ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

COSTACHE APREUTESEI

Quelques propriétés des G_T-structures

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 27, nº 3 (1973), p. 537-553

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1973_3_27_3_537_0>

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES G_T-STRUCTURES

par COSTACHE APREUTESEI

Le but de ce travail est de donner des caractérisations pour l'intégrabilité et la régularité (dans le sens de la théorie des foliations) des G_T-structures; on donne en plus quleques conditions équivalentes d'existence. Cette Note est une continuation de [1], [2], [3].

1. Dans ce travail on suppose que les variétés, les espaces fibrés et les applications sont différentiables C^∞ et les distributions sont régulières. Pour simplifier l'exposé, nous allons employer la même notation pour une application et sa différentielle (qui l'on suppose que conserve le rang constant sur chaque fibre locale des espaces fibrés considérés).

Soient m, p, q des nombres naturels tels que $1 \leq q < \min(m, p)$; $\max(m, p) < n$, $n \geq 3$ qui seront fixés dans toutes nos considérations et V_n une variété différentiable de dimension n.

Une couple de distributions (V, M) régulières de classe C^∞) définit une structure transitive [1] si dans chaque point $x \in V_n$ on satisfait aux conditions:

1) $T_x = V_x + M_x$,

2) La distribution K définie par les espaces $K_x = V_x \cap M_x$ est régulière et a la dimension q, où T_x et V_x, M_x sont respectivement l'espace tangent à V_n et les plans des distributions au point x, $p = \text{codim} \cdot V$, $m = \text{codim} \cdot M$.

On dira que K est la distribution de définition (d. d.) de la structure.

L'ensemble des repères de la variété V_n adaptés à cette structure est un espace fibré principal $E = E(V_n, G_T)$ au groupe structural G_T [1] et nous appelons cet espace G_T-structure. Sans faire des confusions sur les résultats, les structures transitives seront encore appelées par abus de langage, G_T-structures grâce à une étroite lisison entre ces notions [1], [2], [3].

Pervenuto alla Redazione il 19 Aprile 1972.

Soient $\mathcal{E}$ un espace fibré de dimension au moins 3, $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ son fibré tangent, g une métrique riemannienne positive définie sur $\mathcal{E}$, $V(\mathcal{E})$ le fibré des vecteurs verticaux et $V^{\perp}(\mathcal{E}\times\mathcal{E})$ le fibré des vecteurs tangents à $\mathcal{E}\times\mathcal{E}$ orthogonaux (dans la métrique g) aux vecteurs de $V(\mathcal{E})$ considéré seulement en l'un des facteurs de $\mathcal{T}(\mathcal{E})\times\mathcal{T}(\mathcal{E})$. La couple $(V^{\perp}(\mathcal{E}\times\mathcal{E}), \mathcal{T}(\mathcal{E}))$ définit une G_T-structure qui induit aussi sur le produit fibré $\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}$ une G_T-structure.

2. On note par $\mathcal{T}(V_n)$ le fibré tangent à V_n.

THÉORÈME 1. L'existence sur V_n d'une G_T-structure est équivalente à l'existence des fibrés vectoriels A, B, C sur V_n non triviaux pour qui $B = A \oplus C$, $\dim B < 2n$ et le diagramme suivant des suites exactes de fibrés vectoriel (fig. 1) est commutatif, où α, β sont V_n-isomorphismes qui

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}(V_n) \arrow[r, "\varphi_A"] & A \arrow[r] & 0 \\
\mathcal{T}(V_n) \arrow[u, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] \arrow[r, "\varphi_B"] & B \arrow[u, "p_2"'] \arrow[d, "p_1"] \arrow[r] & 0 \\
\mathcal{T}(V_n) \arrow[r, "\varphi_C"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Fig. 1

V_n.isomorphismes qui conservent $\operatorname{Ker}\varphi_B$ et p_1, p_2 sont des projections naturelles, φ_A, φ_B, φ_C sont des V_n-morphismes de fibrés vectoriels.

DÉMONSTRATION. Nous définissons les distributions $V: x \longrightarrow V_x$; M: $x \longrightarrow M_x$ en prenant $V_x = \operatorname{Ker}(\varphi_A)_x$, $M_x = \operatorname{Ker}(\varphi_C)_x$ et comme φ_A, φ_C, φ_B sont des épimorphismes et le diagramme donné est commutatif, on obtient $K_x \subset V_x \cap M_x$, où $K_x = \operatorname{Ker}(\varphi_B)_x$ et $\dim K_x \geq 1$, parce que $\dim \cdot B < 2n$.

Par réduction à l'absurde on démontre que $K_x \supset V_x \cap M_x$ et donc $K_x = V_x \cap M_x$. En utilisant les dimensions des espaces V_x, M_x, K_x, il résulte que $\dim(V_x + M_x) = n$ et donc $T_x = V_x + M_x$, $V_x \in V_n$. On peut donc définir une G_T-structure à l'aide des distributions (V, M), qui a la d. d. K. Réciproquement, étant donnée une G_T-structure sur V_n, pour réaliser le diagramme de l'énoncé, nous prenons les fibrés vectoriels et les applications suivantes : $A = M/K = \bigcup_{x \in V_n} M_x/K_x$, $C = V/K = \bigcup_{x \in V_n} V_x/K_x$, $B = \mathcal{T}/K = \bigcup_{x \in V_n} T_x/K_x$ et parce que $\mathcal{T}/K = V/K \oplus M/K$ [4], alors $\varphi_A = p_1 \circ \varphi_B$, $\varphi_C = p_2 \circ \varphi_B$ où $\varphi_B : \mathcal{T} \to \mathcal{T}/K$, $p_1 : \mathcal{T}/K \to M/K$, $p_2 : \mathcal{T}/K \to V/K$ sont des projections naturelles, $\alpha = \beta = \mathrm{id.}\ \mathcal{T}(V_n)$. C. Q. F. D..

Notons par G_V et G_M les groupes donnés respectivement par l'ensemble des matrices $n \times n$ de le forme $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \\ \mu & \delta & \varepsilon \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \nu \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & \delta & \varepsilon \end{pmatrix}$ où μ et ν sont respectivement des matrices $p \times m$, $m \times p$ et $\alpha, \ldots, \varepsilon$ appartiennent au groupe G_T [1]. On peut énoncer le

THÉORÈME 2. Soit K une distribution régulière non triviale donnée sur V_n. Les conditions suivantes sont équivalentes:

1) Il existe une G_T-structure axant la d. d. K.

2) Il existe un opérateur presque-produit F qui agit sur les fibres locales de l'espace fibré vectoriel $\mathcal{T}/K = \bigcup_{x \in V_n} T_x/K_x$.

3) Il existe des fibrés vectoriels A', B', C' sur V_n non triviaux, ainsi que le diagramme des suites exactes de fibrés vectoriels (fig. 2) est

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{T}(V_n) \arrow[r, "\varphi_{A'}"] & A' \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & \mathcal{T}(V_n) \arrow[r, "\varphi_{B'}"] \arrow[u, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & B' \arrow[r] \arrow[u, "p_2'"'] \arrow[d, "p_1'"] & 0 \\
 & & \mathcal{T}(V_n) \arrow[r, "\varphi_{C'}"] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Fig. 2

commutatif, où $B' = A' \oplus C'$, α et β sont V_n-isomorphismes qui conservent la distribution K, p_1', p_2' les projections naturelles et $\varphi_{A'}$, $\varphi_{B'}$, $\varphi_{C'}$ sont des V_n-morphismes de fibrés vectoriels.

4) Il existe les fibré vectoriels P et Q sur V_n et les V_n morphismes φ et ψ de fibrés vectoriels ainsi que la suite exacte (fig. 3) soit munie d'une scission à gauche (ou à droite):

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{\ \varphi\ } \mathcal{T}/K \xrightarrow{\ \psi\ } Q \longrightarrow 0.$$

Fig. 3.

5) Il existe deux G-structures E_V, E_M sur V_n, ayant les groupes structuraux G_V et G_M respectivement, dont les repères distingués sont des repères distingués pour la structure définie de K.

DÉMONSTRATION. Considérons les espaces vectoriels T_x/K_x, $\forall x \in V_n$. On peut définir d'une manière canonique sur les fibres locales du fibré vectoriel $\mathcal{T}/K$, un opérateur presque-produit F: $\forall \hat{\tau} \in T_x/K_x$, $F(\hat{\tau}) = \hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_2$ où $\hat{\tau} = \hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2$, $\hat{\tau} = \tau + K_x$, $\hat{\tau}_1 = \tau_1 + K_x$, $\hat{\tau}_2 = \tau_2 + K_x$, $\tau_1 \in V_x$, $\tau_2 \in M_x$, $\tau \in T_x$. Il en résulte que la condition 1) implique la condition 2) du théorème. Inversement, s'il existe un opérateur presque-produit qui agit sur les fibres de $\mathcal{T}/K$, alors nous pouvons définir les distributions $V: x \to V_x$, $M: x \to M_x$ en mettant $V_x = \{\tau \in T_x/F(\hat{\tau}) = \hat{\tau}\}$, $M_x = \{\tau \in T_x/F(\hat{\tau}) = -\hat{\tau}\}$ pour $\hat{\tau} = \tau + K_x$. Ces distributions définissent une G_T-structure ayant la d. d. K., parce que la décomposition $T_x/K_x = V_x/K_x \oplus M_x/K_x$ permet de montrer que $T_x = V_x + M_x$ et $K_x = V_x \cap M_x$, $\forall x \in V_n$ [4]. Donc les conditions 1) et 2) du théorème sont éqnivalentes. Supposons comme donnée les fibrés vectoriels A', B', C', qui satisfont aux conditions du théorème. Alors $\dim B' < 2n$. D'après le théorème 1 il résulte que les espaces $V_x = \operatorname{Ker}(\varphi_{A'})_x$, $M_x = \operatorname{Ker}(\varphi_{C'})_x$ définissent une G_T-structure ayant la d. d. K.. Réciproquement, étant donnée une G_T-structure ayant la d. d. K. et définie par les distributions V, M, considérons les fibrés vectoriels $A' = V/K$, $B' = \mathcal{T}/K$, $C' = M/K$ qui satisfont à la condition $B' = A' \oplus C'$. En prenant $\varphi_{A'} = p'_1 \circ \varphi_{B'}$, $\varphi_{C'} = p'_2 \circ \varphi_{B'}$ où $\varphi_{B'}: \mathcal{T} \to \mathcal{T}/K$, p'_1, p'_2 sont projections naturelles, $\alpha = \beta = \mathrm{id}.\, \mathcal{T}(V_n)$, nous obtenons le diagramme commutatif (fig. 2). Donc les conditions 1) et 3) sont équivalentes. Notons par P_x, Q_x les fibres au point x des espaces P et Q respectivement. Soit η un scission à gauche de la suite exacte donnée ($\eta: \mathcal{T}/K \to P$ est un V_n-morphisme de fibrés vectoriel ainsi que $\eta \circ \varphi = \mathrm{id} \cdot P$). Si $\tau \in T_x/K_x$, $\eta(\tau) = t \in P_x$, alors $(\eta \circ \varphi)(t) = \eta(\varphi(t)) = t$ et en notent $\tau' = \varphi(t)$, $\tau'' = \tau - \tau'$ nous avons $\eta(\tau'') = t - \eta(\varphi(t)) = 0 \in T_x/K_x$. Donc $\tau = \tau' + \tau''$ où $\tau' \in \operatorname{Im} \varphi_x$, $\tau'' \in \operatorname{Ker} \eta_x$, et alors ces relations montrent que $T_x/K_x \subset \operatorname{Im} \varphi_x + \operatorname{Ker} \eta_x$. Inversement, si $\tau \in \operatorname{Im} \varphi_x + \operatorname{Ker} \eta_x$, nous obtenons l'inclusion inverse, $\tau \in T_x/K_x$ et donc on a l'égalité $T_x/K_x = \operatorname{Im} \varphi_x \oplus \operatorname{Ker} \eta_x$. En notant par F l'opérateur presque-produit défini par la dernière décomposition, nous pouvons définir les distributions V et M à l'aide des espaces vectoriels $V_x = \{\tau \in T_x/F(\hat{\tau}) = \hat{\tau}\}$, $M_x = \{\tau \in T_x/F(\hat{\tau}) = -\hat{\tau}\}$ où $\hat{\tau} = \tau + K_x$. Ces distributions définissent une G_T-structure ayant la d. d. K.. Réciproquement, étant donnée une G_T-structure définie par la couple (V, M) et ayant la d. d. K., on a la décomposition $T_x/K_x = V_x/K_x \oplus M_x/K_x$. Nous définissons $P = V/K$, $Q = M/K$,

$\varphi =$ l'inclusion de V/K dans $\mathcal{T}/K$, φ, η sont les projections canoniques des $\mathcal{T}/K$ sur M/K et V/K, respectivement. Maintenant on peut obtenir la suite exacte de fibrés vectoriels (fig. 3). Il en résulte que 1) et 4) sont équivalence des conditions 1) et 5) nous observons que la donnée d'une distribution V (qui ensemble avec M définissent une G_T-structure ayant la d. d. K.) est équivalente à la donnée d'une G-structure E_V; on a une situation analogue pour la distribution M. On obtient facilement que 1) et 5) sont équivalentes. C. Q. F. D..

REMARQUE 1. Si E est définie par la couple (V, M), alors $E = E_V \cap E_M$.

REMARQUE 2. L'algèbre de Lie $\underline{G}_T$ de G_T [1] est résoluble.

En effet, la suite d'idéaux $D^0\underline{G}_T = \underline{G}_T$, $D^{l+1}\underline{G}_T = [D^l\underline{G}_T, D^l\underline{G}_T]$ $(l = 1, 2, \ldots)$ est donnée par l'égalité $D^1\underline{G}_T = \left\{\begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \end{pmatrix}\right\}$ où β, δ sont des matrices $m \times q$ et $p \times q$ respectivement et $D^2\underline{G}_T = 0$.

Soit $P = P(V_n, G)$ un espace fibré principal et supposons que l'algèbre de Lie $\underline{G}$ du groupe G admet des idéaux non-triviaux. On peut définir sur P, pour chaque idéal $\underline{K}$ de $\underline{G}$, une distribution $K: z \to K_z$, $z \in P$ [4]. Si la distribution $H: z \to H_z$ définit une connexion infinitésimale sur P, alors la distribution $M: z \to K_z \oplus H_z$ définit une connexion généralisée [4]. Il en résulte que M et la distribution verticale V sur P définissant une G_T-structure pour qui l'opérateur presque-produit associé F satisfait aux conditions :

$$(\mathrm{F}_1) \qquad F(\hat{\tau}) = \hat{\tau} \Longleftrightarrow \hat{\tau} \in V/K$$

et

$$(\mathrm{F}_2) \qquad F \circ \overline{D}_g = \overline{D}_g \circ F, \quad \forall\, g\, G,$$

où $\overline{D}_g$ est le prolongement de la translation à droite D_g définie par g, sur les fibres locales de $\mathcal{T}/K$ [4]. Il en résulte le

THÉORÈME 3. Pour chaque idéal $\underline{K}$ de $\underline{G}$ il existe sur l'espace fibré principal $P(V_n, G)$ au moins tant de G_T-structures ayant la d. d. K. et dont les opérateurs presque-produit associés F satisfont aux conditions (F_1) et (F_2), que des connexions infinitésimales existent sur P.

REMARQUE 3. On peut donner une caractérisation pour une classe de G_T-structures en utilisant la notion de treillis régulier de distributions [11]: il existe une correspondance biunivoque entre l'ensemble des G_T-structures (V, M) ayant d. d. K. $= V \cap M$, et l'ensemble des treillis réguliers de distributions à cinq éléments $L(P, V, M, K, \Phi)$ dont les plans sont distincts et admettent une même intersection non-vide (exception fait la distribution vide Φ), où T est la distribution des espaces tangents à V_n. Les opérations des treillis sont: l'intersection et l'union des plans des distributions [11].

Supposons maintenant que V_n est paracompacte et admet deux distributions non-triviales D_d, D_g pour lasquelle $D_d \supset D_f$ (l'indice de la distribution notera sa dimension). Il existe sur V_n une métrique riemannienne g et nous considérerons l'orthogonalité par rapport à g. Si Δ_{n-f} est la distribution orthogonale complémentaire à D_f, alors $D_d \cap \Delta_{n-f} = \Delta_{d-f}$ est la distribution orthogonale et complémentaire à D_f par rapport à D_d. La couple (D_d, Δ_{n-f}) définit une G_T-structure axant la d. d. Δ_{d-f}. Soit δ_{n+f-d} la distribution orthogonale à Δ_{d-f} et δ_{n-d} la distribution orthogonale à Δ_{d-f} et complémentaire dans Δ_{n-f}. Alors $\delta_{n+f-d} \cap \Delta_{n-f} = \delta_{n-d}$ et donc $(\Delta_{n-f}, \delta_{n+f-d})$ donne une G_T-structure ayant la d. d. δ_{n-d}. Vu que $\delta_{n+f-d} \supset \delta_{n-d}$, nous pouvons définir une nouvelle G_T-structure (δ_{n+f-d}, Φ_d) ayant la d. d. $\Phi_f = \Phi_d \cap \delta_{n+f-d}$, où Φ_d est la distribution orthogonale à δ_{n-d}. Ensuite, parce que δ_{n-d} est orthogonale aux distributions Δ_{d-f}, D_f il résulte que δ_{n-d} et Φ_d sont orthogonales et donc $\Phi_d \equiv D_d$. On voit facilement que $\Phi_f \equiv D_f$.

Nous énoncerons la

PROPOSITION 1. Si la variété V_n est paracompacte et admet deux distributions non triviales D_d, D_f, ainsi que $D_d \supset D_f$, alors pour chaque métrique il existe sur V_n au moins trois G_T-structures définies par (D_d, Δ_{n-f}), $(\Delta_{n-f}, \delta_{n+f-d})$, (δ_{n+f-d}, D_d) qui ont respectivement les d. d. Δ_{n-f}, δ_{n-1} et D_f.

Nous pouvons donner maintenant le

THÉORÈME 4. Sur toute variété V_n $(n \geq 3)$ paracompacte qui admet un champ de drapeaux [9], il existe pour chaque métrique au moins $3(n-1) \cdot$ $\cdot (n-2)/2$ G_T-structures.

DÉMONSTRATION. Nous obtenons les G_T-structures en partant des distributions qui définissent les champs de drapeaux [9] en utilisant le procédé indiqué pour la démonstration de la proposition 1.

On sait que toute variété orientable à trois dimensions est parallélisable [10]. Il en résulte la

PROPOSITION 2. Sur toute variété orientable à trois dimensions il y a trois G_T - structures.

REMARQUE 4. Parce que les sphères S_3 et S_7 sont parallèlisables [12] nous voyons que sur S_3 il y a trois G_T - structnres. Puis, sur S_7 il existe: 287 G_T - structures ayant la d. d. à $q = 1$ dimension 245 G_T - structures pour $q = 3$, 105 G_T - structures pour $q = 4$ etc.

Soit T_x^c le complexifié de T_x. Une G_T - structure complexe est définie par la donnée de deux distributions (C^∞) V^c, M^c, ainsi que $T_x^c = V_x^c + M_x^c$ et $V_x^c \cap M_x^c = K_x^c$ soit non-triviale $\forall\, x \in V_n$, où V_x^c, M_x^c sont les sous-espaces propres de T_x^c, qui définissent les distributions.

Considérons une G_T - structure donnée par (V, M), $V \cap M = K$ et soient V^c, M^c, K^c les distributions définies des espaces V_x^c, M_x^c, K_x^c qui sont les complexifiés des espaces V_x, M_x et K_x respectivement. Dans ces conditions on a la

PROPOSITION 3. On peut associer a une G_T - structure quelconque donnée par (V, M) et ayant la d. d. K., une G_T - structure complexe défiuie par (V^c, M^c) et qui a la d. d. K^c.

DÉMONSTRATION. Vu que $V_x^c = V_x \otimes_R C$, $M_x^c = M_x \otimes_R C$, $T_x^c = T_x \otimes_R C$, où C est l'espace vectoriel des nombres complexes, on obtient facilement: $T_x^c = V_x^c + M_x^c$. Puis, comme $K_x^c = K_x \otimes_R C = V_x^c \cap M_x^c \;\forall\, x \in V_n$, la couple (V^c, M^c) définit une G_T structure complexe ayant la d. d. K^c.

C. Q. F. D.

3. Soient $x \in \bar{U} \cap U$ ($\bar{U}$, U étant des voisinages de coordonnées sur V_n), (e_a), $(e_{\bar{a}})$ des repères relatifs à x, distingués par rapport à une G_T - structure définie par (V, M) et $e_{\bar{a}} = A_{\bar{a}}^{a}\, e_a$ $(\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, n)$ les formules de transition, où $A = (A_{\bar{a}}^{a}) \in G_T$.

REMARQUE 5. On obtient la matrice générique A du groupe G_T des matrices $A_1 = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ 0 & \gamma' \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} \gamma' & 0 \\ \delta' & \varepsilon' \end{pmatrix}$ par l'opération: on met A_1 à la place de $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$ de la matrice A et A_2 à la place de $\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ \delta & \varepsilon \end{pmatrix}$ de la même matrice [1]. On constate que cette opération est compatible à la structure de groupe de G_T [1].

Notons par (θ^α), $(\theta^{\bar{\alpha}})$ les co-repères duals de (e_a) et $(e_{\bar{a}})$, respectivement. Nous différentions les relations $\theta^i = A_{\bar{a}}^{i}\, \theta^{\bar{\alpha}}$ en utilisant la remarque 5 et les égalités

$$d\theta^i = \frac{1}{2} C^i_{jk}\,\theta^j \wedge \theta^k + C^i_{ja'}\,\theta^{a'} \wedge \theta^{a'} + \frac{1}{2} C^i_{a'b'}\,\theta^{a'} \wedge \theta^{b'}\,,$$

$$d\theta^{\bar{j}} = \frac{1}{2} C^{\bar{j}}_{\bar{k}\,\bar{l}}\,\theta^{\bar{k}} \wedge \theta^{\bar{l}} + C^{\bar{j}}_{\bar{k}\,\bar{a}'}\,\theta^{\bar{k}} \wedge \theta^{\bar{a}'} + \frac{1}{2} C^{\bar{j}}_{\bar{b}'\,\bar{a}'}\,\theta^{\bar{b}'} \wedge \theta^{\bar{a}'}$$

$(\bar{a}', \bar{b}', a', b' = m+1, \dots, n\,;\ \bar{j}, \bar{k}, \bar{l}, j, k, l = 1, 2, \dots, m)$. En identifiant les coefficients de $\theta^{a'} \wedge \theta^{b'}$ dans les égalités obtenues, nous avons

$$C^i_{a'b'} = A^i_{\bar{j}}\, A^{\bar{a}'}_{a'}\, A^{\bar{b}'}_{b'}\, C^{\bar{j}}_{\bar{a}'\,\bar{b}'}$$

où $(A^i_{\bar{j}})$, $(A^{\bar{a}'}_{a'})$, $(A^{\bar{b}'}_{b'})$ sont des matrices régulières. A partir de $\theta^{i''} = A^{i''}_{\bar{a}}\,\theta^{\bar{a}}$ on obtient d'une manière analogue les égalités :

$$C^{i''}_{ab} = A^{i''}_{\bar{i}''}\, A^{\bar{a}}_{a}\, A^{\bar{b}}_{b}\, C^{\bar{i}''}_{\bar{a}\,\bar{b}}$$

$(a, b, \bar{a}, \bar{b} = 1, 2, \dots, n-p\,;\ i'', \bar{i}'' = n-p+1, \dots, n)$ où $(A^{i''}_{\bar{i}''})$, $(A^{\bar{a}}_{a})$, $(A^{\bar{b}}_{b})$ sont des matrices régulières. Il en résulte que $\tau = (\tau^{\alpha}_{\beta\gamma})$, où $\tau^i_{a'b'} = C^i_{a'b'}$, $\tau^{i''}_{ab} = C^{i''}_{ab}$, $\tau^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0$, $\forall\, \alpha \neq i,\ \alpha \neq i'',\ \beta \neq a,\ \beta \neq a',\ \gamma \neq b,\ \gamma \neq b'$ est un tenseur par rapport aux transformations du groupe G_T. La forme vectorielle associée, définie par $\tau^{\alpha} = \tau^{\alpha}_{\beta\gamma}\,\theta^{\beta} \wedge \theta^{\gamma}$ s'appelle la forme de torsion de la G_T-structure et τ est son tenseur de torsion. Ces notions généralisent respectivement la forme de torsion et le tenseur de torsion d'une structure presque-produit réelle [6].

Si la G_T-structure définie par (V, M) est intégrale [1], au voisinage de chaque point x de V_n, les distributions V, M peuvent être définies respectivement par $dx^{i''} = 0$, $dx^i = 0$ ($x^{i''}$, x^i sont des fonctions à valeurs réelles (C^{∞})) et donc $C^i_{a'b'} = C^{i''}_{ab} = 0$; on en déduit que $\tau = 0$. Réciproquement, si $\tau = 0$, alors un raisonnement classique [6] montre que la G_T-structure donnée est intégrable. On peut énoncer le

THÉORÈME 5. Une G_T-structure est intégrable si et seulement si son tenseur de torsion est nul.

Soient $(\omega^{\alpha}_{\beta}) \in \underline{G_T}$ la 1-forme d'une G_T-connexion [1] rapportée à des repères distingués, $T^{\alpha} = d\theta^{\alpha} + \omega^{\alpha}_{\beta} \wedge \theta^{\beta}$ sa torsion et nous supposons que le tenseur de torsion de cette connexion coïncide avec le tenseur de structure $t = (t^i_{a'b'},\, t^{i''}_{ab},\, t^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0)$ de la G_T-structure [1]. Alors on a : $d\theta^i = \frac{1}{2} t^i_{a'b'}\theta^{a'} \wedge \theta^{b'} \pmod{\theta^i}$, $d\theta^{i''} = \frac{1}{2} t^{i''}_{ab}\,\theta^a \wedge \theta^b \pmod{\theta^{i''}}$. Il en résulte la

CONSÉQUENCE 1. Le tenseur de structure de la G_T-structure est identifié à son tenseur de torsion. La G_T-structure est intégrable si et seulement si son tenseur de structure est nul.

On sait [3] que les groupes de cohomologie de Spencer $H^{i,2}(\underline{G_T}) = 0$ $i \geq 0$ et donc les obstructions à l'intégrabilité de la G_T-structure seront trouvés dans $H^{0,2}(\underline{G_T})$. Nous obtenons la

CONSÉQUENCE 2. L'intégrabilité d'une G_T-structure est caractérisée par la relation $H^{0,2}(\underline{G_T}) = 0$.

Considérons une connexion linéaire sans torsion, donnée relativement à des repères distingués, par la matrice (π^α_β) (il existe une telle connexion). Pour $x \in U \cap \overline{U}$ nous avons les formules de transition $\pi^{\bar{i}''}_{\bar{a}} = A^{\bar{i}''}_{j''} A^b_{\bar{a}} \pi^{j''}_b$, $\pi^{\bar{i}}_{\bar{a}'} = A^{\bar{i}}_j A^{b'}_{\bar{a}'} \pi^j_b$, où $(A^{\bar{a}}_a)$ est la matrice inverse de (A^α_β) (une signification analogue pour $(A^{\bar{i}''}_{j''})$). Ces relations montrent que $(\pi^{i''}_a)$ et $(\pi^i_{a'})$ définissent des formes tensorielles [6]. On peut écrire $\pi^i_{a'} = \Gamma^i_{a'k} \theta^k + \Gamma^i_{a'b'} \theta^{b'}$, $\pi^{i''}_a = \Gamma^{i''}_{ak''} \theta^{k''} + \Gamma^{i''}_{ab} \theta^b$. Maintenant, nous pouvons définir une nouvelle connexion linéaire par les relations :

$$\omega^i_{a'} = \omega^i_a = 0, \quad \omega^i_j = \pi^i_j - \Gamma^i_{a'j} \theta^{a'}, \quad \omega^{i''}_{j''} = \pi^{i''}_{j''} - \Gamma^{i''}_{aj''} \theta^a, \ldots$$

qui s'identifient à une G_T-connexion [1]. Vu que

$$d\theta^i = \theta^k \wedge \pi^i_k + \Gamma^i_{a'k} \theta^{a'} \wedge \theta^k + \frac{1}{2} (\Gamma^i_{a'b'} - \Gamma^i_{b'a'}) \theta^{a'} \wedge \theta^{b'}$$

(des expressions analogues pour $d\theta^{i''}$); il résulte que la torsion (T^α) de cette connexion satisfait aux relations : $T^i = \frac{1}{2} (\Gamma^i_{a'b'} - \Gamma^i_{a'b'}) \theta^{a'} \wedge \theta^{b'} = \tau^i$, $T^{i''} = \frac{1}{2} (\Gamma^{i''}_{ab} - \Gamma^{i''}_{ba}) \theta^a \wedge \theta^b = \tau^{i''}$, $T^{i'} = \tau^{i'} = 0$ $(i' = m + 1, \ldots, n - p)$. Il en résulte une liaison étroite entre l'intégrabilité des G_T-structures et les G_T-connexions, donnée par le

THÉORÈME 6- Sur chaque variété V_n $(n \geq 3)$ munie d'une G_T-structure il existe une G_T-connexion dont le tenseur de torsion coïncide avec son tenseur de structure. Une condition nécessaire et suffisante pour que la G_T-structure soit intégrable est qu'il existe une G_T-connexion sans torsion.

Notons par $V(V_n)$, $M(V_n)$ les fibrés vectoriels définis par les distriburions V et M respectivement, qui satisfont aux conditions de la définition d'une G_T-structure. Soit (ω^α_β) la 1-forme d'une connéxion linéaire rapportée à des repères distingués et notée encore par ω. En utilisant la notion de connexion sur une fibré vectoriel [5], on peut déduire des conditions pour la forme ω ainsi que nous ayons des connexions définies sur $V(V_n)$ et $M(V_n)$ [3]. Nous pouvons énoncer la

PROPOSITION 4. On identifie la connexion linéaire ω à une G_T-connexion si et seulement si elle induit des connexions sur $V(V_n)$ et $M(V_n)$.

Soit $K(V_n)$ le fibré vectoriel par K. On a la

CONSÉQUENCE. Touts G_T-connexion induit une connexion sur $K(V_n)$ [3].

Soit $\mathcal{T}^{(0)}(V_n) = (V_n)\mathcal{T}$, $\mathcal{T}^{(s)} = \mathcal{T}(\mathcal{T}^{(s-1)}(V_n))$, $(s = 1, 2, \dots)$ la suite des fibrés tangents associée à la variété V_n. La G_T-structure $E = E(V_n, G_T)$ définie par (V, M) peut être prolongée sur $\mathcal{T}^{(s-1)}$, dans une G_T-structure $E^{(s)} = E^{(s)}(\mathcal{T}^{(s-1)}, G_T^{(s)})$ donnée par les distributions $(V^{(s)}, M^{(s)})$ [1]. Supposons que $E^{(s)}$ est intégrable et soit $u \in \mathcal{T}^{(s-1)}$ et $(u^1, u^2, \dots, u^N; U)$ un système de coordonnées ($N = \dim \mathcal{T}^{(s-1)}$, $U =$ le voisinage de coordonnées). Alors nous avons sur $\mathcal{T}U = \mathcal{T}^{(s)}/U$ un système de coordonnées locales induit: si $X = yA \dfrac{\partial}{\partial u^A}$ $(A = 1, 2, \dots, N)$ est un vecteur tangent à $\mathcal{T}^{(s-1)}$, alors le système de coordonnées induit induit est donné par $(u^1, u^2, \dots, u^N, y^1, y^2, \dots, y^N)$. Soient $v = v^A \dfrac{\partial}{\partial u^A}$, $w = w^A \dfrac{\partial}{\partial u^A}$ deux champs de vecteurs adaptés à la distribution $V^{(s-1)}$. Il existe uniquement sur $\mathcal{T}U$ [13] les champs de vecteurs $v^c = v^A \dfrac{\partial}{\partial u^A} + \dfrac{\partial v^A}{\partial u^B} y^B \dfrac{\partial}{\partial y^B}$, $w^c = w^A \dfrac{\partial}{\partial u^A} + \dfrac{\partial w^A}{\partial u^B} y^B \dfrac{\partial}{\partial y^B}$, $(B = 1, \dots, N)$. Si l'on note par $\pi^{(s)}: \mathcal{T}^{(s)} \to \mathcal{T}^{(s-1)}$ la projection canonique, alors $\pi^{(s)}(v^c) = v$, $\pi^{(s)}(w^c) = w$ et donc les champs v^c, w^c sont adaptés à la distribution $V^{(s)}$. Ensuite nous avons : $\pi^{(s)}[v^c, w^c] = [\pi^{(s)}(v^c), \pi^{(s)}(w^c)] = [v, w]$ qui montrent que $V^{(s-1)}$ est intégrable. D'une manière analogue on montre que l'intégrabilité de $M^{(s)}$ implique l'intégrabilité de $M^{(s-1)}$. L'intégrabilité simultanée des distributions $V^{(s)}$, $M^{(s)}$ est équivalente à l'intégrabilité de $E^{(s)}$ (au sens de la théorie des G-structures). Réciproquement, si $E^{(s-1)}$ est intégrable, alors $E^{(s)}$ est aussi intégrable [1]. Nous en déduisons le

THÉORÈME 7. La G_T-structure E est intégrable si et seulement si pour un $s \geq 0$ le prolongement $E^{(s)}$ est intégrable.

Pour $s = 0$ on obtient la

CONSÉQUENCE. E est intégrable si et seulement si son prolongement sur l'espace tangent est intégrable.

4. DÉFINITION. Nous disons que la G_T-structure intégrable définie par les distributions (V, M) est régulière si V et M définissent sur V_n des feuilletages réguliers [8].

Maintenant, supposons que V définit un feuilletage régulier. On peut considérer l'espace fibré principal $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_1(V_n)$ des repères transverses au feuilletage V [7]. La projection de $\mathcal{E}_1$ sur V_n permet de définir (analoguement à la démonstration du théorème 1 [1]) sur cet espace, en partant de V, un feuilletage régulier $\overline{V}^{(1)}$. Nous pouvons associer au feilletage $\overline{V}^{(1)}$ le fibré principal des repères transverses noté par $\mathcal{E}_1^{(1)} = \mathcal{E}_1^{(1)}(\mathcal{E}_1)$. On obtient proche en proche, à l'étape h, un feuilletage régulier $\overline{V}^{(h)}$ et l'espace fibré principal des repères transverses $\mathcal{E}_1^{(h)} = \mathcal{E}_1^{(h)}(\mathcal{E}_1^{(h-1)}) \cdot \mathcal{E}_1^{(h)}$ étant un espace fibré principal des repères, est muni d'une 1-forme tensorielle $\theta_1^{(h)}$ définie d'une manière canonique et qui prend ses valeurs dans R^p ($p = \operatorname{codim} V$) pour toute étapé h de prolongement. Maintenant, si la G_T-structure E définie par (V, M) est régulière, en utilisant la projection du produit fibré $\mathcal{E}_1 \boxtimes \mathcal{E}_2$, on obtient sur cet espace une G_T-structure régulière $\overline{E}^1$, où $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_2(V_n)$ est l'espace fibré principal des repères transverses au feuilletage M. Soit $\theta_2^{(h)}$ la 1-forme tensorielle à valeurs dans R^m ($m = \operatorname{codim} M$) de rang m associé à l'espace $\mathcal{E}_2^{(h)}$, dans la manière indiquée. On peut douer l'espace $\mathcal{E}_1^{(h)} \boxtimes \mathcal{E}_2^{(h)}$, d'une G_T-structure régulère $\overline{E}^{(h)}$; les morphismes canoniques de cet espace sur ses facteurs, permettent de définir, en partant de $\theta_1^{(h)}$, $\theta_2^{(h)}$, une 1-forme tensorielle notée par $\theta_1^{(h)} \boxtimes \theta_2^{(h)}$ qui a la propriété suivante: pour toute étape de prolongement, elle prend ses valeurs dans R^{p+m} et est de rang $(p + m)$. Il en résulte le

THÉORÈME 8. Par le prolongement de la G_T-structure régulière E sur l'espace $\mathcal{E}_1^{(h)} \boxtimes \mathcal{E}_2^{(h)}$ on obtient une G_T-structure régulière et une 1-forme tensorielle $\theta_1^{(h)} \boxtimes \theta_2^{(h)}$ sur cet espace qui, pour tout h, a ses valeurs dans R^{p+m} et elle est de rang $(p + m)$.

REMARQUE 6. Soient x un point arbitraire de V_n et E une G_T-structure intégrable définie par (V, M) et ayant la d. d. K. Alors il existe un système de coordonnées $(u^a; W)$ ayant la largeur 2ε [8], cubique avec le centre dans x et plan par rapport aux distributions V, M, K.

Considérons, pour $|t^a| < \varepsilon$, les plaques [8] du système de coordonnées $(u^a; W)$: $\Sigma_{t''} = \{u \in W / u^{i''}(u) = t^{i''}\}$, $\Sigma_t = \{u \in W / u^i(u) = t^i\}$, $\Sigma_{(t, t'')} = \{u \in W / u^i(u) = t^i,\ u^{i''}(u) = t^{i''}\}$ qui ont respectivement les $n - p$, $n - m$ et q. On a $\Sigma_{(t, t'')} = \Sigma_t \cap \Sigma_{t''}$.

REMARQUE 7. Toute plaque de dimension q du système de coordonnées $(u^a; W)$ définie de $|t^i| < \varepsilon$, $|t^{i''}| < \varepsilon$ est obtenue par l'intersection d'une plaque de dimension $n - m$ avec une plaque de dimension $n - p$.

PROPOSITION 5. Si la G_T-structure E est régulière ayant la d. d. $K = V \cap M$, alorr K est un feuilletage régulier.

DÉMONSTRATION. Parce que E est régulière il résulte que K est intégrable. Considérons les projections $\pi_V : V_n \longrightarrow V_n/V$, $\pi_M : V_n \longrightarrow V_n/M$, où V_n/V, V_n/M sont les variétés quotient définies par V et M, respectivement. L'application $\pi = \pi_V \times \pi_M : V_n \longrightarrow V_{p+m} = (V_n/V) \times (V_n/M)$ est submersion. Soient $(z^a; U)$ un système de coordonnées plan par rapport a K, cubique avec le centre dans x et $(f^{i''}; U_1)$, $g^i; U_2)$ des systèmes de coordonnées aux centres dans $\pi_V(x)$ et $\pi_M(x)$, respectivement. On peut construire (la Remarque 6) un système de coordonnées $(u^a; W)$ plan par rapport à V, M, K, ainsi que $u^i = z^i$. Nous avons: $\pi\left[\left(\frac{\partial}{\partial u^a}\right)_x, \left(\frac{\partial}{\partial u^{a'}}\right)_x\right] = (\pi_V \times \pi_M)\left[\left(\frac{\partial}{\partial u^a}\right)_x, \left(\frac{\partial}{\partial u^{a'}}\right)_x\right]$ $= \left[\pi_V\left(\frac{\partial}{\partial u^a}\right)_x, \pi_M\left(\frac{\partial}{\partial u^{a'}}\right)_x\right] = (0, 0)$. Puis: $\frac{\partial}{\partial u^a}(f^{i''} \circ \pi_V) = \pi_V\left(\frac{\partial}{\partial u^a}\right) f^{i''} = 0$, $\frac{\partial}{\partial u^{a'}}(g^i \circ \pi_M) = \pi_M\left(\frac{\partial}{\partial u^{a'}}\right) g^i = 0$ et il s'ensuit que $f^{i''} \circ \pi_V$, $g^i \circ \pi_M$ ne dépendent pas de u^a et $u^{a'}$, respectivement. Donc ces fonctions ne dépendent pas de $u^{i'} = z^{i'}$. Il résulte que π est constante sur les feuilles de K et donc K est un feuilletage régulier.

Il résulte facilement la

CONSÉQUENCE. Si E est une G_T-structure régulière, alors pour tout $x \in V_n$ il existe un système de coordonnées régulier simultané par rapport à chaque feuilletage V, M, K et ayant le centre dans x.

Si la d. d. K. de la G_T-structure (V, M) est un feuilletage régulier, alors sur la variété quotient V_n/K on peut définir une structure presque-produit $(\overline{V}, \overline{M})$ associée (après le théorème 9 de cette Note). Soient $P_{(0)}(V_n, G)$ (nous gardons les notations de [1]) le fibré des repères des espaces T_x/K_x adoptées à la structure presque-produit $(V/K, M/K)$ [1] et $\mathcal{P}(V_n/K, G)$ le fibré principal des repères de la variété V_n/K adoptés à la structure $(\overline{V}, \overline{M})$. Nous définissons l'application $\mathcal{F}_1 : T_x/K_x \longrightarrow T_z$ $(z = \pi_K(x))$ par l'égalité $\mathcal{F}_1(\nu(\tau)) = \pi_K(x)$, $\forall\ \tau \in T_x$, où $\nu : T_x \to T_x/K_x$ est la projection canonique. Soit $\overline{\mathcal{F}}_1$ l'application induite de $\mathcal{F}_1$ entre les repères Y de T_x/X_x et les repères de T_z. Alors la restriction de l'application $\mathcal{F}$ définie par $\mathcal{F}(x, Y) = (\pi_K(x), \overline{\mathcal{F}}_1(Y))$ et notée encore $\mathcal{F}$, est un homomorphisme de $P_{(0)}(V_n, G)$ sur $\mathcal{P}(V_n/K, G)$. On a la

PROPOSITION 6. Il y a un homomorphisme $\mathcal{F}: P_{(0)}(V_n, G) \longrightarrow \mathcal{P}(V_n/K, G)$ défini par l'égalité $\mathcal{F}(x, y) = (\pi_K(x), \overline{\mathcal{F}}_1(Y))$.

Soient K un feuilletage régulier sur V_n, V_n/K la variété quotient, $\pi_K: V_n \longrightarrow V_n/K$ la projection naturelle et $(x^\alpha; U)$ un système de coordonnées régulier par rapport à K. Une carte naturelle φ sur V_n/K est donnée par $\varphi \circ \pi_K(x) = (x^1(x), \dots, x^{(m)}(x), x^{n-p+1}(x), \dots, x^n(x))$ et donc nour avons un système de coordonnées $(\overline{x}^1, \dots, \overline{x}^m, \overline{x}^{n-p+1}, \dots, \overline{x}^n; \pi_K(U))$ ainsi que

$$(\cdot) \qquad \overline{x}^i \circ \pi_K = x^i \quad (i = 1, \dots, m, n - p + 1, \dots, n).$$

a) Soit une G_T-structure sur V_n ayant la d. d. le feuilletage $K = V \cap M$. Si $\pi_K(x) = z \in V_n/K$ et T_z est l'espace tangent à V_n/K, nous définissons les espaces vectoriels $\overline{V}_z = \{\overline{\tau} \in T_z/\pi_K(\tau) = \overline{\tau},\ \tau \in V_x\}$, $\overline{M}_z = \{\overline{\tau} \in T_z/\pi_K(\tau) = \overline{\tau},\ \tau \in M_x\}$. On a $\overline{V}_z \cap \overline{M}_z = \{0\}$, $T_z = \overline{V}_z \oplus \overline{M}_z$ et donc les distributions $\overline{V}: z \longrightarrow \overline{V}_z$, $\overline{M}: z \longrightarrow \overline{M}_z$ définissent une structure presque-produit sur V_n/M. Réciproquement, si nous avons sur V_n/K une structure presque-produit $(\overline{V}, \overline{M})$, alors les distributions $V: x \longrightarrow V_x$, $M: x \longrightarrow M_x$, où $V_x = \{\tau \in T_x(V_n)/\pi_K(\tau) \in \overline{V}_z\}$, $M_x = \{\tau \in T_x(V_n)/\pi_K(\tau) \in \overline{M}_z\}$, définissent une G_T-structure ayant la d. d. K.

b) Supposons maintenant que la G_T-structure (V, M), ayant la d. d. le feuilletage K, est intégrable et que $x \longrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)_x$ est une section de l'espace fibré principal $E = E(V_n, G_T)$. Alors les relations $(\cdot)$ montrent que $\left(\frac{\partial}{\partial \overline{x}^i}\right)_z = \pi_K\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x$, $\left(\frac{\partial}{\partial \overline{x}^{i''}}\right)_z = \pi_K\left(\frac{\partial}{\partial x^{i''}}\right)_x$ sont des bases naturelles pour les espaces $\overline{V}_z$ et $\overline{M}_z$ respectivement. La structure presque-produit $(\overline{V}, \overline{M})$ définie au point *a*) est intégrable. Réciproquement, si la structure presque-produit $(\overline{V}, \overline{M})$ est intégrable, alors la G_T-structure (V, M) définie dans la manière indiquée au point *a*) est intégrable.

c) Nous disons qu'une structure presque-produit $(\overline{V}, \overline{M})$ est régulière si les distributions $\overline{V}$, $\overline{M}$ définissent des feuilletages réguliers.

Supposons que la G_T-structure (V, M) est régulière et soient V_n/K, V_n/V, V_n/M les variétés quotient associées. Les applications $p_V: V_n/K \longrightarrow V_n/V$, $p_M: V_n/K \longrightarrow V_n/M$ définies respectivement par les égalités $p_V \circ \pi_K(x) = \pi_V(x)$, $p_M \circ \pi_K(x) = \pi_M(x)$ sont des submersions et on a : $\operatorname{Ker} p_V = \overline{V}$, $\operatorname{Ker} p_M = \overline{M}$. Donc $\overline{V}$, $\overline{M}$ définissent [8] une structure presque-produit régulière. Inversement, si la structuae presque-produit $(\overline{V}, \overline{M})$ est régulièrs, alors la G_T-structure qui a été définie au point *a*) est régulière.

Nos considérations donnent le

THÉORÈME 9. Soit K un feuilletage régulier sur V_n. L'existence sur V_n d'une G_T-structure (V, M) ayant la d. d. K. est équivalente à l'existence, sur la variété quotient V_n/K, d'une structure presque-produit $(\overline{V}, \overline{M})$. La G_T-structure (V, M) est intégrable (régulière) si et seulement si la structure presque-produit $(\overline{V}, \overline{M})$ qui lui correspond est intégrable (resp. régulière).

Soient G un groupe de Lie connexe à $n \geq 3$ dimensions, H un sous-groupe fermé à m dimensions $(1 \leq m < n - 2)$ et G/H l'espace homogène (doué d'une structure de variété analytique). On peut définir sur G et G/H des G_T-structures et structures presque-produit respectivement, invariantes par G opérant sur ces variétés. Vu que G a, par rapport à la projection $\pi : G \longrightarrow G/H$, une structure naturelle d'espace fibré psincipal, nous pouvons obtenir sur G une distribution $\overline{H}$ invariante par G, en partant de la distribution tangente à H. Nous déduisons du théorème 8 ou directement, le

THÉORÈME 10. Il y a une correspondance biunivoque entre l'ensemble des G_T-structures E sur G ayant le d. d. $\overline{H}$ et l'ensemble des structures presque-produit sur G/H. E est intégrable (régulière) si et seulement si la structure presque-produit associée sur G/H est intégrable (resp. régulière).

Nous allons démontrer le

THÉORÈME 11. L'existence sur V_n d'une G_T-structure régulière est équivalente à l'existence des variétés V_{m+p}, V_m, V_p ainsi que le diagramme suivant des suites exactes de fibrés vectoriels (fig. 4) soit commutatif, où

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}(V_n) \arrow[r, "\varphi"] & \mathcal{T}(V_p) \arrow[r] & 0 \\
\mathcal{T}(V_n) \arrow[r, "\mu"] \arrow[u, "j"] \arrow[d, "j"'] & \mathcal{T}(V_{m+p}) \arrow[r] \arrow[u, "f"'] \arrow[d, "g"] & 0 \\
\mathcal{T}(V_n) \arrow[r, "\psi"] & \mathcal{T}(V_m) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Fig. 4

$\varphi : V_n \longrightarrow V_p$, $\mu : V_n \longrightarrow V_{m+p}$, $\psi : V_n \longrightarrow V_m$ sont des submersions et $f : V_{m+p} \longrightarrow V_p$, $g : V_{m+p} \longrightarrow V_m$ sont des applications différentiables pour qui la couple (Ker f, Ker g) définit une structure presque-produit et j est l'identité.

Démonstration. Étant donnée sur V_n une G_T-structure régulière definie par V, M, alors $K = V \cap M$ est un feuilletage régulier (selon la Proposition 5) et les variétés et les applications qui réalisent les conditions du théorème sont définies par les 9galités:

$$V_{m+p} = V_n/K, \quad V_m = V_n/M, \quad V_p = V_n/V,$$

$$\varphi = \pi_V, \quad \mu = \pi_K, \quad \psi = \pi_M, \quad f \circ \pi_K = \pi_V, \quad g \circ \pi_K = \pi_M.$$

Réciproquement, étant données les variétés V_{m+p}, V_m, V_p et les applications φ, μ, ψ, f et g, ainsi que le diagramme (fig. 4) soit commutatif et si l'on satisfait aux autres conditions sur les fonctions, alors les distributions V, M, K définies respectivement, par les espaces vectoriels $V_x = \operatorname{Ker} \varphi_x$, $M_x = \operatorname{Ker} \psi_x$, $K_x = \operatorname{Ker} \mu_x$, donnent une G_T-structure régulière. C.Q.F.D.

5. Soient E une G_T-structure intégrable, $X(X^a)$ un champ de vecteurs (la transformation infinitésimale) et (θ^a) un co-repère distingué pour E. La dérivation de Lie par rapport à X, $\mathcal{L}(X)\,\theta^a = A^a_\beta\,\theta^\beta$, $((A^a_\beta) \in \underline{G_T})$ donne pour le co-repère naturel dx^a, les relations $(\partial_\beta X^a)\,dx^\beta = A^a_\beta\,dx^\beta$, où ∂_β note la dérivatlon partielle. Si $(\Gamma^a_{\beta\gamma})$ sont les coefficients d'une G_T-connexion [1] et ∇_β note la dérivation covariante associée, alors nous avons:

$$\nabla_a X^{j''} = \partial_a X^{j''} + \Gamma^{j''}_{\mu a} X^\mu, \quad \nabla_{a'} X^j = \partial_{a'} X^j + \Gamma^j_{\mu a'} X^\mu.$$

Ces relations et les équations définies de l'algèbre G_T permettent d'énoncer la

Proposition 7. La transformation infinitésimale X est une automorphisme infinitésimale [2] de E, si et seulement si (X^a) satisfont au système:

$$\partial_{a'} X^j = \partial_a X^{j''} = 0,$$

ou équivalent:

$$\nabla_a X^{j''} = \Gamma^{j''}_{\mu a} X^\mu, \quad \nabla_{a'} X^j = \Gamma^j_{\mu a'} X^\mu.$$

Soient (V, M) et (V', M') deux G_T-structures sur V_n et V'_n $(n \geq 3)$ respectivement, et ayant les d. d. les feuilletages réguliers K et K' respectivement, de même dimension q. Pour tout difféomorphisme $\mathcal{F}$: $V_n \to V'_n$ compatible avec les feuilletages K, K' [2], nous pouvons définir un difféomorphisme f: $V_n/K \to V'_n/K'$ par la relation: $f \circ \pi_K(x) = \pi_{K'} \circ \mathcal{F}(x)$, $\forall\, x \in V_n$. Si $\mathcal{F}$ applique la G_T-structure (V, M) sur la G_T-structure (V', M'), alors f applique la structure presque-produit associée à (V', M') et réciproquement. Il en résulte la

PROPOSITION 8. Soient K et K' deux feuilletages réguliers de même dimension sur V_n et V'_n $(n \geq 3)$ raspectivement et (V, M), (V', M') deux G_T-structures ayant les d. d. K. et K'. Soit einsuite $\mathcal{F}$: $V_n \rightarrow V'_n$ un difféomorphisme compatible avec les feuilletages K, K'. $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de (V, M) sur (V', M') si et seulement si le difféomorphisme f est un isomorphisme des structures presque-produit associées.

En utilisant les notations du théorème 8, nous avons la

CONSÉQUENCE. Soient sur V_n un G_T-structure (V, M) ayant la d. d. le feuilletage régulier K et $\mathcal{F}$ un difféomorphisme de V_n qui conserve K. $\mathcal{F}$ est un automorphisme de (V, M) si et seulement si le difféomorphisme f: $V_n/K \rightarrow V_n/K$ est un automorphisme de la structure presque-produit associée $(\bar{V}, \bar{M})$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Apreutesei C., *Propriétés des structures transitives.* An. st. Univ. Iasi, Matematica, t. XVI (2), 1970, pp. 389-402.

[2] Apreutesei C., *Automorphismes d'une G_T-structure.* C. R. Acad. Sc. Paris, t. 271, 1970, pp. 481-484.

[3] Apreutesei C., *G_T-structures et connexions généralisées.* Revue roumaine de mathématiques pures et appliquées (sous presse).

[4] Apreutesei C., *Sur les connexions généralisées.* An. st. Univ. Iasi, Matematica, t. XVI (1), 1970, pp. 127-135.

[5] Chern S., *Complex manifolds without potential theory.* D. Van Nostrand-Comp. Princeton, 1967.

[6] Legrand G., *Étude d'une généralisation des structures presque-complexes sur les variétés différentiables.* Rendiconti del Circolo Mat. de Palermo, t. 7, 1958, pp. 325-354.

[7] Molino P., *Connexions et G-structures sur les variétés feuilletées.* Bull. Soc. Math. t.9 2, Nos 1-2, 1968, pp. 59-63

[8] Palais R., *A global formulation of the Lie theory of transformation groups.* Memoirs of the American Mathematical Society, N. 22, 1957.

[9] Papuc I. Dan, *Sur la géométrie différentielle des champs de drapeaux des variétés différentiables.* An. Univ. Timisoara, t. VI, 1968, pp. 275-284.

[10] Stiefel E., *Richtungsfelder und Fernparallelismus in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten.* Comment. Math. Helv., 8, 1936, pp. 305-353.

[11] Vaisman I., *Almost-multifoliate riemannian manifolds.* An. st. Univ. Iasi, Matematica, t. XVI (1), 1970, pp. 97-104.

[12] Vranceanu Gh., *Lectii de geometrie diferentiala,* vol. IV, 1968.

[13] Yano K., Kobayashi S., *Prolongations of tensor fields and connections to tangent bunldes. I.* J. Math. Soc. Japan, t.10, 1966, pp. 194-210.