

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

A. TOGNOLI

Su una congettura di Nash

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 27,
n° 1 (1973), p. 167-185

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1973_3_27_1_167_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SU UNA CONGETTURA DI NASH

A. TOGNOLI (*)

Introduzione.

J. Nash ha dimostrato, (vedi [11]), che ogni varietà differenziabile compatta V di \mathbb{R}^n può essere approssimata da una varietà, ad essa diffeomorfa, che è luogo di zeri di funzioni algebriche (una funzione $f(x)$ si dice algebrica se è analitica e se su ogni componente connessa del campo di definizione, (che è un aperto di \mathbb{R}^n), soddisfa ad una relazione del tipo

$$\sum_{i=0}^q \alpha_i(x) f(x)^i = 0 \text{ ove } \alpha_i(x) \text{ sono polinomi}.$$

Le varietà che sono luogo di zeri di funzioni algebriche sono componenti analitiche di varietà algebriche, cioè di insiemi di \mathbb{R}^n che sono luogo di zeri di polinomi.

J. Nash in [11] pone il problema di vedere se ogni varietà differenziabile compatta V di \mathbb{R}^n può essere approssimata da varietà algebriche ad essa diffeomorfe.

A. H. Wallace in [12] dà una risposta affermativa a tale questione nel caso in cui V è cobordante a zero.

Scopo di questo lavoro è provare che ogni varietà differenziabile compatta V di \mathbb{R}^n può essere approssimata, se $n > 2 \dim V$, da varietà algebriche regolari che sono ad essa diffeomorfe.

L'idea della dimostrazione è la seguente: si osserva che ogni varietà differenziabile compatta V_1 è cobordante ad una varietà algebrica regolare V_2 .

Si dimostra poi che la coppia $V_1 \cup V_2$ è approssimabile con varietà algebriche regolari $W = \widehat{V}_1 \cup \widehat{V}_2$ in cui \widehat{V}_i approssima V_i e \widehat{V}_2 è una varietà algebrica regolare. Da ciò si conclude che anche \widehat{V}_1 è algebrica.

Pervenuto alla Redazione il 20 Dicembre 1971.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del GNSAGA del CNR.

La parte più delicata della dimostrazione consiste evidentemente nell'approssimare $V_1 \cup V_2$ in modo che la parte che approssima V_2 sia algebrica; a tale scopo è essenziale un teorema di approssimazione di tipo teorema di Weierstrass.

Tale teorema è dimostrato nel § 1 e dice, in sostanza, che se $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^∞ , definita su un intorno U di una varietà algebrica regolare compatta V di \mathbb{R}^n ed esiste un polinomio $P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $P|_V = f|_V$, allora si può approssimare f , su ogni compatto, con dei polinomi P_n tali che $P_n|_V = f|_V$.

La dimostrazione di tale teorema ricalca quella dell'analogo teorema di Malgrange (vedi [1]).

L'autore ringrazia il dottor Fulvio Lazzeri per i numerosi consigli da lui avuti durante la preparazione di questo lavoro.

§ 1. Il teorema di Weierstrass relativo.

Con il termine varietà algebrica di \mathbb{R}^n intenderemo un insieme V di \mathbb{R}^n per cui esistono dei polinomi $P_i \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ $i = 1, \dots, q$ tali che $V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid P_1(x) = \dots = P_q(x) = 0\}$.

Analoga definizione si dà per le varietà algebriche di \mathbb{C}^n .

Nel seguito intenderemo sempre \mathbb{R}^n canonicamente immerso in \mathbb{C}^n .

Dato un germe V_x di una varietà algebrica V di \mathbb{R}^n diremo *complessificazione analitica (algebrica)* di V_x il germe \tilde{V}_x (\tilde{V}_x) del più piccolo insieme analitico di un aperto di \mathbb{C}^n contenente V_x (della più piccola varietà algebrica di \mathbb{C}^n contenente V).

Data una varietà algebrica V di \mathbb{R}^n (o di \mathbb{C}^n) diremo che il punto $x \in V$ è *regolare* se esistono $q = n - \dim V$ polinomi P_1, \dots, P_q tali che:

$$1^0) \quad P_1|_V = \dots = P_q|_V \equiv 0$$

$$2^0) \quad \text{il rango della matrice} \left(\left(\frac{\partial P_i}{\partial x_j} \right)_x \right)_{\substack{i=1, \dots, q \\ j=1, \dots, n}} \text{ è } q.$$

Diremo che la varietà algebrica V di \mathbb{R}^n (o di \mathbb{C}^n) è *regolare* se è regolare in ogni suo punto.

Diremo che la varietà algebrica V di \mathbb{R}^n è *quasi regolare* nel punto x se $\tilde{V}_x = \tilde{V}_x$, cioè se la complessificazione algebrica di V_x coincide con quella analitica. Si osservi che ogni punto regolare è anche quasi regolare.

La varietà algebrica reale V si dice *quasi regolare* se è quasi regolare in ogni punto.

Diremo che la varietà algebrica reale V è *coerente* se tale è lo spazio analitico reale ad essa associato.

Scopo di questo paragrafo è provare il seguente.

TEOREMA 1. *Sia V una varietà algebrica reale compatta, quasi regolare e coerente di \mathbb{R}^n ed U un intorno aperto di V . (Ogni varietà regolare è quasi regolare e coerente).*

Sia $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞ , tale che esista un polinomio $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ per cui si abbia: $f|_V = P|_V$.

In queste ipotesi, comunque si fissi un compatto $K \subset U$, un $\varepsilon > 0$ e $q \in \mathbb{N}$ esiste un polinomio $Q \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ tale che

$$i) \quad \left| \frac{\partial^\alpha f(x)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_j}} - \frac{\partial^\alpha Q(x)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_j}} \right| < \varepsilon, \quad \forall x \in K, \quad 0 \leq \alpha \leq q$$

$$ii) \quad f|_V = Q|_V.$$

Proveremo il teorema 1 mediante alcuni lemmi a cui premettiamo alcune osservazioni e richiami.

Noteremo con $\mathbb{R}\{X_1, \dots, X_n\}$, $\mathbb{R}[[X_1, \dots, X_n]]$ rispettivamente: l'anello delle serie di potenze convergenti nell'origine e l'anello delle serie formali. Si hanno le inclusioni naturali.

$$\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] \subset \mathbb{R}\{X_1, \dots, X_n\} \subset \mathbb{R}[[X_1, \dots, X_n]].$$

Dicesi *anello analitico (anello formale) di tipo reale* un anello del tipo $\mathbb{R}\{X_1, \dots, X_n\}/\mathcal{I}(\mathbb{R}[[X_1, \dots, X_n]]/\mathcal{I})$ ove \mathcal{I} è un ideale.

Gli anelli analitici, formali, sono anelli locali noetheriani ed in essi considereremo la topologia avente per sistema fondamentale di intorni dello zero la famiglia dei sottoinsiemi \mathcal{M}^p , $p \in \mathbb{N}$, ove \mathcal{M} è l'ideale massimale.

La topologia sopra definita è detta topologia *M*-adica.

Per gli anelli analitici o formali valgono i fatti seguenti:

a) in ogni anello analitico o formale A la topologia *M*-adica è di Hausdorff (da cui si deduce che ogni ideale \mathcal{I} di A è chiuso (infatti A/\mathcal{I} è ancora un anello analitico o formale)).

b) Se A è un anello analitico o formale, N è un A -modulo ed N' è un sotto- A -modulo, allora la topologia naturale di N' coincide con quella indottagli da N .

Per la dimostrazione di questi due fatti vedasi ad esempio [2]

Dato un anello locale A noteremo con \widehat{A} il suo completato (nella topologia *M*-adica).

Vale evidentemente:

$$c) \quad \widehat{\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]} = \widehat{\mathbb{R}\{X_1, \dots, X_n\}} = \widehat{\mathbb{R}[[X_1, \dots, X_n]]} = \mathbb{R}[[X_1, \dots, X_n]].$$

Sia \mathcal{J} un ideale di un anello analitico o formale A , vale allora:

$$d) \quad \widehat{\mathcal{J}} = \widehat{A} \cdot \mathcal{J} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \in \widehat{A} \mid x = \sum_{i=1}^p \alpha_i g_i, \alpha_i \in \widehat{A}, g_i \in \mathcal{J} \right\}$$

infatti $\widehat{A} \cdot \mathcal{J}$ è denso in $\widehat{\mathcal{J}}$ ed essendo $\widehat{A} \cdot \mathcal{J}$ un ideale esso è chiuso (vedi a)) e quindi è uguale ad $\widehat{\mathcal{J}}$.

Sia ora U un aperto di \mathbb{R}^n contenente l'origine 0 , $E \subset U$ un insieme contenente 0 nella sua chiusura.

Sia g una funzione di classe C^∞ definita in un intorno di 0 .

Diremo che g (o meglio il suo germe all'origine) ha uno zero di ordine infinito su E in 0 se per ogni $p \in \mathbb{N}$ esiste una costante positiva c_p ed un intorno B_p di 0 in \mathbb{R}^n tale che su $E \cap B_p$ si abbia:

$$|g(x)| < c_p \|x\|^p \text{ ove } x = (x_1, \dots, x_n), \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Osserviamo che la proprietà di avere uno zero di ordine infinito su E all'origine dipende solo dallo sviluppo formale di g all'origine.

Ricordiamo infine che ogni elemento di $\mathbb{R}[[X_1, \dots, X_n]]$ è la serie formale di una funzione C^∞ definita su un intorno di 0 (vedi [4]).

L'insieme delle serie formali provenienti da funzioni C^∞ aventi zero di ordine infinito su E in 0 formano un ideale $J(E_0)$ di $\mathbb{R}[[X_1, \dots, X_n]]$ che sarà detto *ideale formale del germe* E_0 (E_0 è il germe di E nell'origine).

Sia ora E un insieme analitico reale contenente 0 , noteremo con $\mathcal{J}(E_0)$ l'ideale di $\mathbb{R}\{X_1, \dots, X_n\}$ formato dai germi di funzioni analitiche nulle su E_0 .

Sia ora E una varietà algebrica di \mathbb{R}^n contenente 0 , noteremo con $\mathcal{P}(E_0)$ l'ideale di $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ formato dai polinomi nulli su E .

Naturalmente in tutto quanto detto sopra l'origine si può sostituire con un punto qualsiasi e si può sostituire \mathbb{C} ad \mathbb{R} nelle definizioni di $\mathcal{J}(E_0)$, $\mathcal{P}(E)$.

LEMMA 1. *Sia V una varietà algebrica di \mathbb{R}^n , $x \in V$; si ha allora: condizione necessaria e sufficiente affinché V sia quasi regolare in x è che $\mathcal{J}(V_x)$ sia generato, come modulo sull'anello dei germi di funzioni analitiche di \mathbb{R}^n in x , da $\mathcal{P}(V)$.*

PROVA. Supponiamo V sia quasi regolare in x , cioè $\widetilde{V}_x = \widetilde{V}_x$. In questa ipotesi se g_1, \dots, g_q sono dei polinomi che generano $\mathcal{P}(V)$, dette \widetilde{g}_i le estensioni di g_i a \mathbb{C}^n , $i = 1, \dots, q$, risulta che $\widetilde{g}_1, \dots, \widetilde{g}_q$ generano l'ideale $\mathcal{P}(\widetilde{V})$ associato a \widetilde{V} .

Per quanto provato in [2] ogni germe φ di funzione olomorfa nulla su \tilde{V}_x è della forma :

$$(1) \quad \varphi = \sum_{i=1}^q \tilde{\alpha}_i \tilde{g}_i \text{ con } \tilde{\alpha}_i \text{ funzioni olomorfe}$$

(che si possono considerare a coefficienti reali).

Ne segue che ogni germe di funzione analitica reale ψ nulla su V_x si può mettere nella forma :

$$(2) \quad \psi = \sum_{i=1}^q \beta_i g_i$$

e questo prova l'affermazione (basta estendere ψ ad un intorno di \mathbb{C}^n , l'estesa $\tilde{\psi}$ di ψ sarà nulla su \tilde{V}_x da cui $\tilde{\psi}$ si mette nella forma (1) che ristretta alla parte reale dà la (2)).

Viceversa supponiamo $\mathcal{J}(V_x)$ sia generato da $\mathcal{P}(V)$. Se g_1, \dots, g_q sono dei polinomi che generano $\mathcal{P}(V)$ allora ogni $h \in \mathcal{J}(V_x)$ è della forma

$$h = \sum_{i=1}^q \alpha_i g_i \text{ e quindi ogni } l \in \mathcal{J}(\tilde{V}_x)$$

è della forma $l = \sum_{i=1}^q \tilde{\beta}_i \tilde{g}_i$, onde \tilde{V}_x è un germe di varietà algebrica contenente V e quindi $\tilde{V}_x = \tilde{\tilde{V}}_x$.

OSSERVAZIONE 1. La varietà algebrica V può essere regolare, come spazio analitico, ma non quasi regolare come mostra il seguente esempio (*).

Si consideri la famiglia di curve piane di equazione :

$$x \cdot (x^2 + y^2) + \lambda P_4(x, y) = 0$$

ove $P_4(x, y)$ è un polinomio omogeneo di quarto grado tale che $x(x^2 + y^2)$ e $P_4(x, y)$ non abbiano fattori a comune.

Se $\bar{\lambda}$ è un numero reale tale che la corrispondente curva $C_{\bar{\lambda}}$ è irriducibile, (e tale numero esiste certamente per un teorema di Bertini), allora $C_{\bar{\lambda}}$ è non quasi regolare nell'origine. Infatti $C_{\bar{\lambda}}$ ha nell'origine tre tangenti

(*) Questo esempio mi è stato comunicato dal professor A. Andreotti.

distinte (di cui due complesse coniugate) dunque la complessificazione algebrica $(\tilde{C}_{\bar{\lambda}})_0$ è formata da tre germi analitici irriducibili, mentre la complessificata analitica da uno soltanto.

Di più $C_{\bar{\lambda}}$ è analiticamente regolare all'origine perché $C_{\bar{\lambda}}$ è una curva avente tutte le tangenti distinte all'origine, quindi ogni ramo è analiticamente regolare.

OSSERVAZIONE 2. Se la varietà algebrica reale V è puramente dimensionale ed ha una complessificazione algebrica \tilde{V} che è normale nei punti di V allora V è quasi regolare.

LEMMA 2. *Sia V un varietà algebrica di \mathbb{R}^n , $x \in V$ sia un punto quasi regolare di V , vale allora:*

$$\widehat{\mathcal{P}}(\tilde{V}) = \widehat{\mathcal{J}}(\tilde{V}_x) = J(V_x)$$

PROVA. La prima eguaglianza è conseguenza del lemma 1, la seconda è provata dal teorema 2 di [1].

LEMMA 3. *Sia V una varietà algebrica di \mathbb{R}^n che sia quasi regolare e coerente in x , $x \in V$.*

Sia $f: U(x) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞ definita sull'intorno $U(x)$ di x in \mathbb{R}^n , tale che $f|_{U(x) \cap V} \equiv 0$; in queste ipotesi esistono dei polinomi g_1, \dots, g_q nulli su V e delle funzioni C^∞ : $\alpha_1, \dots, \alpha_q$, definite su un intorno $U'(x)$, di x in \mathbb{R}^n tali che, su $U'(x)$ valga:

$$f(y) = \sum_{i=1}^q \alpha_i(y) g_i(y).$$

PROVA. Per le ipotesi fatte esiste un intorno $D(x)$ di x in V e dei polinomi g_1, \dots, g_q nulli su V tali che per ogni $y \in D(x)$ l'anello $\mathcal{J}(V_y)$ sia generato da g_1, \dots, g_q .

Per ogni $y \in U'(x)$ il germe f_y di f è, per il lemma 2, combinazione lineare dei germi $(g_i)_y$, a coefficienti serie formali, ma allora f_x è anche combinazione dei $(g_i)_x$ a coefficienti funzioni di classe C^∞ (vedi [3]).

Il lemma è così provato.

LEMMA 4. *Sia V una varietà algebrica compatta, quasi regolare coerente di \mathbb{R}^n .*

Sia $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞ definita su un intorno aperto U di V in \mathbb{R}^n , tale che $f|_V = 0$ e sia K un compatto di U .

In queste ipotesi esistono dei polinomi nulli su $V: g_1, \dots, g_q$ e delle funzioni $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ di classe C^∞ definite su un intorno di K tali che:

$$f(x) = \sum_{i=1}^q \alpha_i(x) g_i(x), \quad x \in K.$$

PROVA. Essendo V compatto e coerente esistono dei polinomi g_1, \dots, g_q che sono nulli su V e generano $\mathcal{I}(V_x)$ per ogni $x \in V$.

Per ogni $x \in U$ esiste allora un intorno U_x e delle funzioni $C^\infty: \{\alpha_j^x\}_{j=1, \dots, q}$ tali che valga:

$$(1) \quad f(y) = \sum_{j=1}^q \alpha_j^x(y) g_j(y), \quad y \in U_x.$$

Infatti se $x \in V$ la (1) è provata dal lemma 3, se $x \notin V$ allora una almeno delle $g_i(x)$ è diversa da zero, sia ad esempio $g_1(x) \neq 0$. Basta allora porre

$$\alpha_1^x = \frac{f}{g_1}, \quad \alpha_i^x = 0 \text{ se } i \neq 1.$$

Concludendo esiste un ricoprimento finito $\{U_i\}_{i=1, \dots, s}$ di K fatto con aperti di \mathbb{R}^n per cui esistono delle funzioni $\{\alpha_j^i\}_{j=1, \dots, q}$ di classe C^∞ definite su U_i e tali che su ogni U_i valga:

$$f(y) = \sum_{j=1}^q \alpha_j^i(y) g_j(y).$$

Sia $\{\varrho_i\}_{i=1, \dots, s}$ una partizione dell'unità di classe C^∞ relativa al ricoprimento $\{U_i\}_{i=1, \dots, s}$.

Vale allora:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) \cdot \sum_{i=1}^s \varrho_i(x) = \sum_{i=1}^s \varrho_i(x) \cdot \sum_{j=1}^q \alpha_j^i(x) g_j(x) = \\ &= \sum_{i,j} \varrho_i(x) \alpha_j^i(x) g_j(x) = \sum_{j=1}^q g_j(x) \cdot \sum_{i=1}^s \alpha_j^i(x) \cdot \varrho_i(x) = \sum_{j=1}^q \alpha_j(x) \cdot g_j(x) \end{aligned}$$

ove si è posto $\alpha_j = \sum_{i=1}^s \alpha_j^i \varrho_i$, onde α_j è una funzione di classe C^∞ definita su un intorno di K .

Il lemma è così provato.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1. Essendo $f - P|_V \equiv 0$ per provare il teorema 1 basta dimostrare il teorema per una funzione $g = f - P$ che sia nulla su V (infatti se h approssima g allora $h + P$ approssima f).

Per il lemma 4 esistono allora dei polinomi g_1, \dots, g_t e delle funzioni $C^\infty: \alpha_1, \dots, \alpha_t$ definite su un intorno U_k di K , tali che su U_k valga: $g(x) = \sum_{j=1}^t \alpha_j(x) g_j(x)$, con $g_j|_V \equiv 0$.

Basta ora approssimare le funzioni α_j (e le loro derivate fino all'ordine desiderato) con dei polinomi h_j perché il polinomio $\sum_{j=1}^t h_j g_j$ approssimi g nel modo voluto.

Essendo tale approssimazione possibile per il teorema di Weierstrass (vedi [4]) il teorema è così provato.

OSSERVAZIONE. Se nell'enunciato del teorema 1 la funzione P è razionale (definita e regolare sull'intorno U di V) allora si può concludere che esiste una funzione razionale Q regolare su U che soddisfa alle condizioni i) ed ii) del teorema. Si consideri infatti $g = f - P$, g è nulla su V dunque si può approssimare con un polinomio G nullo su V , onde $Q = G + P$ è una funzione razionale, regolare su U che approssima f e tale che $Q|_V = f|_V$.

Vogliamo ora dare una versione del teorema 1 per le funzioni algebriche (ricordiamo che una funzione f è algebrica se è analitica e se esistono dei polinomi non nulli $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ tali che $\sum_{i=0}^s \alpha_i f^i = 0$).

Vale allora il seguente:

TEOREMA 2. *Sia V una varietà algebrica quasi regolare compatta e coerente di \mathbb{R}^n , U un intorno di V in \mathbb{R}^n e K un compatto di U .*

Sia $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞ , per cui esista una funzione algebrica $B: U \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f|_V = B|_V$.

In queste ipotesi, comunque si fissi $\varepsilon > 0$ e $q \in \mathbb{N}$ esiste una funzione algebrica $A: U \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

$$i) \quad \left| \frac{\partial^\alpha f(x)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_r}} - \frac{\partial^\alpha A(x)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_r}} \right| < \varepsilon, \quad \forall x \in K, \quad \alpha < q, \quad \alpha \geq 0$$

$$ii) \quad f|_V = A|_V.$$

PROVA. Si dimostra come il teorema 1.

§ 2. Il teorema di approssimazione.

a) *Definizione di ε -approssimazione.*

Siano L, L' due spazi lineari r -dimensionali contenuti in \mathbb{R}^n e passanti per l'origine.

Sia $x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_{n-r}$ un sistema di coordinate ortogonali in cui L sia definito dalle equazioni

$$y_1 = \dots = y_{n-r} = 0.$$

Diremo che lo scarto fra L ed L' è minore di ε se L' è definito dalle equazioni $y_i = \sum_{j=1}^r a_{ij} x_j, i = 1, \dots, n-r$ e vale:

$$\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 < \varepsilon.$$

Si osservi che la definizione data è invariante per cambiamenti ortogonali delle x_i e delle y_j . Se due varietà lineari non contengono l'origine si dice che il loro scarto è minore di ε se tale proprietà è vera per due loro traslate contenenti l'origine.

Sia ora V una varietà di \mathbb{R}^n di classe $C^\alpha, \alpha \in \mathbb{N}, \alpha = \infty$, oppure $\alpha = \omega$.

Se $\dim V = r$ per ogni punto $x \in V$ esiste un disco di dimensione $n-r$ ortogonale a V e passante per x . Se V è compatta esiste $\delta > 0$ tale che:

1⁰) L'insieme dei dischi, $n-r$ dimensionali, perpendicolari a V e di raggio δ sono a due a due disgiunti e la loro unione è un intorno $U_\delta(V)$ di V in \mathbb{R}^n .

2⁰) $U_\delta(V)$ è C^α isomorfo ad un intorno della sezione nulla del fibrato normale di V . In detto isomorfismo V viene ad essere identificato alla sezione nulla e la proiezione sulla sezione nulla corrisponde all'applicazione che manda il disco ortogonale ad $x, x \in V$, su x .

(Per la dimostrazione di queste proprietà vedasi [11], [12]).

Nel seguito noteremo con $P_\delta: U_\delta(V) \rightarrow V$ questa proiezione, P_δ è di classe C^α se V è di classe C^α .

L'intorno $U_\delta(V)$ è detto *intorno tubulare*, di V , di raggio δ .

Sia V una varietà compatta di classe $C^\alpha, \varepsilon > 0$, diremo che $V', V' \subset \mathbb{R}^n$, è una ε -approssimazione di V se:

i) esiste $\delta \leq \varepsilon$ tale che $U_\delta(V) \supset V'$ e V' è identificato, nell'isomorfismo sopra detto, ad una sezione, di classe C^α del fibrato normale di V (e quindi $P_\delta: V' \rightarrow V$ è un isomorfismo delle strutture C^α).

ii) Per ogni $x \in V'$ lo scarto fra le varietà lineari tangenti a V' , V in x e $P_\delta(x)$ è minore di ε .

Data una varietà compatta V di classe C^α di \mathbb{R}^n diremo che V ammette *approssimazione algebrica* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una varietà algebrica regolare V_ε di \mathbb{R}^n che è una ε -approssimazione di V .

Scopo di questo paragrafo è provare il seguente

TEOREMA 3. *Ogni varietà differenziabile compatta V di classe C^α , $\alpha \geq 1$, di \mathbb{R}^n ammette se $n > 2 \dim V$ approssimazione algebrica.*

Da cui si ha:

COROLLARIO. *Ogni varietà differenziabile compatta di classe C^α , $\alpha \geq 1$, è isomorfa, rispetto alla struttura C^α , ad una varietà algebrica regolare.*

Il teorema 3 sarà provato nei numeri seguenti tramite ripetute applicazioni del teorema 1.

b) *La costruzione del toro.*

Siano V_1, V_2 due varietà compatte di classe C^∞ cobordanti e sia W una varietà a bordo di classe C^∞ il cui bordo sia esattamente $V_1 \cup V_2$.

Possiamo supporre che V_1 e V_2 abbiano in W degli intorni D_1, D_2 diffeomorfi a $V_1 \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $V_2 \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$ (in detti diffeomorfismi V_i si identifica a $V_i \times \{0\}$).

Sia $r = \dim V_1 = \dim V_2$ e supponiamo V_1 e V_2 realizzate in \mathbb{R}^n e valga $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Si consideri \mathbb{R}^n come sottospazio di \mathbb{R}^{n+1} determinato da $x_{n+1} = 0$.

Con questa convenzione si notino con D'_i i chiusi

$$D'_i = \left\{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \mid (x_1, \dots, x_n) \in V_i, 0 \leq x_{n+1} \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

Se $n+1 < 2(r+1)+1 = t$ si consideri \mathbb{R}^{n+1} come il sottospazio di \mathbb{R}^t ove $x_{n+2} = \dots = x_t = 0$ e viceversa se $t \leq n+1$.

Si noti $s = \sup. (t, n+1)$.

Per il teorema 5 di [10] il diffeomorfismo fra $D_1 \cup D_2$ e $D'_1 \cup D'_2$ si prolunga ad un'immersione di classe C^∞ $J: W \rightarrow \mathbb{R}^s$.

Sia $\varphi: D'_1 \cup D'_2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'applicazione $\varphi(x_1, \dots, x_{n+1}, \dots, x_s) = x_{n+1}$, per il teorema 5 di [10] esiste un'applicazione di classe C^∞ $\psi: J(W) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

$$\psi \mid D'_1 \cup D'_2 = \varphi, \psi \overline{(J(W) - D'_1 \cup D'_2)} = \left[\frac{1}{2}, 1 \right].$$

Si consideri l'immersione $h: W \rightarrow \mathbb{R}^{s+1}$ definita da: $h(x) = (J(x) \times \psi(x))$.

Sia $T(V_1, V_2)$ la varietà di classe C^∞ ottenuta unendo ad $h(W)$ la sua simmetrica rispetto all'iperpiano $x_{s+1} = 0$.

La varietà $T(V_1, V_2)$ è detta *toro costruito* su V_1 e V_2 ed ha le seguenti proprietà:

- i) $T(V_1, V_2) \cap \{x_{s+1} = 0\} = V_1 \cup V_2$
- ii) $T(V_1, V_2)$ è trasversale all'iperpiano $x_{s+1} = 0$.

Osserviamo che il toro costruito su V_1, V_2 non è univocamente determinato, neppure a meno di omeomorfismi.

Notiamo infine che se U_{V_1} è un intorno di V_1 in \mathbb{R}^n ed $n > 2r$, allora esiste una varietà V_2' diffeomorfa a V_2 realizzata in U_{V_1} ed un toro $T(V_1, V_2')$, realizzato in \mathbb{R}^{s+1} , tale che, detta $\pi: \mathbb{R}^{s+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'applicazione $\pi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{s+1}) = (x_1, \dots, x_n)$, si abbia $\pi(T(V_1, V_2')) \subset U_{V_1}$.

L'affermazione fatta si prova osservando che il teorema 5 di [10] vale anche per U_{V_1} .

c) *I proiettori associati ad una varietà algebrica.*

Sia $V \subset \mathbb{R}^n$ una varietà algebrica regolare di dimensione r ; per ogni $x_0 \in V$ è definita una varietà lineare T_{x_0} tangente a V ed una varietà lineare N_{x_0} ortogonale e complementare a T_{x_0} in x_0 .

Notiamo con K_{x_0} l'applicazione affine definita sullo spazio affine \mathbb{R}^n , centrato in x_0 , che è l'identità ristretta ad N_{x_0} ed applica T_{x_0} su x_0 .

Assegnare K_{x_0} equivale a dare una matrice $n \times n$; identificheremo K_{x_0} con tale matrice.

Scopo di questo numero è dimostrare che i coefficienti della matrice K_{x_0} sono, al variare di x_0 , delle funzioni razionali nelle coordinate di \mathbb{R}^n .

Basterà provare l'asserto localmente.

Siano dunque f_1, \dots, f_{n-r} dei polinomi, nulli su V e tali che il rango della matrice:

$$\left(\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]_{x_0} \right)_{\substack{i=1, \dots, n-r \\ j=1, \dots, n}}$$

sia $n - r$.

In queste ipotesi le varietà tangenti a V , nei punti x vicini ad x_0 , sono date, (vedi [7]) dalle equazioni:

$$\sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_j} \right]_x x_j = 0, \dots, \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial f_{n-r}}{\partial x_j} \right]_x x_j = 0.$$

Dunque i vettori

$$v_i = \left(\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_1} \right]_x, \dots, \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_n} \right]_x \right) \quad i = 1, \dots, n - r$$

sono una base della varietà N_x .

I vettori $v_i(x)$ dipendono polinomialmente dalle coordinate essendo le f_i dei polinomi.

Si noti con $\langle a, b \rangle$ l'usuale prodotto scalare fra vettori di \mathbb{R}^n e sia $v'_1(x), \dots, v'_{n-r}(x)$ la base ortogonale ricavata da $v_1(x), \dots, v_{n-r}(x)$ nel modo usuale (si ponga $v'_1(x) = v_1(x)$, $v'_2(x) = v_1(x) - \lambda(x) v_2(x)$ ove $\lambda(x) = \frac{\langle v_1(x), v_1(x) \rangle}{\langle v_1(x), v_2(x) \rangle}$ se $\langle v_1(x), v_2(x) \rangle \neq 0$, e $v_2(x) = v'_2(x)$, altrimenti e così via).

È immediato che v'_1, \dots, v'_{n-r} dipendono razionalmente dalle coordinate di \mathbb{R}^n .

Siano $w_1(x), \dots, w_r(x)$ dei campi di n -vettori che varino linearmente e tali che, per x vicino ad x_0 , $v'_1(x), \dots, v'_{n-r}(x), w_1(x), \dots, w_r(x)$ siano una base.

Applicando ancora il procedimento di ortogonalizzazione si ottengono dei campi di vettori $v'_1, \dots, v'_{n-r}, w'_1, \dots, w'_r$ che dipendono razionalmente dalle coordinate di \mathbb{R}^n e sono ortogonali fra loro.

La matrice K_x è determinata dalle relazioni:

$$(1) \quad \begin{aligned} K_x(v'_i(x)) &= v'_i(x) & i &= 1, \dots, n - r \\ K_x(w'_j(x)) &= 0 & j &= 1, \dots, r \end{aligned}$$

I coefficienti di K_x si ricavano dal sistema (1) e quindi dipendono razionalmente dalle coordinate di \mathbb{R}^n .

d) Un'osservazione sulle proiezioni.

Sia V una varietà algebrica regolare di \mathbb{R}^{n+p} e $\sigma: \mathbb{R}^{n+p} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una proiezione (non necessariamente ortogonale) tale che $\sigma(V)$ sia una varietà analitica di \mathbb{R}^n ed inoltre $\sigma: V \rightarrow \sigma(V)$ sia un isomorfismo analitico.

In queste ipotesi vogliamo provare che esiste una varietà algebrica $\widehat{V} \subset \mathbb{R}^n$ tale che $\sigma(V)$ sia una componente analitica di \widehat{V} e inoltre $\dim \widehat{V} - \sigma(V) < \dim V$.

Supporremo nel seguito, cosa non restrittiva, che V sia irriducibile. Consideriamo \mathbb{R}^n canonicamente immerso in \mathbb{C}^n ed $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ come sottospazi degli spazi proiettivi $P_n(\mathbb{R}), P_n(\mathbb{C})$.

Sia \widetilde{V}' la complessificazione proiettiva della completata proiettiva V' di V e σ l'estensione di σ a \widetilde{V}'

È noto (teorema di Chow) che $\tilde{\sigma}(V')$ è una varietà algebrica e $\widehat{V} = \tilde{\sigma}(\tilde{V}') \cap \mathbb{R}^n$ è la più piccola varietà algebrica affine contenente $\sigma(V)$.

Essendo σ un isomorfismo analitico su V esiste una varietà algebrica propria $\tilde{S} \subset \tilde{V}'$, $\tilde{S} \not\subset V$, tale che :

$$(1) \quad \tilde{\sigma}: \tilde{V}' - \tilde{S} \rightarrow \tilde{\sigma}(\tilde{V}' - \tilde{S})$$

sia un rivestimento.

Se fosse $\dim(\widehat{V} - \sigma(V)) = \dim \sigma(V)$ esisterebbe $x \in (\widehat{V} - \sigma(V)) \cap \tilde{\sigma}(\tilde{V}' - \tilde{S})$ ed il grado di detto rivestimento sarebbe pari (infatti x proviene da coppie di punti complessi coniugati di \tilde{V}' quindi $\tilde{V}' - \tilde{S}$ ha un numero pari di fogli a due a due coniugati).

Se il grado di (1) è pari ogni punto di $\sigma(V) - \sigma(\tilde{S} \cap V)$ deve provenire da almeno due punti reali e questo non accade perché per ipotesi V è la parte reale di $\tilde{V} = \tilde{V}' \cap \mathbb{C}^n$ e $\sigma: V \rightarrow \sigma(V)$ è un isomorfismo analitico.

Se $n \geq 2 \dim V + 1$ esiste un aperto denso A di $P_{n+p}(\mathbb{C})$ tale che $A \cap P_{n+p}(\mathbb{R})$ è denso in $P_{n+p}(\mathbb{R})$ ed inoltre per ogni $x \in A$ non esistono due punti di \tilde{V}' ad esso allineati nè x è contenuto in una varietà lineare tangente a \tilde{V}' .

Se proiettiamo V su un \mathbb{R}^{n+p-1} contenuto in \mathbb{R}^{n+p} da un punto $x \in A \cap P_{n+p}(\mathbb{R})$, $x \notin P_{n+p-1}(\mathbb{R})$, allora l'immagine di V in \mathbb{R}^{n+p-1} è una varietà algebrica isomorfa a V . Infatti \tilde{V}' non ha coppie di punti complessi coniugati allineati con x quindi detta σ_x la proiezione, l'insieme $\sigma_x(V)$ è una varietà algebrica di \mathbb{R}^{n+p-1} ; il fatto che σ_x sia un isomorfismo è provato ad esempio in « Foundation of algebraic geometry » (pagg. 99-100) di I. R. Shafarevich.

Da quanto detto segue che se $n \geq 2 \dim V + 1$ allora ogni proiezione $\sigma: \mathbb{R}^{n+p} \rightarrow \mathbb{R}^n$ può essere approssimata con proiezioni σ_n tali che $\sigma_n(V)$ è una sottovarietà algebrica di \mathbb{R}^n isomorfa a V .

e) La prima approssimazione.

Nel seguito di questo paragrafo per le approssimazioni useremo le convenzioni introdotte da J. Nash in [11].

Se $s_1 < s_2$ sono due interi positivi nel seguito supporremo

$$\mathbb{R}^{s_1} = \{ \{x_j\} \in \mathbb{R}^{s_2} \mid x_{s_1+1} = \dots = x_{s_2} = 0 \}.$$

Sia V_1 una varietà analitica compatta di \mathbb{R}^n , $V_2 \subset \mathbb{R}^s$ una varietà algebrica regolare compatta cobordante con V_1 .

Sia $r = \dim V_1 = V_2$, $s \geq n$ e $T(V_1, V_2)$ un toro costruito su V_1, V_2 e realizzato in \mathbb{R}^t , $t = \max(s + 1, 2(r + 1) + 2)$.

Si può supporre, (applicando eventualmente una traslazione ed una omotetia a V_1), che i proiettori K_x definiti nel punto c), relativi ai punti $x \in V_2$, siano espressi da funzioni razionali regolari su un intorno U di $T(V_1, V_2)$ (si tenga conto di quanto osservato alla fine del punto b).

Osserviamo subito che se si prova il teorema 3 per un'immagine di V_1 tramite un'applicazione che sia composta di una traslazione e di un'omotetia si dimostra immediatamente il teorema anche per V_1 .

Sia N_T un intorno tubulare di $T(V_1, V_2)$ e $p: N_T \rightarrow T(V_1, V_2)$ l'applicazione associata.

Per ogni $x \in N_T$ noteremo $v(x) = p(x) - x$; $v(x)$ risulta essere un campo di vettori t -dimensionali, di classe C^∞ , definito su N_T .

Sia $u(x)$ un campo di vettori t -dimensionali tale che:

- I) $u(x)$ approssima insieme alle derivate prime $v(x)$ su N_T .
- II) le componenti di $u(x)$ sono funzioni polinomiali.
- III) $u(x) = 0$ se $x \in V_2$.

Un campo siffatto esiste in virtù del teorema 1.

Per ogni $x \in N_T$ sia K_x il proiettore $K_{p(x)}$ definito nel punto c).

Siano L_x delle matrici simmetriche, di tipo $t \times t$, tali che:

- I) le L_x approssimino, insieme alle derivate prime K_x su N_T
- II) i coefficienti di L_x siano funzioni razionali.
- III) $L_x = K_x$ se $x \in V_2$.

Tale approssimazione esiste per quanto provato in c) e per l'osservazione che segue il teorema 1.

Siano $a_x(\lambda), \alpha_x(\lambda)$ i polinomi caratteristici, aventi primo coefficiente eguale ad uno, di K_x, L_x .

I polinomi $a_x(\lambda), \alpha_x(\lambda)$ hanno $t - (r + 1)$ radici vicine ad uno ed $r + 1$ radici vicine a zero.

Siano $a_x(\lambda) = b_x(\lambda) \cdot c_x(\lambda)$, $\alpha_x(\lambda) = \beta_x(\lambda) \cdot \gamma_x(\lambda)$ le decomposizioni di a_x, α_x ove b_x, β_x sono le parti che contengono le radici vicine a zero.

Poniamo $P_x = \beta_x(L_x)$, P_x risulta essere una famiglia di matrici di rango $t - (r + 1)$ i cui coefficienti dipendono algebricamente (ma in generale non razionalmente) dalle coordinate.

Posto:

$$\mathcal{O}(x) = P_x(u(x))$$

si ha:

1^o) la varietà analitica T' definita da $\mathcal{O}(x) = 0$ è un'approssimazione di $T(V_1, V_2)$.

2°) esiste una varietà algebrica T di cui T' è una componente analitica irriducibile.

$$3^0) T' \cap T(V_1, V_2) \supset V_2.$$

4°) la varietà T' è un insieme algebrico non singolare nel senso di [8].

Le proprietà 1°) e 2°) sono dimostrate in [11], la 3°) vale perché $u(x) = 0$ se $x \in V_2$, la 4°) è conseguenza del fatto che $T(V_1, V_2)$ è una varietà di classe C^∞ e le equazioni di T' sono state ottenute approssimando, insieme alle derivate prime, delle equazioni di $T(V_1, V_2)$.

f) La seconda approssimazione.

Nel numero precedente la varietà compatta $T(V_1, V_2)$ di dimensione $r+1$, contenuta in \mathbb{R}^t , è stata approssimata con una componente analitica T' di una varietà algebrica T e si ha: $T' \cap T(V_1, V_2) \supset V_2$, T' è trasversale all'iperpiano $\{x_t = 0\}$.

Vogliamo ora costruire, seguendo il metodo di J. Nash, in \mathbb{R}^{t+r+1} una varietà algebrica T_1 tale che, identificato \mathbb{R}^t con

$$\{\{x_i\} \in \mathbb{R}^{t+r+1} \mid x_{t+1} = \dots = x_{t+r+1} = 0\} \text{ e detta } \pi: \mathbb{R}^{t+r+1} \rightarrow \mathbb{R}^t$$

la proiezione canonica, si abbia:

T_1 ha una componente analitica T'_1 tale che $\pi: T'_1 \rightarrow T'$ è un isomorfismo analitico, T'_1 ha un intorno che non interseca $T_1 - T'_1$.

Vogliamo inoltre che T_1 sia regolare in ogni punto (come varietà algebrica) e che $\pi^{-1}(V_2) \cap T'_1 = V'_2$ sia una varietà algebrica isomorfa a V_2 .

Si parametrizzi $\mathbb{R}^{t+r+1} = \mathbb{R}^t \times \mathbb{R}^{r+1}$ con le coppie (x, \widehat{b}) ove $x \in \mathbb{R}^t$, $\widehat{b} = (b_1, \dots, b_{r+1})$ è il vettore associato al polinomio $\widehat{b}(\lambda) = \lambda^{r+1} + b_1 \lambda^r + \dots + b_{r+1}$.

Dunque, nella nostra convenzione, un punto di \mathbb{R}^{t+r+1} è la coppia formata da un punto di \mathbb{R}^t e da un polinomio di grado $r+1$ (avente primo coefficiente eguale ad uno).

Sia N_T l'intorno tubolare di $T(V_1, V_2)$ in \mathbb{R}^t sopra considerato ed $\alpha_x(\lambda)$ il polinomio caratteristico della matrice L_x , $x \in N_T$. Per ogni $y = (x, \widehat{b}) \in \pi^{-1}(N_T) \subset \mathbb{R}^{t+r+1}$ sia $\delta(y) = (\delta_1(y), \dots, \delta_{r+1}(y))$ il vettore avente per componenti i coefficienti del polinomio:

$$\delta(y)(\lambda) = \delta_1(y)\lambda^r + \dots + \delta_{r+1}(y) = \text{resto della divisione } \alpha_x(\lambda)/\widehat{b}(\lambda).$$

Sia poi:

$$\chi(y) = \widehat{b}(L_x), \quad \varphi(y) = (\chi(y))(u(x)), \quad \forall y = (x, \widehat{b}) \in \pi^{-1}(N_T):$$

si osservi che φ è una funzione razionale nelle coordinate di \mathbb{R}^{t+r+1} .

Vogliamo dimostrare che la varietà algebrica T_1 avente equazioni:

$$(1) \quad \begin{cases} \delta(y) = 0 \\ \varphi(y) = 0 \end{cases}$$

soddisfa alle condizioni da noi richieste.

In [11] è dimostrato che l'applicazione $J: T' \rightarrow T_1$ definita da $J(x) = (x, \beta_x)$, ove β_x è il fattore di α_x contenente le radici vicine a zero, è un isomorfismo analitico (anzi di spazi algebrici nel senso di [8]) di T' su una varietà analitica T'_1 la quale possiede un intorno che non interseca le altre componenti di T_1 .

Se $x \in V_2$ allora $L_x = K_x$ e quindi $\beta_x = \lambda^{r+1}$ onde, ristretta a V_2 , l'applicazione J ha la forma $J(x) = (\{x\}, 0, \dots, 0)$ e questo prova che $J: V_2 \rightarrow J(V_2)$ è un isomorfismo di varietà algebriche.

Resta da dimostrare che $T_1 = J(T')$ non contiene punti singolari (come varietà algebrica).

A tale scopo basta provare che il complessificato algebrico \tilde{T}_1 di T_1 è (analiticamente) regolare nei punti di T'_1 . Infatti in questo caso \tilde{T}_1 , e quindi T'_1 , è algebricamente regolare nei punti di T'_1 .

Si osservi che T' è uno spazio analitico non singolare (si veda la proprietà 4° del punto e)) e che se $\tilde{J}: \tilde{T}' \rightarrow \tilde{T}_1$ è un'estensione di J a due complessificati analitici di T', T'_1 si prova, analogamente a quanto fatto in [11] per le parti reali, che $\tilde{J}(\tilde{T}')$ è una componente isolata del complessificato algebrico di T_1 . Se ne deduce che nei punti di T'_1 il germe di \tilde{T}_1 coincide con quello di $\tilde{J}(\tilde{T}')$ e quindi \tilde{T}_1 è analiticamente regolare nei punti di T'_1 . La tesi è così dimostrata.

g) La terza approssimazione.

Come al solito si identifichi \mathbb{R}^{t+r+1} al sottospazio $\{\{x_i\} \in \mathbb{R}^{t+r+2} \mid x_{t+r+2} = 0\}$ e supponiamo, per semplicità, che T'_1 contenga l'origine.

Vogliamo dimostrare, (seguendo il metodo di Wallace, [12]) che, comunque si fissi un disco D , in \mathbb{R}^{t+r+2} , di centro l'origine e raggio ϱ , esiste una varietà algebrica T_2 di \mathbb{R}^{t+r+2} tale che: T_2 ha una sottovarietà analitica isolata T'_2 , ogni cui punto è (algebricamente) regolare, che approssima T'_1 in \mathbb{R}^{t+r+2} e si ha: $T'_2 \cap T'_1 \supset \pi^{-1}(V_2) \cap T'_1$ (si ricordi che $\pi: \mathbb{R}^{t+r+1} \rightarrow \mathbb{R}^t$ è la proiezione naturale).

Di più vogliamo risulti: $(T_2 - T'_2) \cap D = \emptyset$ e detta $\pi': \mathbb{R}^{t+r+2} \rightarrow \mathbb{R}^{t+r+1}$ la proiezione naturale si abbia $\pi'(T_2) = T_1$, $\pi'(T'_2) = T'_1$.

Sia $D' = D \cap \mathbb{R}^{t+r+1}$, supponiamo $D' \supset T'_1$ e sia $U_{T'_1}$ un intorno di T'_1 in D' tale che $\bar{U}_{T'_1} \cap (T_1 - T'_1) = \emptyset$.

Sia $q: \mathbb{R}^{t+r+2} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞ tale che: $q|_{\pi^{-1}(V_2) \cap T'_1} \equiv 0$, q approssimi, insieme alle derivate prime, su $U_{T'_1}$ la funzione nulla ed infine $q(D' \cap (T_1 - T'_1)) \subset [2\varrho, +\infty[$.

Si approssimi, su un intorno di D' , la funzione q , e le sue derivate prime con un polinomio g nullo su $\pi^{-1}(V_2)$.

L'applicazione $h: \mathbb{R}^{t+r+1} \rightarrow \mathbb{R}^{t+r+2}$ definita da $h(x) = (x, g(x))$ definisce la varietà algebrica $T'_2 = h(T'_1)$ la quale contiene la varietà analitica $T'_2 = h(T'_1)$ che soddisfa alle proprietà richieste

h) La quarta approssimazione.

Vogliamo ora costruire un'approssimazione T'_3 di T'_2 , in \mathbb{R}^{t+r+2} , tale che: T'_3 sia una sottovarietà analitica isolata di una varietà algebrica T_3 la quale è regolare nei punti di T'_3 ed è tale che $T_3 - T'_3$ sia compatto.

Chiediamo inoltre che esista un isomorfismo analitico $i: T'_3 \rightarrow T'_2$ che approssimi l'identità e trasformi sottovarietà algebriche regolari di T'_3 in sottovarietà algebriche regolari di T'_2 e viceversa.

L'approssimazione T'_3 di T'_2 si ottiene usando la trasformazione $\gamma = \psi \circ \varphi$ definita nel lemma 2 di [12] e tenendo conto di quanto detto nel punto *d*).

i) La dimostrazione del teorema 3.

Nel prossimo numero proveremo il seguente

LEMMA. *Ogni varietà differenziabile compatta di classe C^α , $\alpha \geq 1$, è cobordante ad una varietà algebrica compatta regolare.*

Osserviamo che a causa dei risultati di H. Whitney ([10]) basta dimostrare il teorema 3 per le varietà analitiche.

Sia V_1 una varietà analitica r -dimensionale compatta di \mathbb{R}^n , $n > 2r$ e V_2 una varietà algebrica regolare ad essa cobordante.

Sia $T(V_1, V_2)$ un toro costruito su V_1, V_2 e T'_3 una varietà analitica di \mathbb{R}^{t+r+2} costruita come descritto nei punti *e*), *f*), *g*), *h*).

Sia $\sigma: \mathbb{R}^{t+r+2} \rightarrow \mathbb{R}^t$ l'applicazione ottenuta componendo le mappe

$$\mathbb{R}^{t+r+2} \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^{t+r+2} \xrightarrow{\pi'} \mathbb{R}^{t+r+1} \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^t$$

definite nei punti *h*), *g*), *f*).

Per il teorema 1 di [12], e per quanto provato nel punto *d*) di questo paragrafo, basta dimostrare il teorema 3 per la sottovarietà analitica $\widehat{V}_1 = \sigma^{-1}(V_1) \cap T'_3$ di \mathbb{R}^{t+r+2} .

Sia \mathcal{J} l'iperpiano di \mathbb{R}^t di equazione $x_t = 0$; \mathcal{J} taglia trasversalmente $T(V_1, V_2)$ e vale, $\mathcal{J} \cap T(V_1, V_2) = V_1 \cup V_2$. $\mathcal{J}' = \sigma^{-1}(\mathcal{J})$ è una ipersuperficie

algebraica di \mathbb{R}^{t+r+2} che è regolare nei punti vicini a T'_3 e taglia T'_3 trasversalmente.

Per costruzione si ha che $\widehat{V}_2 = \sigma^{-1}(V_2) \cap T'_3$ è una varietà algebrica regolare.

Sia $q(x) = 0$ un'equazione di \mathcal{G}' (si rimonti ad esempio, tramite σ , l'equazione $x_t = 0$).

Sia $g' : \mathbb{R}^{t+r+2} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞ tale che: $g'|_{\widehat{V}_2} = 0$, g' approssima, insieme alle derivate prime, q su un intorno di T'_3 non intersecante $T_3 - T'_3$ ed infine $g'(T_3 - T'_3) \subset [1000, +\infty[$.

Sia $g : \mathbb{R}^{t+r+2} \rightarrow \mathbb{R}$ un polinomio tale che: $g|_{\widehat{V}_2} = 0$, g approssima, insieme alle derivate prime, g' su un intorno di T'_3 .

Dato che g approssima q l'ipersuperficie $\mathcal{G}'' = \{x \mid g(x) = 0\}$ è non singolare vicino a T'_3 e taglia T'_3 trasversalmente, è poi chiaro che $\mathcal{G}'' \cap (T_3 - T'_3) = \emptyset$.

Ne segue che $W = \mathcal{G}'' \cap T_3 = \mathcal{G}'' \cap T'_3$ è una varietà algebrica regolare ed inoltre $W = \widehat{V}_1 \cup \widehat{V}_2$ ove \widehat{V}_1 è un'approssimazione di $\widetilde{V}_1 = \sigma^{-1}(V_1) \cap T'_3$ (in particolare \widetilde{V}_1 è isotopo a \widehat{V}_1).

Rimane da dimostrare che \widehat{V}_1 è una varietà algebrica regolare, a tale scopo, essendo \widehat{V}_2 una varietà algebrica regolare, basta escludere che la minima varietà algebrica \widehat{V}_1 contenente \widehat{V}_1 abbia dei punti x contenuti in \widehat{V}_2 .

Sia \widetilde{V}_2 il complessificato algebrico di \widehat{V}_2 ; \widetilde{V}_2 è regolare in ogni punto x di \widehat{V}_2 , se fosse $x \in \widehat{V}_1 \cap \widetilde{V}_2$ dovrebbe contenere il germe del complessificato di V'_1 in x ma allora V'_1 e V_2 avrebbero lo stesso germe del complessificato in x e questo non può accadere perché $\dim(\widetilde{V}_2 \cap \widetilde{V}'_1) < \dim \widetilde{V}_2$, ove \widetilde{V}'_1 è il complessificato algebrico di \widehat{V}'_1 .

Il teorema è così dimostrato.

l) *Sui generatori del cobordismo.*

Denotiamo con $P_n(\mathbb{R})$ lo spazio proiettivo reale di dimensione n . Siano $z_0, \dots, z_n, w_0, \dots, w_m, m \leq n$ delle coordinate omogenee in $P_n(\mathbb{R}), P_m(\mathbb{R})$.

Notiamo:

$$H_{mn}(\mathbb{R}) = \{(z_j) \times (w_j) \in P_n(\mathbb{R}) \times P_m(\mathbb{R}) \mid w_0 z_0 + \dots + w_m z_m = 0\}.$$

È noto, vedi ad esempio [13], che le varietà compatte $P_n(\mathbb{R}), H_{mn}(\mathbb{R}), n, m \in \mathbb{N}$ generano l'anello del cobordismo non orientato.

Per dimostrare il lemma del numero precedente basta perciò provare che $P_n(\mathbb{R})$ ha struttura di varietà algebrica regolare.

Si osservi che se si considera \mathbb{R}^n come lo spazio proiettivo a cui si è tolto un'iperpiano e si denota con $p: \mathbb{R}^n \rightarrow S^n$ la proiezione stereografica di \mathbb{R}^n sulla sfera n -dimensionale, allora p si prolunga ad un'applicazione algebrica $\widehat{p}: P_n(\mathbb{R}) \rightarrow S^n$, $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Si scelgano $n+1$ iperpiani privi di punti a comune e siano $\widehat{p}_1, \dots, \widehat{p}_{n+1}$ le applicazioni di $P_n(\mathbb{R})$ in S^n sopra definite; l'applicazione $h: P_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{(n+1)^2}$ definita da $h(x) = (\widehat{p}_1(x), \dots, \widehat{p}_{n+1}(x))$ fornisce un'immersione di $P_n(\mathbb{R})$ in $\mathbb{R}^{(n+1)^2}$ ed è immediato che $h(P_n(\mathbb{R}))$ è una varietà algebrica regolare.

Il lemma è così dimostrato.

BIBLIOGRAFIA

- [1] B. MALGRANGE, *Sur les fonctions différentiables et les ensembles analytiques*, Bull. Soc. Math. France 91 (1963) pagg. 113-127.
- [2] J. P. SERRE, *Geometrie algebric et geometrie analytique*, Ann. Inst. Fourier t. 6 (1955-56) pagg. 1-42.
- [3] B. MALGRANGE, *Division des distributions*, I-IV Seminaire Schwartz (1959-1960) n. 21-25.
- [4] R. NARASIMHAN, *Analysis on real and complex manifolds*, Masson e Cie (1968).
- [5] A. TOGNOLI, *Le varietà analitiche reali come spazi omogenei*, Bollettino dell'U. M., I (4), N. 3 (1968) pagg. 422-426.
- [6] WHITNEY, *Analytic extension of differentiable functions defined on closed sets*, Trans. Amer. Math. Soc. 36 n° 1 (1934) pagg. 63-89.
- [7] HODGE AND PEDOE, *Methods of algebraic geometry*, Cambridge University press (1952).
- [8] F. LAZZERI - A. TOGNOLI, *Alcune proprietà degli spazi algebrici*, Annali Sc. Nor. Sup. di Pisa, Vol. XXIV, (1970), pagg. 597-632.
- [9] R. THOM, *Quelques propriétés globales des variétés différentiables*, Com. Math. Helvetici (1954) pagg. 17-86.
- [10] H. WHITNEY, *Differentiable manifolds*, Annals of Math. Vol. 37 (1936) pagg. 647-680.
- [11] J. NASH, *Real algebraic manifolds*, Annals of Math. Vol. 56 (1952) pagg. 405-421.
- [12] A. H. WALLACE, *Algebraic approximation of manifolds*, Proc. London Math. Soc. (3) 7 (1957) pagg. 196-210.
- [13] J. MILNOR, *On the Stiefel - Whitney numbers of complex manifolds and of spin manifolds* Topology Vol. 3 (1965) pagg. 223-230.