

ANNALI DELLA  
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA  
*Classe di Scienze*

N. STAVROULAKIS

**Microfibrés et fibrés associés à certaines immersions**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série, tome 27, n° 2 (1973), p. 309-338*

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1973\\_3\\_27\\_2\\_309\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1973_3_27_2_309_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# MICROFIBRÉS ET FIBRÉS ASSOCIÉS A CERTAINES IMMERSIONS

N. STAVROULAKIS

## I. PRÉLIMINAIRES

Soient  $M_m$  et  $M_n$  deux variétés topologiques, connexes et paracompactes, de dimensions respectives  $m$  et  $n$ , avec  $m > n$ . Une injection continue localement plate  $f: M_n \rightarrow M_m$  sera dite *un plongement plat*, si la bijection correspondante de  $M_n$  sur  $f(M_n)$  est un homéomorphisme de  $M_n$  sur le sous-espace  $f(M_n)$  de  $M_m$ . Une application continue  $f: M_n \rightarrow M_m$  sera dite *une immersion plate*, s'il existe un recouvrement ouvert de  $M_n$  tel que la restriction de  $f$  à chaque ouvert de ce recouvrement soit une injection localement plate (nous n'exigeons pas que  $f$  soit globalement injective).

La complication inhérente aux immersions plates ne nous empêche pas de formuler à leur sujet des théorèmes intéressants. En effet, toute propriété concernant les plongements plats a son pendant dans l'ensemble plus vaste des immersions plates en vertu du résultat suivant :

Si  $f: M_n \rightarrow M_m$  est une immersion plate, il existe une variété paracompacte  $M'_m$  de dimension  $m$ , un plongement plat  $g: M_n \rightarrow M'_m$  et un homéomorphisme local  $f': M'_m \rightarrow M_m$  de façon que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M'_m & & \\ \uparrow g & \searrow f' & \\ M_n & \xrightarrow{f} & M_m \end{array}$$

soit commutatif.

Cette proposition montre qu'on peut se limiter à la considération des plongements plats, quitte à indiquer chaque fois la forme précise de l'énoncé correspondant aux immersions plates.

Soit donc  $f: M_n \rightarrow M_m$  un plongement plat, cas dans lequel  $f(M_n) = A_n$  sera appelée une sous-variété plate de  $M_m$ .

Un voisinage simple de  $A_n$  (ou plus exactement un voisinage tubulaire simple de  $A_n$  dans  $M_m$ ) consiste en la donnée d'un recouvrement  $\{U_i\}$  de  $A_n$  par des ouverts relativement compacts de  $M_m$  de façon que les conditions suivantes soient remplies :

1) Quel que soit  $i$ ,  $U_i \cap A_n = V_i$  est relativement compact pour la topologie interne de  $A_n$  et donne lieu à un homéomorphisme  $U_i \rightarrow b_i^{m-n} \times V_i$  où  $b_i^{m-n}$  est une boule ouverte de  $R^{m-n}$  de centre 0.

2)  $\{V_i\}$  est un recouvrement localement fini de  $A_n$ .

3) Toutes les fois où  $V_{i_1} \cap V_{i_2} \cap \dots \cap V_{i_q} = \emptyset$  on a aussi  $\bar{U}_{i_1} \cap \bar{U}_{i_2} \cap \dots \cap \bar{U}_{i_q} = \emptyset$ .

Introduisant dans l'ensemble des voisinages simples la relation de préordre naturel (cf. 2-3-1), on démontre que  $A_n$  possède un ensemble filtrant décroissant de voisinages simples.

Nous considérons ensuite deux faisceaux de base  $A_n$ , d'une part le faisceau  $\mathcal{F}$  des germes de rétractions locales  $C^0$  sur  $A_n$ , d'autre part le faisceau  $\mathcal{G}$  des germes de rétractions locales régulières  $C^0$  sur  $A_n$ . Ce dernier est engendré par les germes sur  $A_n$  des rétractions locales  $\tau: U \rightarrow U \cap A_n = V$  pour lesquelles il existe des homéomorphismes  $h: U \rightarrow b^{m-n} \times V$  tels que  $h\tau h^{-1}$  soit la projection canonique de  $b^{m-n} \times V$  sur  $V$ .

Le faisceau  $\mathcal{F}$  est mou, mais  $\mathcal{G}$  ne l'est pas toujours. Prenant une section de  $\mathcal{F}$  et tenant compte des propriétés concernant les voisinages simples, on obtient une démonstration d'un théorème suggéré par Grothendieck : Il existe un voisinage  $W$  de  $A_n$  dans  $M_m$  donnant lieu à une rétraction continue  $\tau: W \rightarrow A_n$ . Le voisinage ainsi obtenu n'est pas en général muni de structure de microfibré. Les microfibrés de base  $A_n$  s'obtiennent par les sections de  $\mathcal{G}$ . Pour qu'il existe une rétraction  $\tau: W \rightarrow A_n$  définissant un microfibré  $A_n \xrightarrow{\iota} W \xrightarrow{\tau} A_n$ , il faut et il suffit que  $\mathcal{G}(A_n) \neq \emptyset$ . Voici un cas particulier où il en est ainsi.

Si  $A_n$  est donnée comme feuille d'un feuilletage mixte  $(C^0, C^1)$ , ( $C^1$  sur les feuilles)<sup>(1)</sup>, sur un ouvert  $W$  de  $M_m$ , il existe un voisinage ouvert

(1) Un tel feuilletage est défini par un atlas  $C^0$  dont tout changement de cartes

$$x' = e(x), \quad y' = f(x, y), \quad (x, y), (x', y') \in R^{m-n} \times R^n,$$

est tel que  $f(x, y)$  admette une matrice jacobienne en  $y$  continue en  $(x, y)$ .

$Q \subset W$  de  $A_n$  et une rétraction  $\tau: Q \rightarrow A_n$  définissant un microfibré tel que les fibres  $\tau^{-1}(v)$ ,  $v \in A_n$ , et les feuilles du feuilletage donné déterminent sur  $Q$  une structure de feuilletage double.

La situation ci dessus concerne un plongement plat  $C^0$  particulier d'une variété  $C^1$ . Nous pouvons généraliser cette situation de façon raisonnable et définir ainsi les *plongements plats semi-différentiables*, donc aussi les *sous-variétés plates semi-différentiables* (2.2.a). Le faisceau  $G$  associé à une telle sous-variété n'est pas mou dans le cas général. On a cependant  $G(A_n) \neq \emptyset$  lorsque  $n = 1$ . Tout plongement plat semi-différentiable de la droite numérique (ou de la sphère à une dimension) admet donc un microfibré.

Supposons maintenant que l'on se donne un microfibré  $A_n \xrightarrow{\iota} Q \xrightarrow{\tau} A_n$  tel que le feuilletage défini par ses fibres soit un feuilletage mixte ( $C^0, C^1$ ),  $C^1$  sur les fibres. Il existe alors un fibré vectoriel  $C^0$ ,

$$A_n \xrightarrow{\iota_N} N \xrightarrow{\pi} A_n,$$

à fibres isomorphes à  $R^{m-n}$ , un voisinage ouvert  $Y$  de  $A_n$  dans  $Q$ , et un isomorphisme  $h: Y \rightarrow N$  rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{h} & N \\ \swarrow \iota & & \searrow \pi \\ & A_n & \\ \nearrow \iota_N & & \nwarrow \iota \end{array}$$

qui permet d'identifier  $Y$  à  $N$  et de définir le fibré vectoriel

$$A_n \xrightarrow{\iota} Y \xrightarrow{\pi} A_n.$$

Tout ce qui précède se particularise de façon évidente aux sous-variétés  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , mais nous obtenons aussi dans ce cas des résultats plus forts. Soit  $\mathcal{F}^r$  (resp.  $G^r$ ) le faisceau des germes de rétractions locales (resp. locales régulières)  $C^r$  sur  $A_n$ . On démontre que  $\mathcal{F}^r = G^r$  et cela entraîne le résultat suivant.

Si  $A_n$  est une sous-variété  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , de  $M_m$ , il existe un voisinage ouvert  $Q$  de  $A_n$  et une rétraction  $C^r$ ,  $\tau: Q \rightarrow A_n$ , donnant lieu à un microfibré  $C^r$ ,  $A_n \xrightarrow{\iota} Q \xrightarrow{\tau} A_n$ .

Comme les fibres de ce microfibré définissent un feuilletage  $C^r$ , il s'ensuit que si  $A_n$  est une sous-variété  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , de  $M_m$ , il existe un

voisinage ouvert  $Y$  de  $A_n$  et un fibré vectoriel  $C^{r-1}$ ,  $A_n \xrightarrow{\iota} Y \xrightarrow{\pi} A_n$ , à fibres isomorphes à  $R^{m-n}$ . Cela entraîne aussi l'existence d'un fibré vectoriel de classe  $C^r$ ,  $A_n \xrightarrow{\iota} Y \xrightarrow{\pi} A_n$ , mais la structure  $C^r$  ainsi définie sur  $Y$  n'est pas en général celle induite par la structure  $C^r$  de  $M_m$ .

La proposition concernant les feuilletages s'énonce aussi d'une façon plus simple dans le cas de la différentiabilité : Si  $A_n$  est une feuille d'un feuilletage  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , dans  $M_m$ , il existe un microfibré  $C^r$ ,  $A_n \xrightarrow{\iota} Q \xrightarrow{\tau} A_n$ , tel que le feuilletage défini par ses fibres soit supplémentaire au feuilletage donné.

La plupart des résultats du présent article ont été établis initialement pour les immersions injectives  $C^r$ ,  $r \geq 1$ . Leurs extensions sous la forme actuelle ne pourraient pas voir le jour sans les encouragements et les suggestions de A. Grothendieck. Il m'a incité en particulier à utiliser la théorie des faisceaux et m'a communiqué son résultat concernant les rétractions  $C^0$ . Je tiens à lui exprimer ici mes plus vifs remerciements.

## II. VOISINAGES TUBULAIRES D'UN PLONGEMENT PLAT

$$f: M_n \rightarrow M_m.$$

### 1. Voisinages simples de $A_n = f(M_n)$ .

Supposons  $R^n$  identifié au sous-espace de  $R^m$  obtenu par annulation des  $m - n$  premières coordonnées. Quel que soit  $v \in A_n$ , il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $v$  pour la topologie interne de  $A_n$ , un voisinage ouvert  $U$  de  $v$  dans  $M_m$ , et une carte  $\sigma: U \rightarrow R^m$ , de façon que les conditions ci dessous soient satisfaites.

$$1) U \cap A_n = V \text{ et } \sigma(V) = R^n \cap \sigma(U).$$

2)  $U$  est relativement compact pour la topologie de  $M_m$  et  $V$  est relativement compact pour la topologie interne de  $A_n$ .

La carte  $\sigma$ , qui est aussi notée  $(\sigma, (U, V))$  ou  $(U, V)$ , sera alors appelée *distinguée*. La famille collective  $A$  des cartes distinguées sera dite *l'atlas distingué associé à  $f$* . Un changement de carte  $\sigma_j \sigma_i^{-1}: \sigma_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \sigma_j(U_i \cap U_j)$  de  $A$  sera considéré admissible si et seulement si  $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ .

Pour pouvoir extraire de  $A$  des familles définissant des voisinages simples de  $A_n$ , nous avons besoin d'une définition et d'un lemme. La dé-

monstration du lemme, pour une famille finie, se trouve dans (1), p. 33, mais le même raisonnement est aussi applicable au cas d'une famille dénombrable et localement finie.

**DÉFINITION.** Soient deux familles d'ensembles,  $(B_i)_{i \in I}$  et  $(D_i)_{i \in I}$ , ayant même ensemble d'indices. Nous dirons qu'elles sont *similaires* lorsque, une intersection quelconque d'éléments de  $(B_i)_{i \in I}$  est non vide si et seulement si l'intersection des éléments correspondants de  $(D_i)_{i \in I}$  est non vide.

**LEMME 2.1.** Soient  $X$  un espace normal,  $\{F_i\}_{i \in \mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}}$  une famille dénombrable et localement finie de parties fermées de  $X$ . Il existe une famille dénombrable  $\{W_i\}_{i \in \mathbf{N}}$  de parties ouvertes de  $X$  telles que  $F_i \subset W_i$  pour tout  $i \in \mathbf{N}$ , et que  $\{F_i\}_{i \in \mathbf{N}}$  soit similaire aussi bien à  $\{W_i\}_{i \in \mathbf{N}}$  qu'à  $\{\overline{W_i}\}_{i \in \mathbf{N}}$ .

Il est évident que, si  $\{Y_i\}_{i \in \mathbf{N}}$  est une famille d'ouverts tels que  $F_i \subset Y_i$ ,  $\{F_i\}_{i \in \mathbf{N}}$  est aussi similaire à  $\{W_i \cap Y_i\}_{i \in \mathbf{N}}$  et à  $\{\overline{W_i \cap Y_i}\}_{i \in \mathbf{N}}$ .

**PROPOSITION 2.1.** Etant donné un recouvrement  $\{(U_s'', V_s'')\}$  de  $A_n$  par des cartes de  $A$ , il existe un recouvrement plus fin  $\{(U_i, V_i)\}$  définissant un voisinage simple de  $A_n$ .

**DÉMONSTRATION.** Soit  $\{V_i'\}$  un recouvrement ouvert de  $A_n$  tel que  $\{\overline{V_i'}\}$  soit un recouvrement de  $A_n$  localement fini et plus fin que  $\{V_s''\}$ . Cela entraîne en particulier que  $\{\overline{V_i'}\}$  est dénombrable. La sous-variété  $A_n$  étant fermée dans  $\bigcup U_s''$ ,  $\{\overline{V_i'}\}$  est aussi localement fini dans  $\bigcup U_s''$ . Pour chaque  $i$ , choisissons un  $s = s(i)$  tel que  $\overline{V_i'} \subset V_{s(i)}''$  et ensuite, moyennant le lemme 2.1, un voisinage ouvert  $W_i'$  de  $\overline{V_i'}$  dans  $M_m$  tel que  $\overline{W_i'} \subset U_{s(i)}''$  et que  $\{\overline{V_i'}\}$  soit similaire à  $\{W_i'\}$  et à  $\{\overline{W_i'}\}$ . Soit  $\{V_i\}$  un recouvrement ouvert de  $A_n$  tel que  $\overline{V_i'} \subset V_i \subset \overline{V_i'} \subset W_i' \cap A_n$  et choisissons les boules  $b_i^{m-n}$  et les ouverts  $U_i$  de façon que  $\sigma_{s(i)}''(\overline{U_i}) = \overline{b_i^{m-n}} \times \sigma_{s(i)}''(\overline{V_i'}) \subset \sigma_{s(i)}''(W_i')$ . Cela définit un voisinage simple  $\{(U_i, V_i)\}$ . En effet,  $\{\overline{V_i'}\}$  étant similaire à  $\{U_i\}$  et à  $\{\overline{U_i}\}$ , il s'ensuit que toutes les fois où  $V_{i_1} \cap V_{i_2} \cap \dots \cap V_{i_q} = \emptyset$ , ce qui donne  $\overline{V_{i_1}'} \cap \overline{V_{i_2}'} \cap \dots \cap \overline{V_{i_q}'} = \emptyset$ , on a aussi  $\overline{U_{i_1}} \cap \overline{U_{i_2}} \cap \dots \cap \overline{U_{i_q}} = \emptyset$ .

**PROPOSITION 2.2.** Le voisinage simple  $\{(U_i, V_i)\}_{i \in \mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}}$  de  $A_n$  peut être construit de façon que, pour un indice  $\nu \in \mathbf{N}$  arbitrairement choisi, la frontière  $F U_\nu$  de  $U_\nu$  ne soit pas complètement recouverte par les compacts  $\overline{U_i}$  pour lesquels  $i \neq \nu$  et  $\overline{U_i} \cap \overline{U_\nu} \neq \emptyset$ .

Pour le montrer, on choisit un point  $u \in F U_\nu$ , n'appartenant pas à  $A_n$ . Soient  $i_1, i_2, \dots, i_q$  les valeurs de  $i \neq \nu$ , en nombre fini, pour lesquelles

$\bar{U}_i \cap F U_i \neq \emptyset$ . Nous pouvons déterminer deux voisinages, l'un de  $u$  et l'autre de  $\bar{V}_{i_1} \cup \bar{V}_{i_2} \cup \dots \cup \bar{V}_{i_q}$ , sans points communs. Diminuant les rayons des boules  $b_{i_1}^{m-n}, b_{i_2}^{m-n}, \dots, b_{i_q}^{m-n}$  on peut donc faire en sorte que  $u \notin \bar{U}_{i_1} \cup \bar{U}_{i_2} \cup \dots \cup \bar{U}_{i_q}$ .

Moyennant le même raisonnement et procédant par récurrence, on démontre la

**PROPOSITION 2.3.** *Si  $A_n$  n'est pas compacte, nous pouvons construire un voisinage simple  $\{(U_i, V_i)\}_{i \in \mathbf{N}}$  tel que  $\{U_i\}_{i \in \mathbf{N}}$  contienne une suite infinie d'ouverts  $U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_q}, \dots$ , deux à deux sans points communs et tels que, pour  $q = 1, 2, \dots$ , la frontière  $F U_{i_q}$  ne soit pas complètement recouverte par les compacts  $\bar{U}_i$  pour lesquels  $i \neq i_q$  et  $\bar{U}_i \cap \bar{U}_{i_q} \neq \emptyset$ .*

**REMARQUE 2.3.1.** Nous pouvons introduire dans l'ensemble des voisinages simples une relation de préordre. Etant donnés deux éléments  $\{(U_i, V_i)\}$  et  $\{(U'_i, V'_i)\}$  de cet ensemble, nous écrirons  $\{(U_i, V_i)\} < \{(U'_i, V'_i)\}$  si et seulement si  $\bigcup U_i \subset \bigcup U'_i$ . Il est alors évident que  $A_n$  possède un ensemble filtrant décroissant de voisinages simples.

**PROPOSITION 2.4.** *Soit  $\{(U'_i, V'_i)\}_{i \in \mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}}$  une famille extraite de  $A$  et telle que  $\{V'_i\}$  soit un recouvrement localement fini de  $A_n$ . Pour tout  $V'_{i_1 i_2 \dots i_q} = V'_{i_1} \cap V'_{i_2} \cap \dots \cap V'_{i_q} \neq \emptyset$ , soit  $W'_{i_1 i_2 \dots i_q}$  un voisinage ouvert de  $V'_{i_1 i_2 \dots i_q}$  dans  $M_m$ . Il existe un voisinage simple  $\{(U_i, V_i)\}_{i \in \mathbf{N}}$  de  $A_n$  tel que  $\bar{V}_i \subset V'_i$  et  $\bar{U}_i \subset U'_i$  pour tout  $i \in \mathbf{N}$ , et que  $\bar{U}_{i_1} \cap \bar{U}_{i_2} \cap \dots \cap \bar{U}_{i_q} \subset W'_{i_1 i_2 \dots i_q}$  toutes les fois où  $V_{i_1} \cap V_{i_2} \cap \dots \cap V_{i_q} \neq \emptyset$ .*

**DÉMONSTRATION.** Raisonnant comme dans la proposition 2.1, nous construisons un voisinage simple  $\{(U_i, V_i)\}_{i \in \mathbf{N}}$  remplissant les conditions  $\bar{V}_i \subset V'_i$  et  $\bar{U}_i \subset U'_i$ . Les autres conditions seront satisfaites par diminution des rayons des boules  $b_i^{m-n}$  qui interviennent dans les homéomorphismes  $U_i \rightarrow b_i^{m-n} \times V_i$ .

Soit  $V_1 \cap V_{i_1} \cap V_{i_2} \cap \dots \cap V_{i_q} = V_{1 i_1 i_2 \dots i_q} \neq \emptyset$ , ce qui entraîne

$$\bar{V}_1 \cap \bar{U}_{i_1} \cap \bar{U}_{i_2} \cap \dots \cap \bar{U}_{i_q} = \bar{V}_1 \cap \bar{V}_{i_1} \cap \bar{V}_{i_2} \cap \dots \cap \bar{V}_{i_q} \subset W'_{1 i_1 i_2 \dots i_q}.$$

Soit  $Y$  le complémentaire de  $W'_{i_1 i_2 \dots i_q}$  dans  $M_m$  et choisissons des ouverts disjoints  $X_1$  et  $X_2$  tels que  $\bar{V}_1 \cap Y \subset X_1 \subset U_1'$  et  $\bar{U}_{i_1} \cap \bar{U}_{i_2} \cap \dots \cap \bar{U}_{i_q} \cap Y \subset X_2$ . Par diminution du rayon de  $b_1^{m-n}$ , on peut faire en sorte que  $\bar{b}_1^{m-n} \times$

$\times \sigma'_1(\bar{V}_1) \subset \sigma'_1(X_1 \cup W_{i_1' i_2' \dots i_q'})$  ou  $\bar{U}_1 \subset X_1 \cup W_{i_1' i_2' \dots i_q'}$ , ce qui donne  $\bar{U}_1 \cap \bar{U}_{i_1} \cap \bar{U}_{i_2} \cap \dots \cap \bar{U}_{i_q} \subset W_{i_1' i_2' \dots i_q'}$ .

Diminuant le rayon de  $b_1^{m-n}$  un nombre fini de fois, on obtient donc cette condition toutes les fois où l'indice 1 y intervient.

Nous raisonnons maintenant par récurrence. Si les conditions  $\bar{U}_{j_1} \cap \bar{U}_{j_2} \cap \dots \cap \bar{U}_{j_p} \subset W_{j_1' j_2' \dots j_p'}$  sont vraies toutes les fois où les indices 1, 2, ...,  $\nu - 1$  y interviennent, on peut, par diminution du rayon de  $b_\nu^{m-n}$ , faire en sorte qu'il en soit de même pour les indices 1, 2, ...,  $\nu$ . Cela prouve notre assertion, puisque  $\{(U_i, V_i)\}$  reste toujours un voisinage simple au cours de ces diminutions successives.

## 2. Voisinages tubulaires avec rétraction sur $A_n$ .

Soit  $\{U_s\}$  la famille (non collective) des ouverts de  $M_m$  pour lesquels il existe des cartes distinguées  $(U_s, V_s)$  et des rétractions continues  $\tau_s: U_s \rightarrow V_s$ . Soit  $\mathcal{F}_s$  l'ensemble des germes de  $\tau_s$  aux points de  $V_s$ . Nous pouvons munir  $\mathcal{F} = \bigcup \mathcal{F}_s$  d'une topologie ayant  $\{\mathcal{F}_s\}$  pour base. Pour le voir, il suffit de montrer que toute intersection  $\mathcal{F}_k \cap \mathcal{F}_l$  est encore un élément de  $\{\mathcal{F}_s\}$ . Or, si  $\mathcal{F}_k \cap \mathcal{F}_l \neq \emptyset$ , il existe un voisinage ouvert  $Q_{kl}' \subset U_k \cap U_l$  de  $V_k \cap V_l \neq \emptyset$  tel que  $\tau_k|_{Q_{kl}'} = \tau_l|_{Q_{kl}'}$ . Soit  $Q_{kl} = Q_{kl}' \cap \tau_k^{-1}(V_k \cap V_l) \cap \tau_l^{-1}(V_k \cap V_l)$ , ce qui entraîne  $\tau_k|_{Q_{kl}} = \tau_l|_{Q_{kl}} = \tau_{kl}$ . Puisque la restriction de  $\tau_k$  (resp. de  $\tau_l$ ) à  $\tau_k^{-1}(V_k \cap V_l)$  (resp. à  $\tau_l^{-1}(V_k \cap V_l)$ ) est une rétraction sur  $V_k \cap V_l$ , il s'ensuit que  $\tau_{kl}$  est une rétraction de  $Q_{kl}$  sur  $V_k \cap V_l$ , d'où le résultat. Introduisant ensuite l'application  $\mathcal{F} \rightarrow A_n$  qui associe à tout germe le point de  $A_n$  où il est défini, nous faisons de  $\mathcal{F}$  un espace étalé (non séparé) sur  $A_n$ . C'est le faisceau des germes de rétractions locales sur  $A_n$ .

PROPOSITION 2.5. *Le faisceau  $\mathcal{F}$  est mou.*

Il s'agit de montrer que tout point  $v \in A_n$  possède dans  $A_n$  un voisinage ouvert  $V$  tel que toute section de  $\mathcal{F}$  au-dessus d'un sous-ensemble fermé de  $A_n$  contenu dans  $V$  se prolonge à  $V$ . Nous montrons, en effet, que si  $(\sigma, (U, V))$  est une carte distinguée pour laquelle  $v \in V$ , l'ouvert  $V$  satisfait à cette condition.

Soit  $\mathcal{F}_0$  le faisceau des germes de rétractions locales sur  $R^n$  relativement à  $R^m$ . Puisque  $\sigma$  transforme toute rétraction locale en rétraction locale et que tout fermé contenu dans  $V$  est compact, la proposition 2.5 est une conséquence immédiate du

LEMME 2.2. *Pour toute section  $s$  de  $\mathcal{F}_0$  au-dessus d'un compact  $K \subset R^n$ , il existe une rétraction  $\tau: R^m \rightarrow R^n$  ayant le germe  $s(y)$  en tout point  $y \in K$ .*



DÉMONSTRATION. D'après (4), p. 150, la section  $s$  se prolonge à une section de  $\mathcal{F}_0$  au-dessus d'un voisinage de  $K$  dans  $R^n$ . Par conséquent, il existe un recouvrement fini  $\{V_i'\}_{1 \leq i \leq \nu}$  de  $K$  par des ouverts relativement compacts de  $R^n$ , et, pour chaque  $i$ , un ouvert  $U_i'$  de  $R^m$ ,  $U_i' \cap R^n = V_i'$ , donnant lieu à une rétraction  $\tau_i: U_i' \rightarrow V_i'$ , de façon que, toutes les fois où  $V_i' \cap V_j' \neq \emptyset$ , les applications  $\tau_i$  et  $\tau_j$  aient même germe en tout point de  $V_i' \cap V_j'$ . Cela entraîne  $\tau_i|_{Q'_{ij}} = \tau_j|_{Q'_{ij}}$ ,  $Q'_{ij}$  étant un voisinage ouvert de  $V_i' \cap V_j'$  dans  $R^m$ . Soient  $\{V_i\}_{1 \leq i \leq \nu}$  un recouvrement de  $K$  par des ouverts de  $R^n$  tels que  $\bar{V}_i \subset V_i'$ , et  $b^{m-n}$  une boule donnant lieu aux conditions  $\bar{U}_i = \bar{b}^{m-n} \times \bar{V}_i \subset U_i'$  et  $\bar{U}_i \cap \bar{U}_j \subset Q'_{ij}$  pour  $\bar{V}_i \cap \bar{V}_j \neq \emptyset$ . La collection  $\{\tau_i\}_{1 \leq i \leq \nu}$  définit une seule application  $\tau$  de  $\bigcup U_i$  dans  $R^n$  et la restriction de  $\tau$  à  $\tau^{-1}(\bigcup V_i) = W$  est une rétraction de  $W$  sur  $\bigcup V_i = Y$ . Soient  $\bar{Y}_1 \subset Y$  un voisinage compact de  $K$  et  $\bar{b}_1^{m-n}$  une boule pour laquelle  $\bar{b}_1^{m-n} \times \bar{Y}_1 \subset W$ . Soit  $\gamma = \gamma(x, y)$  une fonction numérique  $C^\infty$  à support compact contenu dans  $W$ , comprise entre 0 et 1, égale à 1 sur  $\bar{b}_1^{m-n} \times \bar{Y}_1$ . Tout point de  $R^m$  étant un couple  $(x, y) \in R^{m-n} \times R^n$ ,  $\tau$  applique  $(x, y) \in W$  sur  $\varphi(x, y) \in R^n$  de façon que  $\varphi(0, y) = y$ . Par conséquent, si l'on écrit  $\varphi(x, y) = y + h(x, y)$ , ce qui donne  $h(0, y) = 0$ , la fonction  $y + \gamma h(x, y)$  fournit la rétraction cherchée.

THÉORÈME 2.1. *Pour tout plongement plat  $C^0$ ,  $f: M_n \rightarrow M_m$ , il existe un voisinage  $W$  de  $A_n = f(M_n)$  dans  $M_m$  donnant lieu à une rétraction continue  $\tau: W \rightarrow A_n$ .*

DÉMONSTRATION. Le faisceau  $\mathcal{F}$  étant mou, il existe un recouvrement  $\{(U_i', V_i')\}$  de  $A_n$  par des cartes de  $A$  de façon que les conditions suivantes soient remplies.

1)  $\{V_i'\}$  est un recouvrement localement fini de  $A_n$ .

2) Pour tout  $i$ , il existe une rétraction  $\tau'_i: U_i' \rightarrow V_i'$  de façon que, toutes les fois où  $V_{i_1}' \cap V_{i_2}' \cap \dots \cap V_{i_q}' \neq \emptyset$ , les applications  $\tau'_{i_1}, \tau'_{i_2}, \dots, \tau'_{i_q}$  aient même germe en tout point de  $\bar{V}_{i_1}' \cap \bar{V}_{i_2}' \cap \dots \cap \bar{V}_{i_q}'$ .

Soit  $W_{i_1' i_2' \dots i_q'}$  un voisinage ouvert de  $\bar{V}_{i_1}' \cap \bar{V}_{i_2}' \cap \dots \cap \bar{V}_{i_q}'$  dans  $M_m$  tel que  $\tau'_{i_1}|_{W_{i_1' i_2' \dots i_q'}} = \tau'_{i_2}|_{W_{i_1' i_2' \dots i_q'}} = \dots = \tau'_{i_q}|_{W_{i_1' i_2' \dots i_q'}}$ . D'après la proposition 2.4, il existe un voisinage simple  $\{(U_i, V_i)\}$  tel que  $\bar{V}_i \subset V_i'$  et que

$$\bar{U}_{i_1} \cap \bar{U}_{i_2} \cap \dots \cap \bar{U}_{i_q} \subset W_{i_1' i_2' \dots i_q'} \quad \text{toutes les fois où} \quad V_{i_1} \cap V_{i_2} \cap \dots \cap V_{i_q} \neq \emptyset.$$

Soient  $W_i = \tau_i^{-1}(V_i) \cap U_i$ ,  $\tau_i = \tau'_i|_{W_i}$ , ce qui entraîne d'une part que  $\tau_i$  est une rétraction de  $W_i$  sur  $V_i$ , d'autre part que  $W_{i_1} \cap W_{i_2} \cap \dots \cap W_{i_q} \neq \emptyset$  si et seulement si  $V_{i_1} \cap V_{i_2} \cap \dots \cap V_{i_q} \neq \emptyset$ .

Nous montrons que l'ouvert  $W = \bigcup W_i$  satisfait à la condition de l'énoncé. Soient  $u \in W$  un point quelconque et  $W_{i_1}, W_{i_2}, \dots, W_{i_q}$  les ouverts, en nombre fini, de  $\{W_i\}$  contenant  $u$ . Tout revient à montrer que  $\tau_{i_1}(u) = \tau_{i_2}(u) = \dots = \tau_{i_q}(u)$ .

Comme on a  $W_{i_1} \cap W_{i_2} \cap \dots \cap W_{i_q} \neq \emptyset$ , il en résulte  $V_{i_1} \cap V_{i_2} \cap \dots \cap V_{i_q} \neq \emptyset$  et  $W_{i_1} \cap W_{i_2} \cap \dots \cap W_{i_q} \subset W_{i_1' i_2' \dots i_q'}$ . Par conséquent  $\tau_{i_1}'(u) = \tau_{i_2}'(u) = \dots = \tau_{i_q}'(u)$  et puisque  $\tau_{i_j}'(u) = \tau_{i_j}(u)$  pour  $j = 1, 2, \dots, q$ , il s'ensuit bien  $\tau_{i_1}(u) = \tau_{i_2}(u) = \dots = \tau_{i_q}(u)$ .

REMARQUE. Supposons que  $\Lambda_n$  ne soit pas compacte. Soit  $\{(U_j', V_j')\}$ , ( $j = 1, 2, \dots$ ), une suite de cartes distinguées telle que les ouverts de la suite  $\{U_j'\}$  soient deux à deux sans points communs. D'une façon plus frappante, nous supposons en outre que la suite  $\{V_j'\}$  s'éloigne indéfiniment dans  $\Lambda_n$ , c'est-à-dire que, pour tout compact  $K$  de  $\Lambda_n$ , il existe un indice  $j_0$  pour lequel  $V_j' \cap K = \emptyset$  pour  $j \geq j_0$ . Soient, pour chaque  $j$ , un compact  $\bar{V}_j \subset V_j'$ , un compact  $\bar{U}_j \subset U_j'$  tel que  $\bar{U}_j \cap V_j' = \bar{V}_j$  et une rétraction  $\tau_j: \bar{U}_j \rightarrow \bar{V}_j$ . La section de  $\mathcal{F}$  au-dessus du fermé  $\bigcup \bar{V}_j$ , donnée par la collection  $\{\tau_j\}$ , se prolonge à  $\Lambda_n$  toute entière et détermine, d'après ce qui vient d'être démontré, une rétraction  $\tau: W \rightarrow \Lambda_n$ . Nous obtenons ainsi une rétraction globale  $\tau: W \rightarrow \Lambda_n$  prolongeant les germes d'une suite de retractions locales données à l'avance. Cette situation se présente dans toutes les questions du même genre qui seront abordées dans les paragraphes suivants.

### 3. Voisinnages tubulaires munis de structure de microfibré.

L'indice qui caractérise une carte  $(U_i, V_i)$  sera aussi utilisé pour désigner les coordonnées  $(x_i, y_i) \in R^{m-n} \times R^n$  de l'image  $\sigma_i(u)$  d'un point  $u \in U_i$ . Il est évident que  $u \in V_i$  si et seulement si  $(0, y_i) \in \sigma_i(V_i)$ . Nous écrirons souvent  $y_i$  au lieu de  $(0, y_i)$ . Un changement admissible de carte  $\sigma_j \sigma_i^{-1}$ ,  $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ , sera donné par deux équations,  $x_j = e_{ji}(x_i, y_i)$  et  $y_j = f_{ji}(x_i, y_i)$ , avec  $e_{ji}(0, y_i) = 0$ .

Une carte distinguée  $(\sigma_i, (U_i, V_i))$  sera dite *régulière*, si  $\sigma_i(U_i) \subset R^{m-n} \times \sigma_i(V_i)$ . La famille collective des cartes régulières sera appelée *l'atlas régulier* associé à  $f$  et sera notée  $\widehat{A}$ .

Si  $(U_i, V_i) \in \widehat{A}$ , la projection canonique  $(x_i, y_i) \rightarrow y_i$  est une rétraction  $p_i: \sigma_i(U_i) \rightarrow \sigma_i(V_i)$  qui détermine une rétraction locale  $\tau_i = \sigma_i^{-1} p_i \sigma_i: U_i \rightarrow V_i$ , appelée *rétraction régulière*. Soit  $G_i$  l'ensemble des germes de  $\tau_i$  aux points

de  $V_i$ . A l'ensemble des cartes de  $\widehat{A}$  correspond l'ensemble  $G = \bigcup G_i$  des germes des rétractions régulières sur  $A_n$ .

Nous pouvons munir  $G$  d'une topologie ayant  $\{G_i\}$  pour base. Il suffit pour cela de montrer que toute intersection  $G_k \cap G_l$  est encore un élément de  $\{G_i\}$ . Or,  $G_k \cap G_l \neq \emptyset$  signifie que  $\tau_k$  et  $\tau_l$ , considérées comme applications, coïncident sur un voisinage ouvert  $U_{kl}^* \subset U_k \cap U_l$  de  $V_k \cap V_l$ . Par conséquent, comme rétractions sur  $V_k \cap V_l$ , elles coïncident sur  $U_{kl}^* \cap \tau_k^{-1}(V_k \cap V_l) \cap \tau_l^{-1}(V_k \cap V_l)$ . Considérant les ouverts  $U_{kl}'$ ,  $U_{kl}''$  définis par les conditions

$$\sigma_k(U_{kl}') = (R^{m-n} \times \sigma_k(V_k \cap V_l)) \cap \sigma_k(U_k)$$

$$\sigma_l(U_{kl}'') = (R^{m-n} \times \sigma_l(V_k \cap V_l)) \cap \sigma_l(U_l)$$

et posant  $U_{kl} = U_{kl}^* \cap U_{kl}' \cap U_{kl}''$ , les restrictions  $\sigma_{kl} = \sigma_k|_{U_{kl}}$  et  $\sigma_{lk} = \sigma_l|_{U_{kl}}$  définissent les cartes régulières  $(\sigma_{kl}, (U_{kl}, V_k \cap V_l))$  et  $(\sigma_{lk}, (U_{kl}, (V_k \cap V_l)))$  avec les rétractions régulières correspondantes  $\tau_{kl} = \tau_k|_{U_{kl}}$  et  $\tau_{lk} = \tau_l|_{U_{kl}}$ , donc  $G_k \cap G_l = G_{kl} = G_{lk} \in \{G_i\}$ . L'ensemble  $G$ , muni de la topologie ainsi introduite, est un espace étalé sur  $A_n$ . C'est le faisceau des germes de rétractions locales régulières sur  $A_n$ .

Notons que la relation  $\tau_{kl}(u) = \tau_{lk}(u)$  entraîne  $\sigma_k^{-1}p_k(x_k, y_k) = \sigma_l^{-1}p_l(x_l, y_l)$  ou  $(0, y_l) = \sigma_l \sigma_k^{-1}(0, y_k)$ . La seconde équation du changement  $\sigma_{lk} \sigma_{kl}^{-1}$  est donc de la forme  $y_l = f_{lk}(y_k)$ .

**PROPOSITION 2.6.** *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un microfibré  $A_n \xrightarrow{\iota} Q \xrightarrow{\tau} A_n$  est que  $G(A_n) \neq \emptyset$ .*

**DÉMONSTRATION.** La condition étant évidemment nécessaire, nous allons montrer qu'elle est aussi suffisante. Nous pouvons donc supposer qu'il existe un recouvrement  $\{(U_i', V_i')\}$  de  $A_n$  par des cartes régulières de façons que les conditions ci-dessous soient satisfaites.

1)  $\{V_i'\}$  est un recouvrement localement fini de  $A_n$ .

2) Toutes les fois où  $V_i' \cap V_j' \neq \emptyset$ , il existe un voisinage ouvert  $W_{ij}' \subset U_i' \cap U_j'$  de  $V_i' \cap V_j'$  tel que les restrictions  $\sigma_{ij}' = \sigma_i'|_{W_{ij}'}$  et  $\sigma_{ji}' = \sigma_j'|_{W_{ij}'}$  donnent lieu à des cartes régulières,  $(\sigma_{ij}', (W_{ij}', V_i' \cap V_j'))$  et  $(\sigma_{ji}', (W_{ij}', V_i' \cap V_j'))$ , avec les rétractions régulières correspondantes  $\tau_{ij}' = \tau_i'|_{W_{ij}'}$  et  $\tau_{ji}' = \tau_j'|_{W_{ij}'}$ .

Soit  $\{(U_i, V_i)\}$  un voisinage simple de  $A_n$  tel que  $\bar{V}_i \subset V_i'$ ,  $\bar{U}_i \subset U_i'$ ,  $\sigma_i'(\bar{U}_i) = \bar{V}_i^{m-n} \times \sigma_i'(\bar{V}_i)$ , et que  $\bar{U}_i \cap \bar{U}_j \subset W_{ij}'$  toutes les fois où  $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ . Posant  $\sigma^i = \sigma_i'|_{U_i}$ , nous montrons que la famille  $\{(\sigma_i, (U_i, V_i))\}$  détermine

un microfibré, c'est-à-dire qu'il existe une rétraction  $\tau : \bigcup U_i \rightarrow \Lambda_n$  telle que  $\tau|_{U_i} = \tau_i|_{U_i} = \tau_i$ .

Soit  $W_{i_1 i_2 \dots i_q} = U_{i_1} \cap U_{i_2} \cap \dots \cap U_{i_q} \neq \emptyset$ , ce qui est possible si et seulement si  $V_{i_1 i_2 \dots i_q} = V_{i_1} \cap V_{i_2} \cap \dots \cap V_{i_q} \neq \emptyset$ . Soient  $u \in W_{i_1 i_2 \dots i_q}$  et  $p_{i_k} \sigma_{i_k}(u) = y_{i_k} \in \sigma_{i_k}(V_{i_k})$ , ( $k = 1, 2, \dots, q$ ). Puisque la seconde équation de tout changement  $\sigma_i \sigma_{i_k}^{-1}$ , ( $k, l = 1, 2, \dots, q$ ), est de la forme  $y_{i_l} = f_{i_l i_k}(y_{i_k})$ , il en résulte  $(0, y_{i_l}) = \sigma_{i_l} \sigma_{i_k}^{-1}(0, y_{i_k})$  ou  $\tau_{i_k}(u) = \tau_{i_l}(u)$ , donc  $\tau_{i_1}(u) = \tau_{i_2}(u) = \dots = \tau_{i_q}(u)$ . Les restrictions  $\tau_{i_k}|_{W_{i_1 i_2 \dots i_q}}$ , ( $k = 1, 2, \dots, q$ ), sont donc identiques à une même application, qui est une rétraction de  $W_{i_1 i_2 \dots i_q}$  sur  $V_{i_1 i_2 \dots i_q}$ , d'où le résultat.

**THÉORÈME 2.2.** *Si  $\Lambda_n$  est donnée comme feuille d'un feuilletage mixte  $(C^0, C^1)$ , ( $C^1$  sur les feuilles), sur un ouvert  $W$  de  $M_m$ , il existe un voisinage ouvert  $Q \subset W$  de  $\Lambda_n$  et une rétraction  $\tau : Q \rightarrow \Lambda_n$  définissant un microfibré tel que les fibres  $\tau^{-1}(v)$ ,  $v \in \Lambda_n$ , et les feuilles du feuilletage donné déterminent sur  $Q$  une structure de produit local (c'est-à-dire de feuilletage double).*

**DÉMONSTRATION.** La structure feuilletée en question est définie par un atlas régulier  $\widehat{A} = \{(U_i, V_i)\}$  tel que tout changement admissible de cartes  $\sigma_j \sigma_i^{-1}$  soit de la forme

$$x_j = e_{ji}(x_i), \quad y_j = f_{ji}(x_i, y_i),$$

$$(V_i \cap V_j \neq \emptyset; \quad (x_i, y_i), (x_j, y_j) \in R^{m-n} \times R^n; \quad e_{ji}(0) = 0),$$

$f_{ji}(x_i, y_i)$  ayant des dérivées premières en  $y_i$  continues en  $(x_i, y_i)$ . Soit  $\widehat{G}$  le faisceau correspondant des germes de retractions régulières sur  $\Lambda_n$ . D'après la proposition 2.6, tout revient à prouver que  $\widehat{G}$  est mou.

Soit  $\tau_q : U_i \rightarrow U_i \cap \Lambda_n = V_i$  une rétraction continue telle qu'il existe une carte  $(\sigma_i, (U_i, V_i)) \in \widehat{A}$  pour laquelle la rétraction  $\sigma_i \tau_q \sigma_i^{-1} : \sigma_i(U_i) \rightarrow \sigma_i(V_i)$  est donnée par une fonction  $\varphi(x_i, y_i)$  possédant une matrice jacobienne en  $y_i$  continue en  $(x_i, y_i)$ . Nous dirons alors que  $\tau_q$  est une rétraction locale adaptée à  $\widehat{A}$ . En effet, cette définition ne dépend pas de la carte choisie  $\sigma_i \in \widehat{A}$ . Cela résulte de ce que, si l'on considère d'une part une carte  $(\sigma_j, (U_i, V_i)) \in \widehat{A}$  introduisant les coordonnées  $(x_j, y_j)$ , d'autre part les changements  $\sigma_i(U_i) \rightarrow \sigma_j(U_i)$  et  $\sigma_j(U_i) \rightarrow \sigma_i(U_i)$ ,

$$\sigma_j \sigma_i^{-1} : x_j = e_{ji}(x_i), \quad y_j = f_{ji}(x_i, y_i),$$

$$\sigma_i \sigma_j^{-1} : x_i = e_{ij}(x_j), \quad y_i = f_{ij}(x_j, y_j),$$

la rétraction  $\sigma_j \tau_q \sigma_j^{-1}$  est donnée par la fonction  $f_{ji}(0, \varphi(e_{ij}(x_j), f_{ij}(x_j, y_j)))$  qui possède aussi une matrice jacobienne en  $y_j$  continue en  $(x_j, y_j)$ .

Soit  $G'_q$  l'ensemble des germes de  $\tau_q$  aux points de  $V_i$ . Nous pouvons munir  $G' = \bigcup G'_q$  d'une topologie ayant  $\{G'_q\}$  pour base, parce que toute intersection  $G'_{q_1} \cap G'_{q_2}$  est encore un élément de  $\{G'_q\}$ . Ainsi  $G'$  devient un espace étalé sur  $\widehat{A}_n$ . C'est le faisceau des germes sur  $\widehat{A}_n$  des rétractions locales adaptées à  $\widehat{A}$ .

Le faisceau  $G'$  est mou. En effet, considérant la situation localement, on peut raisonner exactement comme dans la démonstration du lemme 2.2. La rétraction  $(x, y) \rightarrow y + \gamma h(x, y)$  qu'on obtient ainsi satisfait aux conditions voulues puisque  $\gamma = \gamma(x, y)$  est  $C^\infty$  et que  $h(x, y)$  admet dans le cas actuel une matrice jacobienne en  $y$  continue en  $(x, y)$ .

Nous allons démontrer maintenant que  $G' = \widehat{G}$ . Il suffit pour cela de prouver que tout élément  $G'_q$  de la base  $\{G'_q\}$  de  $G'$  est réunion d'éléments de la base de  $\widehat{G}$ . La matrice jacobienne de  $\varphi(x_i, y_i)$  en  $y_i$  se réduit à la matrice unité pour  $x_i = 0$ . Quel que soit le point  $(0, y_i^0) \in \sigma_i(V_i)$ , l'équation  $y_i^* = \varphi(x_i, y_i)$  se résout donc, sur un voisinage de ce point, sous la forme  $y_i = \varphi^*(x_i, y_i^*)$ , le deuxième membre ayant encore une matrice jacobienne en  $y_i^*$  continue en  $(x_i, y_i^*)$ . Nous pouvons donc choisir un voisinage ouvert  $U_i^* \subset U_i$  de  $\sigma_i^{-1}(0, y_i^0)$  donnant lieu à une carte régulière  $(\sigma_i^*, (U_i^*, V_i^*))$  de coordonnées  $(x_i, y_i^*)$ . Tout revient à montrer que  $\sigma_i^* \in \widehat{A}$ , c'est-à-dire que pour toute autre carte  $(\sigma_s, (U_s, V_s)) \in \widehat{A}$  pour laquelle  $V_s \cap V_i^* \neq \emptyset$ , les changements  $\sigma_s \sigma_i^{*-1}$  et  $\sigma_i^* \sigma_s^{-1}$  satisfont aux conditions de définition de  $\widehat{A}$ . Or considérant les changements

$$\sigma_s \sigma_i^{-1} : x_s = e_{si}(x_i), y_s = f_{si}(x_i, y_i),$$

$$\sigma_i \sigma_s^{-1} : x_i = e_{is}(x_s), y_i = f_{is}(x_s, y_s),$$

on constate que la deuxième équation de

$$\sigma_s \sigma_i^{*-1} : x_s = e_{si}(x_i), y_s = f_{si}(x_i, \varphi^*(x_i, y_i^*))$$

admet une matrice jacobienne en  $y_i^*$  continue en  $(x_i, y_i^*)$ , et de même que la deuxième équation de

$$\sigma_i^* \sigma_s^{-1} : x_i = e_{is}(x_s), y_i^* = \varphi(e_{is}(x_s), f_{is}(x_s, y_s))$$

possède une matrice jacobienne en  $y_s$  continue en  $(x_s, y_s)$ . Cela prouve notre assertion.

Puisque  $G'$  est mou et que  $G' = \widehat{G}$ , il en résulte que  $\widehat{G}$  est mou. Cela démontre le théorème.

PLONGEMENTS PLATS SEMI-DIFFÉRENTIABLES (2.2.a). Dans le théorème précédent, la sous-variété  $A_n$  est  $C^1$  par rapport à sa topologie interne. Nous pouvons concevoir une situation plus générale sans feuilletage. Supposons que l'on puisse couvrir  $A_n$  avec une famille de cartes régulières  $\widehat{A} = \{(U_i, V_i)\}$  satisfaisant à la condition suivante: La deuxième équation de tout changement admissible de cartes de  $\widehat{A}$ ,

$$x_j = e_{ji}(x_i, y_i), \quad y_j = f_{ji}(x_i, y_i), \quad (V_i \cap V_j \neq \emptyset),$$

admet des dérivées premières en  $y_i$  continues en  $(x_i, y_i)$ . Nous dirons alors que  $\widehat{A}$  définit un plongement plat semi-différentiable de  $A_n$ . Le faisceau correspondant des germes de rétractions régulières sur  $A_n$  n'est pas mou. Cela est dû au fait qu'il n'existe pas de rétractions locales adaptées à  $\widehat{A}$  comme dans le cas spécial du théorème 2.2.

Nous pouvons cependant démontrer l'existence d'un microfibré lorsque  $n = 1$  moyennant un recouvrement convenable.

THÉORÈME 2.3. *Tout plongement plat semi-différentiable de la droite numérique (ou de la sphère à une dimension) possède un microfibré.*

DÉMONSTRATION. Nous raisonnons sur le cas de la droite numérique.  $Z$  étant l'ensemble des entiers rationnels, nous considérons un recouvrement  $\{(U_i''', V_i''')\}_{i \in Z}$  de  $A_1$  par des cartes de  $\widehat{A}$  satisfaisant aux conditions suivantes :

- 1) Tout ouvert  $V_i'''$ , relativement compact par définition, est un intervalle.
- 2) L'intersection  $V_i''' \cap V_j'''$  est non vide si et seulement si les indices  $i, j$  sont consécutifs.
- 3) Pour trois indices consécutifs  $i - 1, i, i + 1$ , le complémentaire de  $(V_{i-1}''' \cap V_i''') \cup (V_i''' \cap V_{i+1}''')$  dans  $V_i'''$  est un intervalle compact non vide et non réduit à un point.

Soit  $\{V_i''\}_{i \in Z}$  un recouvrement de  $A_1$  par des intervalles tels que  $\bar{V}_i'' \subset V_i'''$ , ce qui entraîne  $\bar{V}_i'' \cap \bar{V}_j'' \neq \emptyset$  si et seulement si  $V_i'' \cap V_j'' \neq \emptyset$ .

Nous considérons encore deux recouvrements de  $A_1$  par des intervalles,  $\{V_i'\}_{i \in Z}$  et  $\{V_i''\}_{i \in Z}$ , de façon que  $\bar{V}_i' \subset V_i''$  et  $\bar{V}_i'' \subset V_i'$ .

La construction du microfibré s'obtient par un procédé de récurrence appliqué d'abord à la suite  $V_0'', V_1'', \dots, V_r'', \dots$ , qui détermine un certain sens de parcours sur  $A_1$ , disons le sens positif, puis à la suite  $V_0'', V_{-1}'', \dots, V_{-r}'', \dots$ , qui détermine le sens de parcours négatif.

Considérons des boules  $b_i^{m-1}$  et des ouverts  $U_i''$  donnant lieu aux conditions

$$\bar{U}_i'' \subset U_i''', \quad \sigma_i'''(\bar{U}_i'') = \bar{b}_i^{m-1} \times \sigma_i'''(\bar{V}_i''),$$

$$\bar{U}_i'' \cap \bar{U}_j'' \neq \emptyset \quad \text{si et seulement si} \quad \bar{V}_i'' \cap \bar{V}_j'' \neq \emptyset.$$

Posant  $\sigma_i'' = \sigma_i''' | U_i''$ , nous commençons par les cartes  $\sigma_0''$ ,  $\sigma_1''$  et les changements correspondants

$$\sigma_1'' \sigma_0''^{-1} : x_1 = e_{10}(x, y), \quad y_1 = f_{10}(x, y)$$

$$\sigma_0'' \sigma_1''^{-1} : x = e_{01}(x_1, y_1), \quad y = f_{01}(x_1, y_1).$$

Soit  $\sigma_1''(Y_1'') \subset \sigma_1''(U_0'' \cap U_1'')$  l'image inverse de  $\sigma_1''(V_0'' \cap V_1'')$  par l'application

$$(x_1, y_1) \rightarrow f_{10}(0, f_{01}(x_1, y_1)) = y_1 + h_1(x_1, y_1), \quad h_1(0, y_1) = 0.$$

Soient  $a_1', a_1, a_1$  les extrémités à gauche des  $V_1'', V_1', V_1$ , par rapport au sens positif, et  $c_1'', c_1, c_1$  leurs extrémités à droite. Désignons par  $I_1'$  (resp.  $I_1$ ) le segment ouvert d'extrémités  $a_1'$  et  $c_1''$  (resp. d'extrémités  $a_1$  et  $c_1$ ). Choisissons des boules  $b_0^{m-1} \subset b_0^{m-1}$ ,  $b_1^{m-1} \subset b_1^{m-1}$  et des ouverts  $U_0'$ ,  $U_1'$  de façon que

$$U_0' \subset U_0'', \quad U_1' \subset U_1'', \quad \bar{U}_0' \cap \bar{U}_1' \subset Y_1'',$$

$$\sigma_0''(U_0') = b_0^{m-1} \times \sigma_0''(V_0'), \quad \sigma_1''(U_1') = b_1^{m-1} \times \sigma_1''(I_1').$$

Soit  $\gamma_1 = \gamma_1(x_1, y_1)$  une fonction numérique  $C^\infty$  à support compact contenu dans  $\sigma_1''(U_0'' \cap U_1'')$ , comprise entre 0 et 1, égale à 1 sur  $\sigma_1''(\bar{U}_0' \cap \bar{U}_1')$ . Pour  $b_1^{m-1}$  suffisamment petite, le système

$$x_1 = x_1, \quad y_1^* = y_1 + \gamma_1 h_1(x_1, y_1)$$

définit un homéomorphisme  $\varphi_1'' : \sigma_1''(U_1') \rightarrow \varphi_1'' \sigma_1''(U_1'')$  qui, étant donné que  $U_0'' \cap U_2'' = \emptyset$ , se réduit à l'identité sur  $\sigma_1''(U_1' \cap U_2'')$ . Cela permet de

choisir une boule  $b_1^{m-1} \subset b_1'^{m-1}$  et un ouvert  $U_1 \subset U_1'$  de façon que  $\varphi_1' \sigma_1''(U_1) = b_1^{m-1} \times \sigma_1''(I_1)$ . Posant  $\sigma_1 = \varphi_1' \sigma_1''|_{U_1}$ , nous remplaçons la carte  $(\sigma_1'', (U_1'', V_1''))$  par la carte régulière  $(\sigma_1, (U_1, I_1))$  qui prolonge le germe de microfibré de  $\sigma_0' = \sigma_0''|_{U_0'}$ . Comme les coordonnées  $x_1, y_1$  ne se modifient pas sur  $U_1 \cap U_2''$ , nous pouvons prolonger de la même façon le germe de microfibré de  $\sigma_1$  par une nouvelle carte régulière  $\sigma_2$  qui ne modifie pas les coordonnées  $x_2, y_2$  sur  $U_2'' \cap U_3''$ . La construction s'achève donc par récurrence dans le sens positif, et aussi dans le sens négatif.

**4. Fibrés vectoriels engendrés par des microfibrés.**

Dans ce paragraphe nous considérons un microfibré  $A_n \xrightarrow{\iota} Q \xrightarrow{\tau} A_n$  donné comme microfibré mixte du type  $(C^0, C^1)$ , c'est-à-dire tel que le feuilletage défini par ses fibres soit un feuilletage mixte  $(C^0, C^1)$ ,  $C^1$  sur les fibres. Si  $\widehat{A}_\tau = \{(\sigma_i, (U_i, V_i))\}$  est l'atlas de définition de ce microfibré, on a  $\sigma_i(U_i) \subset R^{m-n} \times \sigma_i(V_i)$  pour tout  $i$ , et  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  seulement si  $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ . Pour tout changement de carte de  $\widehat{A}_\tau$ ,

$$\sigma_j \sigma_i^{-1} : x_j' = e_{ji}(x_i', y_i), \quad y_j = f_{ji}(y_i), \quad ((x_i', y_i), (x_j', y_j)) \in R^{m-n} \times R^n,$$

$e_{ji}(x_i', y_i)$  admet une matrice jacobienne en  $x_i'$  de rang  $m - n$  continue en  $(x_i', y_i)$ . En particulier

$$l_{ji}(y_i) = \left\| \frac{\partial e_{ji}(x_i', y_i)}{\partial x_i'} \right\|_{x_i'=0}$$

est un élément du groupe linéaire  $L_{m-n}$  variant continûment avec  $y_i$ . Soit  $l_{ji}(y_i) \cdot x$  le transformé d'un vecteur  $x \in R^{m-n}$  par cet élément. Considérant l'espace somme  $\Sigma(R^{m-n} \times V_i)$  et la relation d'équivalence

$$\varrho : (x, v) \sim (l_{ji}(y_i) \cdot x, v), \quad (x \in R^{m-n}, v \in V_i \cap V_j, y_i = \sigma_i(v)),$$

nous définissons un fibré vectoriel  $\Gamma = \frac{\Sigma(R^{m-n} \times V_i)}{\varrho}$  que nous appellerons

le fibré transverse de  $A_n$  (relativement au microfibré considéré). Nous identifions  $A_n$  à la section nulle de  $\Gamma$ . Soient  $\iota_\Gamma$  l'injection canonique  $A_n \rightarrow \Gamma$  et  $\pi$  la projection canonique  $\Gamma \rightarrow A_n$ . En vertu de  $\tau(U_i) = V_i$  et de la trivialisation  $\psi_i : \pi^{-1}(V_i) \rightarrow R^{m-n} \times \sigma_i(V_i)$ , nous pouvons considérer un ouvert  $W_{iq} \subset \pi^{-1}(V_i)$  tel que  $W_{iq} \cap A_n = V_i$ , un isomorphisme  $\xi_{iq} : U_i \rightarrow W_{iq}$ , et un isomorphisme  $\zeta_{iq} : \sigma_i(U_i) \rightarrow \psi_i(W_{iq})$  induit par  $\xi_{iq}$ , de façon que le



diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \sigma_i(U_i) & \xrightarrow{\zeta_{iq}} & \psi_i(W_{iq}) \\
 \sigma_i \uparrow & \nearrow \xi_{iq} & \uparrow \psi_i \\
 U_i & \xrightarrow{\tau} & W_{iq} \\
 \swarrow \iota & \searrow \pi & \swarrow \iota_r \\
 & V_i &
 \end{array}$$

soit commutatif. Supposons que  $\zeta_{iq}$  soit donné par des équations de la forme  $x_i = \alpha'_{iq}(x'_i, y_i)$ ,  $y_i = y_i$ . Supposons en outre que la fonction  $\alpha'_{iq}(x'_i, y_i)$  admette une matrice jacobienne en  $x'_i$  continue en  $(x'_i, y_i)$  et se réduisant à la matrice unité pour  $x'_i = 0$ . La définition même du fibré transverse implique que ces propriétés ne dépendent pas de la carte choisie de  $\widehat{A}_\tau$  sur  $U_i$ . En effet, par rapport à d'autres coordonnées  $(x'_j, y_j)$ , on a

$$x_j = l_{ji}(y_i) \cdot x_i = l_{ij}^{-1}(y_j) \cdot \alpha'_{iq}(e_{ij}(x'_j, y_j), f_{ij}(y_j)),$$

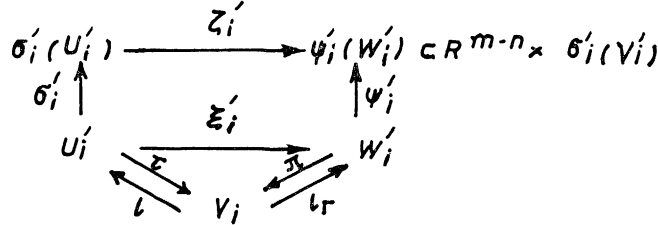
expression qui possède une matrice jacobienne en  $x'_j$  continue en  $(x'_j, y_j)$  et se réduisant à la matrice unité pour  $x'_j = 0$ . Il convient donc d'appeler, dans ce cas,  $\xi_{iq}$  un *isomorphisme local adapté* à  $\widehat{A}_\tau$ . Soit  $E$  l'ensemble des germes sur  $A_n$  des isomorphismes locaux adaptés à  $\widehat{A}_\tau$ . C'est un faisceau de base  $A_n$ .

**PROPOSITION 2.7.** *Le faisceau  $E$  est mou.*

**DÉMONSTRATION.** Soient  $v_0 \in A_n$  et  $(\sigma', (U', V')) \in \widehat{A}_\tau$  telle que  $v_0 \in V'$ . Soit  $V$  un voisinage ouvert de  $v_0$  dans  $A_n$  tel que  $\bar{V} \subset V'$ . Nous allons montrer que toute section de  $E$  au-dessus d'un compact  $K \subset V$  se prolonge à  $V$ . Cette section étant prolongeable à un voisinage de  $K$ , il existe un recouvrement fini  $\{(\xi''_i, (U_i'', V_i''))\}_{1 \leq i \leq \nu}$  de  $K$  par des isomorphismes locaux adaptés à  $\widehat{A}_\tau$  de façon que, toutes les fois où  $V_i'' \cap V_j'' \neq \emptyset$ , on puisse déterminer dans  $M_m$  un voisinage ouvert  $U_{ij}''$  de  $V_i'' \cap V_j''$  tel que les restrictions des  $\xi''_i$  et  $\xi''_j$  à  $(U_{ij}'', V_i'' \cap V_j'')$  soient encore des isomorphismes locaux adaptés à  $\widehat{A}_\tau$ .

Soit  $\{V_i'\}_{1 \leq i \leq \nu}$  un recouvrement ouvert de  $K$  tel que  $\bar{V}_i' \subset V_i''$ . Nous choisissons une boule  $b^{m-n}$  et des ouverts  $U_i'$  donnant lieu aux conditions  $U_i' \subset U_i''$ ,  $\sigma'_i(U_i') = b^{m-n} \times \sigma''_i(V_i')$ ,  $U_i' \cap U_j' \subset U_{ij}''$  pour  $V_i' \cap V_j' \neq \emptyset$ , et nous introduisons les cartes  $\sigma'_i = \sigma''_i | U_i'$  et les restrictions  $\xi'_i = \xi''_i | U_i'$ .

Les trivialisations  $\psi'_i : \pi^{-1}(V'_i) \rightarrow R^{m-n} \times \sigma'_i(V'_i)$  et les isomorphismes  $\zeta'_i$  induits par les  $\xi'_i$  définissent alors les diagrammes commutatifs



Soient  $\zeta'_i(x'_i, y_i) = (x_i, y_i)$  avec  $x_i = \alpha'_i(x'_i, y_i)$  et la réciproque  $x'_i = \alpha_i(x_i, y_i)$ , et posons  $\varphi'_i = \zeta'_i \sigma'_i$ . On a évidemment, pour  $V'_i \cap V'_j \neq \emptyset$ , les changements

$$\sigma'_j \sigma'^{-1}_i : x'_j = e_{ji}(x'_i, y_i), \quad y_j = f_{ji}(y_i),$$

$$\varphi'_j \varphi'^{-1}_i : x_j = l_{ji}(y_i) \cdot x_i, \quad y_j = f_{ji}(y_i),$$

avec  $l_{ji}(y_i) = \left\| \frac{\partial e_{ji}(x'_i, y_i)}{\partial x'_i} \right\|_{x'_i=0}$ , tandis que toute transformation  $\sigma' \sigma'^{-1}$  est donnée par les équations

$$x' = e_{0i}(x'_i, y_i), \quad y = f_{0i}(y_i),$$

avec la réciproque

$$\sigma'_i \sigma'^{-1} : x'_i = e_{i0}(x', y), \quad y = f_{i0}(y).$$

Soient

$$\bar{e}_{0i}(x_i, y_i) = e_{0i}(\alpha_i(x_i, y_i), y_i), \quad \bar{e}_{i0}(x', y) = \alpha'_i(e_{i0}(x', y), f_{i0}(y)),$$

ce qui donne les transformations

$$\sigma' \varphi'^{-1}_i : x' = \bar{e}_{0i}(x_i, y_i), \quad y = f_{0i}(y_i),$$

$$\varphi'_i \sigma'^{-1} : x_i = \bar{e}_{i0}(x', y), \quad y = f_{i0}(y).$$

Introduisant les matrices

$$l_{0i}(y_i) = \left\| \frac{\partial e_{0i}(x'_i, y_i)}{\partial x'_i} \right\|_{x'_i=0} = \left\| \frac{\partial \bar{e}_{0i}(x_i, y_i)}{\partial x_i} \right\|_{x_i=0},$$

$$l_{i0}(y) = \left\| \frac{\partial e_{i0}(x', y)}{\partial x'} \right\|_{x'=0} = \left\| \frac{\partial \bar{e}_{i0}(x, y)}{\partial x} \right\|_{x=0},$$

et tenant compte de ce que

$$\varphi'_i(U' \cap U'_i) \subset R^{m-n} \times \varphi'_i(V' \cap V'_i), \quad \sigma'(U' \cap U'_i) \subset R^{m-n} \times \sigma'(V' \cap V'_i),$$

on voit que les fonctions  $l_{0i}(y_i) \cdot x_i$  et  $l_{i0}(y) \cdot x'$  sont définies et continues sur  $\varphi'_i(U' \cap U'_i)$  et  $\sigma'(U' \cap U'_i)$  respectivement.

Puisque  $l_{0i}(y_i) = l_{i0}^{-1}(y)$  avec  $y = f_{0i}(y_i)$ , posant

$$\bar{e}_{i0}(x', y) - l_{i0}(y) \cdot x' = q_{i0}(x', y),$$

on obtient

$$l_{0i}(y_i) \cdot x_i = x' + h_i(x', y), \quad h_i(0, y) = 0,$$

la fonction  $h_i(x', y) = l_{0i}(f_{i0}(y)) \cdot q_{i0}(x', y)$  admettant une matrice jacobienne en  $x'$  continue en  $(x', y)$ .

Si  $U' \cap U'_i \cap U'_j \neq \emptyset$ , ce qui entraîne  $V' \cap V'_i \cap V'_j \neq \emptyset$ , on aura

$$h_j(x', y) - h_i(x', y) = l_{0j}(y_j) \cdot x_j - l_{0i}(y_i) \cdot x_i = (l_{0j}(f_{ji}(y_i)) \cdot l_{ji}(y_i) - l_{0i}(y_i)) \cdot x_i = 0,$$

et cela prouve que la collection  $\{h_i(x', y)\}_{1 \leq i \leq \nu}$  détermine une seule fonction  $h(x', y)$  sur  $\sigma' \left( \bigcup_{i=1}^{\nu} (U' \cap U'_i) \right)$ .

Soit  $\{V_i\}_{1 \leq i \leq \nu}$  un recouvrement de  $K$  par des ouverts de  $A_n$  tels que  $\bar{V}_i \subset V'_i$ , et choisissons la boule  $b^{m-n}$  et les ouverts  $U, U_i$ , de façon que

$$\bar{U} \subset U', \quad \bar{U}_i \subset U'_i,$$

$$\sigma'(\bar{U}) = \bar{b}^{m-n} \times \sigma'(\bar{V}), \quad \sigma'_i(\bar{U}_i) = \bar{b}^{m-n} \times \sigma'_i(\bar{V}_i).$$

Soit  $\gamma = \gamma(x', y)$  une fonction numérique  $C^\infty$  à support compact contenu dans  $\sigma' \left( \bigcup_{i=1}^{\nu} (U' \cap U'_i) \right)$ , comprise entre 0 et 1, égale à 1 sur  $\sigma' \left( \bigcup_{i=1}^{\nu} (\bar{U} \cap \bar{U}_i) \right)$ . Les équations  $x = x' + \gamma h_i(x', y)$ , ( $i = 1, 2, \dots, \nu$ ), définissent alors sur  $R^m$  une seule équation  $x = x' + \gamma h(x', y)$ , dont le second membre admet une matrice jacobienne en  $x'$  continue en  $(x', y)$  et se réduisant à la matrice unité pour  $x' = 0$ . Diminuant si besoin le rayon de  $b^{m-n}$ , on peut donc faire en sorte que l'application définie par le système

$$x = x' + \gamma h(x', y), \quad y = y,$$

soit un homéomorphisme

$$\zeta : \sigma'(U) \rightarrow \zeta \sigma'(U).$$

Soient

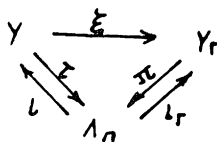
$$\sigma_i = \sigma'_i | U_i, \quad \sigma = \sigma' | U, \quad \xi_i = \xi'_i | U_i, \quad \zeta_i = \zeta'_i | \sigma_i(U_i), \quad \varphi_i = \zeta_i \sigma_i, \quad \varphi = \zeta \sigma.$$

Introduisant encore la trivialisatıon  $\psi : \pi^{-1}(V) \rightarrow R^{m-n} \times \sigma(V)$  et posant  $\psi^{-1} \zeta \sigma = \xi$ ,  $\xi(U) = W$ , on voit que  $\xi : U \rightarrow W$  est un isomorphisme local adapté à  $\widehat{A}_\tau$  induisant l'isomorphisme  $\zeta$  et donnant lieu aux changements

$$\varphi\varphi_i^{-1} : x = l_{0i}(y_i) \cdot x_i, \quad y = f_{0i}(y_i).$$

Cela prouve que  $\xi$  prolonge à  $V$  la section considérée au-dessus de  $K$ .

**THÉORÈME 2.4.** *Etant donné un microfibré mixte du type  $(C^0, C^1)$ ,  $A_n \xrightarrow{\iota} Q \xrightarrow{\tau} A_n$ , il existe un voisinage ouvert  $Y$  de  $A_n$  dans  $Q$ , un voisinage ouvert  $Y_\Gamma$  de  $A_n$  dans le fibré transverse  $\Gamma$ , et un isomorphisme  $\xi : Y \rightarrow Y_\Gamma$  de façon que le diagramme*



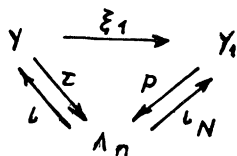
soit commutatif.

Nous omettons la démonstration qui s'obtient immédiatement en prenant une section du faisceau  $E$ .

**FIBRÉ NORMAL.** D'après la théorie générale (7), le fibré transverse de  $A_n$  (relativement au microfibré considéré) est  $L_{m-n}$  — équivalent à un fibré vectoriel  $A_n \xrightarrow{\iota_N} N \xrightarrow{p} A_n$  à groupe  $\Theta_{m-n}$  (groupe orthogonal de transformations de  $R^{m-n}$ ). Ce fibré vectoriel sera appelé le fibré normal de  $A_n$  (relativement au microfibré considéré).

**THÉORÈME 2.5.** *Etant donné un microfibré mixte du type  $(C^0, C^1)$ ,  $A_n \xrightarrow{\iota} Q \xrightarrow{\tau} A_n$ , il existe un voisinage ouvert  $N_m$  de  $A_n$  dans  $Q$  et un fibré vectoriel  $C^0$ ,  $A_n \xrightarrow{\iota} N_m \xrightarrow{\tau_N} A_n$ , qui s'identifie au fibré normal de  $A_n$ .*

**DÉMONSTRATION.** Moyennant le théorème 2.4, nous pouvons déterminer un voisinage ouvert  $Y$  de  $A_n$  dans  $Q$ , un voisinage ouvert  $Y_1$  de  $A_n$  dans le fibré normal  $N$  et un isomorphisme  $\xi_1 : Y \rightarrow Y_1$  de façon que le diagramme



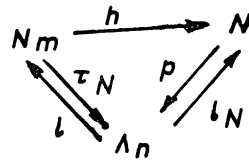
soit commutatif. Soit  $\{V_i\}$  un recouvrement localement fini de  $A_n$  par des ouverts relativement compacts donnant lieu à des trivialisations  $\alpha_i: R^{m-n} \times \bar{V}_i \rightarrow p^{-1}(\bar{V}_i)$ , ce qui permet d'identifier  $N$  à l'espace quotient de  $\Sigma(R^{m-n} \times V_i)$  par la relation d'équivalence

$$\varrho: (x, v) \sim (\theta_{ji}(v) \cdot x, v), \quad (x \in R^{m-n}, \theta_{ji}(v) \in \Theta_{m-n}, v \in V_i \cap V_j).$$

Soient  $b_i^{m-n}$  des boules telles que  $\alpha_i(b_i^{m-n} \times V_i) \subset Y_1 \cap p^{-1}(V_i)$ . Soient  $\varepsilon_i$  le rayon de  $b_i^{m-n}$  et, pour chaque  $i$ ,  $\varepsilon_i$  le plus petit des rayons  $\varepsilon'_j$  pour lesquels  $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ . Soit  $\{\gamma_i\}$  une partition continue de l'unité subordonnée au recouvrement  $\{V_i\}$  et considérons la fonction  $\gamma(v) = \sum \varepsilon_i \gamma_i(v)$  qui est strictement positive et qui satisfait à la condition  $\gamma(v) \leq \varepsilon'_i$  pour tout  $v \in V_i$ . Définissons les injections  $\varphi_i: b_i^{m-n} \times V_i \rightarrow R^{m-n} \times V_i$  en posant  $\varphi_i(x, v) = \left( \frac{x}{\gamma(v)}, v \right)$ , ce qui entraîne  $b^{m-n} \times V_i \subset \varphi_i(b_i^{m-n} \times V_i)$ ,  $b^{m-n}$  étant la boule de rayon 1.

Puisque l'homothétie  $x \rightarrow \frac{x}{\gamma(v)}$  commute avec les opérations du groupe  $\Theta_{m-n}$ , la collection  $\{\alpha_i \varphi_i\}$  définit un isomorphisme fibré de  $\frac{\sum b_i^{m-n} \times V_i}{\varrho} \subset Y_1$  sur un voisinage de  $A_n$  dans  $N$  contenant  $\frac{\sum b^{m-n} \times V_i}{\varrho}$ . Comme aussi la transformation  $x \rightarrow \frac{x}{1-|x|}$ ,  $|x| < 1$ , commute avec les opérations de  $\Theta_{m-n}$ ,  $\frac{\sum b^{m-n} \times V_i}{\varrho}$  est isomorphe à  $N$ .

Nous obtenons finalement un voisinage ouvert  $N_m \subset Y$  de  $A_n$  et un isomorphisme  $h: N_m \rightarrow N$  rendant commutatif le diagramme



donc un isomorphisme permettant d'identifier  $N_m$  à  $N$  et d'obtenir le fibré vectoriel annoncé.

REMARQUE 2.5.1. Comme les résultats de ce paragraphe sont obtenus moyennant un minimum d'hypothèses de différentiabilité, leur validité s'

étend, immédiatement à un microfibré  $C^r$ ,  $r \geq 1$ . Le fibré transverse est alors  $C^{r-1}$  sur base  $C^r$ . Les isomorphismes locaux adaptés à  $\widehat{A}_r$  seront définis par des fonctions  $\alpha'_{iq}(x'_i, y_i)$  qui sont  $C^{r-1}$  en  $(x'_i, y_i)$  et  $C^r$  en  $x'_i$ . Le faisceau des germes sur  $A_n$  de ces isomorphismes étant encore mou, les théorèmes 2.4 et 2.5 sont vrais pour un microfibré  $C^r$  et pour des isomorphismes  $\zeta$  et  $h$  mixtes  $(C^{r-1}, C^r)$ . En ce qui concerne en particulier la démonstration du théorème 2.5, la partition de l'unité utilisée doit être  $C^{r-1}$  ou  $C^r$ .

5. Cas des sous-variétés  $C^r$ ,  $r \geq 1$ .

Les variétés  $M_n$  et  $M_m$ , ainsi que l'application  $f: M_n \rightarrow M_m$  étant  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , supposons que le rang de  $f$  soit partout égal à  $n$  et que  $A_n = f(M_n)$ , munie de sa topologie interne, soit un sous-espace de  $M_m$ . Supposons en d'autres termes que  $A_n$  soit une sous-variété  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , de  $M_m$ . Comme  $f$  est alors un plongement plat, tout ce qui précède s'y applique. Mais il y a plus.

La définition d'une carte distinguée est toujours la même, mais l'atlas distingué  $A^r$  ne comprendra maintenant que les cartes qui donnent lieu à des changements  $C^r$ . Nous associons à  $A^r$ , d'une manière évidente, le faisceau  $\mathcal{F}^r$  des germes de rétractions locales  $C^r$  sur  $A_n$ , et aussi le faisceau  $\mathcal{G}^r$  des germes de rétractions locales régulières  $C^r$  sur  $A_n$ .

PROPOSITION 2.8. Si  $r \geq 1$ , les faisceaux  $\mathcal{F}^r$  et  $\mathcal{G}^r$  sont identiques.

Pour le prouver il suffit d'établir que tout ouvert de la base de  $\mathcal{F}^r$  est réunion d'ouverts de la base de  $\mathcal{G}^r$ . Prenant une carte distinguée  $(\sigma', (U', V')) \in A^r$  et une rétraction  $C^r$ ,  $\tau': U' \rightarrow V'$ , tout revient à montrer que tout point  $v \in V'$  possède un voisinage  $V \subset V'$  dans  $A_n$  et un voisinage  $U \subset U'$  dans  $M_m$  tels que la restriction  $\tau' | U = \tau$  soit une rétraction régulière de  $U$  sur  $V$ , c'est-à-dire qu'il existe une carte régulière  $(\sigma, (U, V)) \in A^r$  pour laquelle  $\tau = \sigma^{-1} p \sigma$ ,  $p$  étant la projection canonique de  $\sigma(U)$  sur  $\sigma(V)$ . Or la rétraction  $\sigma' \tau' \sigma'^{-1}: \sigma'(U') \rightarrow \sigma'(V')$  étant donnée par une fonction  $C^r$ ,  $y + h(x, y)$ , telle que  $h(0, y) = 0$ , l'équation  $y + h(x, y) = y^*$  se résout sous la forme  $y = \varphi(x, y^*)$  sur un voisinage de  $\sigma'(v)$ . Cela prouve l'existence d'une carte régulière  $(\sigma, (U, V))$  pour laquelle  $\tau = \sigma^{-1} p \sigma$ . Le fait que  $(\sigma, (U, V))$  appartient à  $A^r$  est évident aussi, puisque tout est différentiable.

THÉOREME 2.6. Si  $A_n$  est une sous-variété  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , de  $M_m$ , il existe un voisinage ouvert  $Q$  de  $A_n$  et une rétraction  $C^r$ ,  $\tau: Q \rightarrow A_n$ , définissant un microfibré  $C^r$ ,  $A_n \xrightarrow{\iota} Q \xrightarrow{\tau} A_n$ .

En effet, comme  $G^r$  est identique à  $\mathcal{F}^r$ , il est mou, d'après la proposition 2.5. Le résultat est donc une conséquence immédiate de la proposition 2.6.

La construction d'une rétraction  $C^r$ ,  $r \geq 1$ ,  $\tau: Q \rightarrow A_n$ , sans microfibré, se trouve aussi dans (6).

**THÉORÈME 2.7.** *Si  $A_n$  est une sous-variété  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , de  $M_m$ , il existe un voisinage ouvert  $N_m$  de  $A_n$  dans  $M_m$  et un fibré vectoriel  $C^{r-1}$ ,*

$$A_n \xrightarrow{\iota} N_m \xrightarrow{\tau} A_n, \text{ à fibres isomorphes à } R^{m-n} \text{ et à groupe } \Theta_{m-n}.$$

C'est une conséquence du théorème 2.6 et de la remarque 2.5.1.

**COROLLAIRE.** *Si  $A_n$  est une sous-variété  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , de  $M_m$ , il existe un voisinage ouvert  $N_m$  de  $A_n$  dans  $M_m$  et un fibré vectoriel de classe  $C^r$ ,*

$$A_n \xrightarrow{\iota} N_m \xrightarrow{\tau} A_n, \text{ à fibres isomorphes à } R^{m-n} \text{ et à groupe } \Theta_{m-n}. \text{ (Mais la structure } C^r \text{ de } N_m \text{ n'est pas en général celle induite par la structure } C^r \text{ de } M_m).$$

Cela résulte de ce qu'il existe un isomorphisme fibré  $C^{r-1}$  appliquant le fibré vectoriel du théorème 2.7 sur un fibré vectoriel  $C^r$  de base  $A_n$ . Ce corollaire est notamment utile lorsque toutes les structures  $C^r$  qu'on peut définir sur  $M_m$  sont isomorphes.

**THÉORÈME 2.8.** *Si  $A_n$  est une feuille d'un feuilletage  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , dans  $M_m$ , il existe un voisinage ouvert  $Q$  de  $A_n$  et un microfibré  $C^r$ ,  $A_n \xrightarrow{\iota} Q \xrightarrow{\tau} A_n$ , tel que le feuilletage défini par ses fibres soit supplémentaire au feuilletage donné.*

C'est évidemment un corollaire du théorème 2.2.

**FIBRÉ TRANSVERSE DE  $A_n$ .** Comme  $A_n$  est  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , tout microfibré  $C^r$  de base  $A_n$  engendre un fibré transverse de  $A_n$  suivant § 4. Tous les fibrés ainsi obtenus appartiennent à une même classe d'équivalence qui définit un fibré vectoriel  $T$  appelé *le fibré transverse de  $A_n$* . Nous pouvons déterminer  $T$  sans l'intermédiaire des microfibrés. En effet, à tout changement admissible de cartes de  $A^r$ ,

$$\sigma_j \sigma_i^{-1}: x'_i = e_{ji}(x'_i, y_i), \quad y_i = f_{ji}(x'_i, y_i), \quad (V_i \cap V_j \neq \emptyset),$$

est associé canoniquement un isomorphisme  $C^{r-1}$ ,

$$R^{m-n} \times \sigma_i(V_i \cap V_j) \rightarrow R^{m-n} \times \sigma_j(V_i \cap V_j),$$

défini par les équations

$$x_j = l_{ji}(y_i) \cdot x_i, \quad y_j = f_{ji}(0, y_i),$$

avec  $l_{ji}(y_i) = \left\| \frac{\partial e_{ji}(x'_i, y_i)}{\partial x'_i} \right\|_{x'_i=0}$ . La relation d'équivalence correspondante

$$\varrho : (x, v) \sim (l_{ji}(y_i) \cdot x, v), \quad (x \in R^{m-n}, v \in V_i \cap V_j, y_i = \sigma_i(v)),$$

définit le fibré transverse

$$T = \frac{\Sigma (R^{m-n} \times V_i)}{\varrho}.$$

Supposons que  $T$  possède un sous-fibré  $T_\alpha$  à groupe discret. Soit  $A_\alpha^r$  la partie de  $A^r$  engendrant  $T_\alpha$ . Cela signifie que, pour tout changement admissible  $\sigma_j \sigma_i^{-1}$  de cartes de  $A_\alpha^r$ , la matrice  $l_{ji} = \left\| \frac{\partial e_{ji}(x'_i, y_i)}{\partial x'_i} \right\|_{x'_i=0}$  a une valeur constante sur toute composante connexe de  $\sigma_i(V_i \cap V_j)$ . Par conséquent  $T_\alpha$  est  $C^r$  et possède un feuilletage supplémentaire aux fibres. Soient  $\widehat{A}_\alpha^r$  l'atlas régulier contenu dans  $A_\alpha^r$ ,  $G_\alpha^r$  le faisceau correspondant des germes de rétractions locales régulières  $C^r$  sur  $A_n$ . Ce faisceau est mou en vertu de la

**PROPOSITION 2.9.**  $\mathcal{F}^r = G^r = G_\alpha^r$  pour  $r \geq 1$ .

En effet, se rapportant à la démonstration de la proposition 2.8, on voit qu'il suffit de faire en sorte que la carte  $(\sigma, (U, V))$  appartienne à  $\widehat{A}_\alpha^r$ . Soient  $(\sigma'_1, (U'_1, V_1))$  une carte de  $A_\alpha^r$  telle que  $v \in V_1 \subset V'$  et  $U_1 = U' \cap \tau'^{-1}(V_1)$ ,  $\sigma_1 = \sigma'_1|_{U_1}$ ,  $\tau_1 = \tau'|_{U_1}$ . La rétraction  $\sigma_1 \tau_1 \sigma_1^{-1} : \sigma_1(U_1) \rightarrow \sigma_1(V_1)$  étant donnée par une fonction  $C^r$ ,  $y + h_1(x, y)$ , avec  $h_1(0, y_1) = 0$ , nous pouvons introduire des nouvelles coordonnées  $(x, y^*)$  telles que  $y^* = y + h_1(x, y)$ . Les cartes régulières correspondantes appartiennent à  $\widehat{A}_\alpha^r$  parce que le changement  $(x, y) \rightarrow (x, y^*)$  ne modifie pas  $x$ .

La proposition 2.9 conduit à la généralisation d'un théorème de Ehresmann (3).

**THÉORÈME 2.9.** Soit  $A_n$  une sous-variété  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , de  $M_m$ . Pour qu'il existe un voisinage feuilleté  $C^r$  de  $A_n$  ayant  $A_n$  comme feuille, il faut et il suffit que le fibré transverse de  $A_n$  possède un sous-fibré  $T_\alpha$  à groupe discret.



DÉMONSTRATION. La condition étant évidemment nécessaire, montrons qu'elle est aussi suffisante. La proposition 2.9 montre qu'on peut construire un microfibré  $\mathcal{A}_n \xrightarrow{\iota} Q \xrightarrow{\tau} \mathcal{A}_n$  en utilisant exclusivement des cartes de  $\widehat{\mathcal{A}}_\alpha^r$ . Les isomorphismes locaux adaptés à l'atlas de définition de ce microfibré seront maintenant définis par des fonctions  $\alpha'_{i_q}(x'_i, y_i)$  qui sont  $C^r$  en  $(x'_i, y_i)$ , leur matrice en  $x'_i$  se réduisant toujours à la matrice unité pour  $x'_i = 0$ . Le faisceau des germes sur  $\mathcal{A}_n$  de ces isomorphismes est mou. Cela se démontre en raisonnant comme dans la démonstration de la proposition 2.7 et tenant compte de ce que les matrices qui y interviennent ont des valeurs constantes dans le cas actuel. Il existe donc un voisinage ouvert  $Y$  de  $\mathcal{A}_n$  dans  $Q$ , un voisinage ouvert  $Y_\alpha$  de  $\mathcal{A}_n$  dans  $T_\alpha$  et un isomorphisme  $C^r$ ,  $\xi: Y \rightarrow Y_\alpha$ , rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{\xi} & Y_\alpha \\
 \swarrow \iota & \tau & \nearrow \pi \\
 & \mathcal{A}_n & \\
 \nwarrow \iota & \tau & \nearrow \pi \\
 & \mathcal{A}_n & \\
 \swarrow \iota & \tau & \nearrow \pi \\
 & \mathcal{A}_n & \\
 \nwarrow \iota & \tau & \nearrow \pi \\
 & \mathcal{A}_n & 
 \end{array}$$

$\pi$  étant la projection canonique de  $T_\alpha$  sur  $\mathcal{A}_n$ . Cela démontre le théorème.

Il convient de remarquer que la démonstration ci-dessus fournit un résultat plus fort qu'on ne le demande, à savoir un voisinage doublement feuilleté. En revanche, elle nécessite la construction préalable d'un microfibré. Nous pouvons cependant utiliser un procédé différent: Construire d'abord un feuilletage simple et ensuite un feuilletage double moyennant le théorème 2.8. Pour obtenir un feuilletage simple, sans passer par l'intermédiaire d'un microfibré, nous procédons comme suit.

Toute carte  $(\sigma, (U, V)) \in \widehat{\mathcal{A}}_\alpha^r$ , considérée séparément, définit sur  $U$  un feuilletage  $F_V$  ayant  $V$  comme feuille. Soit  $W_i \in \pi^{-1}(V)$  un ouvert tel que  $W_i \cap \mathcal{A}_n = V$ . Le feuilletage de  $T_\alpha$  supplémentaire aux fibres induit sur  $W_i$  un feuilletage  $F_V^{(i)}$  ayant aussi  $V$  comme feuille. Considérons un isomorphisme  $\xi_i: U \rightarrow W_i$  qui applique  $V$  sur  $V$  et toute autre feuille de  $F_V$  sur une feuille de  $F_V^{(i)}$ . Les germes des  $\xi_i$  aux points de  $V$  définissent, lorsque  $\sigma$  parcourt  $\widehat{\mathcal{A}}_\alpha^r$ , un faisceau dont les sections déterminent les feuilletages simples cherchés. Il suffit donc de prouver que ce faisceau est mou. Nous omettons la démonstration qui ne présente que des difficultés techniques.

### III. VOISINAGES PSEUDOTUBULAIRES ASSOCIÉS

#### A UNE IMMERSION PLATE $f: M_n \rightarrow M_m$ .

Pour tout point  $u_0 \in M_n$ , soit  $E(u_0)$  l'ensemble des points de  $M_n$  qui ont même image que  $u_0$  par  $f$ . Puisque  $f$  est localement injective,  $E(u_0)$  n'admet pas de points d'accumulation, donc tout compact de  $M_n$  contient un nombre fini de points de  $E(u_0)$ . Comme  $M_n$  est dénombrable à l'infini,  $E(u_0)$  est un ensemble fini ou infini dénombrable,  $E(u_0) = \{u_0, u_1, \dots, u_q, \dots\}$ . En conséquence nous pouvons construire une suite d'ouverts de  $M_n$  relativement compacts

$$Y_{u'_0}, Y_{u'_1}, \dots, Y_{u'_q}, \dots$$

deux à deux sans points communs, tels que  $u_q \in Y_{u'_q}$  pour  $q = 0, 1, 2, \dots$ , et que la restriction de  $f$  à chacun d'eux soit injective. Soient  $\bar{Y}_{u_0}, \bar{Y}_{u_1}, \dots, \bar{Y}_{u_q}, \dots$  des voisinages ouverts des  $u_0, u_1, \dots, u_q, \dots$  tels que  $\bar{Y}_{u_q} \subset Y_{u'_q}$ , ( $q = 0, 1, 2, \dots$ ). En les diminuant, si besoin, on peut faire en sorte que tout  $f(Y_{u'_q})$  donne lieu à des cartes distinguées  $\sigma_{i, u_q}: U_{i, u_q} \rightarrow R^m$ , donc telles que  $U_{i, u_q}$  soit relativement compact dans  $M_m$  et que  $\sigma_{i, u_q}(f(Y_{u'_q})) = R^n \cap \sigma_{i, u_q}(U_{i, u_q})$ . Soit  $A(u_0)$  l'ensemble des cartes distinguées obtenues pour tous les choix possibles de la suite  $Y_{u'_0}, Y_{u'_1}, \dots, Y_{u'_q}, \dots$ . La réunion

$$A = \bigcup_{u \in M_n} A(u) = \{(U_i, f(Y_i)) \varphi\}$$

est, par définition, l'atlas distingué associé à  $f$ . Un changement de cartes  $\sigma_j \sigma_i^{-1}$  de  $A$  sera considéré admissible si et seulement si  $Y_i \cap Y_j \neq \emptyset$ .

**LEMME 3.1.** Si  $(U_i, f(Y_i))$ , ( $i = 1, 2$ ), sont deux cartes de  $A$  pour lesquelles  $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$ , la restriction de  $f$  à un voisinage de  $\bar{Y}_1 \cup \bar{Y}_2$  est injective.

En effet, il existe par construction des ouverts  $Y'_i$  tels que  $\bar{Y}_i \subset Y'_i$  et que la restriction de  $f$  à  $Y'_i$  soit injective, ( $i = 1, 2$ ). Si  $u_1 \in Y'_1$  et  $u_2 \in Y'_2$  avaient même image par  $f$ , on aurait  $u_2 \in E(u_1)$ , donc  $Y'_1 \cap Y'_2 = \emptyset$  et  $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$ .

**LEMME 3.2.** Soient  $(U_i, f(Y_i))$ , ( $i = 1, 2$ ), deux cartes de  $A$  telles que  $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$ . Pour que la condition  $\sigma_1(f(Y_1 \cap Y_2)) = R^n \cap \sigma_1(U_1 \cap U_2)$  soit valable, il faut et il suffit que  $f(Y_1) \cap U_2 = f(Y_1 \cap Y_2)$ .

DÉMONSTRATION. Comme  $\sigma_1(f(Y_1) \cap U_2) \subset \sigma_1(f(Y_1)) \subset R^n$ , ce qui donne  $\sigma_1(f(Y_1) \cap U_2) = \sigma_1(f(Y_1) \cap U_2) \cap R^n \subset \sigma_1(U_1 \cap U_2) \cap R^n$ , cette condition entraîne

$$\sigma_1(f(Y_1) \cap U_2) \subset \sigma_1(f(Y_1 \cap Y_2)) \quad \text{ou} \quad f(Y_1) \cap U_2 \subset f(Y_1 \cap Y_2) = f(Y_1) \cap f(Y_2).$$

Comme d'ailleurs  $f(Y_2) \subset U_2$ , il en résulte bien  $f(Y_1) \cap U_2 = f(Y_1 \cap Y_2)$ .

Réciproquement, si  $f(Y_1) \cap U_2 = f(Y_1 \cap Y_2)$ , on a

$$\begin{aligned} \sigma_1(f(Y_1) \cap U_2) &= \sigma_1(f(Y_1) \cap U_2) \cap R^n = \sigma_1(U_1 \cap U_2 \cap f(Y_1)) \cap R^n = \\ &= \sigma_1(U_1 \cap U_2) \cap \sigma_1(f(Y_1)) \cap R^n = \sigma_1(U_1 \cap U_2) \cap \sigma_1(U_1) \cap R^n = \sigma_1(U_1 \cap U_2) \cap R^n. \end{aligned}$$

DÉFINITION. Le couple de deux cartes  $(U_i, f(Y_i)) \in A$ , ( $i = 1, 2$ ), sera dit *canonique*, si  $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$  et si les restrictions des  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  à  $(U_1 \cap U_2, f(Y_1 \cap Y_2))$  sont encore des cartes de  $A$ , c'est-à-dire si

$$\sigma_i(f(Y_1 \cap Y_2)) = R^n \cap \sigma_i(U_1 \cap U_2), \quad (i = 1, 2).$$

D'après le lemme 3.2, pour qu'un couple de deux cartes  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ , pour lesquelles  $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$ , soit canonique, il faut et il suffit que

$$(3.1) \quad f(Y_1) \cap U_2 = f(Y_1 \cap Y_2), \quad U_1 \cap f(Y_2) = f(Y_1 \cap Y_2).$$

DÉFINITION. Une famille  $\{(U_i, f(Y_i))\}$  extraite de  $A$  sera dite *canonique*, si  $\{Y_i\}$  est un recouvrement de  $M_n$  et si, toutes les fois où  $Y_i \cap Y_j \neq \emptyset$ , le couple des cartes  $(U_i, f(Y_i))$  et  $(U_j, f(Y_j))$  est canonique.

DÉFINITION. Nous dirons qu'une carte  $(\sigma, (U, f(Y))) \in A$  est *subordonnée* à la carte  $(\sigma', (U', f(Y'))) \in A$  si  $Y \subseteq Y'$ ,  $U \subset U'$  et  $\sigma = \sigma' | U$ .

LEMME 3.3. *Etant données deux cartes  $(\sigma'_i, (U'_i, f(Y_i))) \in A$ , ( $i = 1, 2$ ), telles que  $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$ , on peut, sans modifier  $Y_1$  et  $Y_2$ , déterminer deux autres cartes  $(\sigma_i, (U_i, f(Y_i)))$ , ( $i = 1, 2$ ), subordonnées respectivement aux deux premières et telles que leur couple soit canonique.*

En effet,  $\bar{Y}_1 \cup \bar{Y}_2$  étant compact,  $f | (\bar{Y}_1 \cup \bar{Y}_2)$  est un homéomorphisme de  $\bar{Y}_1 \cup \bar{Y}_2$  sur le sous espace  $f(\bar{Y}_1 \cup \bar{Y}_2)$  de  $M_m$ . Il existe donc des ouverts  $U_1''$  et  $U_2''$  de  $M_m$  tels que  $U_1'' \cap f(Y_1 \cup Y_2) = f(Y_1)$  et  $U_2'' \cap f(Y_1 \cup Y_2) = f(Y_2)$ . Prenant  $U_i = U'_i \cap U_i''$ , ( $i = 1, 2$ ), on vérifie immédiatement les conditions (3.1).

PROPOSITION 3.1. *Soit  $\{(U'_i, f(Y_i))\}$  une famille extraite de  $A$  et telle que  $\{Y_i\}$  soit un recouvrement localement fini (donc aussi dénombrable) de  $M_n$ .*

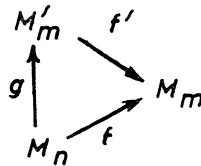
On peut, pour chaque  $i \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$  et sans modifier  $Y_i$ , déterminer une carte  $(U_i, f(Y_i))$  subordonnée à  $(U_i', f(Y_i))$  de façon que la famille qui en résulte  $\{(U_i, f(Y_i))\}_{i \in \mathbb{N}}$  soit canonique.

DÉMONSTRATION. Puisque  $Y_1$  est relativement compact, on a  $Y_i \cap Y_1 \neq \emptyset$  pour un nombre fini des valeurs  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_q$  de  $i \neq 1$ . Diminuant les  $U_1', U_{\nu_1}'$ , suivant le lemme 3.3, on obtient un couple canonique (désigné encore par les mêmes symboles). On diminue ensuite  $U_1'$  et  $U_{\nu_2}'$  pour obtenir un couple canonique etc. Cette opération, répétée  $\nu_q$  fois, nous permet donc de remplacer  $(U_1', f(Y_1))$  par une carte  $(U_1, f(Y_1))$  telle que tous les couples  $\{(U_1, f(Y_1)), (U_{\nu_j}', f(Y_{\nu_j}'))\}$ , ( $j = 1, 2, \dots, q$ ), soient canoniques.

Supposons notre construction achevée jusqu'à un indice  $\mu - 1$ . Cela signifie qu'on a substitué aux cartes  $(U_k', f(Y_k))$  les cartes subordonnées  $(U_k, f(Y_k))$ , ( $k = 1, 2, \dots, \mu - 1$ ), de façon que tous les couples pour lesquels  $Y_k \cap Y_i \neq \emptyset$ , ( $k \in \{1, 2, \dots, \mu - 1\}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ ), soient canoniques. Considérant la carte  $(U_\mu', f(Y_\mu))$  et les ouverts  $Y_i$ , en nombre fini, pour lesquels  $Y_\mu \cap Y_i \neq \emptyset$ , on applique le même procédé de réduction, ce qui ne modifie pas les cartes déjà obtenues  $(U_k, f(Y_k))$ , ( $k = 1, 2, \dots, \mu - 1$ ), et permet de remplacer  $(U_\mu', f(Y_\mu))$  par une carte subordonnée  $(U_\mu, f(Y_\mu))$  telle que tous les couples pour lesquels  $Y_\mu \cap Y_i \neq \emptyset$  soient canoniques. La famille cherchée s'obtient donc par récurrence.

REMARQUE. On vient de démontrer l'existence de familles canoniques par diminution des éléments d'un recouvrement de  $f(M_n)$  par des ouverts de  $M_m$ . On peut démontrer ensuite, moyennant le théorème de Zorn, l'existence d'une famille canonique maximale contenant toutes les cartes de la famille construite.

THÉORÈME 3.1. Toute famille canonique dénombrable détermine une variété paracompacte  $M_m'$  de dimension  $m$  telle qu'il existe un plongement plat  $g: M_n \rightarrow M_m'$  et un isomorphisme local  $f': M_m' \rightarrow M_m$  rendant commutatif le diagramme



DÉMONSTRATION. Prenant une famille canonique dénombrable  $\{(\sigma_i, (U_i, f(Y_i)))\}$ , nous considérons les ouverts  $W_i = \sigma_i(U_i) \subset R^m$  et nous posons  $W_{ij} = \sigma_i(U_i \cap U_j)$  si et seulement si  $Y_i \cap Y_j \neq \emptyset$ . Dans l'espace somme  $S$

des  $W_i$  nous introduisons la relation d'équivalence

$$\rho : u_i \sim u_j \iff u_i \in W_{ij}, \quad u_j \in W_{ji}, \quad u_j = \sigma_j \sigma_i^{-1}(u_i),$$

ce qui permet de définir l'espace topologique  $\frac{S}{\rho}$  par recollement des  $W_i$  le long des  $W_{ij}$ . Soit  $\varphi : S \rightarrow \frac{S}{\rho}$  l'application canonique correspondante. La restriction  $\varphi_i = \varphi|_{W_i}$  est évidemment un homéomorphisme de  $W_i$  sur le sous-espace  $\varphi(W_i)$  de  $\frac{S}{\rho}$ . Si  $Y_i \cap Y_j \neq \emptyset$ , les restrictions des  $\varphi_i \sigma_i$  et  $\varphi_j \sigma_j$  à  $U_i \cup U_j$  sont identiques et cela détermine un homéomorphisme de  $U_i \cup U_j$  sur le sous-espace  $\varphi_i(W_i) \cup \varphi_j(W_j)$  de  $\frac{S}{\rho}$ . Ce sous-espace est donc séparé. Cela prouve que  $\frac{S}{\rho}$  tout entier est séparé. En effet, prenant deux points quelconques  $z_1$  et  $z_2$  de  $\frac{S}{\rho}$ , on aura, pour deux indices convenables,  $z_1 \in \varphi_i(W_i)$  et  $z_2 \in \varphi_j(W_j)$ . Si tout voisinage de  $z_1$  rencontre tout voisinage de  $z_2$ , on aura  $\varphi_i(W_i) \cap \varphi_j(W_j) \neq \emptyset$ , ce qui entraîne  $Y_i \cap Y_j \neq \emptyset$ , donc  $\varphi_i(W_i) \cup \varphi_j(W_j)$  est séparé, d'où  $z_1 = z_2$ .

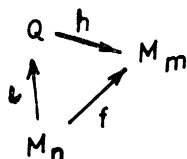
$\frac{S}{\rho}$  possède une base dénombrable puisqu'il en est de même de chacun des  $\varphi_i(W_i)$  et que  $\{\varphi_i(W_i)\}$  est une famille dénombrable. D'autre part  $\frac{S}{\rho}$  possède la structure d'une variété. Il est donc une variété paracompacte qui sera notée  $M'_m$ .

Définissons les applications  $g_i : Y_i \rightarrow M'_m$  en posant  $g_i(v) = \varphi_i \sigma_i f(v)$ . Si  $Y_i \cap Y_j \neq \emptyset$ , on a  $g_i|_{Y_i \cap Y_j} = g_j|_{Y_i \cap Y_j}$ , donc la collection  $\{g_i\}$  définit une seule application continue  $g : M_n \rightarrow M'_m$ . Si  $Y_i \cap Y_j \neq \emptyset$ , la restriction de  $g$  à  $Y_i \cup Y_j$  est injective. Cela prouve qu'elle est aussi globalement injective. En effet, si  $v_1 \in Y_i$ ,  $v_2 \in Y_j$  et  $Y_i \cap Y_j = \emptyset$ , on a  $\varphi_i(W_i) \cap \varphi_j(W_j) = \emptyset$ , donc  $g(v_1) \neq g(v_2)$ .

En vertu des conditions  $U_i \cap f(Y_j) = f(Y_i \cap Y_j)$  pour tout  $j$  tel que  $Y_i \cap Y_j \neq \emptyset$ , on a  $\varphi_i(W_i) \cap g(M_n) = g(Y_i)$ , donc la topologie naturelle de  $g(M_n)$  est celle de sous-espace de  $M'_m$ . Il s'ensuit que  $g$  est un plongement plat.

Définissons finalement les applications  $f'_i : \varphi_i(W_i) \rightarrow M_m$  en posant  $f'_i = (\varphi_i \sigma_i)^{-1}$ . Si  $\varphi_i(W_i) \cap \varphi_j(W_j) \neq \emptyset$ ,  $f'_i$  et  $f'_j$  coïncident sur cette intersection, donc la collection  $\{f'_i\}$  définit une seule application continue  $f' : M'_m \rightarrow M_m$  qui est un homéomorphisme local. Cela prouve le théorème.

VOISINAGES PSEUDOTUBULAIRES DE  $f(M_n)$ . Identifions  $M_n$  à  $g(M_n)$  et introduisons l'injection canonique  $\iota: M_n \rightarrow M'_m$ . Pour tout voisinage tubulaire  $Q$  de  $M_n$  dans  $M'_m$ , l'homéomorphisme local  $h = f' | Q$  donne lieu à un diagramme commutatif



qui détermine, par définition, un voisinage pseudotubulaire de  $f(M_n)$ . A part les voisinages simples, tous les voisinages tubulaires considérés sont munis des rétractions. Les voisinages pseudotubulaires avec rétraction seront donc déterminés par des diagrammes de la forme



A toute proposition concernant les voisinages tubulaires d'une sous-variété plate, on peut faire correspondre une proposition relative aux voisinages pseudotubulaires d'une variété immergée. Nous obtenons en particulier les énoncés suivants.

PROPOSITION 3.2. *Pour toute immersion plate  $f: M_n \rightarrow M'_m$ , il existe une variété paracompacte  $Q$  contenant  $M_n$  comme sous-variété plate, une rétraction continue  $\tau: Q \rightarrow M_n$  et un isomorphisme local  $h: Q \rightarrow M'_m$  de façon que le diagramme (d) soit commutatif.*

PROPOSITION 3.3. *Supposons que l'immersion plate  $f: M_n \rightarrow M'_m$  possède une famille canonique (dénombrable) telle que la variété  $M'_m$  qui s'en déduit soit muni d'un feuilletage ayant  $\iota(M_n) = M_n$  comme feuille. Si ce feuilletage est  $(C^0, C^1)$ ,  $C^1$  sur les feuilles, il existe un microfibré  $M_n \xrightarrow{\iota} Q \xrightarrow{\tau} M_n$  défini comme dans le théorème 2.2, et un isomorphisme local  $h: Q \rightarrow M'_m$  rendant commutatif le diagramme (d).*

PROPOSITION 3.4. *Si les variétés  $M'_m$  et  $M_n$  sont  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , et si  $f: M_n \rightarrow M'_m$  est une application  $C^r$  partout de rang  $n$ , il existe une variété paracompacte  $Q$  de classe  $C^r$  contenant  $M_n$  comme sous-variété  $C^r$ , un micro-*

fibré  $C^r$ ,  $M_n \xrightarrow{\iota} Q \xrightarrow{\tau} M_n$ , et un isomorphisme local  $C^r$ ,  $h: Q \rightarrow M_m$ , de façon que le diagramme (d) soit commutatif.

PROPOSITION 3.5. *Sous les hypothèses de la proposition 3.4, il existe un fibré vectoriel  $C^{r-1}$ ,  $M_n \xrightarrow{\iota} Q \xrightarrow{\tau} M_n$ , à groupe  $\Theta_{m-n}$  et un isomorphisme local  $C^{r-1}$ ,  $h: Q \rightarrow M_m$ , rendant commutatif le diagramme (d).*

On peut aussi remplacer  $M_n \xrightarrow{\iota} Q \xrightarrow{\tau} M_n$  par un fibré vectoriel de classe  $C^r$ , mais le remplacement de  $h$  par un isomorphisme local  $C^r$  n'est pas en général possible.

Lorsque l'application  $f: M_n \rightarrow M_m$  est  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , et partout de rang  $n$ , nous pouvons lui associer un fibré transverse exactement de la même façon comme dans le cas d'une sous-variété  $C^r$ .

PROPOSITION 3.6. *Supposons que l'application  $f: M_n \rightarrow M_m$  soit  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , et partout de rang  $n$ . Pour qu'elle possède une famille canonique (dénombrable) telle que la variété  $M'_m$ , qui s'en déduit suivant le théorème 3.1, soit muni d'un feuilletage  $C^r$  ayant  $\iota(M_n) = M_n$  comme feuille, il faut et il suffit que son fibré transverse possède un sous-fibré à groupe discret.*

## RÉFÉRENCES

- [1] P. S. ALEKSANDROV, *Combinatorial Topology*, Vol. 1, Graylock press, Rochester N. Y. 1956.
- [2] N. BOURBAKI, *Topologie générale, structures topologiques et structures uniformes*, Hermann, Paris 1964.  
*Topologie générale, utilisation des nombres réels en topologie générale*, Hermann, Paris 1958.
- [3] C. EHRESMANN, *Structures feuilletées*, Proceedings of the feefth Canad. Math. Congress, 1961.
- [4] R. GODEMENT, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, Paris, 1964.
- [5] J. MILNOR, *Microbundles I*, *Topology* 3 (1964), suppl. 1.
- [6] J. R. MUNKRES, *Elementary Differential Topology*, Princeton, 1966.
- [7] N. STEENROD, *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton, 1951.