ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

MICHELLE SCHATZMAN

Problèmes aux limites non linéaires, non coercifs

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 27, nº 4 (1973), p. 641-686

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1973_3_27_4_641_0>

PROBLÈMES AUX LIMITES NON LINÉAIRES, NON COERCIFS

par MICHELLE SCHATZMAN

I) Le théorème 1.

Soit H un espace de Hilbert (norme $|\ |$, produit scalaire $(\ ,\ )$) et V un autre espace de Hilbert (norme $\|\ \|$ et produit scalaire $((\ ,\ ))$).

V est une partie dense de H, avec injection continue. On note V' son dual (norme $\|\ \|'$) avec l'identification usuelle:

$$V \subsetneq H \subsetneq V'.$$

Le produit de dualité entre V et V' est noté $(\ ,\ )$, et J est l'application de dualité de V dans V'.

Soit p une semi-norme sur V. On suppose que $\|\ \|$ est équivalente à $p + |\ |$:

(1) $$\forall\, v \in V:\ c_0'(|v| + p(v)) \leq \|v\| \leq c_0(|v| + p(v)) \quad (c_0 > 0\,;\ c_0' > 0).$$

Soit $Y = \{v \in V / p(v) = 0\}$. On suppose que:

(2) $$Y \text{ est de dimension finie.}$$

Soit $P: V \rightarrow V$ la projection orthogonale sur Y, relativement à la norme $|\ |$. On note $P': V' \rightarrow V'$ la transposée de P, et $W' = \operatorname{Ker} P'$, $Y' = R(P')$. On remarque que P et P' sont complètement continues. De plus on suppose que:

(3) $$\forall\, v \in V:\ |v - Pv| \leq c_1\, p(v).$$

LEMME 1. Si l'injection $V \subsetneq H$ est compacte, (1) et (2) impliquent (3).

Pervenuto alla Redazione il 19 Maggio 1972 e in forma definitiva il 18 Ottobre 1972.

DÉMONSTRATION. Soit

$$j = \inf \{ p(v) / |v| = 1 ; \; Pv = 0 \}$$

Soit v_n une suite minimisante :

$$Pv_n = 0 ; \; |v_n| = 1 ; \; p(v_n) \to j,$$

v_n est bornée dans V; p est semi-continue inférieurement en vertu de (1). On extrait une sous suite v_ν qui converge vers v faiblement dans V et fortement dans H.

$P(v_\nu) = 0 \Longrightarrow P(v) = 0$ en vertu de (2)

$$j = \underline{\lim}\, p(v_\nu) \geq p(v) \geq j \quad \text{et} \quad |v| = 1$$

p atteint donc son minimum sur

$$\{ v \in V / |v| = 1 ; \; Pv = 0 \}.$$

Si $j = 0$, $p(v) = 0$ et $Pv = 0$, ce qui implique $v = 0$ et contredit $|v| = 1$. ■

φ est une application semi-continue inférieurement (s. c. i.) convexe de V dans $]-\infty, +\infty]$; $\varphi \not\equiv +\infty$. Si $u_0 \in \operatorname{dom} \varphi = \{ u / \varphi(u) < +\infty \}$ on note $\tilde{\varphi}_{u_0}$ l'application :

$$Y \to]-\infty, +\infty]$$

$$y \mapsto \varphi(u_0 + y).$$

Si ψ est une fonction s. c. i. convexe propre d'un espace vectoriel topologique localement convexe séparé dans $]-\infty, +\infty]$, $\partial\psi$, le sous différentiel de ψ, est une application de X dans $2^{X'}$ (X' dual de X) définie comme suit :

$$z \in \partial\psi(x) \Longleftrightarrow \forall\, x' \in X : \psi(x + x') - \psi(x) \geq (z, x')$$

$$D(\partial\psi) = \{ x \in X / \partial\psi(x) \neq \emptyset \}.$$

Soit a une forme bilinéaire continue sur V. a définit une application A continue de V dans V' par :

$$a(u, v) = (Au, v), \quad \forall\, u, v \in V.$$

On note int C l'intérieur d'un convexe C. Dans les espaces de dimension finie, on note $r.\text{int}.C$ l'intérieur relatif d'un convexe C; c'est l'intérieur de C pour la topologie de la variété affine engendrée par C.

THÉORÈME 1. Soit a une forme bilinéaire continue sur V, A l'opérateur associé à a. On suppose que :

$$\forall\, v \in V:\ a(v, v) \geq \alpha\,(p(v))^2 \quad \text{(semi-coercivité)}; \quad (\alpha > 0)$$

f est donné dans V'.

Si l'un des deux groupes de conditions suivants est réalisé :

(4) $$R(A) \subset W'\,;\ \exists\, u_0 \in \operatorname{dom} \varphi \text{ tel que } P'f \in r.\text{int}.\, R(\partial\widetilde{\varphi}_{u_0})$$

(5) $$\exists\, u_0 \in \operatorname{dom} \varphi \text{ tel que } Au_0 \in W' \text{ et } P'f \in \text{int}.\, R(\partial\widetilde{\varphi}_{u_0})$$

Alors le problème variationnel : trouver $u \in V$ tel que

(6) $$\forall\, v \in V \quad (Au - f, v - u) + \varphi(v) - \varphi(u) \geq 0$$

possède une solution.

DÉMONSTRATION. On se ramène au cas $\varphi \geq 0$ en rejoutant au besoin à φ une forme linéaire convenable.

On approche (6) par

(7) $$\varepsilon\,((Pu_\varepsilon - Pu_0\,, Pv - Pu_\varepsilon)) + a(u_\varepsilon\,, v - u_\varepsilon) + \varphi(v) - \varphi(u_\varepsilon) \geq (f, v - u_\varepsilon) \qquad \forall\, v \in V.$$

Cette inéquation a une solution (voir Lions - Stampacchia, [9] theorem 2.1').

Elle est équivalente à l'équation multivoque :

(8) $$\varepsilon P'\, JP(u_\varepsilon - u_0) + Au_\varepsilon + g_\varepsilon = f \text{ avec } g_\varepsilon \in \partial\varphi(u_\varepsilon).$$

Si u_ε est borné, le passage à la limite est aisé dans (7) et (6) a une solution.

Supposons que u_ε n'est pas borné. Par exemple $\| u_\varepsilon \| \to +\infty$. On pose $x_\varepsilon = \dfrac{u_\varepsilon - u_0}{\| u_\varepsilon - u_0 \|}$.

Eu portant $v = u_0$ dans (7), il vient :

$$\alpha\,(p(u_\varepsilon - u_0))^2 \leq \| f - Au_0 \|'\, \| u_\varepsilon - u_0 \| + \varphi(u_0),$$

donc :

(9) $$p(x_\varepsilon) = 0\,(\, \| u_\varepsilon - u_0 \|^{-\frac{1}{2}}).$$

On extrait de la snite x_ε une sous suite encore notée x_ε telle que :

$$x_\varepsilon \to x \text{ dans } V \text{ faible}$$

donc

$$Px_\varepsilon \to Px \text{ daus } V \text{ fort en vertu de (2).}$$

Mais

$$\| x_\varepsilon - Px_\varepsilon \| \leq c_0 (| x_\varepsilon - Px_\varepsilon | + p(x_\varepsilon)) \leq c_0 (1 + c_1)\, p(x_\varepsilon)$$

donc $x = Px$.

D'autre part, $1 = \| x_\varepsilon \| \leq \| x_\varepsilon - Px_\varepsilon \| + \| Px_\varepsilon \|$ donc : $\| Px_\varepsilon \| \to 1$ quand $\varepsilon \to 0$, ce qui implique $x \neq 0$.

Dans le cas de l'hypothèse (4), soit Z' la variété affine engendrée dans Y' par $R(\partial \widetilde{\varphi}_{u_0})$. Comme $\widetilde{\varphi}_{u_0}$ est minorée, 0 est adhérent à $R(\partial \widetilde{\varphi}_{u_0})$, donc Z' est un espace vectoriel. Soit $Z = J^{-1}(Z')$

$$Z^\perp = \{ y \in Y / \forall\, y' \in Y',\ (y, y') = 0 \}$$

épi $\widetilde{\varphi}_{u_0}$ est invariant par translations parallèles à $Z^\perp$: si $z \in Z^\perp$ et $y \in D(\partial \widetilde{\varphi}_{u_0})$:

$$\varphi(u_0 + y + z) - \varphi(u_0 + y) \geq (\partial \widetilde{\varphi}_{u_0}(y), z) = 0.$$

Le convexe fermé épi φ est donc invariant par translations parallèles à $Z^\perp$ (Rockafellar, [12], theorem 8.3). Il est immédiat que pour tout v dans $D(\partial\varphi)$, $P'\, \partial\varphi(v)$ est inclus dans Z.

De (8) on tire : $P' JP(u_\varepsilon - u_0) = P'(f - g_\varepsilon)$ en composant à gauche par P' car $P' Au_\varepsilon = 0$; d'où : $P(u_\varepsilon - u_0) \in Z$ et $x \in Z$.

Pour démontrer la suite du théorème, il faut démontrer le résultat intermédiaire suivant.

Soit X un espace de Banach ; on appelle variété sans plus préciser, une variété linéaire de dimension finie de X.

On rappelle la définition du cône de récession (voir [12]) d'un convexe C, également appelé cône asymptote dans Bourkaki, Espaces vectoriels topologiques, chapître 2, paragraphe 2, exercice 14.

C'est l'ensemble noté $0^+ C$ des x tels que $C + x \subset C$. La direction de x est appelée direction de récession de C.

LEMME. Si une variété $\mathcal{V}$ rencontre C convexe fermé en un ensemble borné non vide, alors $0^+ \mathcal{V} \cap 0^+ C = \{0\}$.

DÉMONSTRATION. Supposons que $0^+ \mathcal{V} \cap 0^+ C$ contienne un x différent de 0. Alors si $a \in \mathcal{V} \cap C$, $a + nx \in \mathcal{V} \cap C\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, ce qui contredit l'hypothèse. ■

THÉORÈME 0. Soient C et $\mathcal{V}$ comme au lemme précédent. Si x est tel que $(\mathcal{V}+x)\cap C=\emptyset$, alors il existe un hyperplan fermé H qui sépare C et $\mathcal{V}+x$.

DÉMONSTRATION. On peut l'obtenir facilement à partir de Bourbaki, Espaces vectoriels topologiques, chapître 2, paragraphe 2, exercice 16, et paragraphe 5, exercise 8, mais on peut également le faire directement.

Pour simplifier et sans nuire à la généralité, on suppose que $0\in\mathcal{V}+$ $+x=\mathcal{W}.C+\mathcal{W}\neq X$ car $C\cap\mathcal{W}=\emptyset$. Soit $y\notin C+\mathcal{W}$; alors $y\notin C$ et $(y+\mathcal{W})\cap C=\emptyset$.

$0^+(y+\mathcal{W})\cap 0^+C=\{0\}$ implique que $\underline{\lim}\, d(C,(y+\mathcal{W})\cap \complement B(0,R))>0$ où $B(0,R)$ est la boule de centre 0 et de rayon R.

Sinon il existerait deux suites $v_n\in\mathcal{W}$ et $c_n\in C$ telles que:

$$\|v_n+v-c_n\|\to 0$$

$$\|v_n\|\to+\infty$$

$$\frac{v_n}{\|v_n\|}\to v\neq 0, \text{ car } \mathcal{W} \text{ est localement compact.}$$

Soit $d\in C$ et $\alpha\in[0,1]$, $\alpha d+(1-\alpha)c_n\in C$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$.

Si $\alpha_n=(\|v_n\|-1)/\|v_n\|$, il est clair que $\lim_{n\to\infty}\alpha_n d+(1-\alpha_n)c_n=$ $=d+v$ et on obtient une contradiction. ∎

Soit R_0 tel que, $\forall\, R\geq R_0$, $d(C,(\mathcal{W}+y)\cap\complement B(0,R_0))\geq\lambda>0$.

D'autre part, $d(C,(y+\mathcal{W})\cap B(0,R_0))>0$ car $(y+\mathcal{W})\cap B(0,R_0)$ est un compact dont l'intersection avec C est vide.

Soit $2\varepsilon=d(C,\mathcal{W}+y)>0$. Alors $(y+\mathcal{W}+B(0,\varepsilon))\cap C=\emptyset$, donc $(y+B(0,\varepsilon))\cap(C+\mathcal{W})=\emptyset$, et $C+\mathcal{W}$ est fermé.

On appelle $\dot{X}$ l'espace quotient de X par $\mathcal{W}$, et p l'application canonique $X\to\dot{X}.p(C)$ est alors fermé car $p^{-1}(p(C))=C+\mathcal{W}.p(\{x\})$ est compact et ne rencontre pas $p(C)$. Il existe donc un hyperplan fermé $\dot{H}$ qui sépare strictement $p(C)$ et $p(\{x\})\cdot p^{-1}(\dot{H})$ est un hyperplan fermé dans X qui sépare strictement $C+\mathcal{W}$ et $x+\mathcal{W}$, donc a fortiori $x+\mathcal{W}$ et C.

LEMME 2. Il existe $g\in V'$ tel que:

$$\varphi(u)-(g,u)\geq m>-\infty,\quad\forall\, u\in V \tag{10}$$

$$(P'g-P'f,x)>0. \tag{11}$$

DÉMONSTRATION. On peut trouver $g_0 \in r.\text{int.} R(\partial\widetilde{\varphi}_{u_0})$ tel que $(g_0 - P'f, x) > 0$ en utilisant suivant les cas la condition (4) et $x \in Z$, ou la condition (5). Il existe alors un $\mu > -\infty$ tel que:

$$\forall\, y \in Y : \varphi(u_0 + y) - (g_0, y) \geq \mu.$$

Soit alors

$$\mathcal{W} = \{[y, \alpha] \in Y \times \mathbb{R} / (g_0, y) = \alpha\}$$

et

$$C = \{[v, \alpha] \in V \times \mathbb{R} / \alpha + \mu - 1 \geq \varphi(u_0 + v)\}.$$

On vérifie que $C \cap \mathcal{W} = \emptyset$, et par application du théorème 0, on peut trouver un hyperplan qui sépare strictement C et $\mathcal{W}$ daus l'espace $X = V \times \mathbb{R}$.

(L'hypothèse $g_0 \in r.\text{int.} R(\partial\widetilde{\varphi}_{u_0})$ implique, si $g \in \partial\widetilde{\varphi}_{u_0}(t_0)$, la variété

$$\{[y, \alpha] \in Y \times R / \alpha - \varphi(u_0 + t_0) = (g_0, y)\} = \widetilde{\mathcal{W}}$$

rencontre

$$\widetilde{C} = \{[v, \alpha] \in V \times \mathbb{R} / \alpha \geq \varphi(u_0 + t_0 + v)\}$$

en un ensemble borné; $\widetilde{C}$ et $\widetilde{\mathcal{W}}$ sont des translatés de C et $\mathcal{W}$ respectivement. L'équation de l'hyperplan séparant est $(g, v) = a\alpha + b$ (par exemple $a \geq 0$); l'expression $(g, v) - a\alpha - b$ est positive pour $[v, \alpha] \in \mathcal{W}$ et négative pour $[v, \alpha] \in C$, a n'est pas nul; on peut le supposer égal à 1. On démontre facilement que $P'g = g_0$. Il suffit alors de prendre $m = \mu - 1 - b - (g, u_0)$.

Si on reprend (6) avec $v = u_0$, il vient:

$$\varphi(u_\varepsilon) - \varphi(u_0) \leq (Au_0 - f, u_0 - u_\varepsilon).$$

En tenant compte de (10) et en regroupant:

$$(P'g - P'f, u_\varepsilon - u_0) \leq (P'f - f + g - Pg + Au_0, u_0 - u_\varepsilon) + \\ + (P'g - g, u_0) + \varphi(u_0) - m. \tag{12}$$

On divise les deux membres de (12) par $\| u_\varepsilon - u_0 \|$, et on majore $\| x_\varepsilon - Px_\varepsilon \|$ par $c_0(1 + c_1)\, p(x_\varepsilon)$.

En tenant compte de (9) et de (11), on obtient une contradiction. ■

II) Applications du théorème 1.

II.1. Le théorème 5.1 de Lions-Stampacchia [9].

Ce théorème s'enonce comme suit:

On suppose que la norme $\| \ \|$ d'un espace de Hilbert V est équivalente à $p_0 + p_1$ où p_0 est une norme préhilbertienne sur V et p_1 une semi norme.

$Y = \{y \in V / p_1(v) = 0\}$ est de dimension finie.

Il existe une constante c_1 telle que:

$$\inf_{y \in Y} p_0(v - y) \leq c_1 p_1(v) \quad \forall\, v \in V \tag{13}$$

a est une forme bilinéaire semi-coercive, c'est à dire:

$$a(v, v) \geq c_2 (p_1(v))^2 \quad \forall\, v \in V.$$

Soit K un convexe fermé contenant $\{0\}$ et f un élément de V' dual de V qui satisfait aux conditions suivantes:

$$(f_0, y) < 0 \quad \forall\, y \in Y \cap K - \{0\} \tag{14}$$

$$|(f_1, v)| \leq c_3 p_1(v) \quad \forall\, v \in V \quad \text{et} \quad f = f_0 + f_1 . \tag{15}$$

Alors le problème variationnel: trouver $u \in K$, tel que pour tout $v \in K$: $a(u, v - u) \geq (f, v - u)$ possède une solution.

Ce théorème résulte du théorème 1 avec les conditions (5). En effet on pose $H =$ le complété pour la norme p_0 de V.

Les conditions (1), (2) et (3) sont vérifiées.

$\varphi = \psi_K$ fonction indicatrice du convexe fermé K.

(elle est définie par

$$\psi_K(v) = 0 \quad \text{si} \quad v \in K$$

$$\psi_K(v) = +\infty \quad \text{si} \quad v \notin K)$$

alors $f_1 = f - P'f$ et $f_0 = P'f$, en effet:

$$|(P'f_1, v)| = |(f_1, Pv)| \leq c_3 p_1(v). \tag{15}$$

Si $v \in Y$, $(P'f_1, v) = 0$ donc $P'f_1 = 0$.

Il reste à voir que si $u_0 = 0$, $\tilde{\varphi}_{u_0} = \psi_C$ $(C = Y \cap K)$, la condition (14) implique que:

$$P'f \in \text{int.}\, R(\partial \psi_C)$$

Soit ψ_C^* la fonction d'appui de C; ψ_C^* est la fonction conjuguée de ψ_C, ce qui implique que (Rockafellar, [12] theorems 23.4 et 23.5) $\text{int}\, R(\partial\psi_C) =$ $= \text{int dom}\, \psi_C^*$

$$\psi_C^*(y^*) = \sup \{(y, y^*)\,;\ y \in C\}$$

dom $\psi_C^* = \{y^*/\exists\, \beta < +\infty : \forall\, y \in C : (y^*, y) \leq \beta\}$. Donc dom ψ_C^* est le cône barrière de C; c'est le polaire du cône de récession de C, $0^+ C$ qui est l'ensemble des $y \in Y$ tels que $C + y \subset C$ (voir [12], corollary 14.2.1) c'est à dire :

$$y^* \subset \operatorname{dom} \psi_C^* \Longleftrightarrow (y^*, y) \leq 0 \quad \forall\, y \in 0^+ C.$$

Si $y_0^* = P'f$, et $(y_0^*, y) < 0 \quad \forall\, y \in C - \{0\}$, montrons que $y_0^* \in \operatorname{int} \operatorname{dom} \psi_C^*$.

Soit $d = \inf\{\, \| y_0^* - y^* \|' \,;\, y^* \in Y' - \operatorname{dom} \psi_C^* \}$.

Si $d = 0$, on peut trouver deux suites : $y_n^* \to y_0^*$ et $y_n \in 0^+ C$ telle que $(y_n^*, y_n) > 0$. On peut supposer $\| y_0^* \|' = 1$; $\| y_n^* \|' = 1$, et $\| y_n \| = 1$ si $0^+ C$ n'est pas réduit à $\{0\}$. En extrayant une sous suite convergente dans Y, on a $y_n \to y_0$ et $(y_0^*, y_0) \geq 0$ ce qui contredit l'hypothèse (14) ∎

REMARQUE. Soit

$$L^* = \{x^* \in Y^*/(x^*, x) < 0, \ \forall\, x \in C - \{0\}\}$$

et soit $M^* = \operatorname{dom} \psi_C^*$, polaire de $0^+ C$. On vient de démontrer que L^* est inclus dans M^*, mais la réciproque n'est pas vraie en général.

a) si $0 \in r\cdot\operatorname{int}\cdot C$ il est clair que L^* est vide.

b) même si $0 \in C - r\cdot\operatorname{int}\cdot C$, L^* peut être distinct de M^*. Prenons par exemple dans $\mathbb{R}^3$ le carré $[0, 1] \times [0, 1] \times \{0\}$. Alors L^* est l'ensemble des points dont les deux premières coordonnées sont négatives ou nulles et $M^* = \mathbb{R}^3$.

II.2. Théorème d'existence pour le problème

$$-\Delta u = f\,; \quad -\frac{\partial u}{\partial n} \in \beta(u).$$

Soit Ω un ouvert connexe, borné de $\mathbb{R}^N$, de frontière Γ très régulière.

On choisit $V = H^1(\Omega)$ et $H = L^2(\Omega)$

$$a(u, v) = \int_\Omega \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dx \quad p(v) = \sqrt{a(v, v)} \quad f \in L^2(\Omega)$$

p, A, V, H satisfont les hypothèses du théorème 1, et $P'f$ est égal à $\dfrac{1}{\operatorname{mes} \Gamma} \displaystyle\int_\Omega f(x)\, dx$.

Soit j une fonction s. c. i. convexe, propre, sur $\mathbb{R}$, telle que $j(0) = 0$, $j \geq 0$, et soit $\partial j = \beta$, graphe maximal monotone dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

On pose

$$\varphi(v) = \int_{\Omega} j(v|_{\Gamma})\, d\Gamma \quad \text{si} \quad j(v|_{\Gamma}) \in L^1(\Gamma)$$

$$\varphi(v) = +\infty \qquad\qquad \text{ailleurs}$$

φ est s. c. i. convexe sur V.

THÉORÈME 2. Le problème variationnel : trouver $u \in V$ tel que :

$$a(u, v-u) + \varphi(v) - \varphi(u) \geqq \int_{\Omega} f(v-u)\, dx \quad \forall\, v \in V \tag{16}$$

admet une solution si :

$$P'f = \frac{1}{\text{mes}\,\Gamma} \int_{\Omega} f\, dx \in r.\,\text{int.}\, R(\beta). \tag{17}$$

DEMONSTRATION. Y est l'ensemble des constantes. On choisit $u_0 = 0$ (notations du théorème 1). Alors $\tilde{\varphi}_0(y) = (\text{mes}\,\Gamma)\; j(y)$ si $y \in \mathbb{R}$. Si $v \in \partial\tilde{\varphi}_0(y) \subset (H^1(\Omega))'$:

$$\tilde{\varphi}_0(y + y') - \tilde{\varphi}_0(y) \geqq (v, y') \quad \forall\, y' \in \mathbb{R}.$$

Mais v peut s'identifier à une constante, donc :

$$(\text{mes}\,\Gamma)\,(j(y+y') - j(y)) \geqq vy'\,(\text{mes}\,\Omega)$$

d'où :

$$\partial\tilde{\varphi}_0(y) = \frac{\text{mes}\,\Gamma}{\text{mes}\,\Omega}\,\beta(y),$$

et la condition (4) s'écrit :

$$\frac{1}{\text{mes}\,\Omega} \int_{\Omega} f\, dx \in r.\text{int.}\left(\frac{\text{mes}\,\Gamma}{\text{mes}\,\Omega}\, R(\beta)\right)$$

ce qui équivaut à (17). ■

REMARQUE : la condition (17) inclut le cas β linéaire.

Interprétation de cet exemple :

Si $\eta \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (ensemble des fonctions de classe C^∞, à support compact inclus dans Ω), en portant $v = u + \eta$ dans (16), il vient :

$$\int_{\Omega} \text{grad}\, u.\text{grad}\, \eta\, dx \geqq \int_{\Omega} f\eta\, dx, \quad \text{donc} \quad -\Delta u = f$$

au sens des distributions. Si on réécrit (16) en utilisant la formule de Green il vient :

$$\int_\Gamma (j(v|_\Gamma) - j(u|_\Gamma))\, d\Gamma \geqq \int_\Gamma \left(-\frac{\partial u}{\partial n}\right)(v-u)\, d\Gamma$$

et le problème résolu est :

(18) $\quad -\Delta u = f$ sur Ω et (19) $\quad -\dfrac{\partial u}{\partial n} \in \beta(u)$ presque partout sur I.

II.3. Suite de l'exemple II.2.

THEORÈME 3. *a*) Si $p > \dfrac{N}{2}$ et si $f \in L^p(\Omega)$, une condition nécessaire et suffisante pour que (16) admette une solution est la suivante :

$$\frac{1}{\operatorname{mes} \Gamma} \int f\, dx \in R(\beta). \tag{20}$$

b) Réciproquement, si $R(\beta)$ n'est pas ouvert ou réduit à un point, on peut trouver des données $f \in L^p(\Omega)$ $\left(p \leqq \dfrac{N}{2}\right)$ telles que

$$\frac{1}{\operatorname{mes} \Gamma} \int f\, dx \in R(\beta) \tag{20}$$

et cependant (16) n'a pas de solution.

DEMONSTRATION. *a*) Si on intègre (18) sur Ω en tenant compte de (19), on voit que la condition (20) est nécessaire. Si $R(\beta)$ est réduit à un point ou ouvert, il résulte du théorème 2 qu'elle est également suffisante. Supposons donc que $R(\beta)$ n'est pas réduit à un point et contient, pour fixer les idées, sa borne supérieure $\beta+$.

$\beta^{-1}(\beta+)$ est un convexe fermé, minoré, il contient donc sa borne inférieure r_0.

Si $f \in L^p(\Omega)$ $(p > 1)$ on résoud :

(21) $\quad -\Delta u = f - \dfrac{\partial u}{\partial n} = \beta+$ en supposant que : $\displaystyle\int_\Omega f\, dx = \beta+ \operatorname{mes} \Gamma.$

La solution de (21) est dans $W^{2,p}(\Omega)$, et définie à une constante additive près. Sa trace sur Γ est dans $W^{2-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$. Si $p > \dfrac{N}{2}$, $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N-1}\left(2 - \dfrac{1}{p}\right) < 0$, donc $W^{2-\frac{1}{p},p}(\Gamma) \subset C^0(\Gamma)$.

En rajoutant au besoin à u une constante convenable: $u(s) \geqq r_0$, quel que soit $s \in \Gamma$, et u est solution de:

$$-\Delta u = f \text{ et } -\frac{\partial u}{\partial n} = \beta^+ \in \beta(u) \text{ c'est à dire (18) et (19).}$$

b) même notations qu'en a.

Si u est solution de $-\Delta u = f$ et $-\dfrac{\partial u}{\partial n} \in \beta(u)$ avec $\displaystyle\int_\Omega f\,dx = \beta^+ \operatorname{mes} \Gamma$, on voit en intégrant sur Ω, que $u \geqq r_0$ p. p. sur Γ. On définit une application B comme suit:

Soit $f \in L^p(\Omega)$ telle que $\displaystyle\int_\Omega f\,dx = \beta^+ \operatorname{mes} \Gamma$. $\bar{u}$ est solution de: $-\Delta\bar{u} = f$ et $-\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial n} = \beta^+$. On pose $Bf = \bar{u}|_\Gamma$, avec $\displaystyle\int_\Omega \bar{u}\,dx = 0$. L'ensemble image de l'application B est $W^{2-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$, qui n'est pas inclus dans $L^\infty(\Gamma)$ si $p \leqq \dfrac{N}{2}$. Il existe donc des $\bar{u}$ qui ne sont pas presque partout minorés sur Γ. Si $f \in B^{-1}(\bar{u})$, alors le problème $-\Delta\bar{u} = f$ et $-\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial n} \in \beta(\bar{u})$ n'a pas de solution. ■

II.4. Un théorème d'unicité pour l'exemple II.2.

Si β est strictement monotone, c'est à dire:

$$\forall\, r \neq r', \quad \forall\, s \in \beta(r), \quad \forall\, s' \in \beta(r'): (s - s')(r - r') > 0$$

il est clair que (16) a une solution unique. Le théorème 3 améliore nettement ce résultat.

THEORÈME 3 On suppose Γ connexe. Si $f \in L^p(\Omega)$ avec $p > \dfrac{N}{2}$ et si

$$\beta^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{mes}\Gamma}\int_\Omega f\,dx\right) \text{ est réduit à un point,} \tag{22}$$

alors (16) a une solution unique.

DEMONSTRATION. On utilise un résultat de régularité qui résulte de Brezis [2] chapître I.2 théorèmes I.9 et I.11.

Si $f \in L^p(\Omega)$, $2 \leqq p \leqq N$ et si u est solution de (16), $u \in H^1(\Omega) \cap W^{1,\hat{p}}(\Omega)$ avec $\dfrac{1}{\hat{p}} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$. Cela implique que: $u|_\Gamma \in W^{1-\frac{1}{\hat{p}},\hat{p}}$ Cet espace est inclus dans $C^0(\Gamma)$ si $p > \dfrac{N}{2}$, car alors $\dfrac{1}{\hat{p}} - \dfrac{1}{N-1}\left(1 - \dfrac{1}{\hat{p}}\right) < 0$.

Si $f \in L^p(\Omega)$, $p > N$, alors $u \in W^{2,p}(\Omega)$, donc $u|_\Gamma \in W^{2-\frac{1}{p}}(\Gamma)$.
Comme $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N-1}\left(2 - \dfrac{1}{p}\right) < 0$, $u \in C^0(\Gamma)$.

Supposons que (16) possède deux solutions u et $\hat{u}$. Il est clair que u et $\hat{u}$ diffèrent d'une constante: $\hat{u} = u + k$, $k > 0$ (par exemple).
On pose

$$b = \frac{1}{\operatorname{mes}\Gamma}\int_\Omega f\,dx, \quad r_0 = \beta^{-1}(b).$$

Soit

$$g = -\frac{\partial u}{\partial n}; \quad \hat{g} = -\frac{\partial \hat{u}}{\partial n}$$

$$g = \hat{g} \text{ p. p. sur } \Gamma; \quad \int_\Gamma (g - b)\,d\Gamma = 0 = \int_\Gamma (\hat{g} - b)\,d\Gamma. \tag{23}$$

Soit

$$E^+ = \{x \in \Gamma / u(x) \geqq r_0\}; \quad E^- = \Gamma - E^+$$

$$\hat{E}^+ = \{x \in \Gamma / u(x) > r_0 - k\}; \quad \hat{E}^- = \Gamma - \hat{E}^+$$

$$\hat{E}^+ \supset E^+ \Longrightarrow \hat{E}^- \subset E^- \tag{24}$$

$$\int_{E^+} (g(x) - b)\,d\Gamma = \int_{E^-} (b - g(x))\,d\Gamma$$

$$\int_{\hat{E}^+} (\hat{g}(x) - b)\,d\Gamma = \int_{\hat{E}^-} (b - \hat{g}(x))\,d\Gamma.$$

D'après (23) et (24) ces quatre intégrales sont égales.
Soit

$$I = \{r \in D(\beta) / \beta(r + k) \cap \beta(r) = \emptyset\}.$$

Il est facile de voir que I contient $]r_0 - k, r_0[$. De plus I est ouvert: Soient deux suites $r_n \longrightarrow r$, $r_n \in D(\beta) \cap (D(\beta) - k)$

$$s_n \in \beta(r_n + k) \cap \beta(r_n).$$

Si s_n n'est pas borné, $r + k$ et r sont sur la frontière de $D(\beta)$. Mais ce n'est pas possible, comme on le voit en extrayant une sous-suite monotone, par exemple $r_\nu \downarrow r$ et $r_\nu + k \downarrow r + k$.

On peut alors extraire de la suite s_n une sous suite convergente, dont la limite, d'après des théorèmes généraux est dans $\beta(r) \cap \beta(r + k)$. Soit U la composante connexe de I qui contient $]r_0 - k, r_0[$. Le cas où U ne contient pas r_0 ne peut se présenter que si $\beta(r_0)$ est un convexe non réduit à un point et $b < \sup\{s/s \in \beta(r_0)\}$.

1er cas: $]r_0 - k, r_0 + \varepsilon[\subset U$, et $\varepsilon > 0$.

Si $u(x) \in]r_0 - k, r_0 + \varepsilon[$, $g(x) - \widehat{g}(x) > 0$, donc $\{x \in \Gamma/u(x) \in]r_0 - k, r_0 + \varepsilon[\}$ est de mesure nulle, et $\displaystyle\int_{E+} (g(x) - b)\, d\Gamma = \int_{[u \geqq r_0 + \varepsilon]} (g(x) - b)\, d\Gamma \geqq$

$\geqq (\text{mes}\,[u \geqq r_0 + \varepsilon])\,(\inf\{s/s \in \beta(r_0 + \varepsilon)\} - b)$.

$$\int_{\widehat{E}-} (b - g(x))\, d\Gamma \geq (\text{mes}\,\widehat{E}^-)\,(b - \sup\{s/s \in B(r_0 - K)\}.$$

Mais

$$\text{mes}\,\widehat{E}^- + \text{mes}\,[u \geq r_0 + \varepsilon] = \text{mes}\,\Gamma.$$

Si

$$\text{mes}\,\widehat{E}^- = 0, \quad \int_{[u \geq r_0 + \varepsilon]} (g(x) - b)\, d\Gamma > 0,$$

ce qui contredit

$$\int_{[u \geq r_0 + \varepsilon]} (g(x) - b)\, d\Gamma = \int_{\widehat{E}-} (-g(x) + b)\, d\Gamma.$$

De même, on ne peut avoir $\text{mes}\,[u \geq r_0 + \varepsilon] = 0$. Ainsi on aurait une fonction u continue sur Γ, presque partout plus grande que $r_0 + \varepsilon$ ou plus petite que $r_0 - k$, avec des valeurs seulement dans ces deux intervalles. Ce n'est pas possible si Γ est connexc.

2ème cas: $r_0 \notin U$; on remplace daLs les inégalités ci-dessus $\inf\{s/s \in \beta(r_0 + \varepsilon)\} - b$ par $\sup\{s/s \in \beta(r_0)\} - b$ qui est strictement positif, et on achève le raisonnement pareillement. ∎

II.5. Théorème d'existence pour le problème :

$$\gamma(u) - \Delta u \ni f\,; \quad -\frac{\partial u}{\partial n} \in \beta(u).$$

On se donne Ω comme au n° II.2 et on choisit les mêmes V, H, A, p, φ. Soit k une fonction s. c. i. propre sur $\mathbb{R}$ telle que $k(0) = 0$, $k \geq 0$ et soit $\partial k = \gamma$.

On pose

$$\psi(v) = \int_\Omega k(v)\, dx \quad \text{si} \quad k(v) \in L^1(\Omega)$$

$$\psi(v) = +\infty \qquad \text{ailleurs.}$$

Cette fonction ψ est s. c. i. convexe sur V.

THEORÈME 4. Pour que le problème variationnel : trouver $u \in V$ tel que:

$$a(u, v-u) + \varphi(v) - \varphi(u) + \psi(v) - \psi(u) \geq (f, v-u) \quad \forall\, v \in V \tag{25}$$

possède une solution, il suffit que :

$$\int_\Omega f\, dx \in r.\mathrm{int}.R\,(\partial\,((\mathrm{mes}\,\Omega)\, k + (\mathrm{mes}\,\Gamma)\, j). \tag{26}$$

REMARQUE : Si $j(x) + k(x) = +\infty$ partout sauf en 0, f est quelconque, car $\partial\,[(\mathrm{mes}\,\Omega)\, k + (\mathrm{mes}\,\Gamma)\, j] = \partial\psi_{\{0\}} = R$ ($\psi_{\{0\}}$ fonction indicatrice du convexe $\{0\}$). Si $j + k$ est fini ailleurs qu'en 0, $r.\mathrm{int.dom}\, j \cap r.\mathrm{int.dom}\, k \neq \emptyset$.

Alors (Rockafellar [12], theorem 23.8) :

$$\partial\,((\mathrm{mes}\,\Omega)\, k + (\mathrm{mes}\,\Gamma)\, j) = (\mathrm{mes}\,\Omega)\, \gamma + (\mathrm{mes}\,\Gamma)\, \beta.$$

DEMONSTRATION DU THEORÈME 4.

$$\varphi(y) + \psi(y) = (\mathrm{mes}\,\Omega)\, k(y) + (\mathrm{mes}\,\Gamma)\, j(y)$$

donc

$$\partial\,[\tilde{\varphi}_0 + \tilde{\psi}_0](y) = \frac{1}{\mathrm{mes}\,\Omega}\,[\partial\,((\mathrm{mes}\,\Omega)\, k + (\mathrm{mes}\,\Gamma)\, j)](y).$$

La condition (4) résulte bien de (26). ■

Interprétation du problème (25).

Elle se fait sur les mêmes principes qu'en II.2, et on trouve:

$$-\Delta u+\gamma(u)\ni f \text{ dans } \Omega \text{ au sens des distributions} \tag{27}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial n}\in\beta(u) \text{ presque partout sur } \Gamma. \tag{28}$$

REMARQUE. La condition (26) est presque nécessaire. Si on intègre (27) sur Ω en tenant compte de (28), il vient:

$$\int_\Omega \gamma(u)\,dx=\int_\Gamma \beta(u)\,d\Gamma=\int_\Omega f\,dx$$

d'où:

$$\int_\Omega f\,dx\in(\text{mes }\Gamma)\,R(\beta)+(\text{mes }\Omega)\,R(\gamma).$$

D'autre part si $r\cdot\text{int}\cdot D(\beta)\cap r\cdot\text{int}\cdot D(\gamma)\neq\emptyset$, et en désignant par $\square$ l'inf-convolution et par * la conjugaison:

$$r.\text{int}.R((\text{mes }\Gamma)\,\beta+(\text{mes }\Omega)\,\gamma)=r.\text{int.dom}\,[(\text{mes }\Gamma)\,j+(\text{mes }\Omega)\,k]^*$$

$$=r.\text{int.dom}\,([(\text{mes }\Gamma)\,j]^*\,\square\,[(\text{mes }\Omega)\,k]^*)$$

$$=r.\text{int.}[\text{dom}\,((\text{mes }\Gamma)\,j)^*+\text{dom}\,((\text{mes }\Omega)\,k)^*]$$

$$=r.\text{int.dom}\,((\text{mes }\Gamma)\,j^*\,r.\text{int.dom}\,(\text{mes }\Omega)\,k)^*$$

$$=r.\text{int.}((\text{mes }\Gamma)\,\beta)+r.\text{int.}((\text{mes }\Omega)\,\gamma)$$

$$=r.\text{int.}[(\text{mes }\Gamma)\,R(\beta)+(\text{mes }\Omega)\,R(\gamma)].$$

Ceci démontre que si $(\text{mes }\Gamma)\,R(\beta)+(\text{mes }\Omega)\,R(\gamma)$ est relativement ouvert, la condition (26) est suffisante. C'est le cas si l'un au moins des deux $R(\beta)$ ou $R(\gamma)$ est relativement ouvert.

II.6. Théorème d'existence pour le problème:

$$-\sum_{i,j=1}^{N} D_i(a_{ij}\,D_j\,u)+bu-\lambda_1 u+\beta(u)\ni f \text{ dans } \Omega \text{ et } u|_\Gamma=0$$

λ_1 étant la première valeur propre de

$$L=-\sum_{i,j=1}^{N} D_i(a_{ij}\,D_j)+b.$$

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, de frontère Γ très régulière. Soient a_{ij} des fonctions de classe C^1 sur $\bar{\Omega}$, b une fonction continue sur $\bar{\Omega}$. On suppose que $L = -\sum_{i,j=1}^{N} D_i(a_{ij} D_j) + b$ est fortement elliptique, c'est à dire:

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\,\xi_i\,\xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^{N} |\xi_i|^2 \quad \forall\ \xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N. \quad (\alpha > 0).$$

On suppose aussi L formellement autoadjoint, et on appelle λ_1 la plus petite valeur propre de L, et Y le sous-espace propre correspondant.

THÉORÈME 5. Une condition suffisante pour que le problème variationnel:

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij}(x)\, D_i u\, D_j (v(x) - u(x))\, dx + \tag{29}$$

$$+ \int_\Omega b(x)(v(x) - u(x))\, u(x)\, dx - \lambda_1 \int_\Omega u(x)(v(x) - u(x))\, dx +$$

$$+ \int_\Omega j(v(x)) - j(u(x))\, dx \geqq \int_\Omega f(x)(v(x) - u(x))\, dx$$

quel que soit $v \in V$, est que:

$$\frac{1}{\int_\Omega y(x)\, dx} \int_\Omega f(x)\, y(x)\, dx \in r.\mathrm{int}.R(\beta) \quad (y \in Y - \{0\}). \tag{30}$$

j est une fonction s. c. i. propre de $\mathbb{R}$ dans $]-\infty, +\infty]$, dont le sous différentiel est β. On suppose $0 \in \mathrm{dom}\, j$, $j \geqq 0$ et $f \in L^2(\Omega)$.

DEMONSTRATION. On choisit $H = L^2(\Omega)$ muni de sa norme usuelle et $V = H^1(\Omega)$ muni de la norme

$$\| v \| = \left(\int_\Omega |\operatorname{grad} v|^2\, dx \right)^{1/2}.$$

On pose

$$p(u) = \left(\sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij}\, D_i u\, D_j u\, dx + \int_\Omega (b - \lambda_1)\, u\, dx \right)^{1/2}.$$

Les propriétés variationnelles des valeurs propres (voir Courant-Hilbert, [5]) impliquent que $p(u)$ est défini pour tout u dans V. De plus (Krein-Rutman [7]) le sous espace propre correspondant à λ_1 est de dimension 1, et ses éléments sont strictement négatifs (ou strictement positifs) sur Ω.

$$(p(u))^2 = \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij} D_i u \, D_j u \, dx + \int_\Omega b u^2 \, dx \leqq$$

$$\leqq \max_{i,j,x} |a_{ij}(x)| \int_\Omega |D_i u| \, |D_j u| \, dx + \max_x |b(x)| \, |u|^2_{L^2(\Omega)} \leqq$$

$$\leqq (\max_{i,j,x} a_{ij}(x)) \, C \, \| u \|^2 + \max_x |b(x)| \; |u|^2.$$

Donc en utilisant l'équivalence de $\| \ \|$ et $| \ | + \| \ \|$ dans V on démontre la promière inégalité de (1).

D'autre part: $\| u \|^2 \leqq \dfrac{1}{\alpha}(p(u))^2 + \lambda_1 |u|^2$ ce qui démontre entièrement les inégalités (1).

(2) résulte des remarques précédentes.

(3) résulte de la caractérisation variationnelle des valeurs propres d'un opérateur auto-adjoint d'inverse compact (voir [5])

$$\lambda_2 = \inf \left\{ \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij} D_i u \, D_j u \, dx + \int_\Omega b u^2 \, dx / |u| = 1 \text{ et } \int_\Omega u y \, dx = 0 \right.$$

$$\left. \text{où } y \text{ est un élément non nul de } Y \right\}$$

$\lambda_2 > \lambda_1$, donc si $v = u - Pu$,

$$\int_\Omega v y \, dx = 0 \text{ et } \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij} D_i v \, D_j v \, dx + \int_\Omega b v^2 \, dx \geqq \lambda_2 \int_\Omega v^2 \, dx,$$

donc:

$$p(u)^2 \geqq (\lambda_2 - \lambda_1) \int_\Omega (u - Pu)^2 \, dx.$$

Enfin

$$\Phi(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega j(u) \, dx & \text{si } j(u) \in L^1(\Omega) \\ + \infty & \text{ailleurs} \end{cases}$$

est une fonction s. c. i. propre convexe sur V.

On est bien dans les conditions (4) du théorème 1. Il reste à caractériser : $r.\text{int}.R\ (\partial\tilde{\varphi}_0)\ (u_0 = 0)$ si

$$y \in Y - \{0\}, \quad P'f = \frac{\int_\Omega f y\, dx}{\int_\Omega y^2\, dx}\, y \quad \text{et} \quad \tilde{\varphi}_0 (ry) = \int_\Omega j\,(ry)\, dx.$$

Soit $r'y \in \partial\tilde{\varphi}_0 (ry)$. (On rappelle que L est autoadjoint)

$$(r'y, y) = \int_\Omega r' y^2\, dx = \int_\Omega \beta\,(ry)\, y\, dx$$

donc

$$r' = \frac{\int_\Omega \beta\,(ry)\, y\, dx}{\int_\Omega y^2\, dx}.$$

Supposons que pour $r \geqq r_0$, $\beta\,(r) \geqq h$. Alors :

$$\int_\Omega \beta\,(ry)\, y\, dx \geqq \int_{[x/ry(x) \geqq r_0]} h y\,(x)\, dx = h \int_{[x/ry(x) \geqq r_0]} y\,(x)\, dx.$$

Quand r tend vers $+\infty$, $\int_{[x/ry(x) \geqq r_0]} y\,(x)\, dx$ tend vers $\int_\Omega y\,dx$. Donc la condition [5] s'écrit :

$$\frac{\int_\Omega f y\, dx}{\int_\Omega y^2\, dx}\ r.\text{int}.R \left(\frac{\int_\Omega y\,(x)\, dx}{\int_\Omega y^2\,(x)\, dx}\, \beta \right)$$

c'est à dire (30).

L'interprétation de (27) est immédiate et donne :

$$(31) \qquad -\sum_{i,j=1}^{N} D_i (a_{ij} D_j u) + bu - \lambda_1 u + \beta\,(u) \ni f \quad \text{et} \quad u\,|_\Gamma = 0.$$

II.7. Un théorème de non-existence.

THÉORÈME 6. Si le graphe β est tel que:

(32) $$\beta^{+} = \sup \{y/y \in \beta(r)\} \in R(\beta)$$

(33) $$\min \beta^{-1}(\beta^{+}) = r_0 > 0$$

alors quel que soit $p \in [2, +\infty]$, on peut trouver $f \in L^p(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega fy\, dx = \beta^{+} \int_\Omega y\, dx \quad (y \in Y - \{0\})$$

et cependant (31) n'a pas de solution.

DEMONSTRATION. On remarque d'abord, en multipliant scalairement (31) par y que, si $g = f - Lu + \lambda_1 u$,

$$\int_\Omega fy\, dx = \int_\Omega gy\, dx = \beta^{+} \int_\Omega y\, dx.$$

donc $u \geqq r_0$ presque partout sur Ω, et u est solution de:

$$Lu - \lambda_1 u = f - \beta^{+} \text{ et } u|_\Gamma = 0$$

$a \cdot p > \dfrac{N}{2}$. Si $\bar{u}$ est solution de:

(34) $$L\bar{u} - \lambda_1 \bar{u} = f - \beta^{+} \text{ et } \bar{u}|_\Gamma = 0$$

alors $\bar{u} \in W^{2,p}(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$. Donc $\lim\limits_{x \to \Gamma} u(x) = 0$, ce qui empêche $u(x) \geqq r_0$ p. p. sur Ω, et on ne peut y remédier en ajoutant un élément convenable de Y, car $y|_\Gamma = 0$, quel que soit $y \in Y$.

$b \cdot p \leqq \dfrac{N}{2}$. Si $\bar{u}$ est solution de $L\bar{u} - \lambda_1 \bar{u} = f - \beta^{+}$ et $\bar{u}|_\Gamma = 0$, alors $\bar{u} \in W^{2,p}(\Omega)$ qui n'est pas inclus dans $L^\infty(\Omega)$. On peut donc trouver des données $f \in L^p(\Omega)$ telles que $\bar{u} \geqq r_0$ n'ait lieu pour aucun r_0.

II.8. Le problème de Signorini, une nouvelle démonstration d'existence.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ (généralement $N = 2$ ou 3).

On suppose que $\partial\Omega$, frontière de Ω est une variété de dimension $N - 1$, C^1 par morceaux, c'est à dire:

$$\partial\Omega = \bigcup_{h=1}^{q} \Sigma_h = x_h(T_{N-1}) \text{ et } T_{N-1} =$$
$$= \left\{\tau = (\tau_1, \dots, \tau_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1} / 0 \leqq \tau_j \leqq 1 \,;\, \sum_{k=1}^{N} \tau_k \leqq 1\right\}$$

et x_h est une application de classe C^1 de T_{N-1} dans $\mathbb{R}^N$, dont la jacobienne est partout de rang $N-1$.

De plus si ∂T_{N-1} est le bord de T_{N-1}, on suppose que :

$$\partial \Sigma_h = x_h(\partial T_{N-1}) \text{ et si } h \neq k : \quad \Sigma_h \cap \Sigma_k \subset \partial \Sigma_h \cap \partial \Sigma_k .$$

Si $u \in (\mathcal{D}'(\Omega))^N$ on pose :

$$s_{ik}(u) = \frac{1}{2}(D_i u_k + D_k u_i) \text{ où } u = (u_1, \ldots, u_N).$$

On note $(\,,\,)$ le produit scalaire de $L^2(\Omega)$ et $|\ |$ la norme de $L^2(\Omega)$. On adopte la convention de sommation sur les indices répétés.

Soit.

$$V = \{u \in (L^2(\Omega))^N / s_{ik}(u) \in L^2(\Omega),\ 1 \leqq i \leqq N\}$$

V muni de la norme $\|u\|^2 = (u_k, u_k) + (s_{ik}(u), s_{ik}(u))$ et du produit scalaire $((u, v)) = (u_k, v_k) + (s_{ik}(u), s_{ik}(v))$ est un espace de Hilbert.

La trace d'un élément de V est définie (voir [6]).

On suppose que Ω vérifie de plus les hypothèses suivantes :

(35) l'injection $V \longrightarrow (L^2(\Omega))^N$ est compacte.

(36) l'application trace $V \longrightarrow (L^2(\partial\Omega))^N$ est compacte.

Ces conditions sont réalisées si Ω est assez régulier. En particulier les ouverts « proprement réguliers » de Fichera [6] réalisent ces conditions. Ω est proprement régulier si :

(i) Il existe un vecteur unitaire $\mu(x)$, défini pour $x \in \partial\Omega$, continu en x, dirigé vers l'intérieur de Ω, et tel que, si ω est la mesure de l'angle que fait $\mu(x)$ avec le vecteur normal intérieur $\nu(x)$, on a :

$$x_h \in \Sigma_h - \partial\Sigma_h,\ h = 1, 2, \ldots, q \Longrightarrow 0 \leqq \omega < \omega_0 < \frac{\pi}{2}.$$

(ii) Si x_h est la représentation paramétrique de Σ_h sur T_{N-1}, x_h est de classe C^1.

(iii) Il existe un nombre positif λ_0 tel que, pour tout λ vérifiant $0 \leqq \lambda < \lambda_0$, l'ensemble des points $x + \lambda\mu(x)$, $x \in \Omega$, est en bijection avec $\partial\Omega$ et contenu dans Ω.

Fichera démontre dans [6] que si un ouvert est proprement régulier il vérifie (35) et (36) ; il en est ainsi d'un ouvert de frontière très régulière, ou d'un cylindre, ou d'un parallélépipède.

Soient N^4 fonctions de $L^\infty(\Omega)$ qui vérifient la condition de coercivité:

$$\forall\ \xi_{ij} \in \mathbb{R}^{N^2}:\ a_{ijkh}\,\xi_{ij}\,\xi_{kh} \geq \alpha\,\xi_{ij}\,\xi_{ij}$$

presque partout sur Ω. ($\alpha > 0$). Soit alors

$$a(u, v) = \int_\Omega a_{ijkh}\, s_{ij}(u)\, s_{kh}(v)\, dx$$

$$S(u) = (s_{ij}(u), s_{ij}(u)).$$

Il est clair que

$$a(u, v) \leq \sup_{i,j,k,h} |a_{ijkh}|_\infty \sqrt{S(u)}\,\sqrt{S(v)} \qquad \forall\ u, v \in V$$

et que

$$a(u, u) \geq \alpha\, S(u) \qquad\qquad \forall\ u \in V$$

donc a est une forme bilinéaire continue sur $V\,A$, qui défined une application de V dans V' par

$$a(u, v) = (Au, v)_{V', V} \qquad \forall\ u, v \in V.$$

On suppose de plus que a est symétrique.

On vérifie les assertions suivantes:

Soit

$$Y = \{u \in V / S(u) = 0\}.$$

Alors la dimension de Y est finie et $R(A) \subset W'$ (avec les notations du théorème 1).

Soit Σ une partie de $\partial\Omega$ qui est la réunion d'un certain nombre de Σ_h et Σ^* son complémentaire dans $\partial\Omega$.

On pose

$$p_0(u) = \sqrt{(u_k\,,\,u_k) + (u_k\,,\,u_k)_{L^2(\Sigma^*)}}$$

$$p_1(u) = \sqrt{S(u)}.$$

Alors $\|\ \|$ et $p_0 + p_1$ sont équivalentes et p_0 est faiblement s. c. i. sur V.

(3) résulte du lemme 1, par de légères modifications.

Soit k la fonction indicatrice de l'intervalle $]-\infty, 0]$ (à valeurs dans $]-\infty, +\infty[)\cdot k$ est convexe et s. c. i.

Soit ν le vecteur normal dirigé vers l'extérieur. Il est défini sur

$$\Sigma_h - \partial\Sigma_h\,,\quad h = 1, 2, \dots, q.$$

On pose

$$\varphi(u) = \int_{\Sigma} k(u_i \nu_i)\, d\sigma \quad \text{si} \quad k(u_i \nu_i) \in L^1(\Sigma)$$

$$= +\infty \qquad \text{ailleurs.}$$

On vérifie à l'aide du lemme de Fatou que φ est s. c. i. convexe, propre sur V.

LEMME 3. Pour que $u' \in V'$ vérifie :

$$P'u' \in r.\text{int}.R(\partial\tilde{\varphi}_0)$$

il faut et il suffit que :

$$(u', y)_{V', V} \leq 0 \quad \text{si} \quad y \in K$$

$$(u', y)_{V', V} < 0 \quad \text{si} \quad y \in K - K_1$$

où $K = \{y \in Y / y_i \nu_i = 0$ presque partout sur $\Sigma\}$, et $K_1 = K \cap (-K)$.

DEMONSTRATION. On constate que $\tilde{\varphi}_0 = \psi_K$, fonction indicatrice du convexe fermé K. De plus $R(\partial\psi_K)$ est le cône convexe polaire de K.

On rappelle le résultat suivant qui résulte de Rockafellar [12] theorem 13.4 et theorem 14.1 :

Si K est un cône convexe fermé, de sommet 0, dans un espace de dimension finie, et K^* son polaire, l'espace de linéalité de K^* (c'est à dire le plus grand sous-espace vectoriel inclus dans K^*) est le complémentaire orthogonal de l'espace vectoriel engendré par K. De façon duale, l'espace de linéalité de K est le complémentaire orthogonal de l'espace vectoriel engendré par K^*.

De plus :

$$\text{lin}\, K^* + \dim K = N \quad \text{(dimension de l'espace)}$$

$$\text{lin}\, K + \dim K^* = N$$

où $\text{lin}\, K$ est la dimension de l'espace de linéalité de K et $\dim K$ est la dimension de l'espace affine qu'il engendre.

En utilisant des décompositions orthogonales évidentes, on peut se ramener au cas $\text{lin}\, K = 0$, c'est à dire $K \cap (-K) = \{0\}$.

Ce cas a déja été traité au paragraphe II.1.

THEORÈME 7. Si $f = (f_1, \dots, f_N) \in (L^2(\Omega))^N$ et si $g = (g_1, \dots, g_N) \in L^2(\Sigma^*))^N$ sont données telles que :

$$(f_i\,,\,y_i)+(g_i\,,\,y_i)_{L^2(\Sigma^*)}\leq 0 \quad \forall\, y \in K$$

$$(f_i\,,\,y_i)+(g_i\,,\,y_i)_{L^2(\Sigma^*)}< 0 \quad \forall\, y \in K-K_1$$

alors le problème: Trouver $u \in V$ tel que pour tout $v \in V$:

$$a(u, v-u)+\varphi(v)-\varphi(u)\geq \sum_{i=1}^{N}\left[\int_{\Omega} f_i(v_i-u_i)\,dx+\int_{\Sigma^*} g_i(v_i-u_i)\,d\sigma\right] \tag{37}$$

possède une solution.

Demonstration. Bien que la projection P ne soit pas par rapport à la norme p_0, mais par rapport à la norme de $(L^2(\Omega))^N$, on fait la démonstration comme au théorème 1. En effet d'après les remarques précédentes et le lemme 3, on est bien dans les conditions de ce théorème.

Interprétation du problème (37).

Soit

$$(\eta_1\,,\ldots,\eta_N)\in(\mathcal{D}(\Omega))^N \subset V.$$

On porte $v=u+\eta$ dans (37). Il vient:

$$\int_{\Omega} a_{ijkh}\, s_{ij}(u)\, s_{kh}(\eta)\,dx-\int_{\Omega} f_i\,\eta_i\,dx\geq 0,$$

c'est à dire, en tenant compte de la symétrie de a, et en posant $\sigma_{kh}=a_{ijkh}\,s_{ij}$:

$$f_h+D_k(\sigma_{kh}(u))=0, \quad \text{dans } \Omega, \text{ et au sens des distributions.} \tag{38}$$

On démontre l'égalité suivante du type formule de Green, si toutes les fonctions sont assez régulières:

$$\int_{\Omega} a_{ijkh}\,s_{ij}(u)\,s_{kh}(v-u)\,dx=\frac{1}{2}\int_{\Omega}(\sigma_{kh}(u)\,D_k(v_h-u_h)+\sigma_{kh}(u)\,D_h(v_k-u_k))\,dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{\Omega}(D_k(\sigma_{kh}(u)\,(v_h-u_h)+D_h(\sigma_{hk}(u)\,(v_k-u_k))\,dx+$$

$$+\int_{\partial\Omega}\sigma_{kh}(u)\,(v_h-u_h)\,\nu_k\,d\sigma.$$

On la démontre entièrement en utilisant un argument de densité.

En utilisant (38) et cette dernière égalité, et en reportant dans (37) on obtient :

$$\int_{\partial\Omega} \sigma_{kh}(u)(v_h - u_h)\,\nu_k\,d\sigma \geq \int_{\Sigma^*} g_h (v_h - u_h)\,d\sigma$$

pour tout v tel que $v_i \nu_i \leq 0$ p. p. sur . Ceci implique que sur Σ^* :

(39) $$\sigma_{kh}(u)\,\nu_k - g_h = 0.$$

Soit τ un vecteur tangent à $\partial\Omega$, η une fonction à support inclus dans Σ ; si $v = u + \eta\tau$, $v_i\nu_i = u_i\nu_i + \eta\tau_i\nu_i \leq 0$ p. p. sur Σ. On a donc :

$$\int_{\partial\Omega} \sigma_{kh}(u)\,\eta\tau_h\,\nu_k\,d\sigma \geq \int_{\Sigma^*} g_h\,\eta\tau_h\,d\sigma$$

d'où :

(40) $$\sigma_{kh}(u)\,\tau_h\,\nu_k = 0 \text{ p. p. sur } \Sigma.$$

Si $v = u + \eta\nu$, η à support inclus dans Σ, tel que $v_i\nu_i \leq 0$ p. p., c'est à dire $u_i\nu_i + \eta \leq 0$ p. p. sur Σ, on a

$$\int_{\partial\Omega} \sigma_{kh}(u)\,\eta\nu_k\,\nu_h\,d\sigma \geq 0.$$

Si on montre une régularité suffisante de $u|_\Sigma$, alors l'alternative est réolisée : presque partout sur Σ :

$$\begin{cases} u_i\nu_i(x) = 0 \\ \text{et } \sigma_{kh}(u(x))\,\nu_k(x)\,\nu_h(x) > 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} u_i\nu_i(x) > 0 \\ \text{et } \sigma_{kh}(u(x))\,\nu_k(x)\,\nu_h(x) = 0. \end{cases}$$

L'interprétation précise du problème de Signorini est détaillée dans Fichera [6].

III. Une généralisation non-linéaire du théorème 1.

III.1. Le théorème 8.

On suppose que V est un espace de Banach reflexif, (norme $\|\ \|$), V' son dual (norme $\|\ \|'$, produit de dualité noté $(\ ,\ )$).

Soit J l'application de dualité de V dans V'. On peut la supposer definie de façon unique en remplaçant au besoin $\|\ \|'$ par une norme équivalente qui rend V' strictement convexe (voir Lindenstrauss [13]).

On suppose que la norme de V est équivalente à la somme d'une semi-norme p et d'une norme $|\ |$:

$$c'(p(v)+|v|) \leqq \|v\| \leqq c(p(v)+|v|) \quad \forall\, v \in V.$$

Soit $Y=\{v \in V/p(v)=0\}$. On suppose Y de dimension finie, et de plus que Y possède un supplémentaire algébrique et topologique W dans V. Si P est la projection sur Y parallèlement à W, on suppose que:

$$\forall\, v \in V: |v-Pv| \leqq c_1\, p(v). \tag{41}$$

P' est la transposée de P et $W'=\operatorname{Ker} P'$.

$\tilde{\varphi}$ et φ_u sont définies comme au théorème 1.

THEORÈME 8. Si A est une application de V dans V' qui vérifie:

$$\forall\, u, v \in V: (Au-Av, u-v) \geqq \alpha(p(v))^q \quad (\alpha>0,\ q>1) \tag{42}$$

si f est donnée dans V' et l'un des deux groupes suivants de conditions est satisfait:

(43) $\quad R(A) \subset W'$ et il existe $u_0 \in \operatorname{dom} \Phi$ tel que $P'f \in r.\text{int}.R(\partial\tilde{\varphi}_{u_0})$

(44) $\quad$ Il existe $u_0 \in \operatorname{dom} \Phi$ tel que $Au_0 \in W'$ et $P'f \in \text{int}.R(\partial\tilde{\varphi}_{u_0})$

alors le problème: trouver $u \in V$ tel que pour tout $v \in V$:

$$(Au-f, v-u)+\varphi(v)-\varphi(u) \geqq 0 \tag{45}$$

possède une solution.

DEMONSTRATION. On approche (45) par:

$$\varepsilon P'JP(u_\varepsilon-u_0)+Au_\varepsilon+\partial\varphi(u_\varepsilon) \ni f$$

et on suppose que u_ε n'est pas borné quand ε tend vers 0.

On pose $x_\varepsilon=\dfrac{u_\varepsilon-u_0}{\|u_\varepsilon-u_0\|}$ et on a l'estimation:

$$\alpha(p(u_\varepsilon-u_0))^q \leq \|f-Au_0\|'\,\|u_\varepsilon-u_0\|+\varphi(u_0)$$

d'où:

$$p(x_\varepsilon)=0\left(\|u_\varepsilon-u_0\|^{\frac{1-q}{q}}\right).$$

La soite de la démonstration est alors identique à celle du theoreme 1.

III.2. Application du théorème 8 au problème :

$$-\Delta_p u = f \quad \text{et} \quad \left(-\frac{\partial u}{\partial n}\right)_p \in \beta(u).$$

Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^N$, de frontière Γ très régulière.

$V = W^{1,p}(\Omega)$, muni de sa norme usuelle $\| \ \|_p$ $(1 < p < +\infty)$

$$|v|_p = \left(\int_\Omega |v(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad n_p(v) = \left(\sum_{i=1}^N \int_\Omega |D_i v(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Il est clair que V est réflexif et que $\| \ \|_p$ est équivalente à $| \ |_p + n_p$.

On choisit

$$(Au, v) = \int_\Omega \sum_{i=1}^N D_i(|D_i u|^{p-2}) D_i v \, dx.$$

j est une fonction s. c. i. convexe propre de R dans $]-\infty, +\infty]\cdot \partial j = \beta$, et on suppose $0 \in \beta(0)$.

$$\varphi(u) = \begin{cases} \int_\Omega j(u) \, d\Gamma & \text{si} \quad j(u) \in L^1(\Gamma) \\ +\infty & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Avec les notations du théorème 8, Y est l'espace des fonctions constantes sur Ω, et on prend :

$$W_p = \left\{v \in W^{1,p}(\Omega) / \int_\Omega v(x) \, dx = 0\right\}.$$

On utilise le résultat suivant :

quel que soit p dans $]1, +\infty]$ la transformation identique $W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega)$ est compacte. (voir par exemple Nečas [10] théorème 6.3) ensuite de quoi on raisonne comme au lemme 1 pour montrer la condition (41).

THÉORÈME 9. Si f est donnée telle que :

$$\frac{1}{\operatorname{mes} \Gamma} \int_\Omega f(x) \, dx \in \operatorname{int}\cdot R(\beta) \quad (f \in L^p(\Omega))$$

alors le problème: trouver $u \in V$ tel que, pour tout $v \in V$:

$$(Au - f, v - u) + \varphi(v) - \varphi(u) \geq 0$$

possède une solution.

DEMONSTRATION. On est dans les conditions du théorème 8, car

$$(Au - Av, u - v) \geqq (n_p(u - v))^p .$$

Interprétation du problème ci-dessus.

Par la méthode utilisée en II.2, on obtient:

$$-\Delta_p u = -\sum_{i=1}^{N} D_i(|D_i u|^{p-2} D_i u) = f$$

$$-\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_p = -\sum_{i=1}^{N} |D_i u^{p-2}| D_i u \cos(\nu, x_i) \in \beta(u) \text{ p. p. sur } \Gamma.$$

où ν est la normale extérieure à Γ.

IV. Deux résultats qui ne rentrent pas dans le cadre des théorèmes 1 ou 8.

IV.1. Théorème d'existence pour le système non linéaire:

$$-\Delta\vec{u} = \vec{f} \quad -\frac{\partial\vec{u}}{\partial n} \in B(\vec{u}).$$

Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^N$, de frontière très régulière, Γ, et B un opérateur maximal monotone dans $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M$. (Pour tous détails sur les opérateurs maximaux-monotones dans les espaces de Hilbert, voir par exemple Brezis [4] où on trouvera de plus une bibliographie complète).

Les éléments de $\mathbb{R}^M$, ou les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^M$ sont notés surmontés d'une fléche.

On suppose

$$\vec{0} \in B(\vec{0}).$$

Soit le problème:

$$-\Delta\vec{u} = \vec{f} \quad \text{et} \quad -\frac{\partial\vec{u}}{\partial n} \in B(\vec{u}) \text{ p. p. sur } \Gamma, \tag{46}$$

avec $\vec{u} = (u_1, .., u_M)$ et $\overrightarrow{\Delta u} = (\Delta u_1, ..., \Delta u_M)$ et $\vec{f}$ donnée dans $(L^2(\Omega))^M$. Si B est le sous différentiel d'une fonction convexe s. c. i. propre φ sur $\mathbb{R}^M$, on établit aisément le résultat suivant, grâce au théorème 1 :

Une condition suffisante pour que (46) possède une solution est :

$$\frac{1}{\operatorname{mes} \Gamma} \int_\Omega \vec{f}(x)\, dx \in r.\text{int}.R\,(\partial\varphi).$$

Ce résultat se généralise de la façon suivante :

THEORÈME 10. Une condition suffisante pour que (46) ait une solution, B étant un graphe maximal monotone quelconque tel que $\vec{0} \in B(\vec{0})$ est :

$$\frac{1}{\operatorname{mes} \Gamma} \int_\Omega \vec{f}(x)\, dx \in r.\text{int}.R\,(B). \tag{47}$$

DEMONSTRATION. Elle se fait en plusieurs étapes.

a) On se ramène à un problème frontière en posant :

$$\vec{v} \text{ est solution de } -\Delta\vec{v} = \vec{f} \text{ et } \vec{v}\,|_\Gamma = \vec{0}$$

et soit $\vec{g} = -\frac{\partial\vec{u}}{\partial n}$. On remarque que :

$$\int_\Omega \vec{f}\, dx = \int_\Gamma \vec{g}\, d\Gamma \text{ et } \vec{g} \in (H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))^M.$$

Soit $H = (L^2(\Omega))^M$. On note (,) le produit scalaire de H, $|\ |$ sa norme, et $\cdot$ le produit scalaire dans $\mathbb{R}^M$ ou dans $\mathbb{R}^N$.

On définit dans H un opérateur non borné Θ comme suit :

Si $\vec{w}$ est solution de :

$$-\Delta\vec{w} = \vec{0} \text{ et } \vec{w}\,|_\Gamma = \vec{h} \quad (\vec{h} \in H)$$

$$D(\Theta) = \left\{\vec{h} \in H / \frac{\partial\vec{w}}{\partial n} \in H\right\} \text{ et } \Theta\, h = \frac{\partial\vec{w}}{\partial n}.$$

Alors (46) équivaut au problème :

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{w} \tag{48}$$

(49) $$\vec{w}\,|_{\Gamma} = \vec{h}$$

(50) $$\Theta\,\vec{h} + B\,(\vec{h}) \ni \vec{g} \quad \text{presque partout sur } \Gamma.$$

On approxime (48), (49), (50) par :

(51) $$\vec{u}_{\varepsilon} = \vec{v} + \vec{w}_{\varepsilon}$$

(52) $$\vec{w}_{\varepsilon}\,|_{\Gamma} = \vec{h}_{\varepsilon}$$

(53) $$\Theta\,\vec{h}_{\varepsilon} + \varepsilon\,\vec{h}_{\varepsilon} + B\,(\vec{h}_{\varepsilon}) \ni \vec{g} \ \text{ p. p. sur } \Gamma.$$

b) On suppose que B est en fait un $B_{\lambda} = \dfrac{I - (I + \lambda\,B)^{-1}}{\lambda}$. Dans cette partie on suppose ε fixé et on note uniquement la dépendance en λ.

L'opérateur $\overline{B}$ défini par : $[\vec{h}, \vec{g}] \in \overline{B}$ si $\vec{g}\,(s) \in B\,(\vec{h}\,(s))$ p. p. sur Γ, est maximal monotone sur $H \times H$.

L'opérateur Θ non borné dans H est positif, fermé, de domaine dense et autoadjoint, comme on le vérifie immédiatement ; il est donc maximal monotone dans H.

On sait que la somme $\Theta + B_{\lambda}$ est un opérateur monotone, donc (53) a une solution. (voir Brezis-Crandall-Pazy, [3]).

c) Estimations sur $B_{\lambda}\,\vec{h}$. (On n'exprime toujours pas la dépendance en ε).

Lemme 4. Quel que soit $\vec{h} \in D\,(\Theta)$ et C lipschitzienne monotone dans $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M$:

$$(\Theta\,\vec{h},\ C\,(\vec{h})) \geq 0.$$

Demonstration : Soit $\vec{w}$ tel que $\vec{w} = 0$, $\vec{w}\,|_{\Gamma} = \vec{h}$ et soit $\vec{v} = C\,(\vec{w})$.

$$\vec{w} \in (H^1\,(\Omega))^M \Longrightarrow \vec{v} \in (H^1\,(\Omega))^M.$$

On pose $C = (C_1, \dots, C_M)$ les composantes de C dans $\mathbb{R}^M$.

$$(\Theta\,\vec{h},\, C\,(\vec{h})) = \sum_{i=1}^{M} \left(\int_{\Omega} \Delta w_i\, v_i\, dx + \int_{\Omega} \operatorname{grad} v_i \cdot \operatorname{grad} w_i\, dx \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{M} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^{N} D_j\, v_i\, D_j\, w_i\, dx.$$

Mais

$$D_j v_i(x) = \sum_{k=1}^{M} (D_k\, C_i)(\vec{w}(x))\,(D_j w_k)(x)$$

d'où :

$$\sum_{i=1}^{M} \int_\Omega \sum_{j=1}^{N} D_j v_i(x)\, D_j w_i(x)\, dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \int_\Omega \sum_{i,k=1}^{M} (D_k\, C_i)(\vec{w}(x))\,(D_j w_k)(x)\,(D_j w_i)(x)\, dx.$$

Mais DC, la matrice jacobienne de C est un élément de $(L^\infty(\Omega))^{M^2}$, et est positive presque partout sur $\mathbb{R}^M$. Donc l'expression :

$$\int_\Omega \sum_{j=1}^{N} (DC)(\vec{w}(x))\,[(D_j \vec{w})(x), (D_j \vec{w})(x)]\, dx$$

a un sens et est non négative, ce qui démontre le lemme. ∎

On multiple scalairement (53) par $\vec{h}_\lambda$ puis par $B_\lambda(\vec{h}_\lambda)$ et on obtient les estimations :

(54) $$|\Theta h_\lambda| \leq |g|$$

(55) $$|B_\lambda(h_\lambda)| \leq |g|$$

et on remarque qu'elles sont indépendantes de λ et s.

d) LEMME 5. Si $R(B)$ est inclus dans un sous espace vectoriel Z distinct de $\mathbb{R}^M$, alors B est invariant par translations parallèles à $Z^\perp$, le supplémentaire orthogonal de Z.

DEMONSTRATION 1. Supposons d'abord B continue sur $\mathbb{R}^M$. Soit $\vec{z} + \vec{z}^\perp$ et $\vec{w} + \vec{w}^\perp$ les décompositions sur $Z \oplus Z^\perp$ de deux vecteurs :

$$(B(\vec{z} + \vec{z}^\perp) - B(\vec{w} + \vec{w}^\perp), \vec{z} - \vec{w}) \geq 0.$$

Si on pose $\vec{z} = \vec{w} + t\,\vec{h}$, $\vec{h} \in Z$:

$$t\,(B(\vec{z}^\perp + \vec{w} + t\,\vec{h}) - B(\vec{w}^\perp + \vec{w}), \vec{h} \geq 0.$$

En faisant tendre t vers 0 par valeurs positives ou négatives, on déduit :

$$(B(\vec{z}^{1} + \vec{w}) - B(\vec{w}^{1} + \vec{w}), \vec{h}) = 0,$$

quel que soit $\vec{h} \in Z$ ce qui démontre le lemme dans le cas 1.

2. On suppose B quelconque. Soit $\widetilde{B}$ la restriction de B à $Z \times Z$. Il est clair que $\widetilde{B}$ est maximal monotone. On résond le problème : $\vec{x}' + \lambda B\vec{x}' \ni \vec{y}'$, $\vec{y}'$ étant un élément quelcoque de $\mathbb{R}^M$.

Soit $\vec{x} + \vec{x}^{1}$ et $\vec{y} + \vec{y}^{1}$ les décompositions respectives de $\vec{x}'$ et $\vec{y}'$ sur $Z \oplus Z^{\perp}$. Si $\widetilde{J}_\lambda$ désigne la résolvante de $\widetilde{B}$, on vérifie que :

$$\vec{y}^{1} + \widetilde{J}_\lambda(\vec{y})$$

est la solution :

$$\vec{y}' - \widetilde{J}_\lambda(\vec{y}') = \vec{y} + \vec{y}^{1} - \vec{x} - \vec{x}^{1} = \vec{y} - \widetilde{J}(\vec{y}).$$

Ceci démontre que B_λ applique $\mathbb{R}^M$ dans Z, donc B_λ est invariante par translations parallèles à $Z^{\perp}$; par un passage à la limite, on déduit que B^0 est invariant par translations parallèles à Z, et B aussi puisque B^0 est une section principale de B. ■

Soit P la projection : $\vec{h} \rightarrow \dfrac{1}{\operatorname{mes}\Gamma}\displaystyle\int_\Gamma \vec{h}\, d\Gamma$ définie sur H.

Si on applique P à (53), il vient :

$$\varepsilon P\vec{h}_\lambda + PB(\vec{h}_\lambda) = P\vec{g}.$$

Donc $P\vec{h}_\lambda \in Z$ quels que soit ε et λ.

e) On fait tendre λ vers 0.

Plus précisément, le problème :

$$\varepsilon\vec{h}_\varepsilon + \Theta\vec{h}_\varepsilon + B(\vec{h}_\varepsilon) \ni \vec{g} \text{ p. p. sur } \Gamma \tag{56}$$

possède une solution quel que soit $\vec{g}$ si $B_\lambda(\vec{h}_{\varepsilon\lambda})$ est borné indépendamment de λ, ce qui est le cas d'après (55).

f) On fait tendre ε vers 0.

On multiplie scalairement (56) par $\vec{h}_\varepsilon$, il vient :

$$(B(\vec{h}_\varepsilon), \vec{h}_\varepsilon) \leqq (\vec{g}, \vec{h}_\varepsilon). \tag{57}$$

Supposons que $|\vec{h}_\varepsilon|$ n'est pas borné. Soit $\vec{\eta}_\varepsilon = \dfrac{\vec{h}_\varepsilon}{|\vec{h}_\varepsilon|}$. On extrait une sous-suite encore notée $\vec{\eta}_\varepsilon$ telle que $|\vec{h}_\varepsilon|$ tend vers $+\infty$, et

$$\vec{\eta}_\varepsilon \to \vec{\eta} \qquad \text{dans } H \text{ faible}$$

$$P\vec{\eta}_\varepsilon \to P\vec{\eta} \quad \text{dans } H \text{ fort}$$

$\Theta \vec{h}_\varepsilon$ est borné, donc $\vec{h}_\varepsilon - P\vec{h}_\varepsilon$ est borné, d'où $\vec{\eta}_\varepsilon - P\vec{\eta}_\varepsilon \to \vec{0} \Longrightarrow \vec{\eta} = P\vec{\eta}$. Mais

$$1 = |\vec{\eta}_\varepsilon| \leqq |\vec{\eta}_\varepsilon - P\vec{\eta}_\varepsilon| + |P\vec{\eta}_\varepsilon| \Longrightarrow |P\vec{\eta}| \geqq 1 \quad \text{et} \quad P\vec{\eta} \neq 0.$$

D'autre part $P\vec{\eta}_\varepsilon \in Z$ d'après le *d*. On peut donc trouver $\vec{\gamma} \in D(B)$ tel que:

$$(B\vec{\gamma} - P\vec{g}, \vec{\gamma}) > 0. \tag{58}$$

En tenant compte de la monotonie de B, (57) implique:

$$(B\vec{\gamma} - \vec{g}, \vec{h}_\varepsilon) + (B\vec{h}_\varepsilon - B\vec{\gamma}, \vec{\gamma}) \leqq 0,$$

puis:

$$(B\vec{\gamma} - P\vec{g}, \vec{h}_\varepsilon) \leqq (\vec{g} - P\vec{g}, \vec{h}_\varepsilon - P\vec{h}_\varepsilon) + (B\vec{h}_\varepsilon - B\vec{\gamma}, \vec{\gamma}). \tag{59}$$

On divise les deux membres de (59) par $|\vec{h}_\varepsilon|$:

$$(B\vec{\gamma} - P\vec{g}, \vec{\eta}_\varepsilon) \leqq (\vec{g} - P\vec{g}, \vec{\eta}_\varepsilon - P\vec{\eta}_\varepsilon) + \left(B\vec{h}_\varepsilon - B\vec{\gamma}, \frac{\vec{\gamma}}{|\vec{h}_\varepsilon|}\right).$$

Le premier membre a une limite positive, en vertu de (58), le second tend vers 0, on obtient une contradiction.

Le passage à la limite est alors facile en utilisant les propriétés des opérateurs maximaux monotones, (50) a une solution et le théorème 10 est démontré.

IV.2. Théorème d'existence pour l'équation multivoque du 2ème ordre:

$$-u'' + Au \ni f$$

$$u'(0) \in \partial j(u(0)) \quad -u'(T) \in \partial j(u(T)).$$

$\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert (norme $|\ |$, produit scalaire $(\ ,\ )$).

$H = L^2(0, T; \mathcal{H})$ avec $0 < T < +\infty$, norme $| \ |_H$, produit scalaire $(,)_H$. A est un opérateur maximal monotone dans $\mathcal{H}$, dont le domaine contient 0.

j est une fonction s. c. i. convexe propre sur $\mathcal{H}$. On suppose que $0 \in R(\partial j)$, et $0 \in D(\partial j)$.

A est ∂j-monotone, c'est à dire:

$$\forall \lambda > 0, \quad \forall x, y \in \mathcal{H}, \quad \forall z \in \partial j(x - y): (A_\lambda x - A_\lambda y, z) \geq 0;$$

THEORÈME 11. Dans ces conditions, si f est un élément de H tel que:

$$\frac{1}{2} \int_0^T f(t)\, dt \in \text{int.} R(\partial j) \tag{60}$$

le problème:

$$-u'' + Au \ni f; \quad (C.L) \quad -u'(T) \in \partial j(u(T)) \quad \text{et}: \quad u'(0) \in \partial j(u(0)) \tag{61}$$

possède une solution.

DEMONSTRATION. Comme en IV.1 la démonstration se fait en plusieurs étapes.

a) Soit

$$\bar{A} = \{[u, f] \in H \times H / f(t) \in Au(t) \text{ p. p. sur } [0, T]\}$$

et soit $\bar{B}$ défini par:

$$D(\bar{B}) = \{u \in H / u' \in H, \ u'' \in H, \ u'(0) \in \partial j(u(0)),$$
$$- u'(T) \in \partial j(u(T))\} \text{ et } \bar{B}u = -u''.$$

On voit aisément que $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont m-monotones dans $H \times H$. On peut donc résoudre, quel que soit $\varepsilon > 0$:

$$\varepsilon u_{\varepsilon\lambda} + \bar{A}_\lambda u_{\varepsilon\lambda} + \bar{B} u_{\varepsilon\lambda} = f \quad (\text{N. B.}: (\bar{A})_\lambda = (\overline{A_\lambda})). \tag{62}$$

b) On suppose ε fixé et on écrit u_λ au lieu de $u_{\varepsilon\lambda}$. (62) s'écrit:

$$\varepsilon u_\lambda(t) + A_\lambda u_\lambda(t) - u_\lambda''(t) = f \text{ p. p. sur } [0, T] \tag{63}$$

$$u_\lambda'(0) \in \partial j(u_\lambda(0)) \quad - u_\lambda'(T) \in \partial j(u_\lambda(T)) \tag{64}$$

noté également (C. L.).

En multipliant scalairement (63) par $u_\lambda(t)$ il vient:

$$\varepsilon\,|u_\lambda(t)|^2 - (u_\lambda''(t), u_\lambda(t)) + (A_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t)) = (f(t), u_\lambda(t))$$

d'où:

$$\int_t^T |u_\lambda'(\tau)|^2\,d\tau - (u_\lambda'(T), u_\lambda(T)) + (u_\lambda'(t), u_\lambda(t)) \leqq |f|_H\,|u_\lambda|_H$$

puis:

(65) $$(u_\lambda'(t), u_\lambda(t)) \leqq |f|_H\,|u_\lambda|_H + |\partial j^0(0)|\,|u_\lambda(T)|$$

car

$$(-u_\lambda'(T), u_\lambda(T)) = (-u_\lambda'(T) - \partial j^0(0), u_\lambda(T)) + (\partial j^0(0), u_\lambda(T)) \geqq (\partial j^0(0), u_\lambda(T)).$$

Comme 0 et T jouent le même rôle, on a aussi l'inégalité:

(66) $$(u_\lambda'(t), u_\lambda(t)) \leqq |f|_H\,|u_\lambda|_H + |\partial j^0(0)|\,|u_\lambda(0)|.$$

On intègre (66) deux fois, il vient:

$$\frac{1}{2}|u_\lambda|_H^2 \leqq \frac{1}{2}\,T\,|u_\lambda(0)|^2 + \frac{T^2}{2}\left(|f|_H\,|u_\lambda|_H + |\partial j^0(0)|\,|u_\lambda(0)|\right)$$

d'où:

(67) $$|u_\lambda|_H \leqq T|f|_H + \sqrt{T\,|u_\lambda(0)|^2 + T^2\,|u_\lambda(0)|\,|\partial j^0(0)|}$$

(68) $$|u_\lambda|_H \leqq T|f|_H + \sqrt{T\,|u_\lambda(T)|^2 + T^2\,|u_\lambda(T)|\,|\partial j^0(0)|}.$$

c) Estimation sur $|u''|_H$.

On suppose d'abord $f' \in H$. On dérive (63) par rapport au temps. A_λ étant monotone et lipschitzienne, il vient:

$$-(u_\lambda''', u_\lambda')_H \leqq (f', u_\lambda')_H.$$

En intégrant par parties:

$$\int_0^T |u_\lambda''(t)|^2\,dt - (u_\lambda''(T), u_\lambda'(T)) + (u_\lambda''(0), u_\lambda'(0)) \leqq (f', u_\lambda')_H$$

(69) $$|u_\lambda''|_H^2 - (u_\lambda'(T), \varepsilon u_\lambda(T) + A_\lambda u_\lambda(T)) - f(T)) +$$
$$+ (u_\lambda(0), \varepsilon u_\lambda(0) + A_\lambda u_\lambda(0) - f(0)) \leqq (f', u_\lambda')_H.$$

Comme A est ∂j-monotone :

$$(A_\lambda u_\lambda(T), -u'_\lambda(T)) \geqq (A_\lambda(0), -u'_\lambda(T))$$

$$(A_\lambda u_\lambda(0), u'_\lambda(0)) \geqq (A_\lambda(0), u'_\lambda(0)).$$

Si $\bar{u}$ est tel que $0 \in \partial j(\bar{u})$

$$(u_\lambda(T), -u'_\lambda(T)) \geqq (\bar{u}, -u'_\lambda(T)) \text{ et } (u_\lambda(0), u'_\lambda(0)) \geqq (\bar{u}, u'_\lambda(0)).$$

Si on reporte ces inégalités dans (69) :

$$|u''_\lambda|_H^2 + (A_\lambda(0) + \varepsilon\bar{u}, u'_\lambda(0) - u'_\lambda(T)) \leqq \int_0^T (f'(t), u'_\lambda(t))\,dt - (f(T), u'_\lambda(T)) +$$

$$+ (f(0), u'_\lambda(0)) = -\int_0^T (f(t), u''_\lambda(t))\,dt.$$

Puisque

$$|u'_\lambda(0) - u'_\lambda(T)| = \left|\int_0^T u''_\lambda(t)\,dt\right| \leqq \sqrt{T}\,|u''_\lambda|_H$$

$$|u''_\lambda|_H^2 \leqq |u''_\lambda|_H\,|f|_H + (|A^0(0)| + \varepsilon|\bar{u}|)\sqrt{T}\,|u''_\lambda|_H,$$

d'où :

(70) $$|u''_\lambda|_H \leq |f|_H + \sqrt{T}(|A^0(0)| + \varepsilon|\bar{u}|).$$

L'estimation ne fait pas intervenir f'.

Si f_n est une suite de fonctions régulières convergeant dans H vers f, soit u_n la solution de :

$$\varepsilon u_n + \bar{A}_\lambda u_n + \bar{B} u_n = f_n.$$

Il est facile d'établir que u_n tend vers u dans H, et u''_n tend vers u_n dans H, u étant solution de $\varepsilon u + \bar{A}_\lambda u + \bar{B} u = f$ et on a encore l'estimation (70).

d) Estimation sur $A_\lambda u_\lambda$ et existence de u tel que $\varepsilon u + \bar{A} u + \bar{B} u \ni f$.

On multiplie (63) scalairement par $A_\lambda u_\lambda$ dans H.

$$\varepsilon(u_\lambda, A_\lambda u_\lambda)_H - (u''_\lambda, A_\lambda u_\lambda)_H + |A_\lambda u_\lambda|_H^2 = (f, A_\lambda u_\lambda)_H$$

d'où :

(71) $$|A_\lambda u_\lambda|_H \leqq 2|f|_H + \sqrt{T}(|A^0(0)| + \varepsilon|\bar{u}|)$$

en tenant compte de (70).

Dans ces conditions, on sait (Brezis, Crandall, Pazy [3]) que

$$\varepsilon u + \bar{B} u + \bar{A} u \ni f \tag{72}$$

possède une solution, qu'à partir de maintenant on notera u_ε.

c) Estimations supplémentaires. Si $v \in D(\bar{B})$ tel que $\bar{B} v$ est borné, alors on montre facilement que $|v'|$ est également borné. Donc (73) u_ε' est borné dans H. D'autre part si $v \in H$ tel que $v' \in H$, alors $v \in C^0([0, T], H)$ et

$$|v|_{C^0([0, T]; H)} \leqq \sqrt{T}\, |v'|_H + \frac{1}{\sqrt{T}} |v|_H . \tag{74}$$

On déduit alors de (67), (68), (73) et (74) que $|u_\varepsilon(0)|$, $|u_\varepsilon(T)|$ et $|u_\varepsilon|_H$ sont simultanément bornés ou non bornés.

f) On démontre que u_ε est borné.

(72) peut se mettre sous forme variationnelle : il existe $z_\varepsilon \in \bar{A} u_\varepsilon$ tel que :

$$(\varepsilon u_\varepsilon + z_\varepsilon - f, v - u_\varepsilon)_H + (u_\varepsilon', v' - u_\varepsilon')_H + \varphi(v) - \varphi(u) \geqq 0 \tag{75}$$

quel soit $v \in H$ tel que $v' \in H$ où

$$\varphi(v) = j(v(0)) + j(v(T)).$$

En portant $v = 0$ dans (75) :

$$j(u_\varepsilon(0)) + j(u_\varepsilon(T)) \leqq 2 j(0) + (f, u_\varepsilon)_H . \tag{76}$$

Soit w tel que

$$- w'' = f, \; w'(0) = - w'(T) = \frac{1}{2} \int_0^T f(t)\, dt$$

w est défini à une constante de $\mathcal{H}$ près.

Alors

$$(f, u_\varepsilon)_H = \int_0^T (u_\varepsilon'(t), w'(t))\, dt - (u_\varepsilon(T) + u_\varepsilon(0), w'(T)).$$

Soient $g, h \in R(\partial j)$

$$j(u) \geqq (g, u) + m \quad m > -\infty \qquad \forall\, u \in \mathcal{H}$$

$$j(u) \geqq (h, u) + m' \quad m' > -\infty \qquad \forall\, u \in \mathcal{H}.$$

De (76) vient:

$$(g, u_\varepsilon(0)) + (h, u_\varepsilon(T)) + (w'(T), u_\varepsilon(T) + u_\varepsilon(0)) \leqq \text{constante.}$$

Supposons que u_ε n'est pas borné. On choisit g et h tels que:

$$\left(g - \frac{1}{2}\int_0^T f(t)\,dt,\ u(0)\right) \to +\infty$$

$$\left(h - \frac{1}{2}\int_0^T f(t)\,dt,\ u(T)\right) \to +\infty$$

ce qui est toujours possible en vertu de (60) et (76) est contradictoire.

g) fin de la démonstration.

On considère les deux équations:

$$\varepsilon u_\varepsilon - \varepsilon u_\varepsilon'' + Au_\varepsilon \ni f + (\text{C. L.})$$

$$\eta u_\eta - \eta u_\eta'' + Au_\eta \ni f + (\text{C. L.})$$

D'où

(77) $$(\varepsilon u_\varepsilon - \eta u_\eta,\ u_\varepsilon - u_\eta) - (u_\varepsilon'' - u_\eta'',\ u_\varepsilon - u_\eta) \leqq (f, u_\varepsilon - u_\eta).$$

On pose $v_{\varepsilon\eta} = u_\varepsilon - u_\eta$. On intègre par parties (77) sur $[0, T]$:

$$\int_0^T |v_{\varepsilon\eta}'|^2\,dt - (v_{\varepsilon\eta}'(T), v_{\varepsilon\eta}(T)) + (v_{\varepsilon\eta}'(0), v_{\varepsilon\eta}(0)) \leqq (f, v_{\varepsilon\eta})_H + 2C(\varepsilon + \eta)$$

où C est une constante qui majore $|u_\varepsilon|_H$.

Si on extrait de la suite u_ε une sous suite (encore notée u_ε) qui converge faiblement vers un certain u dans H, on voit alors que u_ε' tend vers u' fortement dans H. D'autre part u_ε'' tend vers u'' faiblement dans H.

Soit t_0 un point tel que $u_\varepsilon'(t_0) \to u'(t_0)$; on peut trouver un tel point en extrayant une sous suite convergeant presque partout.

Alors

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\varepsilon'(t) - u_\eta'(t)|^2 = (u_\varepsilon'(t) - u_\eta'(t),\ u_\varepsilon''(t) - u_\eta''(t))$$

d'où:

$$\frac{1}{2}|u_\varepsilon'(t) - u_\eta'(t)|^2 = \frac{1}{2}|u_\varepsilon'(t_0) - u_\eta'(t_0)| + \int_{t_0}^t (u_\varepsilon'(\tau) - u_\eta'(\tau),\ u_\varepsilon''(\tau) - u_\eta''(\tau))\,d\tau$$

donc u_ε' converge vers u' dans $C^0([0, T]; \mathcal{H})$.

Si on extrait une sous suite toujours notée u_ε telle que $u_\varepsilon(0) \to \tilde{u}$ dans $\mathcal{H}$ faible, alors :

$$u_\varepsilon(t) = u_\varepsilon(0) + \int_0^t u'(\tau)\, d\tau$$

qui tend vers

$$\tilde{u} + \int_0^t u'(\tau)\, d\tau = \tilde{u} + u(t) - u(0)$$

dans H faible. Donc $\tilde{u} = u(0)$ et $u_\varepsilon(T)$ converge faiblement dans $\mathcal{H}$ vers $u_\varepsilon(T)$.

Ceci permet de conclure que :

$$u'(0) \in \partial j(u(0))$$

$$-u'(T) \in \partial j(u(T)).$$

Il reste à voir que $\overline{\lim}\, (\bar{A} u_\varepsilon, u_\varepsilon)_H \leqq (\chi, u)$ où χ est limite faible de $\bar{A} u_\varepsilon$.

$$(\bar{A} u_\varepsilon, u_\varepsilon)_H = (u_\varepsilon'', u_\varepsilon)_H - | u_\varepsilon |_H^2 + (f, u_\varepsilon)_H$$

$$(f, u_\varepsilon)_H \to (f, u)_H$$

$$(u_\varepsilon'', u_\varepsilon)_H = -\int_0^T | u_\varepsilon' |^2 dt + (u_\varepsilon'(T), u_\varepsilon(T)) - (u_\varepsilon'(0), u_\varepsilon(0))$$

tend vers :

$$-\int_0^T | u' |_H^2 dt + (u'(T), u(T)) - (u'(0), u(0))$$

d'où :

$$\lim (\bar{A} u_\varepsilon, u_\varepsilon)_H = -(f, u)_H - \int_0^T | u' |^2 dt + (u'(T), u(T)) - (u'(0), u(0)) =$$

$$= (u'' + f, u)_H = (\chi, u)_H .$$

Ceci achève la démonstration. ◼

V. Théorèmes de pertubation.

V.1. Lien avec le théorème de Landesman et Lazer [8] et motivation. On rappelle un résultat de Landesman et Lazer, mis ici sous forme abstraite par Browder et Nirenberg. (Pour Supplement, voir Nirenberg [11]).

Soit X un espace localement compact, métrisable et séparable sur lequel est définie une mesure positive réelle et bornée μ. Soit $H = L^2(X, \mu, R)$.

Hypothèses sur A. A est un opérateur linéaire non borné dans H de domaine dense. A est autoadjoint. Le noyau $N(A) = \{u \in D(A)/Au = 0\}$ est de dimension finie.

Soit $H_1 = (N(A))^\perp$ (d'où $H = H_1 + N(A)$) et soit P la projection orthogonale de H sur H_1. On suppose que $R(A) = H_1$.

Soit A_1 l'opérateur non borné dans H_1, de domaine $D(A) \cap H$, qui prend les mêmes valeurs que A. A_1 est une bijection de $D(A_1)$ sur H. On suppose que A_1^{-1} est un opérateur compact.

Hypothèses sur f. $f: X \times R \to R$ vérifie les hypothèses de Caratheodory:

$x \to f(x, r)$ est mesurable pour tout $r \in R$

$r \to f(x, r)$ est continu pour presque tout $x \in X$

$|f(x, r)| \leqq |M(x)|$ pour tout $r \in R$, pour presque tout $x \in X$, avec $M \in H$.

Dans ces conditions l'application F définie par:

$$(F(u))(x) = f(x, u(x))$$

est continue de H dans H, et d'image bornée.

Enfin on suppose que

$$\lim_{r \to \pm\infty} f(x, r) = h_\pm(x) \text{ p. p. sur } X.$$

Le résultat de Landesman et Lazer est le suivant:

On suppose que:

$$\int_{w>0} h_+(x)\, w(x)\, dx + \int_{w<0} h_-(x)\, w(x)\, dx > 0 \quad \forall\, w \in N(A), \quad w \neq 0 \tag{78}$$

alors l'équation $Au = F(u)$ possède une solution.

Réciproquement, si

$$h_-(x) < f(x, r) < h_+(x) \quad \forall\, r \in R, \quad \text{p. p. sur } X,$$

et si $Au = F(u)$ possède une solution, alors (78) est vérifié.

En faisant des hypothèses supplémentaires ce résultat peut s'appliquer à deux cas étudiés dans la partie II.

Cas II.2. On se ramène à un problème frontière, comme en IV.1, seulement ici $M = 1$. Les notations sont les mêmes qu'en IV.1, à la flèche près. Le problème (18) (19) est équivalent à :

(79) $$u = v + w \quad w|_\Gamma = h \text{ et } \Theta h + \beta(h) \ni g \text{ p. p. sur } \Gamma.$$

On vérifie aisément que $-\Theta$ vérifie les hypothèses sur A; si β est continu et borné, on est dans les conditions du théorème de Landesman et Lazer, et la condition (78) s'écrit :

$$\int_\Gamma (\beta^+ - g)\, d\Gamma > 0 \quad \text{et} \quad \int_\Gamma (\beta^- - g)\, d\Gamma < 0$$

c'est à dire (17) car

$$\int_\Gamma g\, d\Gamma = \int_\Omega f\, dx.$$

Cas II.6. Si β est continu et borné, l'application du résultat de Landesman et Lazer est immédiate.

On se propose dans le paragraphe suivant d'améliorer certains de ces résultats.

V.2. Théorème de pertubation.

V, H, V', p, Y, P, φ, a sont donnés comme au théorème 1. On suppose que :

(80) $$j : V \subsetneqq H \text{ est compact}$$

ceci implique que $k : H \subsetneqq V'$ est aussi compact.

THEORÈME 12. Si M est une application de V dans V' et si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

(81) $$M = L \circ j \quad \text{et} \quad L : H \to V' \quad \text{est continu}$$

(82) $$M = K \circ N \quad \text{et} \quad N : V \to 2^H \quad \text{est semi-continue supérieurement;}$$

$$(A + \partial\Phi)^{-1} \text{ est injectif.}$$

Si de plus il existe un u_0 tel que :

(83) $$P' R(M) \subset K \subset \text{int}\cdot R(\partial\tilde{\varphi}_{u_0}),\ K \text{ compact}, \quad P' A u_0 = 0$$

alors le problème

(84) $$(Au + \partial\Phi(u)) \cap M(u) \neq \varnothing \quad \text{possède une solution.}$$

DEMONSTRATION. On rappelle la définition suivante: Soient X, Y deux espaces topologiques et B une application de X dans 2^Y. On dit que B est semi-continue supérieurement (S. C. S.) si:

quel que soit $x \in X$, quel que soit le voisinage V de Bx, il existe un voisinage de x, U, tel que:

$$\forall\, x' \in U, \quad Bx' \subset V.$$

Le résultat suivant est la base de la démonstration du théorème:

Soit X un espace vectoriel topologique localement convexe, séparé et T une application S. C. S. d'un convexe compact C de X dans 2^X.

$P_x = x + \overline{\bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda (C - x)}$ est le cône de sommet x engendré par C. Si T est à valeurs convexes fermées, et si quel que soit x:

$$P_x \cap Tx \neq \varnothing$$

alors T dossède un point fixe, c'est à dire il existe x tel que:

$$x_0 \in Tx_0 .$$

LEMME 6. Soit K un compact de int-$R(\partial\widetilde{\varphi}_{u_0})$ et $C_K = \{f \in V' / P'f \in K\}$ Alors $(A + \partial\Phi)^{-1}$ est borné sur C_K, c'est à dire transforme les bornés de C_K en bornés de V, et S. C. S. sur C_K.

DEMONSTRATION. Supposons qu'il existe une suite f_n qui a les propriétés suivantes:

$$f_n \in C_K \quad \|f_n\|' \leq c \text{ et il existe une suite } u_n \in (A + \partial\varphi)^{-1} f_n \text{ telle que } \|u_n\| \to +\infty.$$

Soit alors $x_n = \dfrac{u_n - u_0}{\|u_n - u_0\|}$. On peut supposer $\varphi \geqq 0$ sans nuire à la généralité. L'inéquation variationnelle à laquelle satisfait u_n est:

$$a(u_n, v - u_n) + \varphi(v) - \varphi(u_n) \geqq (f_n, v - u_n) \quad \forall\, v \in V.$$

Si $v = u_0$:

$$(Au_n - Au_0, u_0 - u_n) + (Au_0 - f_n, u_0 - u_n) + \varphi(u_0) \geqq 0,$$

d'où:

$$\alpha(p(u_n - u_0)) \leqq (c + \|Au_0\|') \|u_n - u_0\| + \varphi(u_0)$$

et

$$p(x_n) = O(\|u_n - u_0\|^{-\frac{1}{2}}). \tag{85}$$

Par extraction de sous suites :

$$f_n \to f \quad \text{dans } V' \text{ faible}$$

$$x_n \to x \quad \text{dans } V \text{ faible}$$

$$Px_n \to Px \text{ dans } V \text{ fort}$$

et comme au théorème 1 : $x = Px \neq 0$.

Soit alors $g \in R(\partial \widetilde{\varphi}_{u_0})$ tel que

$$(P'g - P'f, x) > 0 \tag{86}$$

$$\forall\, v \in V:\ \varphi(v) - (g, v) \geqq m > -\infty$$

$$(Au_0 - f_n + P'f_n + g - P'g, u_0 - u_n) + \varphi(u_0) + (g, u_0) \geqq$$
$$\geqq (P'g - P'f_n\,,\, u_n - u_0)$$

et on obtient une contradiction, à l'aide de (85) et (86) comme au théorème 1.

D'après ce qui précède, si $f \in C_K$, $(A + \partial\varphi)^{-1} f$ est borné. C'est un convexe fermé, d'après des théorèmes généraux, inclus dans une variété affine parallèle à Y, donc de dimension finie. $(A + \partial\varphi)^{-1} f$ est un compact, dont un système fondamental de voisinages est la famille des V_α :

$$V_\alpha = \{u \in V / d(u, (A + \partial\varphi)^{-1} f) < \alpha) \text{ avec } d(u, G) = \inf_{v \in G} \| v - u \|.$$

Supposons que $(A + \partial\varphi)^{-1}$ ne soit pas S. C. S. sur C_K. On peut alors trouver $f \in C_K$, $f_n \in C_K$, f_n convergeant vers f dans V fort et $\alpha > 0$ tel que :

$$d(u_n\,,\,(A + \partial\Phi)^{-1} f) \geqq \alpha \quad \forall\, u_n \in (A + \partial\Phi)^{-1} f_n\,. \tag{87}$$

On se fixe $\qquad u \in (A + \partial\varphi)^{-1} f$

$$Au_n + \partial\varphi(u_n) \ni f$$

$$Au + \partial\varphi(u) \ni f.$$

En faisant le produit de dualité par $u_n - u$, il vient :

$$(Au_n - Au,\ u_n - u) \leqq (f_n - f,\ u_n - u).$$

On peut supposer u_n borné, du moins pour n assez grand, donc $p(u_n - u)$ tend vers 0.

Mais

$$\| u_n - Pu_n - u + Pu \| \leq c_0 (1 + c_1) p (u_n - u),$$

donc

$$u_n - Pu_n \to u - Pu.$$

On extrait une sous suite encore notée u_n telle que: $Pu_n \to y$ dans V fort. Alors u_n tend vers $u - Pu + y = \bar{u}$ dans V fort

$$Au_n \text{ tend vers } A\bar{u} \text{ dans } V' \text{ fort}$$

donc $\bar{u} \in D(\partial\varphi)$ et $A\bar{u} + \partial\varphi(\bar{u}) \ni f$ ce qui contredit (87).

Suite de la démonstration du théorème 12.

a) Condition (83). Soit C l'enveloppe convexe fermée dans H de $R(j \circ (A + \partial\varphi)^{-1} \circ M)$ qui est un compact de V, car $R((A + \partial\varphi)^{-1} \circ M)$ est un borné de V donc $R(j \circ (A + \partial\varphi)^{-1} \circ M)$ est un compact de H ainsi que son enveloppe convexe.

L est continue, $(A + \partial\varphi)^{-1}$ est S. C. S. d'après le lemme 6.

$S = j \circ (A + \partial\varphi)^{-1} \circ L$ est S. C. S. à valeurs convexes fermées et applique C dans 2^C, ce qui démontre le théorème 12 dans ce cas.

b) Conditions (84). Si $w \in Au + \partial\varphi(u)$, résoudre

$$(Au + \partial\varphi(u)) \cap M(u) \neq \emptyset$$

revient à résoudre:

$$w \in M \circ (A + \partial\varphi)^{-1} w \text{ et } u = (A + \partial\varphi)^{-1} w.$$

D, l'enveloppe convexe fermée dans V' de $R(M \circ (A + \partial\varphi)^{-1})$ est un convexe compact de V' (même raisonnement que ci-dessus);

$$T = N \circ (A + \partial\varphi)^{-1} \circ K$$

est S. C. S. à valeurs convexes fermées et applique D dans 2^D.

Ainsi le théorème 12 et complètement démontré. ■

Si on suppose que l'intérieur de $R(\partial\tilde{\varphi}_{u_0})$ est vide, et que $P'A = 0$ on a encore les résultats suivants:

Si u est solution de $Au + \partial\varphi(u) \ni f$ avec $f \in r.\mathrm{int}.R(\partial\tilde{\varphi}_{u_0})$, on voit en utilisant la formulation modifiée de (6):

$$(Av, v - u) + \varphi(v) - \varphi(u) \geqq (f, v - u) \quad \text{(voir Brezis [1])} \tag{88}$$

que $u + z$ est solution de (6) quel que soit z tel que $Pz \in Z^1$. (notations du théorème 1).

Si π est la projection canonique de V sur $V/Z^\perp$ muni de la norme quotient, on pose $\widehat{S} = \pi \circ (A + \partial\varphi)^{-1}$, application de $V/Z^\perp$ dans $\widehat{V} = \{f \in V'/P'f \in Z\}$. Alors $\widehat{S}$ est borné et S. C. S. sur les $\widehat{C}_K$ avec K compact inclus dans $r.\text{int}.R(\partial\widetilde{\varphi}_{u_0})$ (même démonstration qu'au lemme 6).

Si par exemple $\widehat{M} = \widehat{L} \circ \widehat{j}$, où $\widehat{j}$ est l'injection de V/Z dans H/Z et $\widehat{L}$ est une application continue de H/Z dans $\widehat{V'}$, on peut résoudre :

$$\widehat{u} \in \widehat{j} \circ \widehat{S} \circ \widehat{L}(\widehat{u})$$

en utilisant la mèthode qu'au théorème 12. (80) est supposé avoir lieu. Si L est définie sur tout H, on définit L_z et $\widehat{L}_z$ comme suit pour $z \in Z^\perp$:

On appelle Q la projection sur

$$Z + W \ (W = \text{Ker}\, P)\ ; \quad \text{si} \quad u = Qu,$$

$$L_z(u) = L(z + u) \quad \text{et} \quad \widehat{L}_z(\pi(u)) = L_z(u) \quad (z \in Z^\perp).$$

Quel que soit $z \in Z^\perp$, on peut résoudre $\widehat{u_z} \in \widehat{j} \circ \widehat{S} \circ \widehat{L}_z(\widehat{u_z})$.

Si on choisit dans la classe $\widehat{u_z}$ l'élément $Qu_z + z$, on voit qu'on a résolu :

$$u_z = Qu_z + z \in (A + \partial\varphi)^{-1} \circ M(u_z)$$

c'est à dire si la condition (83) est remplacée par la condition :

$$P'R(M) \quad K \quad r.\text{int}.R(\partial\varphi_{u_0}),\ K \text{ compact et } P'A = 0 \tag{89}$$

et si on a la condition (81), on peut résoudre :

$$Au + \partial\varphi(u) \in M(u),$$

en s'imposant même la valeur de $u - Qu$ a priori.

On peut tenir le même raisonnement si la condition (82) est remplie.

V.3. Applications.

On considère le problème suivant :

$$-\Delta u = f \quad \text{et} \quad -\frac{\partial u}{\partial n}(s) \in g(s, u(s)) \text{ p. p. sur } \Gamma. \tag{90}$$

THEORÈME. Si g est une function de $\Gamma \times R$ dans R, continue en x pour tout presque tout $s \in \Gamma$, et mesurable en s pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour que le problème (90) ait une solution, il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites :

(91) $$\operatorname*{ess\,inf}_{s,t} \{g(s, x) - g(t, y) / x \geqq y\} > -\infty$$

(92) $$\operatorname*{ess\,inf}_{s} \varliminf_{|x| \to \infty} (g(s, x) \operatorname{sgn} x) - \frac{1}{\operatorname{mes} \Gamma} \int_\Omega f\, dx > 0.$$

DEMONSTRATION. On montre qu'on est dans les conditions (81) du théorème 12. Pour cela, on met g sous la forme d'une somme $\beta(x) - 1(s, x)$.

Si $|g|_\infty$ est borné, la condition (91) est automatiquement remplie.

Soit r_0 tel que, si $s \in \Gamma - N$, N négligeable et $|x| \geq r_0$:

$$g(s, x) \cdot \operatorname{sgn} x - \frac{1}{\operatorname{mes} \Gamma} \int_\Omega f\, dx > 0.$$

On pose

$$\beta(x) = |g_\infty| + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{si} \quad |x| \geqq r_0 + 1$$

$$\beta(x) = 0 \quad \text{si} \quad |x| \leqq r_0$$

et on complète le graphe de façon affine entre ces points.

si

$$s \in \Gamma - N,\ |x| = r,\ \beta - |g|_\infty \leqq l(s, x) - \frac{1}{\text{mes}} \int_\Omega f\, dx \leqq |g|_\infty - \frac{s}{2}$$

$$s \in \Gamma - N,\ |x| = r,\quad \left| l(s, x) - \frac{1}{\text{mes}} \int_\Omega f\, dx \right| \leqq |g|_\infty$$

et on obtient une décomposition telle que

$$\int_\Gamma l(s, u(s))\, ds \in K \subset \operatorname{int} \cdot R(\beta)$$

quel que soit $u \in L^2(r)$.

Si $|g|_\infty$ n'est pas borné, par exemple si l'ensemble des $s \in \Gamma$ tels que $g(x, s)$ n'est pas borné quand x est positif est de mesure nulle, alors $\operatorname*{ess\,sup}_s \{g(s, y) / y \geqq x\}$ tend vers l'infini quand y tend vers l'infini. On pose

$$\beta(x) = \operatorname*{ess\,sup}_{s} \{g(s, y) / y \geqq x\} \quad \text{et} \quad l(s, x) = \beta(x) - g(s, x).$$

Il est clair que l est non-négatif presque partout sur Γ, et majoré par $-2 \operatorname*{ess\,inf}_{s,t} \{g(s, x) - g(t, y) / x \geqq y\}$; d'autre part, $\lim \beta(x) = -\varepsilon$ d'après (92) et on a encore la décomposition cherchée.

Il est alors aisé d'appliquer le théorème 12.

Institut de Mathématiques
Université Paris VI
9 *Quai St. Bernard*
75230 *Paris CEDEX* 05
France

BIBLIOGRAPHY

[1] H. BREZIS, *Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité.* Annales Institut Fourier. 18 (1968) 115-175.

[2] H. BREZIS, *Problèmes unilatéraux.* J. Math. Pures et Appliquées. A paraître.

[3] H. BREZIS, M. CRANDALL, A. PAZY, *Perturbation of non linear maximal monotone sets.* Comm. Pure Appl. Math. 23 (1970) 123-144.

[4] H. BREZIS, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contraction dans les espaces de Hilbert.* Cours de 3éme cycle multigraphié. Paris 1971.

[5] R. COURANT, D. HILBERT, *Methods of mathematical physics,* volume 1. New York, Interscience, 1953.

[6] G. FICHERA, *Problemi elastostatici con vincoli unilaterali: il Problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno.* Mem. Accad. Naz. Lincei. Ser. 8, 7 (1964) 91-140.

[7] M. G. KREIN, M. A. RUTMAN, *Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space.* A.M.S. translations 26 (1950) 199-325.

[8] LANDESMAN, LAZER, *Non linear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance.* J. of Math. and Mech. 19 (1970) 609-623.

[9] J. L. LIONS, G. STAMPACCHIA, *Variational inequalities.* Comm. Pure and Appl. Math. 20 (1967) 493-519.

[10] J. NEČAS, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques.* Paris, Masson, 1967.

[11] L. NIRENBERG, *An application of generalized degree to a class of non linear problems.* A paraître.

[12] R. T. ROCKAFELLAR, *Convex Analysis.* Princeton, Princeton University Press, 1970.

[13] J. LINDENSTRAUSS, *On non separable reflexive Banach spaces,* Bull. Am. Math. S. 72 (1966), 967-970.