, $A(X_r)$ est borné dans V'.*

ii) *Pour tout $f \in V'$, il existe $r > 0$ tel que, pour tout $u \in V$ avec $u \notin V \cap X_r$, on a*:

$$\langle u, Au - f \rangle > 0 .$$

THÉORÈME 1.3. *Soit $A: D(A) \subset V'' \to V'$ une application pseudomonotone par rapport à V, pseudo-bornée et précoercive. Si l'application $L: D(L) \subset V'' \to V'$ définie ci-dessus est faiblement compatible avec V'' relativement à V, alors, quel que soit $f \in V'$, il existe $u \in D(A) \cap D(L)$ tel que*:

$$Lu + Au = f .$$

DÉMONSTRATION: i) Soit $s > 0$. On pose, pour tout $u \in V''$:

$$L_s u = \frac{1}{s}\left(j^T u - T_g^*(s) j^T u\right) .$$

L'application L_s: $V'' \to V'$ est linéaire et continue, donc bornée. De plus, utilisant les propriétés G_2) et V_2), on a, pour tout $u \in V''$:

$$\langle u, L_s u\rangle = \frac{1}{s}\langle u, j^T\big(u - T_d^{**}(s)u\big)\rangle_{V'',V'} = \frac{1}{s}\langle i^T u, i^T\big(u - T_d^{**}(s)u\big)\rangle_{H,H} ,$$

d'où:

$$\langle u, L_s u\rangle \geqslant \frac{1}{s}\left(\|i^T u\|_H^2 - \|i^T u\|_H \, \|i^T T_d^{**}(s)u\|\right)_H .$$

Il résulte alors de la propriété G_3) que L_s est monotone. De plus, j^T étant continue pour les topologies faibles et $T_g^*(s)$ continue pour $\sigma(V', V)$, L_s est continue pour les topologies $\sigma(V'', V')$ et $\sigma(V', V)$. Donc, si $u = \sigma(V'', V')$ — — $\lim u_i$ et $\chi = \sigma(V', V) - \lim L_s u_i$, on a $\chi = L_s u$. De la monotonie de L_s résulte que:

$$\liminf \langle u_i, L_s u_i\rangle \geqslant \liminf \langle u, L_s u_i\rangle .$$

Or:

$$\langle u, L_s u_i\rangle = \frac{1}{s}\langle i^T u, i^T\big(u_i - T_d^{**}(s)u_i\big)\rangle_{H,H} .$$

Des continuités faibles de $T_d^{**}(s)$ et i^T, on déduit:

$$\liminf \langle u_i, L_s u_i\rangle \geqslant \langle u, L_s u\rangle .$$

Il en résulte que L_s est pseudo-monotone par rapport à V. Comme L_s est bornée, $L_s + A$ est une application pseudo-monotone de $D(A) \subset V''$ dans V' par rapport à V (cf. [7]).

ii) Soit $\mathfrak{F}$ le filtre ordonné croissant des sous-espaces vectoriels V_i de V dont la dimension est finie, j_i l'injection canonique de V_i dans V et j_i^* la transposée. L'application B_s: $v_i \to j_i^*(L_s + A)j_i v_i - j_i^* f$ est continue de V_i dans V_i d'après la propriètè PM_1) des applications pseudo-monotones. De plus, utilisant la propriété ii) des applications pseudo-bornées et précoercives, il existe X_r tel que l'ensemble $X_{i,r} = X_r \cap V_i$ est convexe, compact et contient O, et pour tout $v_i \in V_i$ avec $v_i \notin X_{i,r}$, on a:

$$\langle v_i, B_s v_i\rangle = \langle j_i v_i, L_s j_i v_i\rangle + \langle j_i v_i, A j_i v_i - f\rangle > 0 .$$

Alors, d'après H. Brézis (cf. [2], th. 11), il existe $v_i \in X_{i,r}$ tel que $B_s v_i = 0$, et donc:

$$j_i^*(L_s + A)j_i v_i = j_i^* f . \tag{1}$$

On pose alors $u_i = j_i v_i$. On a $\{u_i\} \subset X_r$, et puisque X_r est $\sigma(V'', V')$-compact, il existe un filtre plus fin, encore noté $\{u_i\}$, et $u_s \in X_r$ tels que $u_s = \sigma(V'', V') - \lim_i u_i$. De (1) résulte alors que

$$f = \sigma(V'', V') - \lim_i (L_s + A) u_i \qquad \text{et} \qquad \lim_i \langle u_i, (L_s + A) u_i \rangle = \langle u, f \rangle .$$

D'après la propriété PM_2) des applications pseudo-monotones, on a donc

$$u_s \in X_r \qquad (L_s + A) u_s = f . \tag{2}$$

iii) On fait tendre s vers 0 par valeurs positives. On a $\{u_s, s > 0\} \subset X_r$, X_r $\sigma(V'', V')$-compact et $A(X_r)$ borné d'après la propriété i) des applications pseudo-bornées et précoercives. Il existe donc un filtre plus fin, encore noté $\{u_s\}$, $u \in X_r$ et $\chi \in V'$ tels que:

$$\begin{cases} u = \sigma(V'', V') - \lim\limits_{s \to 0} u_s , \\ \chi = \sigma(V', V) - \lim\limits_{s \to 0} A u_s . \end{cases} \tag{3}$$

Quel que soit $v \in V$, on a, en utilisant (2):

$$\frac{1}{s} \langle v, j^T u - T_g^*(s) j^T u \rangle + \langle v, A u_s \rangle = \langle v, f \rangle$$

ou encore:

$$\frac{1}{s} \langle u, j(v - T_g(s) v) \rangle + \langle v, A u_s \rangle = \langle v, f \rangle .$$

On déduit de (3) et de la continuité forte de $\{T_g(s), s \geqslant 0\}$:

$$\forall v \in D(G_g) \quad - \langle u, j G_g(v) \rangle + \langle v, \chi \rangle = \langle v, f \rangle ,$$

ce qui entraîne:

$$j^T u \in D(G_g^*) \qquad \text{et} \qquad - G_g^* o j^T u = f - \chi .$$

On a donc:

$$u \in D(L) \qquad \text{et} \qquad Lu + \chi = f .$$

iv) Il reste à vérifier que $\chi = Au$. En utilisant la monotonie de L_s, on obtient pour tout $v \in V$:

$$\langle u_s - v, Au_s \rangle = \langle u_s - v, f - L_s u_s \rangle \leqslant \langle u_s - v, f \rangle - \langle u_s - v, L_s v \rangle$$

d'où:

$$\langle u_s, Au_s \rangle \leqslant \langle v, Au_s \rangle + \langle u_s - v, f \rangle - \frac{1}{s} \langle u_s - v, j^T v - T_g^*(s) j^T v \rangle .$$

On a alors, pour tout $v \in D(L) \cap V$:

$$\limsup_s \langle u_s, Au_s \rangle \leqslant \langle v, \chi \rangle + \langle u - v, f \rangle - \langle u - v, Lv \rangle .$$

En particulier, si $\{v_n\}$ est une suite de compatibilité associée à u:

$$\limsup_s \langle u_s, Au_s \rangle \leqslant \langle v_n, \chi \rangle + \langle u - v_n, f \rangle + \langle v_n - u, Lv_n \rangle ,$$

et on en déduit:

$$\limsup_s \langle u_s, Au_s \rangle \leqslant \langle u, \chi \rangle . \tag{4}$$

On déduit de (3), (4), et de la pseudo-monotonie de A que $u \in D(A)$ et $\chi = Au$. ✦

2. – Applications.

Soient $I = [0, T]$ un intervalle fermé borné de $\boldsymbol{R}$, Ω un sous-ensemble ouvert borné de $\boldsymbol{R}^n$ dont la frontière $\partial\Omega$ est lipschitzienne, et $Q = I \times \Omega$. On se propose de montrer que les résultats précédents permettent l'étude d'équations d'évolution associées à un opérateur $L = d/dt$ de dérivation (par rapport à $t \in I$) au sens des distributions vectorielles, et à un opérateur A associé à une forme variationnelle:

$$a(u, v) = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \iint_Q A_\alpha\Big(t, x, \big(D_x^\beta u(t, x)\big)_{0 \leqslant |\beta| \leqslant m}\Big) D_x^\alpha v(t, x)\, dt\, dx ,$$

où les coefficients A_α ont pour chaque $(t, x) \in I \times \Omega$ une croissance de type exponentiel. La forte croissance des coefficients conduit à utiliser des espaces de Sobolev-Orlicz.

a) Espaces d'Orlicz.

On appelle *fonction de Young* M toute application convexe, injective de $\boldsymbol{R}^+$ dans $\boldsymbol{R}^+$ telle que $M(u)/u \to 0$ (resp. $+\infty$) lorsque $u \to 0$ (resp. $+\infty$).

EXEMPLES: $|u|^p/p$ avec $1 < p < +\infty$, $(1+|u|)\operatorname{Log}(1+|u|)-|u|$,

$$\exp|u|-|u|-1\,,\qquad \exp u^2-1\,,\qquad u^2\exp(u^2)\,.$$

L'application polaire $M^*: \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}^+$ définie par:

$$M^*(v)=\sup_{u\geqslant 0}\big(uv-M(u)\big)$$

est aussi une fonction de Young, et $M^{**}=M$.

Soit G un sous-ensemble borné de $\boldsymbol{R}^p$, mesurable pour la mesure de Lebesgue. On note $\mathfrak{M}(G)$ l'ensemble des classes d'équivalence (pour la relation d'égalité presque partout sur G) d'applications mesurables de G dans $\boldsymbol{R}$.

On appelle *classe d'Orlicz associée à M et G* l'ensemble convexe

$$C_M(G)=\Big\{u\in\mathfrak{M}(G)\Big/\int_G M[|u(x)|]\,dx<+\infty\Big\}\,,$$

et *espace d'Orlicz* $L_M(G)$ l'ensemble:

$$L_M(G)=\Big\{u\in\mathfrak{M}(G)/\exists\alpha>0:\int_G M[\alpha|u(x)|]\,dx<+\infty\Big\}$$

muni de la norme:

$$\|u\|=\operatorname{Inf}\Big\{k>0:\int_G M\Big[\frac{|u(x)|}{k}\Big]\,dx\leqslant 1\Big\}\,,$$

pour laquelle $L_M(G)$ est un espace de Banach.

On note $E_M(G)$ le sous-espace fermé de $L_M(G)$ défini par:

$$E_M(G)=\Big\{u\in\mathfrak{M}(G)/\forall\alpha>0:\int_G M[\alpha|u(x)|]\,dx<+\infty\Big\}\,.$$

$E_M(G)$ est un espace de Banach séparable dont le dual topologique fort est isomorphe à $L_{M^*}(G)$, la forme bilinéaire de dualité étant:

$$(u,v)\to\int_G u(x)\,v(x)\,dx\,.$$

On dira que la fonction de Young *M est de type* (PE_2) (puissance-exponentielle dominant u^2) si elle vérifie les deux conditions suivantes:

i) Il existe $u_0>0$ et $k>0$ tels que, pour tout $u\geqslant u_0$, on a:

$$M^*(2u)\leqslant kM^*(u)\,.$$

ii) Il existe $u_1 > 0$, c et h positifs tels que, pour tout $u \geqslant u_1$, on a:

$$u^2 \leqslant cM(ku) .$$

Si M est de type (PE_2), on a les inclusions:

$$E_M(G) \subset L_2(G) \subset E_{M^*}(G) = L_{M^*}(G)$$

chaque injection étant continue et à image dense.

EXEMPLES: $|u|^p/p$ avec $p \geqslant 2$, $\exp|u| - |u| - 1$, $\exp u^2 - 1$, $u^2 \exp u^2$ sont de type (PE_2).

Par contre $|u|^p/p$ avec $1 < p < 2$ et $M(u) = (1 + |u|)\operatorname{Log}(1 + |u|) - |u|$ ne sont pas de type (PE_2).

b) Espaces de Sobolev-Orlicz sur Ω (cf. [6]).

Soit Ω un sous-ensemble ouvert borné de $\boldsymbol{R}^n$ dont la frontière $\partial\Omega$ est lipschitzienne, et $m \in \boldsymbol{N}$. On appelle espace de Sobolev-Orlicz $W^m L_M(\Omega)$ (resp. $W^m E_M(\Omega)$) l'ensemble des $u \in \mathfrak{M}(\Omega)$ tels que, pour tout $\alpha \in \boldsymbol{N}^n$ avec $0 \leqslant |\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leqslant m$, la dérivée partielle $D^\alpha u$, prise au sens des distributions de $\mathfrak{D}'(\Omega)$, appartient à $L_M(\Omega)$ (resp. $E_M(\Omega)$). L'ensemble $W^m L_M(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme:

$$\|u\| = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha u\|_{L_M(\Omega)} ,$$

et il est isomorphe à son image par $h\colon u \to (D^\alpha u)_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m}$ dans $[L_M(\Omega)]^{c(m)}$ où $c(m) = \operatorname{card}\{\alpha \in \boldsymbol{N}^n / 0 \leqslant |\alpha| \leqslant m\}$.

$W^m E_M(\Omega)$ est un sous-espace de Banach de $W^m L_M(\Omega)$ isomorphe à son image par h dans $[E_M(\Omega)]^{c(m)}$, et il est donc séparable. Le dual topologique fort de $W^m E_M(\Omega)$ est isomorphe à l'espace quotient de $[L_{M^*}(\Omega)]^{c(m)}$ par l'orthogonal de $W^m E_M(\Omega)$ dans la dualité entre $[E_M(\Omega)]^{c(m)}$ et $[L_{M^*}(\Omega)]^{c(m)}$.

Lorsque la fonction de Young M est de type (PE_2), le dual fort de $W^m E_M(\Omega)$ est séparable, et le bidual fort est isomorphe à $W^m L_M(\Omega)$. La forme de dualité entre $W^m L_M(\Omega)$ et $(W^m E_M(\Omega))'$ est donnée par:

$$\langle u, f \rangle = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \int_\Omega D^\alpha u(x) f_\alpha(x)\, dx$$

où $(f_\alpha)_\alpha$ est un représentant quelconque de $f \in (W^m E_M(\Omega))'$ dans $[E_{M^*}(\Omega)]^{c(m)}$.

De plus, on a les inclusions:

$$W^m E_M(\Omega) \subset W^m L_2(\Omega) \subset \big(W^m E_M(\Omega)\big)'$$

chaque injection étant continue et à image dense.

c) Espaces de Sobolev-Orlicz inhomogènes sur Q.

Soit $I = [0, T]$ un intervalle fermé borné de $\boldsymbol{R}$. On pose $Q = I \times \Omega$. On appelle espaces de Sobolev-Orlicz inhomogènes sur Q, et on note $W_x^m L_M(Q)$ (resp. $W_x^m E_M(Q)$) l'ensemble des $u \in \mathfrak{M}(Q)$ telles que, pour tout $\alpha \in \boldsymbol{N}^n$ avec $0 \leqslant |\alpha| \leqslant m$, la dérivée partielle $D_x^\alpha u$ par rapport à la seule variable x, prise au sens des distributions de $\mathcal{D}'(\mathring{Q})$, appartienne à $L_M(Q)$ (resp. $E_M(Q)$). Ce sont des espaces de Banach pour la norme

$$\|u\| = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \|D_x^\alpha u\|_{L_M(Q)},$$

et $W_x^m E_M(Q)$ est séparable. Lorsque M est de type (PE_2), les propriétés de dualité sont analogues à celles indiquées pour les espaces de Sobolev-Orlicz sur Ω.

d) Espaces V, V' et V''.

On désigne par $\mathring{W}^m E_M(\Omega)$ la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^m E_M(\Omega)$. On considère alors un sous-espace vectoriel fermé W de $W^m E_M(\Omega)$ tel que:

$$\mathring{W}^m E_M(\Omega) \subset W \subset W^m E_M(\Omega),$$

et on désigne par *V la fermeture de $L^\infty(I) \otimes W$ dans $W_x^m E_M(Q)$*. Son dual topologique fort est isomorphe à l'espace quotient de $[L_{M^*}(Q)]^{c(m)}$ par l'orthogonal de V dans la dualité entre $[E_M(Q)]^{c(m)}$ et $[L_{M^*}(Q)]^{c(m)}$. Lorsque la fonction M est de type (PE_2), V' est séparable et V'' est isomorphe à un sous-espace de $W_x^m L_M(Q)$. La forme bilinéaire de dualité entre V'' et V' est donnée, pour tout $u \in V''$ et $f \in V'$ admettant $(f_\alpha)_{|\alpha| \leqslant m}$ comme représentant dans $[E_{M^*}(Q)]^{c(m)}$, par:

$$\langle\!\langle u, f \rangle\!\rangle = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \iint_Q D_x^\alpha u(t, x) f_\alpha(t, x)\, dt\, dx .$$

On vérifie aisément:

PROPOSITION 2.1. *Si M est de type (PE_2), l'espace V vérifie les propriétés V_1) et V_2) de la première partie avec $H = L_2(Q)$.*

e) Semi-groupes de translations.

Soit $s \geqslant 0$. On désigne par $T_d(s)$ (resp. $T_g(s)$) l'opérateur qui, à toute application u de Q dans $\boldsymbol{R}$ fait correspondre l'application $T_d(s)u$ (resp. $T_g(s)u$) définie sur Q par:

$$T_d(s)u(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant t < s \leqslant T \\ u(t-s,x) & \text{si } s \leqslant t \leqslant T \end{cases}$$

$$\left(\text{resp. } T_g(s)u(t,x) = \begin{cases} u(t+s,x) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant T-s \\ 0 & \text{si } T-s < t \leqslant T \end{cases}\right).$$

On vérifie aisément:

PROPOSITION 2.2. *Si M est de type (PE_2), les familles $\{T_d(s), s \geqslant 0\}$ et $\{T_g(s), s \geqslant 0\}$ induisent dans V des semi-groupes fortement continus possédant les propriétés G_1), G_2) et G_3) de la première partie.*

f) Application L.

On montre (cf. [11]) que V' est inclus dans $L^1(I, W')$, ce qui permet de donner un sens à l'expression « $f \in V'$ est dérivable dans $\mathfrak{D}'(\mathring{I}, W')$ et sa dérivée df/dt appartient à V' », puis, en utilisant un théorème de Brézis-Bénilan (cf. [3]) de montrer que si $f \in V'$ et $df/dt \in V'$ il existe un représentant de f dans $L^1(I, W')$ qui est continu de I dans W', et donc de donner un sens à $f(0)$. On montre alors, par un procédé classique:

PROPOSITION 2.3. *Si M est de type (PE_2), l'application L associée aux semi-groupes précédents est définie par:*

$$\begin{cases} D(L) = \left\{ u \in V'' \Big/ \dfrac{d}{dt} j^T u \in V' \text{ et } j^T u(0) = 0 \right\} \\ Lu = \dfrac{d}{dt} j^T u\,. \end{cases}$$

PROPOSITION 2.4. *Si M est de type (PE_2), l'application L est faiblement compatible avec V'' relativement à V.*

DÉMONSTRATION. La démonstration est longue (cf. [11]). On se contente donc d'en donner le principe. Pour tout $u \in V''$, on construit une suite $\{u_n\} \subset D(L)$, $\sigma(V'', V')$-convergente vers u et telle que, pour tout $n \in \boldsymbol{N}$, on ait:

$$\langle\!\langle u_n - u, Lu_n \rangle\!\rangle \leqslant 0\,.$$

Puis, on montre que pour tout $v \in D(L)$, il existe une suite $\{v_m\} \subset D(L) \cap V$ telle que

$$v = \sigma(V'', V') - \lim_{m \to \infty} v_m \qquad \text{et} \qquad Lv = V' - \lim_{m \to +\infty} Lv_m .$$

La proposition en résulte alors aisément. ✦

g) Application A.

Soit $m \in \boldsymbol{N}^*$ et $c(m) = \operatorname{card}\{\alpha \in \boldsymbol{N}^n / 0 \leqslant |\alpha| \leqslant m\}$. On considère une famille $(A_\alpha)_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m}$ d'applications de $I \times \Omega \times \boldsymbol{R}^{c(m)}$ dans $\boldsymbol{R}$, continues sur $\boldsymbol{R}^{c(m)}$ pour presque tout $(t, x) \in I \times \Omega$, mesurables sur $Q = I \times \Omega$ pour tout $u \in \boldsymbol{R}^{c(m)}$, et vérifiant les deux conditions suivantes:

(PB) Pour tout $\alpha \in \boldsymbol{N}^n$, vérifiant $0 \leqslant |\alpha| \leqslant m$, il existe $a_\alpha \in L^1(Q)$ et $b_\alpha > 0$ tels que, pour presque tout $(t, x) \in I \times \Omega$ et tout $u = (u_\beta) \in \boldsymbol{R}^{c(m)}$, on a:

$$M^*\Big(\big|A_\alpha(t, x, (u_\beta)_{|\beta| \leqslant m})\big|\Big) \leqslant a_\alpha(t, x) + b_\alpha \sum_{|\beta| \leqslant m} M(|u_\beta|);$$

(PC) Il existe $\psi \in L^1(Q)$, et pour tout $\alpha \in \boldsymbol{N}^n$ vérifiant $0 \leqslant |\alpha| \leqslant m$, il existe $g_\alpha \in E_{M^*}(Q)$ et $c_\alpha > 0$ tels que, pour presque tout $(t, x) \in I \times \Omega$ et tout $(u_\beta) \in \boldsymbol{R}^{c(m)}$, on a:

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m} [A_\alpha(t, x, (u_\beta)_{|\beta| \leqslant m}) - g_\alpha(t, x)] u_\alpha \geqslant \sum_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha M(|u_\alpha|) - \psi(t, x) .$$

On désigne par $D(A)$ l'ensemble des $u \in V''$ tels que, pour tout $v \in V$, la « forme variationnelle »

$$a(u, v) = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \iint_Q A_\alpha\Big(t, x, (D_x^\beta u(t, x))_{|\beta| \leqslant m}\Big) D_x^\alpha v(t, x)\, dt\, dx$$

soit définie et l'application linéaire $v \to a(u, v)$ soit continue de V dans $\boldsymbol{R}$. On désigne par A l'application de $D(A)$ dans V' qui, à tout $u \in D(A)$ fait correspondre l'unique élément de V', noté Au, tel que l'on ait:

$$\forall v \in V \qquad a(u, v) = \langle\!\langle v, Au \rangle\!\rangle .$$

Pour tout $r > 0$, l'ensemble:

$$X_r = \Big\{u \in V'' / \forall \alpha,\ 0 \leqslant |\alpha| \leqslant m : \iint_Q M[D_x^\alpha u(t, x)]\, dt\, dx \leqslant r\Big\}$$

est convexe, $\sigma(V'', V')$-compact, et contient 0. (Il ne faut pas croire que X_r est une boule fermée de V'').

PROPOSITION 2.5. *Si M est de type (PE_2), l'application A est pseudo-bornée et précoercive.*

DÉMONSTRATION. On déduit de la propriété (PB) que l'on a $V \subset \bigcup_{r>0} X_r \subset D(A)$ et que $A(X_r)$ est borné dans V'. On déduit ensuite de (PC) que pour tout $f \in V'$, il existe $r > 0$ tel que $\langle\langle u, Au - f\rangle\rangle > 0$ pour tout $u \in V \cap \left(\bigcup_{r>0} X_r\right)$ et $u \notin V \cap X_r$.

Pour le détail des calculs, cf. [11].

Pour pouvoir appliquer le théorème 1.3, il suffit de supposer, en plus, que A est pseudo-monotone par rapport à V. Par une démonstration analogue à celle de J. P. Gossez [7], on vérifiera qu'il en est ainsi, lorsqu'on suppose vérifiée la condition suivante:

(M) Pour tout $(u_\beta)_{|\beta|\leqslant m} \in \boldsymbol{R}^{c(m)}$ et tout $(v_\beta)_{|\beta|\leqslant m} \in \boldsymbol{R}_{c(m)}$, on a:

$$\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} [A_\alpha(t, x, (u_\beta)_{|\beta|\leqslant m}) - A_\alpha(t, x, (v_\beta)_{|\beta|\leqslant m})](u_\alpha - v_\alpha) \geqslant 0 \,.$$

On peut obtenir des conditions moins fortes en utilisant dans les espaces de Sobolev-Orlicz inhomogènes un lemme de compacité analogue à celui de J. P. Aubin.

REMARQUE. On vérifie que si $u \in V''$, alors pour presque tout $t \in I$, l'application partielle $u(t, \cdot)$ appartient à W''. Ceci permet, en utilisant la caractérisation des espaces de traces des espaces de Sobolev-Orlicz, étudiée par M. Th. Lacroix [10], d'interpréter les conditions aux bords $\partial\Omega$ vérifiées par la solution de l'équation $Lu + Au = f$.

EXEMPLE: Soit $M(u) = u^2 \exp u^2$, $W = \mathring{W}^1 E_M(\Omega)$ et V la fermeture de $L^\infty(I) \otimes W$ dans $W_x^m E_M(Q)$. Quel que soit $f \in E_{M^*}(Q)$, il existe $u \in V''$ solution du problème de Dirichlet:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \exp\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right) + u \exp u^2 = f & \big((t, x) \in I \times \Omega\big) \\ u(0, x) = 0 & (\text{au sens de } j^T u(0) = 0) \\ u(t, \cdot) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega & (\text{au sens des traces sur } \partial\Omega)\,. \end{cases}$$

On pourra de même obtenir des solutions du problème de Neumann ou de problèmes mixtes en prenant $W = W^1 E_M(\Omega)$, ou $\mathring{W}^1 E_M(\Omega) \subset W \subset W^1 E_M(\Omega)$.

REFERENCES

[1] C. Bardos - H. Brezis, *Sur une classe de problèmes d'évolution non linéaires*, Journal of Diff. Equat., **6** (1969), pp. 345-394.

[2] H. Brezis, *Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité*, Annales Institut Fourier, **18** (1968), pp. 115-175.

[3] H. Brezis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, Cours de 3è cycle, Paris, 1971.

[4] F. Browder, *Non linear initial value problems*, Annals of Math., **82** (1965), pp. 51-87.

[5] T. Donaldson, *Inhomogeneous Orlicz-Sobolev spaces and non linear parabolic initial value problems*, J. of Diff. Eq., **16** (1974), pp. 201-256.

[6] A. Fougeres, Thèse, Besançon.

[7] J. P. Gossez, *Non linear elliptic boundary value problems for equations with rapidly increasing coefficients*, Trans. Am. Math. Soc., **190** (1974), pp. 163-205.

[8] J. L. Lions, *Sur certaines équations paraboliques non linéaires*, Bull. Soc. Math. Fr., **93** (1965), pp. 155-175.

[9] J. L. Lions - W. Strauss, *Some non linear evolution equations*, Bull. Soc. Math. Fr., **93** (1965), pp. 43-96.

[10] M. Th. Lacroix, *Espaces de traces des espaces de Sobolev-Orlicz et applications*, J. Math. pures et appl., **53** (1974), pp. 439-458.

[11] J. Robert, *Inéquations variationnelles paraboliques fortement non linéaires*, J. Math. pures et appl., **53** (1974), pp. 299-321.