ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

A. HIRSCHOWITZ

Entre les hypersurfaces et les ensembles pseudoconcaves

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 27, nº 4 (1973), p. 873-887

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1973_3_27_4_873_0>

ENTRE LES HYPERSURFACES ET LES ENSEMBLES PSEUDOCONCAVES

par A. HIRSCHOWITZ

En hommage au Professeur KARL STEIN
à l'occasion de son soixantième anniversaire

0. Introduction.

Le problème qui nous tourmente est le suivant: Peut-on décrire les complèmentaires d'ensembles pseudoconvexes en termes d'hypersurfaces? Voici une variante précise de ce problème: Soit K un compact connexe de Stein du plan projectif $\mathbb{P}_2$. Existe-t-il une courbe algébrique de $\mathbb{P}_2$ ne rencontrant pas K?

Au cours de ce travail, nous rencontrons d'autres visages de ce problème sans toutefois apporter le moindre élément de réponse positive.

Au paragraphe 1, on montre qne pour qu'un ensemble fermé pseudoconcave soit une hypersurface, il faut et il suffit que sa $(2n-2)$-mesure de Hausdorff soit localement finie, n désignant la dimension complexe de l'espace ambiant.

Au paragraphe 2, on donne quelques propriétés élémentaires des limites d'hypersurfaces, ou limaces. Les limaces méritent d'être étudiées puisqu'on montre au paragraphe 3 que pour qu'un ouvert de Stein d'une variété de Stein soit méromorphiquement convexe, il faut et il suffit que son complémentaire soit une limace. Emportés par notre élan, nous étudions au paragraphe 4 les ouverts μ-convexes d'une variété de Stein V: il s'agit des ouverts dans lesquels les fonctions méromorphes se laissent approcher uniformément sur les compacts au voisinage desquels elles sont holomorphes par des fonctions méromorphes dans V. Enfin, dans le paragraphe 5, on

Pervenuto alla Redazione il 20 Gennaio 1973.

montre conformément à une conjecture que m'a très gentiment suggérée le Professeur Karl Stein, que pour que l'ouvert U méromorphiquement convexe dans la variété de Stein V soit μ-convexe dans V, il faut et il suffit que $H_2(U, \mathbb{R})$ s'injecte dans $H_2(V, \mathbb{R})$. Il convient ici de rendre au père de César ce qui revient : c'est en effet Adrian Douady qui m'a expliqué pourquoi cette condition est nécessaire. Vous me voyez ravi de l'en remercier.

1. Ensembles pseudoconcaves.

Rappelons (voir par exemple Nishino [9]) la

DEFINITION (1.1). Soit X une variété analytique complexe. Un fermé C de X est pseudoconcave si son complémentaire est un ouvert pseudoconvexe [cf. Hormander [7] § 2.6).

En fait, nous nous intéressons surtout aux fermés localement pseudoconcaves; au demeurant, si X est un ouvert de $\mathbb{C}^n$, les deux notions coincident.

Rappelons maintenant que si X est un espace compact métrisable on munit l'ensemble $F'(X)$ des fermés non vides de X d'une structure d'espace métrisable compact en posant

$$D(F_1, F_2) = \sup_{i=1,2} \ \sup_{x \in F_i} \ \inf_{y \in F_{3-i}} d(x, y)$$

où d désigne une distance définissant la topologie de X (cf Alexandroff et Hopf [1] chap II, § 5). Maintenant si X est un espace localement compact métrisable dénombrale à l'infini, on munit l'ensemble $F(X)$ de tous les fermés de X d'une structure d'espace metrisable compact en l'identifiant à l'ensemble des fermés contenant l'infini dans le compactifié d'Alexandroff de X : en effet, ce compactifié d'Alexandroff est métrisable (cf. Bourbaki [3]).

Nous utiliserons cela dans le cas où X est une variété de Stein et nous utiliserons surtou le critère suivant : pour que la suite F_n de fermés converge vers F, il faut et il seffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

1°) Pour tout compact K de $X - F$, il existe un entier N tel que pour $n > N$, on ait $K \cap F_n = \Phi$.

2°) Pour tout point x de F, il existe une suite x_n tendant vers x et telle que pour tout n, x_n appartienne à F_n.

Donnons à présent quelques propriétés de stabilité des ensembles localement pseudoconcaves.

PROPOSITION (1.2). L'adhérence de la réunion d'une famille de fermés localement pseudoconcaves est localement pseudoconcave. Toute intersection décroissante et toute limite d'ensembles localement pseudoconcaves est localement pseudoconcave. La démonstration découle sans difficulté des propriétés correspondantes des ouverts localement pseudocanvexes (cf. [7]).

PROPOSITION (1.3). Soit C un sous ensemble fermé da X tel que le germe de C en tout point de C contienne le germe non vide d'un ensemble pseudoconcave. Alors C est localement pseudoconcave.

DEMONSTRATION. La chose ètant locale, on peut supposer que X est la boule unité B de $\mathbb{C}^n$. Raisonnons alors par l'absurde. On sait qu'il existe sous l'hypothese absurde, une application analytique φ du polydisque P défini par:

$$P = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1| \leq 1 \text{ et } |z_2| \leq 1\}$$

dans B qui envoie

$$\{(z_1, z_2) \in P \mid |z_2| = 1 \text{ ou } z_1 = 0\}$$

dans $B - C$ et qui envoie un point x au moins dans C. Choisissons (α, β) dans P de façon que:

1^0) $(\alpha, \beta) \in C$, avec $|\alpha| < 1$ et $|\beta| < 1$.

2^0) $|\alpha'| < |\alpha| \Longrightarrow \varphi(\alpha', z) \notin C$.

3^0) $|\beta'| > |\beta| \Longrightarrow \varphi(\alpha, \beta') \notin C$.

Un tel (α, β) existe parce est $\varphi^{-1}(C)$ est compact. Comme $\varphi(\alpha, \beta)$ est dans C, il admet un voisinage ouvert U contenant un ensemble pseudoconcave C' contenu dans C et passant par $\varphi(\alpha, \beta)$. L'ouvert $\varphi^{-1}(U)$ est un voisinage de (α, β) dans lequel $\varphi^{-1}(C')$ est pseudoconcave.

Choisissons ε de façon que $\varphi^{-1}(U)$ contienne l'ensemble

$$P' = \{(z_1, z_2) \in P \mid |z_1 - \alpha| < \varepsilon \text{ et } |z_2 - \beta| < \varepsilon\}$$

et posons $C'' = P' \cap \varphi^{-1}(C')$.

Définissons alors ϱ par $\varrho(z) = -\operatorname{Log} d\left(C'', \left(\left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right)\alpha, z\right)\right)$.

Cette fonction ϱ est plurisousharmonique pour $|z - \beta| < \varepsilon$. A cause du choix de α et de β, elle atteint son maximun pour $z = \beta$ sans être constante, ce qui est absurde. Cqfd.

Voici maintenant le résultat principal de ce paragraphe.

THEOREME [1.4]. Soit U ouvert de $\mathbb{C}^n$ et C un ensemble pseudoconcave dans U. Pour que C soit une hypersurface, il faut et il suffit que sa $(2n-2)$-mesure de HAUSDORFF soit localement finie dans U.

DEMONSTRATION. On peut supposer que U est la boule unité B_1 de $\mathbb{C}^n$. que C est fermé dans B_1 et que $\mu_{2n-2}(C)$ est fini, et montrer que C est une hypersurface au voisinage de 0.

Considérons la projection canonique π de $B_1 - B_{1/2}$ sur $\mathbb{P}_{n-1}$ Elle est lipschitzienne de rapport K dès qu'on munit $\mathbb{P}_{n-1}$ d'une métrique naturelle. Posons $\Sigma_p = B_{\frac{p}{p+1}} - B_{\frac{p-1}{p}}$. Si π resteinte à $C \cap \Sigma_p$ est surjective, on conclut

$$\mu_{2n-1}(C \cap \Sigma_p) \geq \frac{\mu_{2n-2}(\mathbb{P}_{n-1})}{K}$$

Comme $\mu_{2n-2}(C \bigcap_{p \geq 2} (U \Sigma_p))$ est fini, il existe p tel que π restreinte à $C \cap \Sigma_p$ ne soit pas surjective. On peut tracer un cercle γ de rayon inférieur à 1, centré à l'origine dans une droite complexe et ne rencontrant pas C. On peut alors choisir de nouvelles coordonnées de façon que :

$$\gamma = \{z \in B_1 \mid z_1 = \ldots = z_{n=1} = 0, |z_n| = 1\},$$

que C soit fermé dans le nouveau polycylindre unité P et ne rencontre pas le compact

$$M = \{z \in P \| z_1| \leq 1, \ldots, |z_{n-1}| \leq 1, |z_n| = 1\}.$$

Posons $C' = C \cap P$. Notons maintenant p la projection de C' sur l'yperplan H d'équation $z_n = 0$. C'est ici qu'on utilise l'hypothése sur $\mu_{2n-2}(C')$ pour conclure, à l'aide d'un énoncé général (cf. Federer [4]) que l'ensemble des points de H où la fibre de ϱ est infinie est de mesure de LEBESGUE nulle. Son complémentarie dans $P \cap H$ n'étant pas de mesure nulle, n'est pas polaire (de capacité nulle au sens de NISHINO). D'apres NISHINO (cf. [9]), il en résulte que C' est une hypersuperfaces dans P. Cqfd.

Signalons enfin qu'un exemple de STOLZENBERG, sur lequel nous revenons dans un instant montre qu'un sous-ensemble pseudoconcave de la boule unité de $\mathbb{C}^n$ ne contient pas nécessairement une hypersurface. Cet exemple montre que si on espère décrire les ensemples pseudoconcaves en terms d'hypersurfaces, il faut introduire les...

2. Limaces.

DEFINITION (2.1). On appelera limace de X toute limite dans X d'une famille d'hypersurfaces. Comme l'ensemble des fermés de X est métrisable, toute limace est une limite d'une suite d'hypersurfaces.

EXEMPLES (2.2). Dans $\mathbb{C}^2$, l'hypersurface H_n d'équation $z_2 = z_1^n$ tend vers une limite

$$L = \{ \{z_1, z_2\} \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1| = 1\} \cup \{ (z_1, z_2) \mathbb{C}^2 \mid |z_1| < 1, z_2 = 0\}.$$

STOLZENBERG (cf. [12] donne l'exemple d'une limace de la boule unité de $\mathbb{C}^2$ qui ne contient aucun germe d'hypersurfaces.

Pour ce qui est de la stabilité, les limaces n'ont rien à envier a personne.

PROPOSITION (2.3). La limite d'une suite convergente de limaces est encore une limace. En particulier toute intersection décroissante de limaces est una limace. L'adhérence d'une réunion quelconque de limaces est une limace.

DEMONSTRATION. La primière affirmation résulte du fait que l'esemble des fermés d'un ensemble métrisable localment compact dénombrable à l'infini est métrisable.

Pour démontrer la dernière affirmatio de l'énoncé, il suffit de remarquer que l'adhérence de la réunion est la limite des réunions finies. Cqfd.

REMARQUE (2.5). On peut introduire le faisceau $\mathcal{F}$ des parties fermées dans X. C'est un faisceau d'espaces topologiques. La proposition (1.2) dit, entre autres, que le faisceau $\mathcal{P}$ des fermés localement pseudoconcavesdans X est un sous faisceau fermé de $\mathcal{F}$. Le faisceau $\mathcal{H}$ des hypersurfaces, quant a lui, n'est pas un sous faisceau fermé de $\mathcal{P}$. Le sous préfaisceau fermé associé est le préfaisceau $\mathcal{L}$ des limaces. Malheureusement ce n'est pas un faisceau comme en témoigne une exemple dû à Oka (cf. [10]), et constitué d'une limace L de $\mathbb{C}^2$ et une hypersurface principale H de $\Omega = \mathbb{C}^2 - L$.

Cette hyperfurface H a deux composantes connexes H_1 et H_2, $\bar{H}_1 \cap \bar{H}_2$ est vide, et Oka montre que $L \cup H_1$ n'est pas une limace. Mais au voisinage de tout point, $L \cup H_1$ coincide soit avec L soit avec $L \cup H$, si bien que $L \cup H_1$ est localement limace. Les notations d'Oka sont $\Omega = (\Gamma, \Gamma')$ et $H_1 = (\sigma)$.

REMARQUE (2.6). La construction du sous faisceau fermé engendré par $\mathcal{H}$ doit. à priori, se faire à l'aide d'un nombre tranfini d'étapes, il serait bien agréable de savoir si on peut réaliser cette construction en un nombre fini d'étapes.

REMARQUE (2.7). Dans l'exemple de la remarque (2.5), l'ensemble localement limace envisagé contient une limace. On peut toujours espérer que ce phénomène soit général dans les ouverts de $\mathbb{C}^n$. Mais pas dans n'importe quelle variété : Soit T un tore de dimension deux sans diviseurs et U un ouvert convexe daus le domaine d'une carte de T, le complémentaire de U est localement limace et ne contient aucune limace puisqu'il n'y a pas de limaces dans T.

REMARQUE (2.8). Soit H l'hypersurface de $\mathbb{C}^2$ d'équation $z_1 z_2 = 0$ et h l'hypersurface de $\mathbb{C}^2 - H$ paramétrée par $z_1 = e^t, z_2 = e^{it}$. Bien entendu, d'après la proposition (1.3), HUh est pseudoconcave. Le raisonnement de K STEIN dans [11] permet de montrer qne HUh n'est pas localemeut limace en zéro. Ceci donne donc un exemple d'ensemble pseudoconcave qui n'est pas localement limace. On peut cependant remarquer que cet ensemble contienn un ensemble localement limace non vide. On peut bien sûr se demauder si ce phénomène est général.

3. Onvert meromorphiquemont convexes.

Les paragraphes 3 et 4 prolongent un travail antérieur (cf. [6]).

DEFINITION (3.1). Soit X une variété. On dira que l'ouvert de STEIN U de X est méromorphiquement convexe si toute fonction holomorphe dans U est limite uniforme sur les compacts de U de fonctions méromorphes dans X. On dira aussi que (U, X) est une paire méromorphiquement convexe.

EXEMPLE (3.2). On a montré dans [6] que si X est une variété de STEIN ou une variété grassmaunienne, par exemple, et si H est une hypersurface de X, alors $X - H$ est méromorphiquement convexe.

REMARQUE (3.3). Les naïfs ont pu croire un moment que le phénoméne décrit ci-dessus se produisait sur une variété X quelconqne. En fait HOWARD (cf. [8]) a donné l'exemple d'une surface S admettant une hypersurface H et pas de fonctions méromorphes ; et telle que $S - H$ soit de STEIN.

PROPOSITION (3.4). Dans une variétè de STEIN, l'intérieur d'une intersection quelconque d'ouverts de STEIN méromorphiquement convexes est méromorphiquement convexe, toute réunion croissante et toute limite d'ouverts de STEIN méromorphiquement convexes est méromorphiquemente convexe. Si U est méromorphiquement convexe de STEIN dans X et si V est de STEIN dans X, alors $U \cap V$ est méromorphiquement convexe dans V. Si U_1 et U_2 sont respectivement de STEIN et méromorphiquement convexe dans les variétés de STEIN X_1 et X_2, alors $U_1 \times U_2$ est méromorphiquement convexe dans $X_1 \times X_2$.

Cette proposition est une conséquence facile du théorème qui suit puisque, grâce à lui, on se ramène à montrer les propriétés correspondantes des limaces. Le lecteur pourra vérifier que la démonstration ne présente alors aucune difficulté.

THEOREME (3.5). Soit V_2 une variété de STEIN. Pourqu'un ouvert de STEIN V_1 soit méromorphiquement convexe dans V_2, il faut et il suffit que son complémentaire soit une limace de V_2.

DÉMONSTRATION : Le travail est largement préparé dans [6]. Rappelons que si Ω est une variété de STEIN et K un compact de Ω, on note ${}_hK_\Omega$ l'ensemble des points z de Ω tels que toute hypersurface de Ω passant par z rencontre K et on note ${}_HK_\Omega$ l'ensemble des points z de Ω tels que toute hypersurface principale de Ω passant par z rencontre K. On montre dans [6] que ${}_hK_\Omega$ et ${}_HK_\Omega$ sont compacts. On y montre aussi que si M est un voisinage compact de K, alors ${}_hM_\Omega$ est un voisinage de ${}_hK_\Omega$. Notons que ce lemme est le seul point où on utilise le fait que Ω soit lisse.

Enfin on montre dans [6] que dans les conditions de l'énoncé, les conditions suivantes sont équivalents :

(i) V_1 est méromorphiquement convexe dans V_2.

(ii) Pour tout compact K de V_1, ${}_hK_{V_1}$ contient ${}_hK_{V_2}$.

(iv) Pour tout compact K de V_1 $V_1 \cap {}_hK_{V_2}$ est compact.

Si on note (l) la condition : $V_2 - V_1$ est une limace, il nous suffit de montrer que (ii) $\Longrightarrow$ (l) $\Longrightarrow$ (iv).

(ii) $\Longrightarrow$ (l). Nous allons montrer que $V_2 - V_1$ est une réunion de limaces après quoi il nous suffira d'appliquer la proposition (2.3). Soit donc x dans $V_2 - V_1$. Considérons une suite exhaustive $K^{(n)}$ de compacts de V_1. Le compact ${}_hK^{(n)}_{V_2}$, contenu dans ${}_HV^{(n)}_{V_1}$ est contenu dans V_1. On peut donc choisir une hypersurface h_n passant par x sans rencontrer $K^{(n)}$. De la suite h_n, on peut extraire une sous suite convergente. La limite est manifestement une limace passant par x et contenue dans $V_2 - V_1$. (l) $\Longrightarrow$ (iv). Nous montrerons plus précisement que ${}_hK_{V_2}$ est contenu dans V_1. Choisissons une voisinage compact M de K dans V_1. On sait que ${}_hM_{V_1}$ est un voisinage de ${}_hM_{V_2}$. Soit x dans $V_2 - V_1$: nous allons montrer que x n'est pas intérieur à ${}_hM_{V_2}$. Soit h_n une suite d'hypersurfaces tendant vers $V_2 - V_1$, et choisissons x_n dans h_n de façon que x_n tende vers x. Pour n suffisamment grand, h_n ne recontre pas M, donc x_n est hors de ${}_hM_{V_2}$. Il en résulte que x n'est pas interieur à ${}_hM_{V_2}$. Cqfd.

4. Ouverts μ-convexes.

DEFINITION (4.1). Soit X une variété. On dira qu'un ouvert de STEIN U de X est μ-convexe si toute fonction méromorphe dans U peut être approchée uniformément sour tout compact au voisinage duquel elle est holomorphe par des fonctions méromorphes dans X. On dira aussi que (U, X) est une paire μ-convexe.

EXAMPLES (4.2). Tout ouvert de $\mathbb{C}$ est μ-convexe. On verra au para. graphe suivant une condition topologique suffisante pour qu'un ouvert méromorphiquement convexe soit μ-convexe.

REMARQUE (4.3). La stabilité des ouverts μ-convexes est beacoup moins bonne que celle des ouverts méromorphiquement convexes. Pour des raisons évidentes, une réunion croissante d'ouverts μ-convexe. En revanche, intersection d'ouverts de STEIN μ convexs n'est pas μ-convexe en général : ainsi dans $\mathbb{C}^2$, $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ et $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ sont μ-convexes et leur intersection ne l'est pas. De la même façon, $\mathbb{C}^*$ est μ-convexe dans $\mathbb{C}$, mais $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ ne l'est pas dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

Pour pouvoir expliquer deux exemples douadiques, il nous faut montrer la:

PROPOSITION (4.4). Identifions $\mathbb{C}^n$ à $\mathbb{R}^n + i\,\mathbb{R}^n$ et munissons $\mathbb{R}^n$ de la métrique euclidienne. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et d_U la distance au complémentaire de U dans $\mathbb{R}^n$. Alors, $\widehat{U} = \{x + iy \in \mathbb{C}^n \mid ||y|| < d_U(x)\}$ est un ouvert de STEIN méromorphiquement convexe dans $\mathbb{C}^n$. En outre le foncteur $U \to \widehat{U}$ commute aux intersections quelconques.

DEMONSTRATION. La fonetion $Re\, \Sigma z_i^2$ est plurisousharmonique dans $\mathbb{C}^n$; l'ensemble C des points où olle est négative est un ouvert de STEINet de RUNGE dans $\mathbb{C}^n$. C'est à FORTIORI un ouvert mèromorhiquement convexe. Mais $\widehat{U}$ est une interseetion d'ouverts obtenus à partir de C par translation. D'après la proposition (3.4) $\widehat{U}$ est done de STEIN méromorphiquement convexe dans $\mathbb{C}^n$. La seconde affirmation résulte de l'égalité $d_{\cap U_i} = \inf d_{U_i} =$ Cqfd.

EXEMPLE (4.5). Une intersection décroissante d'ouverts μ-convexes qui n'est pas μ convexe : Soit B la boule unité de l'espace $\mathbb{R}^4$ des variables x_1, x_2, x_3, x_4, et $I_n = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 = x_2 = x_3 = 0 \text{ et } |x_4| \leq 1 - \frac{1}{n}\right\}$.

Posons $U_n = B - I_n$ et $U = \cap U_n$. Il est clair que $H_2(\widehat{U}_n, \mathbb{R}) = H_2(U_n, \mathbb{R}) = 0$. Il résulte alors de la Proposition (4.4) ci-dessus et du théorème (5.1) ci-dessous que $\widehat{U}_n$ est μ-convexe dans $\mathbb{C}^n$. D'autre part U a le type d'homologie de S^2 et par suite $H_2(\widehat{U}, \mathbb{R}) = H_2(U, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Il résulte alors du théorème (5.1) ci dessous que $\widehat{U}$ n'est pas μ-convexe dans $\mathbb{C}^n$.

EXEMPLE (4.6). Deux ouverts $\widehat{U}$ et $\widehat{V}$ μ convexes dans $\mathbb{C}^n$ tels que $\widehat{U} \cap \widehat{V}$ ne soit pas μ-convexe dans V. Pour U on prend la couronne définie par $1 < \| x \| < 2$ dans $\mathbb{R}^4$ et ponr V la bande définie par $|x_4| < \frac{1}{2}$.

D'après la proposition (4.4) et le théorème (5.1). $\widehat{U}$ qui a le type d'homologie de S^3 est μ-convexe dans $\mathbb{C}^n$, ainsi que $\widehat{V}$ qui est contractile. Mais $\widehat{U} \cap \widehat{V} = \widehat{U \cap V}$ a le type d'homologie de S^2 et, d'aprés le théorème (5.1) n'est pas μ-convexe dans $\widehat{V}$ qui est contractile.

Voici une caractérisation des paires μ-convexes en termes de limaces.

THÉORÈME (4.7). Pour que la paire (V_1, V_2) de variétés de STEIN soit μ convexe, il faut et il suffit que toute limace de V_1 se prolonge en une limace de V_2.

DÉMONSTRATION. En fait il s'agit essentiellement d'une nouvelle formulation d'un résultat de [6], solon lequel pour que $(V_1 V_2)$ soit μ-convexe, il faut et il suffit que : (iv) toute hypersurface de V_1 soit limite dans V_1 d'une suite d'hypersurfaces de V_2. Notons (l') la condition : Toute limace de V_1 se prolonge en une limace de V_2.

(iv) $\Longrightarrow$ (l') : Cela rèsulte de ce que l'espace des fermés de V_1 est métrisable et l'espace des fermés de V_2 est compact.

$(l') \Longrightarrow$ (iv) est évident. Cqfd.

REMARQUE (4.8). Comme dans [6], on aurait pu montrer les théorémes (3.5) et (4.7) dans le cas où V_2 est par exemple une grassmannienne ou une quadrique de dimension au moins trois.

5. Condition topologique.

On connait des conditions topologiques nécessaires pour qu'une paire de variétés de Stein soit de Runge (cf. Andreotti-Narasimhan [2]): De façon précise, si Y est un ouvert de Runge de la variété de Stein X de dimension n, alors $H_n(X, Y; \mathbb{Z})$ est sans torsion et, pour r supérieur à n, $H_r(X, Y; \mathbb{Z})$ est nul.

Dans le même esprit, on donne ici une condition topologique nécessaire et suffisante pour qu'nne paire méromorphiquement convexe soit μ-convexe.

THÉORÈME (5.1). Pour que la paire méromorphiquement convexe (Ω_1, Ω_2) de variétés de Stein soit μ-convexe, il faut et il suffit que le morphisme naturel de $H_2(\Omega_1, \mathbb{R})$ dans $H_2(\Omega_2, \mathbb{R})$ soit injectif.

Le reste du paragraphe est consacré à la démonstration de ce théorème. Commençons par montrer le

LEMME (5.2). Si h est une hypersurface de Ω, notons $T(h)$ le courant d'intégration sur h. Soit α dans $H_2(\Omega, \mathbb{R})$. Si $\langle \alpha, T(h) \rangle$ reste nul lorsque h décrit l'ensemble des hypersurfaces lisses et connexes, alors α est nul.

DÉMONSTRATION. Il nous suffit de montrer que α annule tous les éléments de $H^2(\Omega, \mathbb{R})$ et évidemment, il suffit de montrer que α annule les éléments de $H^2(\Omega, \mathbb{Z})$. Maintenant, $H^2(\Omega, \mathbb{Z})$ est isomorphe à $H_1(\Omega, \mathcal{O}^*)$ d'après un raisonnement classique parce que Ω est de Stein. L'isomorphisme évoqué se calcule en cohomologie de Čech. Il faut ensuite le convertir en cohomologie calculée à l'aide des courants. Si $\mathcal{D}^+(\Omega)$ désigne l'ensemble des diviseurs positifs sur Ω, on obtient la suite d'applications

$$\mathcal{D}^+(\Omega) \xrightarrow{u_1} H^1(\Omega, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{u_2} H^2(\Omega, \mathbb{Z}) \xrightarrow{u_3} H^2(\Omega, \mathbb{R}) \xrightarrow{u_4} H^2(\Omega, \mathbb{R})$$

où u_1 désigne l'application naturelle, u_2 est l'isomorphisme provenant de la suite exacte de faisceaux $0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}^* \to 0$, u_3 est la flèche canonique du passage au produit tensoriel par $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{Z}$ et u_4 est l'isomorphisme de Leray qui permet de passer de la cohomologie de Čech à la cohomologie des courants. On vérifie sans difficulté que $u = u_4 \circ u_3 \circ u_2 \circ u_1$ envoie tout diviseur sur la classe du courant d'intégration sur ce diviseur. On peut maintenant remarquer, en représentant par un cycle compact, que si α s'annule sur les courants d'intégration sur les hypersurfaces lisses connexes, il s'annule sur toutes les hypersurfaces lisses. Il nous suffit, à présent, de montrer que la restriction de u_1 à l'ensemble des hypersurfaces lisses est surjective.

Soit donc γ dans $H^1(\Omega, \mathcal{O}^*)$ et L un fibré linéaire sur Ω dont γ soit la classe d'isomorphisme. Toute section de L définit un diviseur positif dont l'image par u_1 est γ. Il nous reste donc à trouver une section de L dont l'ensemble des zèros soit lisse. Pour ce faire, on munit $\Gamma(L)$, l'espace des sections holomorphes de L, d'une structure topologique de la façon suivante :

Soit x dans Ω. D'après le théorème A, il existe une section σ_x de L qui ne s'annule pas dans un voisinage compact V_x de x. Cette section définit une trivialisation de L dans un voisinage ouvert U_x de V_x. Du recouvrement de Ω par les V_x, on peut extraire un recouvrement dénombrale $(V_{x_i})_{i \in \mathbb{N}}$. Il est facile de vérifier que $\Gamma(L)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les $(V_{x_i})_{i \in \mathbb{N}}$ est un espace de Fréchet

En application du théoréme de Baire, ii nous suffit maintenant de prouver que l'ensemble S_i des sections dont l'ensemble des zéros n'est pas lisse dans V_{x_i} est rare dans $\Gamma(L)$.

Montrons d'abord que S_i est d'intérieur vide. Soit σ dans S_i. D'après le théorème de Sard, pour presque toute valeur de ε, la section $\sigma + \varepsilon\sigma_{x_i}$ n'est pas dans S_i. Montrons maintenant que S_i est fermè. La trivialisation choisie sur U_{x_i} définit un morphisme continu de restriction de $\Gamma(L)$ dans $\mathcal{O}(U_{x_i})$. Soit Σ_i l'ensemble des fonctions dans $\mathcal{O}(U_{x_i})$ dont l'ensemble des zéros n'est pas lisse dans V_{x_i}. Comme S_i est l'image réciproque de Σ_i, il nous suffit de montrer que Σ_i est fermé. Mais ceci est une conséquence facile du fait que la convergence dans $\mathcal{O}(U_{x_i})$ implique la convergence uniforme des dérivées sur les compacts. Cqfd.

Nous allons utiliser ce lemme pour expliciter la dualité entre $H_2(\Omega, \mathbb{R})$ et $H^2(\Omega, \mathbb{R})$ sous la forme qui nous convient le mieux. Si h est une hypersurface dans Ω et s un 2-simplexe dont h ne rencontre pas le bord, on sait définir le nombre d'intersection de h et de s. Mais tout 2 simplexe est homologue à un 2 simplese ne recontrant pas h. Par ailleurs, le nombre d'intersection $\langle h, s \rangle$ ne dépend que de la classe de cohomologie du courant d'intégration sur h et de la classe d'homologie du simplexe s. Ceci est une façon de définir la dualité entre $H^2(\Omega, \mathbb{R})$ défini à partir des courants et $H_2(\Omega, \mathbb{R})$ définir à partir des chaînes singulières.

On a alors le

LEMME (5.3). Soit H une hypersurface de Ω, T le courant d'intégration sur H. Soit γ un 2-simplexe compact, donc une application du 2-simplexe canonique Δ_2 dans Ω. Supposons qu'il existe un voisinage U de H tel que $\gamma^{-1}(U)$ soit connexe et qu'il existe une structure complexe sur $\gamma^{-1}(U)$ pour laquelle γ soit une immersion holomorphe. Alors, si $\gamma(U)$ rencontre H, $\langle T, \gamma \rangle$ est un entier différent de zéro.

Démonstration. Commençons par le cas où $\gamma(U)$ et H se coupent en position générale. On sait alors que $\langle T, \gamma \rangle$ est le nombre de points d'intersection comptés positivement ou négativement suivant que les orientations de H et $\gamma(U)$ au point considéré définissent l'orientation de Ω ou son opposée. Mais du fait que l'orientation définie sur un espace vectoriel vectoriel complexe par deux sous-espaces vectoriel complexes supplémentaires munis de leur orientation canonique (il s'agit, si $(e_1, \dots e_n)$ est une base complexe, de l'orientation définie par la base réelle $(e_1, ie_1, e_2, \dots, ie_n)$), est l'orientation canonique, et du fait que $\gamma^{-1}(U)$ est connexe, ce signe est plus ou moins, indépendamment du point d'intersection envisagé, suivant que l'orientation de Δ_2 coïncide ou non sur $\gamma^{-1}(U)$ avec celle qu'on associe canoniquement à la structure complexe qui rend γ holomorphe.

Si l'ntersection de H et de $\gamma(U)$ n'est pas en position générale, on se ramène à ce cas en remplaçant γ par un cycle qui lui est homologue et pour lequel l'intersection est en position générale. Soit y un point de $\gamma(U) \cup H$ et x son image réciproque. On peut modifier γ dans un disque D_ε de rayon autour de x, de façon que la restriction du cycle modifié γ' au disque $D_{\varepsilon/2}$ de rayon $\varepsilon/2$ soit une immersion holomorphe sur un disque parallèle (dans une carte au voisinage de y) à $\gamma(D_\varepsilon)$ et de façon que $\gamma'(D_\varepsilon - D_{\varepsilon/2})$ ne rencontre pas H. Le Théorème de Sard permet, en outre, de choisir ce disque paralléle de façon que H et $\gamma'(D_{\varepsilon/2})$ se coupent transversalement. Cqfd.

Démonstration de la nécessité. Soit i l'application de $Z_2(\Omega_1, \mathbb{R})$ dans $Z_2(\Omega_2, \mathbb{R})$ et $\overline{i}$ celle de $H_2(\Omega_1, \mathbb{R})$ dans $H_2(\Omega_2, \mathbb{R})$. Soit α dans $Z_2(\Omega_2, \mathbb{R})$ et supposons que sa classe d'homologie $\overline{\alpha}$ soit différente de zéro. Nous allons monstrer que $\overline{i}(\overline{\alpha})$ est non nul. D'après ce qu'on vient de voir, il existe une hypersurface h lisse et connexe dans Ω_1 telle que si T désigne le courant integration sur h, on ait $\langle T, \alpha \rangle \neq 0$. En modifiant α, on se ramène au cas où $\langle T, \alpha \rangle = 1$. Notre premier but est de donner une description agréable du cycle α. Soit x dans h. Il résulte de théorèmes généraux, qu'on peut construire un voisinage tubulaire fermé V de h dans Ω_1, muni naturellement d'une structure de fibré en boules sur h, et tel que la fibre soit, en x, un disque analytique fermé $\overline{D}_x$ dans Ω_1. Soit $\overline{p}$ l'application canonique de $H_2(\Omega_1, \mathbb{R})$ dans $H_2(\Omega_1, \Omega_1 - \mathring{V}, \mathbb{R})$. Nous allons d'abord voir que la forme linéaire sur $H_2(\Omega_1, R) : \beta \longmapsto \langle T, \beta \rangle$ se factorise à travers $\overline{p}$. Supposons, en effet, que $\overline{p}(\overline{\beta})$ soit nul. Alors le cycle β est somme d'un bord γ et d'un cycle δ de $\Omega_1 - \mathring{V}$. Mais $\langle T, \gamma \rangle$ est nul puisque γ est un bord et $\langle T, \delta \rangle$ est nul parce que δ et h ne se rencontrent pas.

Maintenant, il résulte du théorème de Thom que $H_2(\Omega_1, \Omega_1 - \overset{\circ}{V}, \mathbb{R})$ est isomorphe à $H_0(h, \mathbb{R})$ qui est lui-même isomorphe à $\mathbb{R}$. Comme $\langle T, \alpha \rangle$ n'est pas nul, $\overline{p}(\overline{\alpha})$ est un générateur de $H_2(\Omega_1, \Omega_1 - \overset{\circ}{V}, \mathbb{R})$. Considérons alors $\overline{D}_x$ comme un 2 simplexe s dans Ω_1. Son bord étant dans $\Omega_1 - \overline{V}$, il définit un cycle relatif c dont la classe d'homologie relative $\overline{c}$ est un multiple de $\overline{p}(\alpha)$. On a donc $\overline{c} = \overline{p}(\lambda\overline{\alpha})$. Il en résulte que $\lambda\alpha - s$ est somme d'une chaîne a de $\Omega_1 - \overset{\circ}{V}$ et d'un bord b. On a ainsi $\lambda\alpha = s + a + b$. Le scalaire λ est égal à ± 1 puisqu'on peut calculer $\langle T, s + a + b \rangle = = \langle T, s \rangle = \pm 1$. On peut, au besoin, remplacer α par $-\alpha$, ce qui donne $\alpha = s + a + b$.

Nous allons montrer maintenant qu'on peut approcher h par une hypersurface h' de Ω_2 qui ne rencontre pas a, et qui rencontre D_x sans rencontrer son bord : la seule condition qui n'est pas évidente à réaliser est celle assurant que h' rencontre D_x. Mais on peut choisir des coordonnées locales $(z_1, \ldots, z_n)$ au voisinage de x de façon que D_x soit décrit par $z_1 = \ldots = z_{n-1} = 0$ et $|z_n| < 1$ tandis que l'ensemble Q défini par $|z_1| \leq 1, \ldots, |z_{n-1}| \leq 1$, $|z_n| = 1$ ne rencontre pas h. On peut alors imposer à h' de rencontrer le polydisque unité sans rencontrer Q. En application du Kontinuitätsatz de Hartogs, on voit alors que h' rencontre D_x sans rencontrer son bord. Il résulte alors du lemme (5.3) que si T' désigne le courant d'intégration sur h', $\langle T', s + a + b \rangle$ est un entier non nul. Mais $\langle T'. s + a + b = = \langle T', \overline{i}(\overline{\alpha}) \rangle$, ce qui prouve que $\overline{i}(\overline{\alpha})$ est non nul.

La nécessité est prouvée. Pour la suffisancé, il nous faut la

PROPOSITION (5.4). Soit Ω_2 une variété de Stein connexe et Ω_1 un ouvert méromorphiquement convexe de Stein dans Ω_2. Soit L un fibré vectoriel holomorphe sur Ω_2. Alors on peut approcher uniformément sur les compacts de Ω_1 les sections holomorphes de L sur Ω_1 par des sections méromorphes sur Ω_2.

DÉMONSTRATION. Nous utiliserons le

LEMME (5.5). Soit L un fibré localement trivial sur un espace de Stein X connexe. Il existe un fibré L' localement trivial sur X tel que $L \oplus L'$ soit trivial.

DÉMONSTRATION. On peut trouver N sections de L engendrant la fibre en tout point de X (cf. Forster [5]). Ceci permet de définir un épimorphisme do fibré trivial $X \times \mathbb{C}^N$ sur L. Notons L' le noyau de cet épimorphisme.

La suite exacte $0 \longrightarrow L' \longrightarrow X \times \mathbb{C}^N \longrightarrow L \longrightarrow 0$ est scindée : en effet d'aprés le Théoréme B, la suite $\Gamma(X, \mathrm{End}\,(L, X \times \mathbb{C}^N)) \longrightarrow \Gamma(X, \mathrm{End}\,(L, L)) \longrightarrow 0$ est exacte. Cqfd.

Grâce à ce lemme, on peut considérer une section σ sur Ω_1 comme un N plet de fonctions holomorphes. On peut approcher chacune de ces fonctions holomorphes uniformément sur K par des fonctions méromorphes $m = (m_1, \dots, m_N)$. A son tour m définit par projection sur L une section méromorphe de L sur Ω_2 qui approche uniformément σ sur K puisque toutes les normes sont équivalentes sur $K \times \mathbb{C}^N$. Cqfd.

DÉMONTRATION DE LA SUFFISANCE. Par dualité, le morphisme naturel de $H^2(\Omega_2, \mathbb{R})$ dans $H^2(\Omega_1, \mathbb{R})$ est surjectif. Donc le conoyau du morphisme naturel de $H^2(\Omega_2, \mathbb{Z})$ dans $H^2(\Omega_1 \mathbb{Z})$ est de torsion. Soit h une hypersurface de Ω_1 et d l'élément de $H^2(\Omega_1, \mathbb{Z})$ défini par le diviseur associé à h. Il existe un entier p tel que pd soit l'image d'un élément δ de $H^2(\Omega_2, \mathbb{Z})$. Ceci nous assure qu'il existe un fibré linéaire L sur Ω_2 et une section σ de L sur Ω_1 dont l'ensemble des zéros est h. On peut alors approcher σ par une suite m_k de sections méromorphes de L d'apres la proposition (5.4) et on vérifie facilement que $m_k^{-1}(0) \cap \Omega_1$ tend vers $h = \sigma^{-1}(0)$. Cqfd.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALEXANDROFF P. et HOFF H., *Topologie,* Springer, Berlin 1935.

[2] ANDREOTTI A. et NARASIMHAN R., *A topological property of Runge pairs,* Ann. of Math. (2) 76 (1962) 499-509.

[3] BOURBAKI N., *Topologie générale,* chap. 9.

[4] FEDERER H., *Geometric Measure Theory,* Springer-Verlag, Berlin (1969).

[5] FORSTER O., *Topologische Methoden in der Theorie Steinscher Raüme,* Actes CIM 1970 Tome 2, 613-618.

[6] HIRSCHOWITZ A., *Sur l'approximation des hypersurfaces,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 25 (1971), 47-58.

[7] HÖRMANDER L., *An introduction to Complex Analysis in several Variables,* Van Nostrand, Princetion 1966.

[8] HOWARD A., *On the Compactification of a Stein Surface,* Math. Ann. 176 (1968) 221-224.

[9] NISHINO T., *Sur les ensembles pseudoconcaves,* J. Math. Kyoto Univ. 1 (1961/62) 225-245.

[10] OKA K., *Domaines d'holomorphie et domaines rationnellement convexes,* Jap. J. Math. 17 (1941), 517-521.

[11] STEIN K., *Topologische Bedingungen...,* Math. Ann. 117 (1941), 727-757.

[12] STOLZENBERG G., *A Hull with. no Analytic Structure,* J. Math. Mech. 12 (1963) 103-111.