

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

JEAN-PIERRE AUBIN

**Multiplicateurs de Kuhn-Tucker pour des jeux non
coopératifs contraints**

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 27,
n° 3 (1973), p. 561-589

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1973_3_27_3_561_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MULTIPLICATEURS DE KUHN-TUCKER POUR DES JEUX NON COOPERATIFS CONTRAINTS

JEAN-PIERRE AUBIN

Introduction.

1. *Equilibres d'un jeu non coopératif contraint*

Pour définir un jeu *non coopératif contraint*, on se donne

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } n \text{ joueurs } i = 1, \dots, n \\ \text{ii) } n \text{ ensembles } X_i \text{ de décisions } x_i \\ \text{iii) } n \text{ critères } K_i(x) \text{ définis sur } X = \prod_{i=1}^n X_i \\ \text{iv) } \text{une correspondance } x \in X \mapsto Z(x) \subset X \end{array} \right.$$

et on pose

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \widehat{X}_i = \prod_{j \neq i} X_j, \widehat{x}_i = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \widehat{X}_i \\ \text{ii) } x = (x_1, \dots, x_n) = (\widehat{x}_i, x_i) \in X, K_i(x) = K_i(\widehat{x}_i, x_i) \\ \text{iii) } K(x, y) = \sum_{i=1}^n K_i(\widehat{x}_i, y_i) \text{ définie sur } X \times X. \end{array} \right.$$

On dit que $x \in X$ est un *équilibre du jeu non coopératif contraint associé* aux données (1) si

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } x \in Z(x) \\ \text{ii) } K(x, x) = \min_{y \in Z(x)} K(x, y). \end{array} \right.$$

Cette définition contient les cas particuliers suivants :

EXEMPLE 1-1 : Si $Z(x) = X = \prod_{i=1}^n X_i$, le problème (3) équivaut au problème (4) : x est un équilibre si et seulement si x est un point de Nash vérifiant

$$(4) \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad K_i(\widehat{x}_i, x_i) = \min_{y_i \in X_i} K_i(\widehat{x}_i, y_i).$$

EXEMPLE 1-2 : Si $Z(x) = \prod_{i=1}^n Z_i(\widehat{x}_i)$ où Z_i est une correspondance de \widehat{X}_i dans X_i , x est un équilibre si et seulement si

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \forall i = 1, \dots, n, \quad x_i \in Z_i(\widehat{x}_i) \\ \text{ii) } K_i(\widehat{x}_i, x_i) = \min_{y_i \in Z_i(\widehat{x}_i)} K_i(\widehat{x}_i, y_i) \end{array} \right.$$

(Le problème (5) est appelé « économie abstraite » dans [1], [6], car il formalise l'équilibre de Walras d'une économie).

EXEMPLE 1-3 : Même si la correspondance $Z = Z(x)$ est constante, Z n'est pas nécessairement un produit. C'est le cas où le i^{e} joueur consomme une quantité $B_i(x_i) \in F'$ d'une ressource rare $\omega \in F'$ en choisissant une décision x_i ; alors $Z = \{y \in Y \text{ tels que } \sum B_j(y_j) - \omega = 0\}$ et x est un équilibre si par définition x est solution de (3).

On déduit du théorème de point fixe de Kakutani et du théorème du maximum l'existence d'un équilibre.

PROPOSITION 1. *Si les ensembles X_i sont compacts dans des espaces localement convexes séparés V_i , si les fonctions $y_i \mapsto K_i(\widehat{x}_i, y_i)$ sont convexes, les fonctions $x \mapsto K_i(x)$ continues, la correspondance $x \mapsto Z(x)$ continue à valeurs convexes compactes non vides, il existe au moins un équilibre du problème (3).*

2. *Multiplicateurs de Kuhn-Tucker associés à un équilibre.*

On se propose d'associer à un jeu non coopératif contraint un jeu non coopératif *non contraint* équivalent en introduisant une notion de multiplicateur de Kuhn-Tucker et de problème dual.

Pour cela, on suppose que la correspondance $Z(x)$ est représentée de la façon suivante par une famille de contraintes. On se donne

- (6) $\left\{ \begin{array}{l} \text{i) deux espaces vectoriels réels } F \text{ et } F' \text{ en dualité séparante} \\ \text{ii) un cône convexe fermé } P \text{ de } F, \text{ son cône polaire positif } P^+ \subset F' \\ \text{iii) une fonction } \varphi \text{ définie sur } P \times X \times X \end{array} \right.$

et on associe à ces données la correspondance Z définie par

$$(7) \quad Z(x) = \{y \in X \text{ tels que } \varphi(p, x, y) \leq 0 \quad \forall p \in P\}$$

et le Lagrangien $L(x; y, p)$ défini par

$$(8) \quad L(x; y, p) = K(x, y) + \varphi(p, x, y) \text{ sur } X \times X \times P.$$

Si $x \in Z(x)$ est un équilibre du jeu (1.3), nous dirons que $\bar{p} \in P$ est un multiplicateur de Kuhn-Tucker associé à x si

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \varphi(\bar{p}, x, x) = 0 \\ \text{ii) } L(x, x, \bar{p}) = \min_{y \in Y} L(x, y, \bar{p}) \end{array} \right.$$

EXEMPLE 2-1. Donnons par exemple

$$(10) \quad \text{une application } C \text{ de } X \times X \text{ dans } F'$$

et associons à C la correspondance Z définie par

$$(11) \quad Z(x) = \{y \in X \text{ tels que } C(x, y) \in -P^+\}$$

Alors la correspondance Z est représentée par (7) avec $\varphi(p, x, y) = \langle p, C(x, y) \rangle$.

En particulier, si $F = \prod_{i=1}^n F_i$, $P = \prod_{i=1}^n P_i$ et $C(x, y) = \{C_i(\hat{x}_i, y_i)\}_{i=1, \dots, n} \in F'$

$\in F' = \prod_{i=1}^n F'_i$, alors $Z(x) = \prod_{i=1}^n Z_i(\hat{x}_i)$ où $Z_i(\hat{x}_i) = \{y_i \in Y_i \text{ tels que } C(\hat{x}_i, y_i) \in -P_i^+\}$

et $\bar{p} = (\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n) \in P$ est un multiplicateur de Kuhn-Tucker associé à une solution x de (5) si

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \forall i, \quad \langle \bar{p}_i, C_i(x) \rangle = 0 \\ \text{ii) } \forall i, \quad K_i(\hat{x}_i, x_i) + \langle \bar{p}_i, C_i(\hat{x}_i, x_i) \rangle = \\ \qquad \qquad \qquad \min_{y_i \in X_i} (K_i(\hat{x}_i, y_i) + \langle \bar{p}_i, C(\hat{x}_i, y_i) \rangle). \end{array} \right.$$

EXEMPLE 2-2. Supposons que $Z(x)$ soit un ensemble convexe fermé d'un espace localement convexe séparé $V = \prod_{i=1}^n V_i$ et considérons sa fonction support

$$(13) \quad \sigma(x; p) = \sup_{y \in Z(x)} \langle p, y \rangle \quad \text{où } p = (p_1, \dots, p_n) \in V' = \prod_{i=1}^n V_i'.$$

La correspondance Z est représentée par (7) avec $\varphi(p, x, y) = \langle p, y \rangle - \sigma(x; p)$. Dans ce cas $\bar{p} \in V'$ est un multiplicateur de Kuhn-Tucker associé à un équilibre x du jeu (3) si

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \sum_{i=1}^n \langle \bar{p}_i, x_i \rangle = \sigma(x, \bar{p}) \\ \text{ii) } \forall i, \quad K_i(\hat{x}_i, x_i) + \langle \bar{p}_i, x_i \rangle = \min_{y_i \in X_i} (K_i(\hat{x}_i, y_i) + \langle \bar{p}_i, y_i \rangle) \end{array} \right.$$

(Autrement dit, la connaissance de $\bar{p} \in V'$ nous permet de *décentraliser le jeu* (3) en le remplaçant par le jeu (14).

On démontre que la recherche d'un multiplicateur de Kuhn-Tucker revient à la recherche d'un max inf du Lagrangien :

PROPOSITION 2. *Supposons que*

$$(15) \quad \text{les fonctions } p \mapsto \varphi(p, x, y) \text{ sont positivement homogènes sur le cône } P.$$

Si x est équilibre de (3), $\bar{p} \in P$ est un multiplicateur de Kuhn-Tucker associé à x si et seulement si \bar{p} est un max inf du Lagrangien $L(x; y, p)$ sur $X \times P$.

Cette proposition nous permet de démontrer les résultats suivants.

PROPOSITION 3. *Supposons que C soit une application de $X \times X$ dans F' et que*

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } X \text{ est sous ensemble convexe d'un espace vectoriel } V = \prod_{i=1}^n V_i \text{ et,} \\ \quad \forall x \in X, \forall p \in P, \text{ les fonctions } y_i \mapsto K_i(\hat{x}_i, y_i) \text{ et } y \mapsto \langle p, C(x, y) \rangle \\ \quad \text{sont convexes} \\ \text{ii) } \text{l'intérieur } P^+ \text{ de } \overset{\circ}{P} \text{ est non vide dans l'espace de Banach} \\ \quad \text{réflexif } F'. \\ \text{iii) } \forall x \in X, \exists y \in X \text{ tel que } C(x, y) \in -\overset{\circ}{P}. \end{array} \right.$$

Si $x \in Z(x) = \{y \in X \text{ tels que } C(x, y) \in \overline{-P^+}\}$ est un équilibre du jeu (3), il existe un multiplicateur de Kuhn-Tucker $\bar{p} \in P$ associé à x .

PROPOSITION 4. Supposons que

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } V = \prod_{i=1}^n V_i \text{ est un produit d'espaces de Banach réflexifs} \\ \text{ii) les fonctions } y_i \mapsto K_i(\widehat{x}_i, y_i) \text{ sont convexes, semi-continues inférieurement et bornées sur toute boule de } V_i. \\ \text{iii) les fonctions supports } \sigma(x, p) \text{ des ensembles convexes fermés } Z(x) \text{ sont finies sur un même cône convexe fermé } P \subset V'. \end{array} \right.$$

Si $x \in Z(x)$ est un équilibre du jeu (3), il existe un multiplicateur de Kuhn-Tucker $\bar{p} \in P$ associé à x .

Supposons maintenant que $X = V = \prod V_i$, que

$$(18) \quad Z = Z(\omega) = \left\{ y \in X \text{ tels que } \sum_{i=1}^n B_i y_i - \omega \in -P^+ \right\}$$

où $B_i \in \mathcal{L}(V_i, F')$, $\omega \in F'$ et que

$$(19) \quad \text{les fonctions } y_i \mapsto K_i(\widehat{x}_i, y_i) \text{ sont convexes et différentiables}$$

PROPOSITION 5. Supposons (18), (19) et

$$(20) \quad \text{L'opérateur } \sum B_i \text{ est surjectif.}$$

Si $x \in Z$ est un équilibre du jeu (3), il existe un multiplicateur de Kuhn-Tucker associé à x , solution de

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \sum_{i=1}^n \langle p - \bar{p}, B_i x_i - \omega \rangle \leq 0 \quad \forall p \in P \\ \text{ii) } \forall i, D_i K_i(\widehat{x}_i, x_i) + B_i \bar{p} = 0. \end{array} \right.$$

Considérons le cas où V_i est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $((x_i, y_i))_i = \langle \Gamma_i x_i, y_i \rangle$, où Γ_i est l'isométrie canonique de V_i sur V'_i , et où

$$(22) \quad K_i(\widehat{x}_i, y_i) = \frac{1}{2} \left\| y_i + \sum_{j \neq i} A_j x_j - \varphi_i \right\|_i^2.$$

Supposons par exemple que

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } B = \sum_{i=1}^n B_i \text{ est un opérateur surjectif de } V \text{ sur l'espace} \\ \text{de Hilbert } F' \\ \text{ii) } \sum_{i,j=1}^n ((A_i^j x_j, x_i))_i \geq c \sum_{i=1}^n \|x_i\|_i^2 \text{ où } c > 0, x \in V. \end{array} \right.$$

Posons

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \Gamma \in \mathcal{L}(V, V') \text{ est défini par } \Gamma x = (\Gamma_i x_i) \\ \text{ii) } G \in \mathcal{L}(V, V') \text{ défini par } Gx = \left(\Gamma_i \left(x_i + \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} A_i^j x_j \right) \right)_{1 \leq i \leq n} \\ \text{iii) } A = BG^{-1} B' \in \mathcal{L}(F, F') \\ \text{iv) } \bar{p}_0 = A^{-1} (BG^{-1} \Gamma \varphi - \omega) \text{ où } \varphi = (\varphi_i)_{1 \leq i \leq n} \in V \end{array} \right.$$

PROPOSITION 5. *Supposons (18), (22) et (23). Il existe un équilibre unique x et un multiplicateur de Kuhn-Tucker \bar{p} unique définis par*

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \langle A(\bar{p} - \bar{p}_0), \bar{p} - p \rangle \leq 0 \quad \forall p \in P \\ \text{ii) } x = -G^{-1} B' \bar{p} + G^{-1} \Gamma \varphi. \end{array} \right.$$

Si $P = F$, c'est-à-dire si $Z = Z_0 = \{y \text{ tels que } By = \omega\}$, alors l'équilibre x_0 et son multiplicateur de Kuhn-Tucker $\bar{p}_0 \in P$ sont définis par

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } x_0 = -G^{-1} B' \bar{p}_0 + G^{-1} \Gamma \varphi \\ \text{ii) } \bar{p}_0 = A^{-1} (BG^{-1} \Gamma \varphi - \omega), \end{array} \right.$$

PLAN

- 1 — *Définition et propriétés des équilibres*
 - 1-1 Définition des équilibres
 - 1-2 Existence d'un équilibre
 - 1-3 Propriété des équilibres
- 2 — *Définition et propriétés d'un multiplicateur de Kuhn-Tucker*
 - 2-1 Définition d'un multiplicateur de Kuhn-Tucker
 - 2-2 Propriétés des multiplicateurs de Kuhn-Tucker
- 3 — *Existence de multiplicateurs de Kuhn-Tucker*
 - 3-1 Exemple (I)
 - 3-2 Exemple (II)
 - 3-3 Cas général
 - 3-4 Démonstration de la proposition 3-1
 - 3-5 Démonstration de la proposition 3.2
- 4 — *Cas des contraintes affines*
 - 4-1 Cas où $y_i \mapsto K_i(\widehat{x}_i, y_i)$ est linéaire continue
 - 4-2 Cas où $y_i \mapsto K_i(\widehat{x}_i, y_i)$ est convexe dérivable
 - 4-3 Exemple. Problèmes quadratiques avec contraintes linéaires.

1. Définition et propriétés des équilibres.

1-1 *Définition des équilibres.*

On définit un jeu non coopératif contraint de la façon suivante. On se donne

- $$(1.1) \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } n \text{ joueurs } i = 1, \dots, n \\ \text{ii) } n \text{ ensembles } X_i \text{ de décisions } x_i \\ \text{iii) } n \text{ critères } x = (x_1, \dots, x_n) \in X = \prod_{i=1}^n X_i \mapsto K_i(x) \\ \text{iv) } \text{une correspondance (multi-application) } x \in X \mapsto Z(x) \subset X \end{array} \right.$$

et l'on pose

$$(1-2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \widehat{X}_i = \prod_{j \neq i} X_j, \quad \widehat{x}_i = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \widehat{X}_i \\ \text{ii) } x = (x_1, \dots, x_n) = (\widehat{x}_i, x_i) \in X, \quad K_i(x) = K_i(\widehat{x}_i, x_i) \\ \text{iii) } K(x, y) = \sum_{i=1}^n K_i(\widehat{x}_i, y_i) \text{ définie sur } X \times X. \end{array} \right.$$

DEFINITION 1-1. On dit que $x \in X$ est un équilibre du « jeu non coopératif contraint » associé aux données (1-1) si

$$(1-3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } x \in Z(x) \\ \text{ii) } K(x, x) = \min_{y \in Z(x)} K(x, y). \end{array} \right.$$

EXEMPLE 1-1. Si

$$(1-4) \quad Z(x) = X = \prod X_i \text{ pour tout } x \in X,$$

nous dirons que le problème (1-3) est un jeu non coopératif (non contraint) et que x est un point de Nash (voir [9], par exemple).

En effet, le problème (1-3) est dans ce cas équivalent à

$$(1-5) \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad K_i(\widehat{x}_i, x_i) = \min_{y_i \in X_i} K_i(\widehat{x}_i, y_i).$$

EXEMPLE 1-2. Supposons que

$$(1-6) \quad Z(x) = Z \subset X \quad \forall x \in X \text{ est une correspondance constante.}$$

Par exemple, on suppose qu'il existe une application $B_i: X_i \rightarrow F'$ et $\omega \in F'$ et que

$$(1-7) \quad Z = \left\{ x \in X \text{ tels que } \sum_{i=1}^n B_i x_i - \omega = 0 \right\}.$$

Alors x est un équilibre si

$$(1-8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \sum_{i=1}^n B_i x_i = \omega \\ \text{ii) } \sum_{i=1}^n K_i(\widehat{x}_i, x_i) \leq \sum_{i=1}^n K_i(\widehat{x}_i, y_i) \text{ dès que } \sum_{i=1}^n B_i y_i = \omega. \end{array} \right.$$

Ce type de problèmes a été étudié dans [4] par exemple.

EXEMPLE 1-3. Supposons que

$$(1-9) \quad Z(x) = \prod_{i=1}^n Z_i(\widehat{x}_i) \text{ où } Z_i: \widehat{x}_i \in \widehat{X}_i \mapsto Z_i(\widehat{x}_i) \subset X_i,$$

le problème (1-3) est équivalent au problème

$$(1-10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \forall i = 1, \dots, n, \quad x_i \in Z_i(\widehat{x}_i) \\ \text{ii) } \forall i = 1, \dots, n, \quad K_i(\widehat{x}_i, x_i) = \min_{y_i \in Z_i(\widehat{x}_i)} K_i(\widehat{x}_i, y_i). \end{array} \right.$$

En effet, une solution x de (1-10) est évidemment une solution de (1-3). Inversement, si $y_i \in Z_i(\widehat{x}_i)$ et puisque $x_j \in Z_j(\widehat{x}_j) \forall j \neq i$, alors $y = (\widehat{x}_i, y_i) \in Z(x)$ et (1-3) ii) implique que

$$K_i(\widehat{x}_i, x_i) + \sum_{j \neq i} K_j(\widehat{x}_j, x_j) \leq K_i(\widehat{x}_i, y_i) + \sum_{j \neq i} K_j(\widehat{x}_j, x_j).$$

Un tel jeu non coopératif contraint est appelé dans [1] (voir aussi [6]) « économie abstraite », car il formalise l'équilibre de Walras d'une économie.

1.2. Existence d'un équilibre.

PROPOSITION 1.1. Supposons que

$$(1-11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \forall i = 1, \dots, n, X_i \text{ est un convexe compact d'un espace localement convexe } V_i, \\ \text{ii) } \text{les fonctions } y_i \mapsto K_i(\widehat{x}_i, y_i) \text{ sont convexes pour tout } \widehat{x}_i \in \widehat{X}_i \\ \text{iii) } \text{les fonctions } x \mapsto K_i(x) \text{ sont continues} \\ \text{iv) } \text{La correspondance } x \rightarrow Z(x) \text{ est continue à valeurs convexes compactes.} \end{array} \right.$$

Il existe alors un équilibre $x \in X$ du jeu non coopératif contraint (1-3).

DÉMONSTRATION. Considérons la correspondance $\Gamma: x \in X \mapsto \Gamma(x) \subset X$ définie par $y \in \Gamma(x)$ si $y \in Z(x)$ et $K(x, y) = \min_{z \in Z(x)} K(x, z)$. D'après (1-11) iii) et iv), la correspondance Γ est semi continue supérieurement à valeurs

compactes non vides (on utilise le théorème du maximum, voir [5] par exemple). D'après (1-11) ii), les ensembles $\Gamma(x)$ sont convexes. Le théorème de point fixe de Kakutani (voir [5] par exemple) implique l'existence de $x \in X$ tel que $x \in \Gamma(x)$, c'est à dire, d'un équilibre x .

1-3 Propriétés des équilibres.

Signalons aussi les « propriétés marginales » des équilibres non coopératifs. On introduit

$$(1-12) \quad h = (h_1, \dots, h_n) \in V'_i = \prod_{i=1}^n V'_i; \quad \langle h, x \rangle = \sum_{i=1}^n \langle h_i, x_i \rangle \text{ où } x \in X$$

et la fonction $K^*(x, h)$ définie sur $X \times V'$ par

$$(1-13) \quad -K^*(x, h) = \inf_{y \in Z(x)} (K(x, y) - \langle h, y \rangle) = - \sup_{y \in Z(x)} (\langle h, y \rangle - K(x, y)).$$

La fonction $h \mapsto K^*(x, h)$ est convexe.

PROPOSITION 1-2. *Si x est un équilibre du jeu non coopératif non contraint 1-3, alors x appartient à la sous différentielle $\partial_h K^*(x, 0)$ de la fonction $h \mapsto K^*(x, h)$ à l'origine (voir [8], [10]).*

Inversement, si les ensembles $Z(x)$ sont convexes fermés et si les fonctions $y_i \mapsto K_i(x_i, y_i)$ sont convexes semi-continues inférieurement, alors toute solution x de

$$(1-14) \quad x \in \partial_h K^*(x, 0)$$

est un équilibre de (1-3).

DEMONSTRATION. La fonction $h \mapsto K^*(x, h)$ est la fonction conjuguée de la fonction $y \mapsto K(x, y) + \delta_{Z(x)}(y)$ où $\delta_{Z(x)}(y)$ est la fonction indicatrice de l'ensemble $Z(x)$. Si x est un équilibre de (1-3), alors $K(x, x) = -K^*(x, 0)$ et par suite, si $h \in V'$,

$$(1-15) \quad -K^*(x, h) \leq K(x, x) - \langle h, x \rangle = -K^*(x, 0) - \langle h, x \rangle$$

ce qui implique que $x \in \partial_h K^*(x, 0)$.

Si $y \mapsto K(x, y) + \delta_{Z(x)}(y)$ est convexe et semi continue inférieurement, cette dernière condition équivaut à dire que $0 \in \partial_y (K(x, x) + \delta_{Z(x)}(x))$, ou encore que x est un équilibre (voir [8], [10]).

REMARQUE 1-1. Dans le cas de l'exemple 1-3 (en particulier de l'exemple 1-1), on peut écrire

$$(1-16) \quad K^*(x, h) = \sum_{i=1}^n K_i^*(\hat{x}_i, h_i) \text{ où } -K_i^*(\hat{x}_i, h_i) = \inf_{y_i \in Z_i(\hat{x}_i)} (K_i(\hat{x}_i, y_i) + \langle h_i, y_i \rangle).$$

La condition (1-14) s'écrit alors

$$(1-17) \quad \forall i = 1, \dots, n, x_i \in \partial_{h_i} K_i^*(\hat{x}_i, h_i).$$

2 — DEFINITION ET PROPRIETES D'UN MULTIPLICATEUR DE KUHN-TUCKER.

2-1 Définition d'un multiplicateur de Kuhn-Tucker.

On suppose que la correspondance $Z(x)$ est représentée de la façon suivante

$$(2-1) \quad Z(x) = \{y \in X \text{ tels que } \varphi(p, x, y) \leq 0 \quad \forall p \in P\}$$

où l'on a introduit

$$(2-2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) des espaces vectoriel réels } F \text{ et } F' \text{ en dualité séparante} \\ \text{ii) un cône convexe } P \text{ de } F, \text{ son cône polaire positif } P^+ \subset F' \\ \text{iii) une fonction } \varphi \text{ définie sur } P \times X \times X. \end{array} \right.$$

DEFINITION 2-1. Soit x un équilibre de (1-3). Nous dirons que $\bar{p} \in P$ est un multiplicateur de Kuhn-Tucker associé à l'équilibre x si

$$(2-3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \varphi(\bar{p}, x, x) = 0 \\ \text{ii) } L(x, x, \bar{p}) = \min_{y \in X} L(x, y, \bar{p}) \end{array} \right.$$

où $L(x; y, p)$ est le « Lagrangien » défini par

$$(2-4) \quad L(x; y, p) = K(x, y) + \varphi(p, x, y).$$

Il est clair que toute solution $x \in Z(x)$ vérifiant (2.3) est un équilibre de (1.3).

EXEMPLE 2-1. Considérons des applications

$$(2-5) \quad B_i : x_i \in X_i \mapsto B_i(x_i) \in F'$$

et associons à ces opérateurs B_i l'ensemble

$$(2-6) \quad Z = \left\{ x \in X \text{ tels que } \sum_{i=1}^n B_i(x_i) \in -P^+ \right\}.$$

La correspondance $x \mapsto Z(x) = Z$ est alors représentée par (2-1) avec

$$(2-7) \quad \varphi(p, x, y) = \sum_{i=1}^n \langle p, B_i(y_i) \rangle.$$

On voit alors que $\bar{p} \in P$ est un multiplicateur de Kuhn Tucker associé à un équilibre x si

$$(2-8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \sum_{i=1}^n \langle \bar{p}, B_i(x_i) \rangle = 0 \\ \text{ii) } \forall i, K_i(\widehat{x}_i, x_i) + \langle \bar{p}, B_i(x_i) \rangle = \min_{y_i \in X_i} (K_i(\widehat{x}_i, y_i) + \langle \bar{p}, B_i(y_i) \rangle) \end{array} \right.$$

EXEMPLE 2-2. Donnons-nous

$$(2-2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } n \text{ couples d'espaces vectoriels réels } F_i \text{ et } F'_i \text{ en dualité,} \\ \text{ii) } \forall i, \text{ un cône convexe fermé } P_i \subset F_i, \text{ son cône polaire positif} \\ \quad P_i^+ \subset F'_i. \\ \text{iii) } \text{des applications } C_i \text{ de } X \text{ dans } F'_i \end{array} \right.$$

et considérons les ensembles

$$(2-10) \quad Z_i(\widehat{x}_i) = \{y_i \in X_i \text{ tels que } C_i(\widehat{x}_i, y_i) \in -P^+\}.$$

La correspondance $x \mapsto Z(x) = \prod_{i=1}^n Z_i(\widehat{x}_i)$ est alors représentée par (2-1)

avec $F = \prod_{i=1}^n F_i$, $P = \prod_{i=1}^n P_i$ et

$$(2-11) \quad \varphi(p, x, y) = \sum_{i=1}^n \langle p_i, C_i(\widehat{x}_i, y_i) \rangle.$$

On voit alors que $\bar{p} = (\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n) \in P = \prod_{i=1}^n P_i$ est un multiplicateur de Kuhn-Tucker associé à un équilibre x si

$$(2-12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \forall i, \langle \bar{p}_i, C_i(x) \rangle = 0 \\ \text{ii) } \forall i, K_i(\hat{x}_i, x_i) + \langle \bar{p}_i, C_i(\hat{x}_i, x_i) \rangle = \min_{y_i \in X_i} (K_i(\hat{x}_i, y_i) + \langle \bar{p}_i, C_i(\hat{x}_i, y_i) \rangle). \end{array} \right.$$

EXEMPLE 2-3. Supposons que les ensembles $Z(x)$ sont convexes fermés et considérons leurs fonctions support

$$(2-13) \quad \sigma(x; p) = \sup_{y \in Z(x)} \langle p, y \rangle \quad \text{où } p = (p_1, \dots, p_n) \in V' = \prod_{i=1}^n V'_i.$$

La correspondance $Z(x)$ est alors représentée par (2-1) avec

$$(2-14) \quad \varphi(p, x, y) = \sum_{i=1}^n \langle p_i, y_i \rangle - \sigma(x; p).$$

On voit alors que $\bar{p} \in V'$ est un multiplicateur de Kuhn-Tucker associé à un équilibre x si

$$(2-15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \sum_{i=1}^n \langle \bar{p}_i, x_i \rangle = \sigma(x, \bar{p}) \\ \text{ii) } \forall i, K_i(\hat{x}_i, x_i) + \langle \bar{p}_i, x_i \rangle = \min_{y_i \in X_i} (K_i(\hat{x}_i, y_i) + \langle \bar{p}_i, y_i \rangle) \end{array} \right.$$

REMARQUE 2-1. D'après la proposition 1-2, la condition (2-15) ii) implique que

$$x_i \in \partial_h K_i^*(\hat{x}_i, -\bar{p}_i) \quad \text{où } -K_i^*(\hat{x}_i, -\bar{p}_i) = \inf_{y_i \in X_i} (K_i(\hat{x}_i, y_i) - \langle -\bar{p}_i, y_i \rangle)$$

et est équivalente à cette dernière condition si $\forall i$, la fonction $y_i \mapsto K_i(\hat{x}_i, y_i)$ est convexe semi-continue inférieurement.

REMARQUE. Si

$$Z(x) = \prod_{i=1}^n Z_i(\hat{x}_i),$$

alors

$$(2-16) \quad \sigma(x, p) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(\widehat{x}_i; p_i)$$

où

$$(2-17) \quad \sigma_i(\widehat{x}_i, p_i) = \sup_{y_i \in Z_i(\widehat{x}_i)} \langle p_i, y_i \rangle.$$

2-2. Propriétés des multiplicateurs de Kuhn-Tucker.

Associons au Lagrangien $L(x; y, p)$ les fonctions suivantes

$$(2-18) \quad L^*(x; p) = \inf_{y \in X} L(x; y, p) \leq L(x; y, p) \leq \sup_{p \in P} L(x; y, p) = L^b(x; y)$$

et

$$(2-19) \quad \beta(x) = \sup_{p \in P} L^*(x; p) \leq \alpha(x) = \inf_{y \in X} L^b(x; y).$$

Rappelons que $\bar{p} \in P$ est appelé « max inf » de $L(x; y, p)$ si

$$(2-20) \quad \alpha(x) \leq L(x; y, \bar{p}) \quad \forall y \in X \text{ (ce qui implique que } \alpha(x) = \beta(x)),$$

que $z \in X$ est appelé « minisup » de $L(x; y, p)$ si

$$(2-21) \quad L(x; z, p) \leq \beta(x) \quad \forall p \in P \text{ (ce qui implique que } \alpha(x) = \beta(x))$$

et que $(z, \bar{p}) \in X \times P$ est un « point col » de $L(x; y, p)$ si z est un minisup et \bar{p} un maxinf.

PROPOSITION 2-1. Supposons que

$$(2-22) \quad \text{les fonctions } p \mapsto \varphi(p; x, y) \text{ sont positivement homogènes } \forall x, y \in X.$$

Alors

$$(2-23) \quad \alpha(x) = \inf_{y \in Z(x)} K(x, y).$$

Si de plus x est un équilibre de (1-3), les conditions suivantes sont équivalentes

$$(2-24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \bar{p} \text{ est un multiplicateur de Kuhn-Tucker associé à } x \\ \text{ii) } (x, \bar{p}) \text{ est un point col de } L(x; y, p) \text{ sur } X \times P. \\ \text{iii) } \bar{p} \text{ est un max inf de } L(x; y, p) \text{ sur } X \times P. \end{array} \right.$$

DÉMONSTRATION. Supposons (2.22). Alors

$$(2.25) \quad L^b(x; y) = \begin{cases} K(x, y) & \text{si } y \in Z(x) \\ +\infty & \text{si } y \notin Z(x). \end{cases}$$

En effet, si $y \in Z(x)$, $\varphi(p, x, y) \leq 0 = \varphi(0, x, y)$ et par suite $K(x, y) + \varphi(p, x, y) \leq K(x, y) + \varphi(0, x, y) = K(x, y) = L^b(x; y)$. Si $y \notin Z(x)$, il existe $p_0 \in P$ tel que $\varphi(p_0, x, y) = \theta > 0$ et par suite, $L^b(x; y) \geq K(x, y) + \varphi(\lambda p_0, x, y) = K(x, y) + \lambda\theta \rightarrow +\infty$ puisque $\lambda p_0 \in P$ pour tout $\lambda > 0$. Donc $\alpha(x) = \inf_{y \in Z(x)} K(x, y)$.

Supposons que x soit un équilibre.

Si \bar{p} est un multiplicateur de Kuhn-Tucker associé à x , alors

$$K(x, x) = K(x, x) + \varphi(\bar{p}, x, x) = L(x; x, \bar{p}) \leq L(x, y, \bar{p}) \quad \forall y \in X.$$

Puisque $\varphi(p, x, x) \leq 0 = \varphi(\bar{p}, x, x)$ pour tout $p \in P$, on en déduit que

$$L(x; x, p) = K(x, x) + \varphi(p, x, x) \leq K(x, x) + \varphi(\bar{p}, x, x) = L(x, x, \bar{p}) \quad \forall p \in P.$$

Donc (x, \bar{p}) est un point col de $L(x; y, p)$, et par suite, \bar{p} est un max inf de $L(x, y; p)$.

Enfin, si x est un équilibre et \bar{p} un max inf de $L(x, y; p)$, on en déduit que

$$K(x, x) = \alpha(x) \leq K(x, y) + \varphi(\bar{p}, x, y) = L(x; y, \bar{p}) \quad \forall y \in X.$$

Ceci implique que pour $y = x$, $\varphi(\bar{p}, x, x) \geq 0$. Puisque $x \in Z(x)$, alors $\varphi(\bar{p}, x, x) \leq 0$ et donc, $\varphi(\bar{p}, x, x) = 0$. Donc \bar{p} est un multiplicateur de Kuhn-Tucker. ■

Le recherche des multiplicateurs de Kuhn-Tucker revient donc à celle des max inf du Lagrangien $L(x, y; p)$: nous dirons que ce problème est le problème dual du problème de la recherche d'un équilibre d'un jeu non coopératif contraint.

REMARQUE 2.2. Plus généralement, si $L(x; y, p)$ est une fonction définie sur $X \times X \times P$ (où P est un ensemble) telle que

$$(2.26) \quad \alpha(x) = \inf_{y \in X} \sup_{p \in P} L(x, y, p) = \inf_{y \in Z(x)} K(x, y)$$

nous pouvons dire que \bar{p} est un multiplicateur de Kuhn-Tucker associé à un équilibre x si le couple (x, \bar{p}) est un point col de $L(x; y, p)$ et dire

que le problème dual est la recherche des max inf de $L(x, y, p)$. Ceci peut s'exprimer en particulier en termes de sous différentielles de la fonction convexe concave $(y, p) \mapsto L(x, y, p)$ et des fonctions

$$(2-27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \alpha(x, h, \omega) = \inf_{y \in X} \sup_{p \in P} (L(x, y, p) - \langle h, x \rangle + \langle p, \omega \rangle) \\ \text{ii) } \beta(x, h, \omega) = \sup_{p \in P} \inf_{y \in X} (L(x, y, p) - \langle h, x \rangle + \langle p, \omega \rangle) \end{array} \right.$$

(voir [10]). Nous ne citerons que le résultat suivant concernant les Lagrangiens de la forme $L(x, y, p) = K(x, y) + \varphi(p; x, y)$. ■

Posons, si $\omega \in F'$,

$$(2-28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } Z(x, \omega) = \{y \in X \text{ tels que } \varphi(p, x, y) + \langle p, \omega \rangle \leq 0 \ \forall p \in P\} \\ \text{ii) } \alpha(x, \omega) = \inf_{y \in Z(x, \omega)} K(x, y) = \inf_{y \in X} \sup_{p \in P} (K(x, y) + \varphi(p, x, y) + \langle p, \omega \rangle) \\ \text{iii) } \beta(x, \omega) = \sup_{p \in P} \inf_{y \in Y} (K(x, y) + \varphi(p, x, y) + \langle p, \omega \rangle) \end{array} \right.$$

PROPOSITION 2-2. *Si x est un équilibre de (1-3) et $\bar{p} \in P$ est un multiplicateur de Kuhn-Tucker associé, alors $\alpha(x, 0) = \beta(x, 0) = \alpha(x) = \beta(x)$ et*

$$(2-29) \quad \alpha(x, 0) - \alpha(x, \omega) \leq \beta(x, 0) - \beta(x, \omega) \leq \langle \bar{p}, -\omega \rangle \quad \forall \omega \in F'$$

(c'est-à-dire, \bar{p} appartient à la sous différentielle en $\omega = 0$ des fonctions $\omega \mapsto \alpha(x, \omega)$ et $\omega \mapsto \beta(x, \omega)$).

DEMONSTRATION. On sait déjà que $\alpha(x, 0) - \alpha(x, \omega) \leq \beta(x, 0) - \beta(x, \omega)$. D'autre part, puisque x est un équilibre, on peut écrire que

$$\begin{aligned} \beta(x, 0) &= \beta(x) = \inf_{y \in X} (K(x, y) + \varphi(\bar{p}, x, y) + \langle \bar{p}, \omega \rangle) - \langle \bar{p}, \omega \rangle \\ &\leq \sup_{p \in P} \inf_{y \in X} (K(x, y) + \varphi(p, x, y) + \langle p, \omega \rangle) - \langle \bar{p}, \omega \rangle = \\ &= \beta(x, \omega) + \langle \bar{p}, -\omega \rangle. \end{aligned}$$

3. Existence de multiplicateurs de Kuhn-Tucker.

D'après la proposition 2-1, il suffit d'utiliser les résultats concernant l'existence d'un max inf de $L(x, y, p)$ pour obtenir celle d'un multiplicateur de Kuhn-Tucker.

Nous énoncerons d'abord deux cas particuliers et un théorème général affirmant l'existence d'un multiplicateur de Kuhn-Tucker.

3-1 EXEMPLE (I). Supposons que

$$(3-1) \quad Z(x) = \{ y \in X \text{ tels que } C(x, y) \in -P^+ \}$$

où

$$(3-2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } X_i \text{ est un sous ensemble convexe d'un espace vectoriel } V_i, \\ \text{ii) } F \text{ est un espace de Banach réflexif, } F' \text{ son dual} \\ \text{iii) } P \subset F \text{ est un cône convexe fermé, } P^+ \subset F' \text{ son cône polaire} \\ \text{positif} \\ \text{iv) } C \text{ est une application de } X \times X \text{ dans } F'. \end{array} \right.$$

(voir exemples 2-1 et 2-2).

Nous supposerons que

$$(3-3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \forall x \in X \text{ et } \forall p \in P, \text{ les fonctions } y_i \mapsto K_i(\widehat{x}_i, y_i) \text{ et } y \mapsto \langle p, C(x, y) \rangle \\ \text{sont convexes} \\ \text{ii) } \text{l'intérieur } \overset{\circ}{P}^+ \text{ de } P^+ \text{ est non vide dans l'espace de Banach } F' \\ \text{iii) } \forall x, \text{ il existe } y \text{ tel que } C(x, y) \in -\overset{\circ}{P}^+ . \end{array} \right.$$

PROPOSITION 3-1. *Supposons (3-2) et (3-3). Si x est un équilibre de (1-3), il existe un multiplicateur de Kuhn-Tucker $\bar{p} \in P$ associé à x .*

3-2 EXEMPLE (II)

$$(3-4) \quad Z(x) = \{ y \in V \text{ tels que } \langle p, y \rangle - \sigma(x, p) \leq 0 \quad \forall p \in P \}$$

où $\sigma(x, p)$ est la fonction support de $Z(x)$ vérifiant

$$(3-5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \sigma(x, p) = \begin{cases} \sigma(x, p) < +\infty & \text{si } p \in P \\ +\infty & \text{si } p \notin P \end{cases} \\ \text{ii) } P \text{ est un c\^one convexe ferm\^e du dual } V' = \Pi V_i' \text{ de } V = \Pi V_i. \end{array} \right.$$

(voir exemple 2.3).

Supposons en outre que

$$(3-6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) les espaces } V_i \text{ sont des espaces de Banach r\^eflexifs} \\ \text{ii) les fonctions } y_i \mapsto K_i(\hat{x}_i, y_i) \text{ sont convexes, semi continues} \\ \text{inf\^erieurement et born\^ees sur toute boule de } V_i. \end{array} \right.$$

PROPOSITION 3.2. *Supposons (3.5) et (3.6). Si x est un \^equilibre de (1-3), il existe un multiplicateur de Kuhn-Tucker \bar{p} associ\^e \^a x .*

3-3 CAS GENERAL. Nous allons maintenant \^enoncer le th\^eor\^eme du max inf affirmant l'existence d'un multiplicateur de Kuhn-Tucker et impliquant les deux propositions ci-dessus.

Pour cela, on suppose que

$$(3-7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{les fonctions } y \mapsto K(x, y) \text{ et } y \mapsto \varphi(p, x, y) \text{ appartiennent \^a un} \\ \text{m\^eme espace vectoriel localement convexe } \mathcal{A}(X) \text{ de fonctions} \\ \text{num\^eriques finies sur } X (\forall x \in X, \forall p \in P) \end{array} \right.$$

où dans ce n^o $\mathcal{A}(X)$ est l'espace des fonctions born\^ees sur tout ensemble d'un recouvrement \mathcal{A} de X .

On introduit

$$(3-8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) le dual } \mathcal{A}'(X) \text{ de } \mathcal{A}(X) \\ \text{ii) le c\^one } \mathcal{A}_+(X) \text{ des fonctions positives, son c\^one polaire} \\ \mathcal{A}'_+(X) \subset \mathcal{A}'(X) \\ \text{iii) l'ensemble } \mathcal{A}'_1(X) = \{\mu \in \mathcal{A}'_+(X) \text{ tels que } [\mu, 1] = 1\} \end{array} \right.$$

et on rappelle que $\mathcal{A}'_1(X)$ engendre $\mathcal{A}'_+(X)$.

De plus, on introduit

$$(3-9) \quad \alpha_0(x) = \inf_{\mu \in \mathcal{A}'_1(X)} \sup_{p \in P} [\mu_y, L(x, y, p)]$$

et on vérifie aisément que

$$(3-10) \quad \beta(x) \leq \alpha_0(x) \leq \alpha(x).$$

Le théorème du max inf s'énonce alors de la façon suivante (voir [2], par exemple).

THEOREME 3-1. *Supposons (3-7),*

$$(3-11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall x, y \in X, \text{ les fonctions } p \mapsto \varphi(p, x, y) \text{ sont concaves et} \\ \text{positivement homogènes} \end{array} \right.$$

et

$$(3-12) \quad \forall x \in X, \text{ les ensembles } \mathcal{A}_+(X) - \mathcal{C}(x) \text{ sont fermés dans } \mathcal{A}(X)$$

où

$$(3-13) \quad \mathcal{C}(x) = \{y \mapsto \varphi(p, x, y)\}_{p \in P} \subset \mathcal{A}(X)$$

désigne l'ensemble des contraintes définissant $Z(x)$.

Il existe alors $\bar{p} \in P$ tel que.

$$(3-14) \quad \beta(x) = \alpha_0(x) = \inf_{\psi \in \mathcal{A}'_1(X)} [\mu_y, K(x, y) + \varphi(\bar{p}, x, y)].$$

Si x est un équilibre de (1-3) et si $\alpha(x) = \alpha_0(x)$, alors \bar{p} est un multiplicateur de Kuhn-Tucker associé à x

3-4. DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3-1. L'hypothèse (3-11) est évidemment satisfaite.

On prend pour espace $\mathcal{A}(X)$ l'espace $\mathcal{A}(X) = \mathcal{S}(X) = \mathbf{R}^X$ de toutes les fonctions numériques finies sur X , muni de la topologie de la convergence simple. Démontrons que le cône convexe $\mathcal{S}_+(X) - \mathcal{C}(x)$ est fermé dans $\mathcal{S}(X)$.

Soit $\varphi_\mu(y) = -\langle p_\mu, C(x, y) \rangle + \psi_\mu(y)$ où $\psi_\mu \in \mathcal{S}_+(X)$ une suite généralisée de fonctions de $\mathcal{S}_+(X) - \mathcal{C}(x)$ convergeant vers $\varphi(y)$ pour tout $y \in X$. D'après (3-3) ii) et iii), il existe $y_0 \in X$ et $u_0 \in \overset{\circ}{P}^+$ tel que $C(x, y_0) = -u_0$. Puisque $p_\mu \in P$, une sous-suite généralisée des nombres réels positifs $\langle p_\mu, u_0 \rangle$

convergent vers $\theta \in [0, +\infty]$. En fait, $\theta < +\infty$ puis que les inégalités

$$(3-15) \quad \varphi_\mu(y_0) = \langle p_\mu, u_0 \rangle + \psi_\mu(y_0) \geq \langle p_\mu, y_0 \rangle$$

impliquent que $\theta \leq \varphi(y_0)$ en passant à la limite.

Par suite, les éléments $p_\mu / \langle p_\mu, u_0 \rangle$ appartiennent à une semelle du cône P , faiblement [compacte puisque l'intérieur de P^+ est non vide. Donc une sous-suite généralisée de $p_\mu / \langle p_\mu, u_0 \rangle$ converge vers un élément p_* de P et par suite, $p_\mu = \langle p_\mu, u_0 \rangle p_\mu / \langle p_\mu, u_0 \rangle$ converge vers $p = \theta p_* \in P$. Donc une sous-suite de $\psi_\mu(y) = \varphi_\mu(y) + \langle p_\mu, C(x, y) \rangle$ converge vers $\psi(y) = \varphi(y) + \langle p, C(x, y) \rangle \geq 0$, ce qui montre que $\mathcal{S}_+(X) - \mathcal{C}(x)$ est fermé dans $\mathcal{S}(X)$.

Il nous reste à montrer que $\alpha(x) = \alpha_0(x)$. Or $\mathcal{S}'(X)$ s'identifie à l'espace des mesures discrètes $\mu = \sum \alpha^k \delta(x^k)$ sur X et $\mathcal{S}'_1(X)$ à l'espace des mesures discrètes de probabilité.

Soit β l'application barycentre associant à toute mesure discrète μ son barycentre $\beta\mu = \sum \alpha^k x^k$. Alors β est une application de $\mathcal{S}'_1(X)$ dans X puisque X est convexe et une fonction est convexe si et seulement si

$$(3-16) \quad \varphi(\beta\mu) \leq [\mu, \varphi] = \sum \alpha^k \varphi(x^k) \quad \forall \mu \in \mathcal{S}'_1(X).$$

Puisque (3-3) i) implique que $y \mapsto L(x; y, p)$ est convexe, on en déduit que

$$(3-17) \quad \sup_{p \in P} L(x; \beta\mu, p) \leq \sup_{p \in P} [\mu_y, L(x; y, p)]$$

et par suite, que

$$(3-18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha(x) = \inf_{y \in X} \sup_{p \in P} L(x; y, p) \leq \inf_{\mu \in \mathcal{S}'_1(X)} \sup_{p \in P} L(x; \beta\mu, p) \\ \leq \inf_{\mu \in \mathcal{S}'_1(X)} \sup_{p \in P} [\mu_y, L(x; y, p)] = \alpha_0(x) \leq \alpha(x). \end{array} \right.$$

Nous avons donc démontré que $\alpha_0(x) = \alpha(x)$ et par suite, que \bar{p} est un $\max \inf$ de $L(x; y, p)$. Si x est un équilibre de (1-3), cela implique que $\bar{p} \in P$ est un multiplicateur de Kuhn-Tucker.

REMARQUE 3-1

$$(3-19) \quad \text{si } \gamma \text{ est une application de } \mathcal{S}'_1(X) \text{ dans } X$$

et si on dit que « $\varphi \in \mathcal{S}(X)$ est γ -vexe » lorsque

$$(3-20) \quad \varphi(\gamma\mu) \leq [\mu, \varphi] \quad \forall \mu \in \mathcal{S}'_1(X),$$

on en déduit que $\alpha(x) = \alpha_0(x)$ dès lors que les fonctions $y \mapsto L(x; y, p)$ sont γ -vexes.

(Il suffit de remplacer β par γ dans (3-17) et (3-18)). On peut donc remplacer les hypothèses (3-2) i) et (3-5) i) de la proposition 3-1 par

$$(3-6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{il existe une application } \gamma \text{ de } \mathcal{S}'_1(X) \text{ dans } X \text{ telle que} \\ \forall x \in X, \forall p \in P, \text{ les fonctions } y \mapsto K(x, y) \text{ et} \\ y \mapsto \varphi(p, x, y) \text{ sont } \gamma\text{-vexes.} \end{array} \right.$$

(3-5) DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3-2. L'hypothèse (3-11) est satisfaite puisque $\varphi(p, x, y) = \langle p, y \rangle - \sigma(x; p)$ est concave et positivement homogène en p .

On prend pour espace $\mathcal{A}(X) = \mathcal{A}(V)$ l'espace $\mathcal{A}(V) = \mathcal{B}(V)$ des fonctions numériques finies sur V , bornée sur tout boule de rayon n , muni des semi-normes

$$(3-22) \quad P_n(\varphi) = \sup_{\|x\| \leq n} |\varphi(x)|.$$

Alors $\mathcal{B}(V)$ est un espace de Fréchet (métrisable et complet). L'hypothèse (3-6) ii) implique que les fonctions $y \mapsto L(x; y, p) = K(x, y) + \langle p, y \rangle - \sigma(x; p)$ appartiennent à $\mathcal{B}(V)$ pour tout $x \in X, p \in P$.

Montrons que $\mathcal{B}_+(V) - \mathcal{C}(x)$ est fermé dans V . Soit $\varphi_n(y) = \sigma(x; p_n) - \langle p_n, y \rangle + \psi_n(y)$ une suite dénombrable de fonctions $\varphi_n \in \mathcal{B}_+(V) - \mathcal{C}(x)$ convergeant vers φ dans $\mathcal{B}(V)$. Puisque $Z(x) \neq \emptyset$, il existe $\mathcal{S}_0 \in V$ tel que

$$(3-23) \quad - \langle p_n, y_0 \rangle + \sigma(x; p_n) \geq 0 \quad \forall p_n$$

On en déduit alors que pour tout $y \in Y$,

$$(3-24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \langle p_n, y_0 \rangle \leq \varphi_n(y_0 - y) \leq M(y) \\ \text{ii) } - \langle p_n, y \rangle \leq \varphi_n(y_0 + y) \leq -m(y) \end{array} \right.$$

et par suite, que la suite dénombrable p_n est simplement bornée dans V , donc faiblement compacte puisque V est un espace de Banach réflexif. Donc une sous suite p_m de p_n converge faiblement vers un élément $p \in P$.

Puisque $p \mapsto \sigma(x; p)$ est semi-continue inférieurement sur P (pour la topologie faible), les inégalités

$$(3-25) \quad \varphi_m(y) \geq \sigma(x; p_m) - \langle p_m, y \rangle$$

impliquent que

$$(3-26) \quad \varphi(y) \geq \sigma(x; p) - \langle p, y \rangle$$

et par suite, que $\varphi \in \mathcal{B}_+(\mathcal{V}) - \mathcal{C}(x)$.

Il nous reste à démontrer que $\alpha(x) = \alpha_0(x)$. Pour cela, nous allons montrer l'application barycentre β de $\mathcal{S}'_1(\mathcal{V})$ dans \mathcal{V} se prolonge en une application barycentre β de $\mathcal{B}'_1(\mathcal{V})$ dans \mathcal{V} .

En effet, l'application β' de \mathcal{V}' dans $\mathcal{B}(\mathcal{V})$ définie par

$$(3-27) \quad \beta' p : y \mapsto \langle p, y \rangle$$

est un opérateur linéaire continu de \mathcal{V}' dans $\mathcal{B}(\mathcal{V})$ et sa transposée β est une application linéaire faiblement continue de $\mathcal{B}'(\mathcal{V})$ dans \mathcal{V} définie par

$$(3-28) \quad [\beta \mu, p] = [\mu, \langle p, y \rangle] \quad \forall \mu \in \mathcal{B}'(\mathcal{V}), \quad \forall p \in \mathcal{V}'.$$

Si $\mu = \sum \alpha^k \delta(x^k)$ est une mesure discrète, (3-28) implique que $\langle \beta \mu, p \rangle = \langle \sum \alpha^k x^k, p \rangle$ et montre que β prolonge l'application barycentre de $\mathcal{S}'_1(\mathcal{V})$ dans \mathcal{V} . Puisque l'ensemble des mesures discrètes de probabilité $\mathcal{S}'_1(\mathcal{V})$ est faiblement dense dans $\mathcal{B}'_1(\mathcal{V})$, on en déduit que si $\varphi(x)$ est une fonction convexe semi continue inférieurement, (donc faiblement semi-continue inférieurement),

$$(3-29) \quad \varphi(\beta \mu) \leq [\mu, \varphi] \quad \forall \mu \in \mathcal{B}'_1(\mathcal{V}).$$

D'autre part l'hypothèse (3-6 ii) implique que les fonctions $y \mapsto L(x; y, p)$ sont convexes semi-continues inférieurement pour tout $x \in X, p \in P$. Par un raisonnement analogue à (3-17) e (3-18), on en déduit que $\alpha(x) = \alpha_0(x)$, et par suite, l'existence d'un $\max \inf \bar{p} \in P$ de $L(x, y, p)$ c'est-à-dire d'un multiplicateur $\bar{p} \in P$ associé à x si x est un équilibre de (1-3). ■

On peut donner d'autre conditions suffisantes d'existence d'un multiplicateur de Kuhn-Tucker.

4. Cas des contraintes affines.

Nous supposons que

$$(4-1) \quad X = \mathcal{V} = \prod_{i=1}^n \mathcal{V}_i \text{ est un produit de } n \text{ espaces localement convexes } \mathcal{V}_i$$

et que les contraintes définissant $Z(x)$ sont affines :

$$(4.2) \quad Z(x) = \{y \in V \text{ tel que } \langle p, A(x, y) - \omega \rangle \leq 0 \quad \forall p \in P$$

où

$$(4.3) \quad A \in \mathcal{L}(V, V; F')$$
 est une application bilinéaire continue de $V \times V$ dans F' .

Nous poserons aussi

$$(4.4) \quad A(x, y) = A(x) \cdot y \text{ où } A(x) \in \mathcal{L}(V, F'), \quad A(x)' \in \mathcal{L}(F, V')$$

et on remarque que

$$(4.5) \quad A(x, y) = \sum_{i,j=1}^n A_i^j(x_j, y_i) \text{ où } A_i^j \in \mathcal{L}(V_j, V_i; F')$$

4.1. CAS OÙ $y_i \mapsto K_i(\widehat{x}_i, y_i)$ EST LINEAIRE CONTINUE.

Nous supposerons tout d'abord que

$$(4.6) \quad K_i(\widehat{x}_i, y_i) = \langle N_i(\widehat{x}_i), y_i \rangle$$

où

$$(4.7) \quad N_i \text{ est une application de } \widehat{V}_i = \prod_{j \neq i} V_j \text{ dans } V_i'.$$

Puisque les fonctions $y \mapsto K(x, y) = \sum_{i=1}^n K_i(x_i, y_i)$ et $y \mapsto \langle p, A(x, y) - \omega \rangle$ sont affines en y , nous pouvons utiliser le théorème 3.1 en prenant pour espace $\mathcal{A}(X)$ l'espace $V' \times \mathbb{R} = \left(\prod_{i=1}^n V_i' \right) \times \mathbb{R}$ des fonctions affines continues sur \mathbb{R} . Dans ce cas

$$(4.8) \quad \begin{cases} \text{i) } \mathcal{A}_+(x) = \{0\} \times \mathbb{R}_+ \\ \text{ii) } \mathcal{C}(x) = A(x)' P \times \langle -\omega, P \rangle \end{cases}$$

et on remarque que $\mathcal{A}_+(X) - \mathcal{C}(x)$ est fermé dans $\mathcal{A}(X)$ si $A(x')$ est une application propre de P dans V' . On en déduit le résultat suivant.

PROPOSITION 4.1. *Supposons (4.2), (4.3), (4.6) et*

$$(4.9) \quad \forall x \in V, A(x') \text{ est une application propre de } P \text{ dans } V'.$$

Si x est un équilibre de (1.3), il existe un multiplicateur de Kuhn Tucker $\bar{p} \in P$ associé à x .

Remarquons que dans ce cas, $\bar{p} \in P$ est un multiplicateur de Kuhn-Tucker associé à un équilibre x si et seulement si

$$(4-10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \sum_{i,j=1}^n \langle \bar{p}, A_i^j(x_j, x_i) - \omega \rangle = 0 \\ \text{ii) } \forall i, N_i(\widehat{x}_i) + \sum_{j=1}^n [A_i^j(x_j)]' \bar{p} = 0 \end{array} \right.$$

puisque (4-10) ii) équivaut à

$$(4-11) \quad \langle N_i(\widehat{x}_i), x_i \rangle + \sum_{j=1}^n \langle \bar{p}, A_i^j(x_j, x_i) \rangle = \\ = \min_{y_i \in V_i} \left(\langle N_i(\widehat{x}_i), y_i \rangle + \sum_{j=1}^n \langle \bar{p}, A_i^j(x_j, y_i) \rangle \right).$$

4-2. Cas où $y_i \mapsto K_i(\widehat{x}_i, y_i)$ est convexe et dérivable.
Supposons que

$$(4-12) \quad \text{les fonctions } y_i \mapsto K_i(\widehat{x}_i, y_i) \text{ sont convexes et dérivables}$$

et désignons par

$$(4-13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } D_i K_i(\widehat{x}_i, z_i) : y_i \mapsto \langle D_i K_i(\widehat{x}_i, z_i), y_i \rangle \in V_i' \\ \text{ii) } D_y K(x, z) = \{D_i K_i(\widehat{x}_i, z_i)\}_{i=1, \dots, n} \in V' = \Pi V_i' . \end{array} \right.$$

les dérivées (ou gradients) des fonctions $y_i \mapsto K_i(x_i, y_i)$ en $z_i \in V_i$ et $y \mapsto K(x, y)$ en $z = (z_1, \dots, z_n) \in V$.

On en déduit alors que si $Z(x)$ est convexe, x est un équilibre de (1.3) si et seulement si

$$(4-14) \quad \langle D_y K(x, x), x \rangle = \min_{y \in Z(x)} \langle D_y K(x, x), y \rangle.$$

Si $Z(x)$ est représenté par des contraintes affines, nous sommes ramenés à un problème du type précédent. On déduit alors de la proposition 4-2 l'exis-

ence d'un élément $\bar{p} \in P$ tel que

$$(4-15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \langle \bar{p}, A(x, x) - \omega \rangle = 0 \\ \text{ii) } \langle D_y K(x, x), x \rangle + \langle \bar{p}, A(x, x) \rangle = \\ \quad = \min_{y \in V} (\langle D_y K(x, x), y \rangle + \langle \bar{p}, A(x, y) \rangle) \end{array} \right.$$

dès lors que le cône $A(x')$ est propre de P dans V .

Or, puisque la fonction $y \mapsto K(x, y) + \langle p, A(x, y) \rangle$ est convexe, (4-15) implique que $\bar{p} \in P$ est un multiplicateur de Kuhn-Tucker associé à x .

On obtient donc le résultat suivant.

PROPOSITION 4-2. Supposons (4-2), (4-3), (4-9) et (4-12). Il existe alors un multiplicateur de Kuhn-Tucker $\bar{p} \in P$ associée à un équilibre x , qui est solution du problème suivant

$$(4-16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \langle p - \bar{p}, A(x, x) - \omega \rangle \leq 0 \quad \forall p \in P \\ \text{ii) } D_y (K(x, x) + A(x)'\bar{p}) = 0. \end{array} \right.$$

4-3. EXEMPLE. Problèmes quadratiques avec contraintes linéaires.

Nous supposerons dans cet exemple que

$$(4-17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) les espaces } V_i \text{ sont des espaces de Hilbert pour des produits scalaires } ((x_i, y_i))_i \text{ et la norme associée } \|x_i\|_i = \sqrt{((x_i, x_i))_i}. \\ \text{ii) } \Gamma_i \in \mathcal{L}(V_i, V_i') \text{ désigne l'isométrie canonique de } V_i \text{ sur son dual } V_i' \text{ définis par } ((x_i, y_i))_i = \langle \Gamma_i x_i, y_i \rangle. \end{array} \right.$$

Nous prendrons des critères de la forme

$$(4-18) \quad K_i(x_i, y_i) = \frac{1}{2} \|y_i + \sum_{j \neq i} A_i^j x_j - \varphi_i\|_i^2$$

et nous supposerons que $Z_0 = Z(x)$ est indépendant de x et est défini par

$$(4-19) \quad Z_0 = \left\{ y \in V \text{ tels que } \sum_{i=1}^n B_i y_i = \omega \right\} \text{ où } B_i \in \mathcal{L}(V_i, F').$$

On remarque alors que

$$(4-20) \quad \begin{cases} \text{i)} & D_i K_i(\widehat{x}_i, y_i) = \Gamma_i y_i + \sum_{j \neq i} \Gamma_j A_j^i x_j - \Gamma_i \varphi_i \in V_i' \\ \text{ii)} & A(x)' \bar{p} = \{B_1' \bar{p}, \dots, B_n' \bar{p}\} \in V' \end{cases}$$

on obtient alors le résultat suivant.

PROPOSITION 4.3. *Supposons (4-17), (4-18) et (4-19). Alors $\bar{p}_0 \in F$ est un multiplicateur de Kuhn-Tucker associé à un équilibre x_0 de (1-3) si et seulement si $(x_0, \bar{p}_0) \in V \times F$ est solution du système suivant*

$$(4-21) \quad \begin{bmatrix} \Gamma_1, \Gamma_1 A_1^2, & \dots, \Gamma_1 A_1^n, B_1' \\ \Gamma_2 A_2^1, \Gamma_2 & \dots, \Gamma_2 A_2^n, B_2' \\ \vdots & \\ \Gamma_n A_n^1, \Gamma_n A_n^2, \dots, \Gamma_n, & B_n' \\ B_1, & B_2, \dots, B_n, 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ \vdots \\ x_{0n} \\ \bar{p}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_1 \varphi_1 \\ \Gamma_2 \varphi_2 \\ \vdots \\ \Gamma_n \varphi_n \\ \omega \end{bmatrix}.$$

Nous désignerons par G et $\Gamma \in \mathcal{L}(V, V')$ les opérateurs définis par

$$(4-22) \quad \begin{bmatrix} \Gamma_1, \Gamma_1 A_1^2, & \dots, \Gamma_1 A_1^n \\ \vdots & \vdots \\ \Gamma_n A_n^1, \Gamma_n A_n^2, \dots, \Gamma_n \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_1, 0, \dots, 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0, 0, \dots, \Gamma_n \end{bmatrix}$$

par $B \in \mathcal{L}(V, F')$ l'opérateur défini par

$$(4-23) \quad Bx = \sum_{i=1}^n B_i x_i$$

et par $K \in \mathcal{L}(V \times F, V' \times F')$ l'opérateur défini par

$$(4-24) \quad K = \begin{pmatrix} G & B' \\ + B & 0 \end{pmatrix}$$

on en déduit que

$$(4-25) \quad \begin{cases} \text{i) } \overline{\text{Im } K} = (\overline{\text{Im } G + \text{Im } B'}) \times \overline{\text{Im } B} \\ \text{ii) } \text{Ker } K = (\text{Ker } G \cap \text{Ker } B) \times \text{Ker } B' \end{cases}$$

ce qui nous permet d'étudier l'existence et l'unicité d'un multiplicateur \bar{p}_0 associé à un équilibre x_0 ;

Supposons par exemple que

$$(4-26) \quad \begin{cases} \text{i) } G \text{ est un opérateur coercif de } V \text{ sur } V' : \text{ il existe } c > 0 \\ \text{tel que } \sum_{i,j=1}^n ((A_i^j x_j, x_i))_i \geq c \sum_{i=1}^n \|x_i\|_i^2 \quad \forall x \in V, \text{ où } A_i^i = 1 \\ \text{ii) } B = \sum B_j \text{ est surjectif de } V = \prod_{i=1}^n V_i \text{ sur l'espace de Hilbert } F'. \end{cases}$$

Alors G^{-1} est opérateur coercif de V' sur V et $BG^{-1}B'$ est un opérateur coercif de F sur F' puisque B' est un isomorphisme de F sur son image fermée dans V' et puisque

$$(4-27) \quad \langle B G^{-1} B' p, p \rangle = \langle G^{-1} B' p, B' p \rangle \geq c' \|B' p\|_{V'}^2 \geq c'' \|p\|_F^2$$

Donc

$$(4-28) \quad \Delta = B G^{-1} B' \text{ est un opérateur coercif de } F \text{ sur } F',$$

et en particulier, inversible.

On peut alors inverser Δ et on obtient le résultat suivant :

PROPOSITION 4.4. *Supposons (4.17), (4.18), (4.19) et (4.26).*

Il existe un équilibre x_0 unique et un multiplicateur de Kuhn-Tucker $p_0 \in F$ unique associé à x_0 définis par

$$(4-29) \quad \begin{cases} \text{i) } x_0 = G^{-1} B' \Delta^{-1} (\omega - B G^{-1} \Gamma \varphi) + G^{-1} \Gamma \varphi \\ \text{ii) } \bar{p}_0 = \Delta^{-1} (B G^{-1} \Gamma \varphi - \omega). \end{cases}$$

Considérons maintenant le cas où $Z(x) = Z_+$ est défini par

$$(4-30) \quad Z_+ = \left\{ y \in V \text{ tels que } \langle p, \sum_{i=1}^n B_i y_i - \omega \rangle \leq 0 \quad \forall p \in P. \right.$$

D'après la proposition 4.2, $\bar{p} \in P$ est un multiplicateur de Kuhn-Tucker associé à un équilibre x si et seulement si

$$(4-31) \quad \begin{cases} \text{i) } \langle p - \bar{p}, Bx - \omega \rangle \leq 0 & \forall p \in P \\ \text{ii) } Gx + B' \bar{p} = \Gamma\varphi \end{cases}$$

Par suite, en reportant $x = G^{-1}(-B' \bar{p} + \Gamma\varphi)$ dans l'inéquation variationnelle (4.16) i), on obtient

$$\begin{aligned} 0 &\geq \langle \bar{p} - p, -BG^{-1} B' \bar{p} + G^{-1} \Gamma\varphi - \omega \rangle = \\ &= \langle \bar{p} - p, \Delta \bar{p}_0 - \Delta \bar{p} \rangle \end{aligned}$$

où $\bar{p}_0 = \Delta^{-1}(BG^{-1} \Gamma\varphi - \omega) \in F$ est le multiplicateur de Kuhn-Tucker associé à l'équilibre sur Z_0 .

PROPOSITION 4.5. *Supposons (4-17), (4-18), (4-19) et (4-26).*

Il existe un équilibre $x \in Z_+$ unique et un multiplicateur de Kuhn-Tucker $\bar{p} \in P$ unique associé à x défini par

$$(4-32) \quad \begin{cases} \text{i) } x = -G^{-1} B' \bar{p} + G^{-1} \Gamma\varphi \\ \text{ii) } \langle \Delta(\bar{p} - \bar{p}_0), \bar{p} - p \rangle \leq 0 & \forall p \in P \end{cases}$$

où $\bar{p}_0 = \Delta^{-1}(BG^{-1} \Gamma\varphi - \omega)$ est le multiplicateur de Kuhn Tucker associé à l'équilibre $x_0 \in Z_0$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] K. ARROW et G. DEBREU, *Existence of an equilibrium for a competitive economy*. *Econometrica* 22 (1954) 265-290
- [2] J. P. AUBIN, *Théorème du minimax pour une classe de fonctions*. *Cahiers de Mathématiques de la Décision*. Université Paris IX. Dauphine CRAS 1972.
- [3] J. P. AUBIN et M. MOULIN, *Existence de solutions du problème dual d'un problème d'optimisation*. *Cahiers de Mathématiques de la Décision* Université Paris IX. Dauphine.
- [4] A. BENSOUSSAN, *Price Decentralization in the case of interrelated Payoffs*. 5 (A paraître).
- [5] C. BERGE, *Espaces topologiques*. Dunod (1966).
- [6] G. DEBREU, *A social equilibrium existence theorem*. *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 38 (1952) 886-893.
- [7] J. J. LAFONT et G. LAROQUE, *Prise en compte des effets externes dans le théorie de l'équilibre général*, *Les Cahiers du séminaire d'économétrie*, C.N.R.S. Paris 1972.
- [8] J. J. MOREAU, *Fonctionnelles convexes*. Séminaire «Equations aux dérivées partielles». Collège de France 1966.
- [9] J. F. NASH, *Equilibrium points in n -person games*. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 36 (1950) 48-49.
- [10] R. T. ROCKAFELLAR, *Convex Analysis*. Princeton University Press (1970).
- [11] R. TREMOLIERES, *Solutions to oligopolistic situations (I and II)*. Working paper n. 1, 1971. European Inst for adv. stud. in management.