ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

ALESSANDRO SILVA

Successioni crescenti di Q-coppie di runge di varietà analitiche complesse

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 27, nº 3 (1973), p. 431-440

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1973_3_27_3_431_0>

SUCCESSIONI CRESCENTI DI Q-COPPIE DI RUNGE DI VARIETÀ ANALITICHE COMPLESSE

ALESSANDRO SILVA (*)

Introduzione.

Sia $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una successione crescente di varietà analitiche complesse ciascuna aperta nella successiva. Denotiamo con X l'unione delle X_i, $i = 0,1,\ldots$

Fissato un fascio analitico coerente su X, $\mathcal{F}$ e un intero $q > 0$, supponiamo che $H^r(X_i, \mathcal{F}) = 0$ per $r \geq q$.

Si vuole sapere quando tale proprietà « passa al limite », cioè quando X ha anche $H^r(X, \mathcal{F}) = 0$ per $r \geq q$. È standard provare, con un ragionamento che fa uso della risoluzione canonica fiacca di $\mathcal{F}$, che $H^r(X, \mathcal{F}) = 0$ per $r \geq q + 1$ (v. lo schizzo di una prova di questo genere nell'osservazione al Teorema 1). A livello q intervengono nella letteratura ipotesi supplementari che involgono di volta in volta la natura di $\mathcal{F}$ e delle X_i.

Per $q = 1$, $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ il risultato è classico nell'ipotesi che (X_i, X_{i+1}) siano una coppia di Runge per ogni $i = 0, 1, \ldots$, cioè che le funzioni olomorfe su X_{i+1} ristrette ad X_i siano dense (nella topologia naturale) nelle funzioni olomorfe definite su X_i. Sempre per $q = 1$, $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$, Kajiwara-Yoshida in « Note on Cauchy-Riemann Equation », Mem. of Fac. of Science, Kyushu Univ. — Ser. A-XXII I^0 — 1968, fanno a meno dell'ipotesi di Runge purchè X sia immersa in una più grande varietà di Stein.

Tale condizione permette, per un lemma di Kajiwara in Publ. Res. Inst. for Math. Science Kyoto - Ser. A. - 1966 - pagg. 133 e seguenti, di avere sempre verificata un'ipotesi di Runge e quindi di adoperare le tecniche usuali.

Il procedimento non è però generalizzabile per $q > 1$, poichè fa uso di proprietà peculiari delle funzioni olomorfe (domini di prolungabilità massimale, domini di olomorfia, inviluppi di olomorfia).

(*) Pervenuto alla Redazione il 22 Aprile 1972.
Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo per le strutture algebriche e geometriche e loro applicazioni del C.N.R.

Per ottenere il risultato, sempre per il fascio strutturale, per ogni $q > 1$, si è seguita in questo lavoro la strada classica supponendo (X_i, X_{i+1}) q-coppie di Runge per ogni $i = 0, 1, \ldots$, (Teorema 1).

Tale teorema è provato usando la struttura di Frèchet dei fasci che forniscono la risoluzione di Dolbeault di $\mathcal{O}_X$. (Osserviamo che l'esistenza di q-coppie di Runge di varietà analitiche complesse è provata in Sorani: Homologie des q-paires de Runge; Ann. SNS - III - Vol. XVII-1963, pagg. 319-332; Hormander: L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator. In Acta Mathematica — Vol. 133, 1965 pagg. 89-152).

Per un fascio $\mathcal{F}$ analitico coerente fissato, diverso da $\mathcal{O}$, il teorema 1 non è più valido: a tale fine si dà nel presente lavoro un controesempio (§ 2). Nel caso quindi di un fascio che non sia il fascio strutturale, neanche l'ipotesi di Runge basta per risolvere il problema.

Occorre quindi aggiungere ipotesi su $\{X_i\}$ e sulla natura dei fasci analitici coerenti su X_i (ad es. mantenere la validità di risultati del tipo dei teoremi A e B di Cartan).

In tale direzione si prova con il teorema 2 che se le X_i sono, oltre che di q-Runge, coomologicamente q-complete, fissato un fascio $\mathcal{F}$ coerente su X, (che verificherà quindi per ipotesi la proprietà di avere $H^r(X_i, \mathcal{F}) = 0$ per ogni $i = 0, 1, \ldots, r \geq q$), dotato di una « buona » presentazione su X_i, allora anche $H^r(X, \mathcal{F}) = 0$ per ogni $r \geq q$.

Nella dimostrazione del teorema 2 si fa uso della natura di Frèchet dei fasci che compaiono nella risoluzione di $\mathcal{F}$ ottenuta tensorizzando con $\mathcal{F}$ la risoluzione di Dolbeault (risultato di piattezza di Malgrange) e della coomologia separata a valori in un fascio di Frèchet.

Si ricorda ancora che sullo stesso problema iniziale, A. Cassa in Coomologia separata sulle varietà analitiche complesse. Annali S.N.S. vol. XXV - II - 1971, pagg. 291-323., prova che si ha sempre $(H^q(X, \mathcal{F}))_s = 0$. Tale risultato precisa quanto ottenuto da Villani in « Un teorema di passaggio al limite per la coomologia degli spazi complessi ». - Acc. Naz. dei Lincei - Rend. Sc. Mat. Fis. Nat. - Vol. XLIII - 1967.

L'Autore ringrazia il professore V. Villani per l'aiuto e l'incoraggiamento datogli durante la stesura di questa nota, e l'amico Antonio Cassa per le informazioni ricevute, riguardanti il § 2.

§ 0. Un lemma di passaggio al limite per successioni esatte di spazi vettoriali topologici localmente convessi.

Siano

$$\mathbf{E} = \{E_n ; e_{n+1} : E_{n+1} \to E_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \quad \mathbf{F} = \{F_n ; f_{n+1} : F_{n+1} \to F_n\}_{n \in \mathbb{N}},$$
$$\mathbf{G} = \{G_n ; g_n : G_{n+1} \to G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

tre sistemi proiettivi di $\mathbb{C}$-spazi vettoriali localmente convessi la cui topologia è data da una famiglia numerabile di seminorme.

Supponiamo che $\mathbf{E}$ sia denso (cioè e_n hanno inmagine densa per ogni $n = 0, 1, \ldots$), $\mathbf{F}$ sia completo (cioè f_n trasformano successioni di Cauchy in successioni convergenti per ogni $n = 0, 1, \ldots$), $\mathbf{G}$ sia separato (cioè G_n è separato per ogni $n = 0, 1, \ldots$).

Se la successione:

$$\mathbf{E} \xrightarrow{\varphi} \mathbf{F} \xrightarrow{\psi} \mathbf{G} \to 0$$

è esatta, (cioè se le successioni di spazi vettoriali topologici e applicazioni lineari continue

$$E_n \xrightarrow{\varphi_n} F_n \xrightarrow{\psi_n} G_n \to 0$$

sono esatte per ogni $n = 0, 1, \ldots$),
allora il morfismo canonico

$$\psi : \varprojlim \mathbf{F} \to \varprojlim \mathbf{G}$$

è surgettivo.

Dim. Per ogni $i = 0, 1, \ldots$, consideriamo due sistemi fondamentali di intorni dell'origine $\{\mathcal{U}_i^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in E_i e $\{\mathcal{V}_i^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in F_i tali che $\mathcal{U}_i^{n+1} + \mathcal{U}_i^{n+1} \subset \mathcal{U}_i^n$, $\mathcal{V}_i^{n+1} + \mathcal{V}_i^{n+1} \subset \mathcal{V}_i^n$, $\varphi_i(\mathcal{U}_i^n) \subset \mathcal{V}_i^n$ ed inoltre $f_{i+1}(\mathcal{V}_{i+1}^n) \subset \mathcal{V}_i^n$. (Questo è possibile per la struttura di spazi vettoriali di E_i e F_i e per la continuità di φ_i e f_i)

Sia $g = (\gamma_i)_{i=0,1,\ldots}$ appartenente a $\varprojlim \mathbf{G}$.

Poichè ψ_0 è surgettiva, esiste x_0 in F_0 tale che $\psi_0(x_0) = \gamma_0$; e poichè ψ_1 è surgettiva, esiste x_1' in F_1 tale che $\psi_1(x_1') = \gamma_1$. Ora poichè $g_1(\gamma_1) = \gamma_0$ e $\psi_0 \circ f_1 = g_1 \circ \psi_1$, $f_1(x_1') - x_0$ appartiene al nucleo di ψ_0, quindi per la esattezza esiste m_0 appartenente a E_0 tale che $\varphi_0(m_0) = f_1(x_1') - x_0$. Poichè $\operatorname{Im} e_1$ è densa esiste m_1 appartenente ad E_1 tale che $e_1(m_1) - m_0$ appartiene ad $\mathcal{U}_0^0$.

Poniamo $x_1 = x_1' - \varphi_1(m_1)$. Si ha $\psi_1(x_1) = \gamma_1$ e $x_0 - f_1(x_1) = \varphi_0(e_1(m_1) - m_0)$ quindi $x_0 - f_1(x_1)$ appartiene a $\mathcal{V}_0^0$ poichè $\varphi_0(\mathcal{U}_0^0) \subset \mathcal{V}_0^0$.

Induttivamente si trova una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di elementi di F_n tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si abbia che $x_n - f_{n+1}(x_{n+1})$ appartiene a $\mathcal{V}_n^n$.

Consideriamo per $m \geq n$ $f_n^m : F_m \to F_n$ posta come $f_n^m = f_{n+1} \circ \ldots \circ f_m$ e $f_m^m = \mathrm{id}$. Per ogni $i = 0, 1, \ldots$ la successione di elementi di F_i $\{f_i^m(x_m)\}_{m \geq i}$ è di Cauchy. Infatti $f_i^{m+1}(x_{m+1}) - f_i^m(x_m) = f_i^m(f_{m+1}(x_{m+1}) - x_m)$; ora $f_{m+1}(x_{m+1}) - x_m$ appartiene a $\mathcal{V}_m^m$ per costruzione e giacchè si ha che per

$m \geq n$ $f_n^m(\mathcal{V}_m^m) \subset \mathcal{V}_n^m$, $f_i^{m+1}(x_{m+1}) - f_i^m(x_m)$ apparterrà a $\mathcal{V}_n^m$ per $m \geq n \geq i$. Inoltre, (salvo un numero finito di termini), la successione $\{f_i^m(x_m)\}_{m \geq i}$ è l'immagine secondo f_{i+1} della successione $\{f_{i+1}^m(x_m)\}_{m \geq i+1}$ di elementi di F_{i+1}.

Allora, poichè F_j sono supposti completi per ogni $j = 0, 1, \ldots$, esiste $\alpha_i = \lim_{m \geq i} f_i^m(x_m)$ e α_i appartiene a F_i.

Si verifica facilmente che $\alpha = (\alpha_i)_{i=0,1,\ldots}$ è un elemento di $\varprojlim \mathbf{F}$. Infine, poichè $\psi_m(x_m) = \gamma_m$ per ogni $m = 0, 1, \ldots$, per la continuità di ψ_m e giacchè $\mathbf{G}$ è supposto separato, risulta $\psi_m(\alpha_m) = \gamma_m$, cioè $\psi(\alpha) = g$ come volevasi dimostrare.

COROLLARIO. Nelle ipotesi del lemma se inoltre φ è iniettivo (cioè se per ogni $n = 0, 1, \ldots$ $\varphi_n : E_n \to F_n$ è iniettiva) la successione

$$0 \to \varprojlim \mathbf{E} \xrightarrow{\varphi} \varprojlim \mathbf{F} \xrightarrow{\psi} \varprojlim \mathbf{G} \to 0$$

è esatta.

DIM. Infatti φ è iniettiva, perchè $\varprojlim$ è esatto a sinistra e ψ è surgettiva per il lemma.

§ 1. Siano X ed Y varietà complesse, con $Y \subset X$; $(\mathcal{A}^{(0,\cdot)}; d.)$ la risoluzione fine di Dolbeault di $\mathcal{O}_X$; $(\mathcal{A}^{(0,\cdot)}(X); d^*_\cdot)$ il complesso delle sezioni globali.

Diremo che (X, Y) *costituisce una q-coppia di Runge di varietà complesse, se la restrizione :*

$$\varrho_Y^X : \ker d^*_{q-1}(X) \to \ker d^*_{q-1}(Y)$$

ha immagine densa nella topologia indotta su $\ker d^*_{q-1}(Y)$ dalla topologia di Frèchet Schwartz di $\mathcal{A}^{(0,q-1)}(Y)$, che è la topologia della convergenza sui compatti di Y dei coefficienti delle biforme e di tutte le loro derivate.

Come corollario al lemma del paragrafo precedente, discende facilmente la seguente proprietà:

TEOREMA 1. *Sia X una varietà complessa unione di una successione $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ di varietà aperte, $q \geq 1$ un intero, tali che:*

(i) $X_i \subset X_{i+1}$ *per ogni* $i = 0, 1, \ldots$

(ii) (X_i, X_{i+1}) *è una q coppia di Runge per ogni* $i = 0, 1, \ldots$

Allora se $H^q(X_i, \mathcal{O}) = 0$, si ha $H^q(X, \mathcal{O}) = 0$

DIM. Poiché $H^q(X_i, \mathcal{O}) = 0$, si ha $\ker d_q^*(X_i) = \operatorname{Im} d_{q-1}^*(X_i)$, che fornisce per ogni $i = 0, 1, \dots$, le successioni esatte:

$$(\mathrm{a}_i) \qquad 0 \longrightarrow \ker d_{q-1}^*(X_i) \xrightarrow{j_i} \mathcal{A}^{(0,q-1)}(X_i) \xrightarrow{d_{q-1}^*} \ker d_q^*(X_i) \longrightarrow 0.$$

Tali successioni soddisfano per ogni $i = 0, 1, \dots$ le ipotesi del lemma, e del corollario del § 0.

Infatti $\mathcal{A}^{(0,r)}(X_i)$ dotato della topologia della convergenza compatta è uno spazio di Frechet-Schwartz (brevemente FS) per ogni $r = 0, 1, \dots$; $\ker d_r^*(X_i)$ in quanto sottospazio chiuso di $\mathcal{A}^{(0,r)}(X_i)$ sarà anche esso FS per ogni $r = 0, 1, \dots$.

Se si prendono come e_i, f_i, g_i rispettivamente gli omomorfismi di restrizione $\varrho_i^* : \ker d_{q-1}^*(X_{i+1}) \longrightarrow \ker d_{q-1}^*(X_i)$, $\sigma_i^* : \mathcal{A}^{(0,q-1)}(X_{i+1}) \longrightarrow \mathcal{A}^{(0,q-1)}(X_i)$, $\tau_i^* : \ker d_q^*(X_{i+1}) \longrightarrow \ker d_q^*(X_i)$, l'ipotesi di densità del lemma è verificata per l'ipotesi (ii) del teorema.

Passando quindi al limite inverso nelle (a_i) otteniamo la successione esatta:

$$0 \longrightarrow \ker d_{q-1}^*(X) \xrightarrow{j} \mathcal{A}^{(0,q-1)}(X) \xrightarrow{d_{q-1}^*} \ker d_q^*(X) \longrightarrow 0$$

da cui $H^q(X, \mathcal{O}) = 0$, tenuto conto dell'isomorfismo di Dolbeault. (c.v.d.)

OSSERVAZIONE. Se nelle stesse ipotesi del teorema si ha inoltre $H^r(X_i, \mathcal{O}) = 0$ per ogni $r \geq q$, allora anche $H^r(X, \mathcal{O}) = 0$ per $r \geq q$.

Resta solo da provare infatti che $H^r(X, \mathcal{O}) = 0$ per $r > q$. Ciò risulta applicando un ragionamento standard, che fa uso della risoluzione canonica fiacca di $\mathcal{O}_X$ (v. ad es. [1]). A grandi linee: sia $(\mathcal{L}^\cdot; \delta)$ tale risoluzione, sia $\alpha \in \mathcal{L}^r(X)$ tale che $\delta\alpha = 0$. Poichè $H^r(X_i, \mathcal{O}) = 0$, $\alpha|_{X_i} = \delta\beta_i$, $\beta_i \in \mathcal{L}^{r-1}(X_i)$ e $\alpha|_{X_{i+1}} = \delta\beta_{i+1}$, $\beta_{i+1} \in \mathcal{L}^{r-1}(X_{i+1})$, quindi $\delta(\beta_{i+1} - \beta_i) = 0$ in X_i. Poiché $H^{r-1}(X_i, \mathcal{O}) = 0$ esisterà $\gamma_i \in \mathcal{L}^{r-2}(X_i)$ tale che $\delta\gamma_i = \beta_{i+1} - \beta_i$ in X_i, e poichè $\mathcal{L}^{r-2}$ è fiacco, $\gamma_i = \gamma'_{i+1}|_{X_i}$ con $\gamma'_{i+1} \in \mathcal{L}^{r-2}(X_{i+1})$. Allora $\beta_{i+1} + \delta\gamma'_{i+1} = \beta'_{i+1} \in \mathcal{L}^{r-1}(X_{i+1})$ e $\delta\beta_{\beta_{i+1}} = \alpha$ in X_{i+1}; quindi β'_{i+1} prolunga β_i. Procedendo si trova una successione $\beta_i, \beta'_{i+1} \dots$ di sezioni continue di $\mathcal{L}^{r-1}$ che prolungandosi vicendevolmente definiscono un elemento $\beta \in \mathcal{L}^{r-1}(X)$ tale che $\delta\beta = \alpha$; c.v.d.

§ 2. ESEMPIO. Sostituendo un particolare fascio analitico coerente su X al fascio $\mathcal{O}$, il teorema 1 non è più valido.

Sussiste infatti il seguente esempio:

Sia $X = \mathbb{C}^p - \{0\}$, $p \geq 4$, $Y = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, successione di punti di un asse coordinato di $\mathbb{C}^p$, tendente a 0. Il fascio di ideali di $\mathcal{O}_X$ relativo ad Y, $\mathcal{I}_Y$, è analitico coerente.

Poniamo $X_n = X - \{x_i\}_{i \geq n+1} = \mathbb{C}^p - (\{x_i\}_{i \geq n+1} \cup \{0\})$.

Si ha $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ e $X_n \subset X_{n+1}$. Si ha per [2], pag. 203 $H^1(X_n, \mathcal{O}) = \dots = H^{p-2}(X_n, \mathcal{O}) = 0$. Sia $Y_n = \{x_0, \dots, x_n\} \subset X_n$; si ha $\mathcal{I}_{Y|X_n} = \mathcal{I}_{Y_n}$ (fascio di ideali di Y_n in X_n) e per motivi di dimensione, $H^q(Y_n, \mathcal{O}_{Y_n}) = 0$ per $q \geq 1$. Consideriamo la successione esatta di fasci su X_n (prendendo l'estensione triviale di $\mathcal{O}_{Y_n}$)

$$0 \to \mathcal{I}_{Y_n} \to \mathcal{O}_{X_n} \to \mathcal{O}_{Y_n} \to 0$$

da cui la successione esatta di coomologia:

$$0 \to \mathcal{I}_{Y_n}(X_n) \to \mathcal{O}(X_n) \xrightarrow{\pi_n^*} \mathcal{O}(Y_n) \to H^1(X_n, \mathcal{I}_{Y_n}) \to 0$$

da cui $H^1(X_n, \mathcal{I}_{Y_n}) \cong \mathcal{O}(Y_n)/\mathrm{Im}\, \pi_n^*(X_n) = 0$ poichè π_n^* è surgettiva. X_n e X_{n+1} differendo per un solo punto, si ha che (X_n, X_{n+1}) è una 1-coppia di Runge per ogni $n = 0, 1, \dots$, ma $H^1(X, \mathcal{I}_Y) \neq 0$; passando al limite inverso si ha infatti:

$$0 \to \mathcal{I}_Y(X) \to \mathcal{O}(X) \xrightarrow{\pi^*} \mathcal{O}(Y) \to H^1(X, \mathcal{I}_Y) \to 0$$

poiché $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$; da cui $H^1(X, \mathcal{I}_Y) \cong \mathcal{O}(Y)/\mathrm{Im}\, \pi^*(X) \neq 0$ poiché $\pi^*: \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(Y)$ non è surgettiva.

§ 3. Sia q un intero positivo, diremo che *una varietà complessa X è coomologicamente q-completa, se $H^r(X, \mathcal{F}) = 0$, per ogni $\mathcal{F}$ fascio analitico coerente su X, $r \geq q$.*

Sussiste la seguente proprietà per q-coppie di Runge di varietà coomologicamente q complete.

TEOREMA 2. *Sia X una varietà complessa unione di una successione $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ di varietà aperte coomologicamente q-complete, $q \geq 1$, tali che:*

(i) $X_i \subset X_{i+1}$, *per ogni* $i = 0, 1, \dots$

(ii) (X_i, X_{i+1}) *sono una q-coppia di Runge per ogni* $i = 0, 1, \dots$

Allora se $\mathcal{F}$ è un fascio analitico coerente su X, tale che su ciascun X_i si abbia una surgezione $\varphi: \mathcal{O}^{p_i}_{|X_i} \to \mathcal{F}_{|X_i}$, si ha: $H^r(X, \mathcal{F}) = 0$ per ogni $r \geq q$.

DIM. Si ha su X_i per ogni $i = 0, 1, \ldots$ la successione esatta di fasci

$$0 \to \mathcal{R}_i \to \mathcal{O}^{p_i} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} \to 0.$$

La successione di coomologia fornisce l'omomorfismo surgettivo:

$$H^{q-1}(X_i, \mathcal{O}^{p_i}) \xrightarrow{\varphi^*} H^{q-1}(X_i, \mathcal{F}).$$

$\mathcal{F}$ è dotato di una struttura di fascio di Frèchet che non dipende da una sua particolare risoluzione; l'omomorfismo φ^* è evidentemente continuo. Sia ora $(\mathcal{A}^{(0,\cdot)}; d.)$ la risoluzione di Dolbeault di $\mathcal{O}_X$. L'omomorfismo canonico: $(\ker d^*_{q-1}(X_i))^{p_i} \to H^{q-1}(X_i, \mathcal{O}^{p_i})$ è continuo. Si ha perciò per ogni $i = 0, 1, \ldots$ un omomorfismo continuo surgettivo

$$\psi^* : (\ker d^*_{q-1}(X_i))^{p_i} \to H^{q-1}(X_i, \mathcal{F}).$$

Denotiamo con $(H^{q-1}(X_i, \mathcal{F}))_s$ lo spazio vettoriale topologico separato associato a $H^{q-1}(X_i, \mathcal{F})$. Dal diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc}
(\ker d^*_{q-1}(X_i))^{p_i} & \xrightarrow{\psi^*} & H^{q-1}(X_i, \mathcal{F}) \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle sep} \\
(\ker d^*_{q-1}(X_i))^{p_i} = ((\ker d^*_{q-1}(X_i))^{p_i})_s & \xrightarrow{\psi^*_s} & (H^{q-1}(X_i, \mathcal{F}))_s
\end{array}$$

si ha che l'omomorfismo ψ^*_s è continuo e surgettivo.

Per ogni $i = 0, 1, \ldots j = 1, 2, \ldots$, essendo $X_i \cap X_{i+j} = X_i$, possiamo prendere $p_i = p_{i+j}$ e denotare questo intero, per semplicità, con p.

Consideriamo per ogni $i = 0, 1, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots$ il diagramma commutativo di spazi vettoriali topologici e applicazioni lineari continue in cui le frecce verticali sono gli omomorfismi di restrizione:

$$\begin{array}{ccc}
(\ker d^*_{q-1}(X_i))^{p} & \xrightarrow{\psi^*_s} & (H^{q-1}(X_i, \mathcal{F}))_s \\
{\scriptstyle \sigma_i^{i+j}} \uparrow & & \uparrow {\scriptstyle \varrho_i^{i+j}} \\
(\ker d^*_{q-1}(X_{i+j}))^{p} & \xrightarrow{\psi^*_s} & (H^{q-1}(X_{i+j}, \mathcal{F}))_s
\end{array}$$

σ_i^{i+j} avendo immagine densa per ipotesi e ψ_s^* essendo surgettivo si ha che ϱ_i^{i+j} ha immagine densa nella topologia di $(H^{q-1}(X_i, \mathcal{F}))_s$. Sia ora $(\mathcal{A}^{(0,\cdot)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F};\, d.\otimes 1_{\mathcal{F}})$ la risoluzione di $\mathcal{F}$ ottenuta tensorizzando su $\mathcal{O}_X$ la risoluzione di Dolbeault; essa è una risoluzione fine di $\mathcal{F}$ mediante fasci di Frèchet (v. [3]). Sia $((\mathcal{A}^{(0,\cdot)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F})(X);\, (d.\otimes 1_{\mathcal{F}})^*)$, il complesso delle sezioni globali. Proviamo che in tale situazione l'omomorfismo di restrizione $r_i^{i+j}: \ker(d_{q-1} \otimes 1_{\mathcal{F}})^*(X_{i+j}) \longrightarrow \ker(d_{q-1} \otimes 1_{\mathcal{F}})^*(X_i)$, ha immagine densa per ogni $i = 0, 1, \ldots,\ j = 1, 2, \ldots$

Osserviamo che se $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di elementi di $(\mathcal{A}^{(0,r)} \otimes \mathcal{F})(X_i)$, esiste una successione $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di elementi di $(\mathcal{A}^{(0,r)} \otimes \mathcal{F})(X_{i+j})$ tali che $x_n - r_i^{i+j}(y_n) \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow +\infty$.

Poichè $\overline{\mathrm{Im}\,(d_r \otimes 1)^*(X_i)}$, in quanto sottospazio chiuso di uno spazio di Frèchet è anch'esso di Frèchet quindi dotato di una famiglia di seminorme che vi definiscono una metrica, per ogni elemento di una successione $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di sezioni in $\overline{\mathrm{Im}\,(d_r \otimes 1)^*(X_i)}$, si può determinare un elemento x_n appartenente a $(\mathcal{A}^{(0,r)} \otimes \mathcal{F})(X_i)$, tale che la differenza $\xi_n - (d_r \otimes 1)^*(x_n) \longrightarrow 0$, quando $n \longrightarrow +\infty$. Per quanto osservato in precedenza esiste una successione $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $(\mathcal{A}^{(0,r)} \otimes \mathcal{F})(X_{i+j})$ tale che $x_n - r_i^{i+j}(y_n) \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow +\infty$, e perciò anche $(d_r \otimes 1)^*(x_n - r_i^{i+j}(y_n)) \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow +\infty$. Quindi per ogni successione $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di elementi di $\overline{\mathrm{Im}\,(d_r \otimes 1)^*(X_1)}$ esiste una successione $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di elementi di $(\mathcal{A}^{(0,r)} \otimes \mathcal{F})(X_{i+j})$ tali che la differenza $\xi_n - (d_r \otimes 1)^*(r_i^{i+j}(y_n)) \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow +\infty$.

Consideriamo ora per ogni $i = 0, 1, \ldots$ la proiezione canonica π_i: $: \ker(d_{q-1} \otimes 1)^*(X_i) \longrightarrow (H^{q-1}(X_i, \mathcal{F}))_s$. Si è visto che $\varrho_i^{i+j}: (H^{q-1}(X_{i+j}, \mathcal{F}))_s \longrightarrow$ $\longrightarrow (H^{q-1}(X_i, \mathcal{F}))_s$ ha immagine densa per ogni $i = 0, 1, \ldots,\ j = 1, 2, \ldots$; si ha perciò che per ogni $f \in \ker(d_{q-1} \otimes 1)^*(X_i)$ esiste una successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di elementi di $\ker(d_{q-1} \otimes 1)^*(X_{i+j})$ tale che $\pi_i(r_i^{i+j}(f_n) - f) \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow +\infty$.

Poichè π_i è l'omomorfismo canonico quindi è topologico, esiste una successione $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di elementi di $\ker(d_{q-1} \otimes 1)^*(X_i)$ tale che $g_n \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow +\infty$, e $\pi_i(r_i^{i+j}(f_n) - f) = \pi_i(g_n)$, per ogni n, da cui $\pi_i(r_i^{i+j}(f_n) -$ $- f - g_n) = 0$ ossia $(r_i^{i+j}(f_n) - f - g_n)$ appartiene a $\overline{\mathrm{Im}\,(d_{q-2} \otimes 1)^*(X_i)}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Per quanto visto esisterà quindi una successione $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di elementi di $(\mathcal{A}^{(0,q-2)} \otimes \mathcal{F})(X_{i+j})$ tale che:

$$\lim_{n \to +\infty} (r_i^{i+j}(f_n) - f - g_n - (d_{q-2} \otimes 1)^*(r_i^{i+j}(h_n))) = 0$$

da cui:

$$f = \lim_{n \to +\infty} (r_i^{i+j}(f_n) - (d_{q-2} \otimes 1)^* (r_i^{i+j}(h_n)) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} r_i^{i+j}(f_n - (d_{q-2} \otimes 1)^* (h_n)),$$

e, per l'arbitrarietà di f, la densità richiesta.

Poichè $H^q(X_i, \mathcal{F}) = 0$, si ha $\ker(d_q \otimes 1)^*(X_i) = \operatorname{Im}(d_{q-1} \otimes 1)^*(X_i)$, che fornisce per ogni $i = 0, 1, \ldots$ le successioni esatte:

$$(\alpha_i) \qquad 0 \longrightarrow \ker(d_{q-1} \otimes 1)^*(X_i) \xrightarrow{\text{imm}^*}$$

$$\xrightarrow{\text{imm}^*} (\mathcal{A}^{(0,q-1)} \otimes \mathcal{F})(X_i) \xrightarrow{(d_{q-1} \otimes 1)^*} \ker(d_q \otimes 1)^*(X_i) \longrightarrow 0.$$

Tali successioni soddisfano per motivi del tutto analoghi alle (a_i) del teorema 1 le ipotesi del lemma e del corollario del § 0.

Prendendo come e_i, f_i, g_i gli omomorfismi di restrizione, l'ipotesi di densità del lemma per le e_i è verificata da quanto provato più sopra.

Passando al limite inverso nelle (α_i), si ha quindi la successione esatta:

$$(\alpha) \qquad 0 \longrightarrow \ker(d_{q-1} \otimes 1)^*(X) \xrightarrow{\text{imm}^*}$$

$$\xrightarrow{\text{imm}^*} (\mathcal{A}^{(0,q-1)} \otimes \mathcal{F})(X) \xrightarrow{(d_{q-1} \otimes 1)^*} \ker(d_q \otimes 1)^*(X) \longrightarrow 0.$$

Poichè $(\mathcal{A}^{(0,\cdot)} \otimes \mathcal{F}; d. \otimes 1)$ è una risoluzione fine quindi aciclica di $\mathcal{F}$, si ha l'isomorfismo

$$H^q(X, \mathcal{F}) = \ker(d_q \otimes 1)^*(X)/\operatorname{Im}(d_{q-1} \otimes 1)^*(X)$$

tenuto conto del quale e dell'esattezza di (α), che fornisce $\ker(d_q \otimes 1)^*(X) = \operatorname{Im}(d_{q-1} \otimes 1)^*(X)$, si ottiene $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$.

Resta da provare per avere la tesi che $H^r(X, \mathcal{F}) = 0$ per ogni $r > q$. Ciò si ricava procedendo come nell'osservazione al teorema 1, cioè facendo uso della risoluzione canonica fiacca di $\mathcal{F}$.

Con questo il teorema è provato.

Esempio. Una situazione del tipo del teorema 2 si presenta nel caso di una successione crescente $\{X_i\}$ di varietà coomologicamente q-complete, ciascuna di q-Runge e relativamente compatta nella successiva, immerse insieme alla loro unione in una varietà $\mathcal{M}$ di Stein.

Allora per ogni fascio $\mathcal{F}$ coerente su $\mathcal{M}$ vale il teorema A di Cartan quindi per ogni $x \in \mathcal{M}$, l'$\mathcal{O}_{\mathcal{M},x}$ - modulo $\mathcal{F}_x$ è generato dall'immagine canonica di $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ in $\mathcal{F}_x$.

Sia $x \in X_{i+1}$, allora esiste un insieme finito di elementi di $\mathcal{F}(X_{i+1})$ le cui immagini in $\mathcal{F}_x$, generano $\mathcal{F}_x$; giacchè $\mathcal{F}$ è coerente tali elementi generano $\mathcal{F}_y$ per gli y di un intorno aperto di x e poichè $\overline{X}_i$ è compatto l'immagine di un numero finito di elementi di $\mathcal{F}(X_{i+1})$ genera $\mathcal{F}_y$ per ogni y di tutto un intorno di $\overline{X}_i$, da cui la successione esatta su $\overline{X}_i$: $0 \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow$ $\longleftarrow \mathcal{O}^p \longrightarrow \mathcal{F}_{|X_{i+1}} \longrightarrow 0$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Cartan H., *Faisceaux analytiques coherents, in C.I.M.E. Funzioni e varietà complesse,* Roma, 1963, pgg. 1-88.

[2] Frenkel J., *Cohomologie non abélienne et espaces fibrés,* Bull. Soc. Math. de France T. 85 (1957), pgg. 135-220.

[3] Siu Y. T., *Non countable dimension of cohomology groups of Analytic Sheaves and Domains of Holomorphy.* Math. Zeitscrift. Vol. 102, pgg. 17-29.