ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

E. GIUSTI

Un'aggiunta alla mia nota : regolarità parziale delle soluzioni di sistemi ellittici quasi lineari di ordine arbitrario

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 27, nº 1 (1973), p. 161-166
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1973_3_27_1_161_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

UN'AGGIUNTA ALLA MIA NOTA: REGOLARITÀ PARZIALE DELLE SOLUZIONI DI SISTEMI ELLITTICI QUASI LINEARI DI ORDINE ARBITRARIO

E. GIUSTI [1]

Nella nota ricordata nel titolo [2] ho dimostrato che ogni funzione $u(x)$, soluzione in un aperto Ω di R^n del sistema ellittico non lineare (1.1) [2] a coefficienti continui, è regolare al di fuori di un insieme chiuso Σ di misura $(n-1)$-dimensionale nulla.

In seguito [3] ho provato alcune proprietà delle funzioni di $H^{1,p}(\Omega)$, che permettevano di migliorare la stima della dimensione dell'insieme singolare Σ. In particolare, per sistemi del secondo ordine, segue immediatamente dai risultati di [3] che la dimensione dell'insieme singolare non può superare $n-2$.

Lo stesso risultato sussiste per sistemi generali, del tipo considerato in [2]; ma la sua dimostrazione, benché semplice, non sembra del tutto banale, cosicché mi è parso opportuno aggiungere alla nota su ricordata alcune pagine che la completino.

1. Sia $\eta(t)$ una funzione definita in $[0, +\infty)$ e crescente, con $\eta(0)=0$, e sia X un insieme di R^n. La misura di Hausdorff $H(X, \eta)$ è così definita:

$$H(X,\eta) = \lim_{\varepsilon \to 0} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \eta(\operatorname{diam} X_i),\ \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i \supset X,\ \operatorname{diam} X_i < \varepsilon \right\}. \tag{1}$$

Pervenuto alla Redazione il 16 Dicembre 1971.

(1) Università di Pisa ed University of California, Berkeley.

(2) I numeri del tipo $(a.b)$ rimandano alle corrispondenti formule di [2], a cui ci si si riferisce per le definizioni e le notazioni.

Se $\eta(t) = t^\sigma$, $H(X, \eta)$ coincide con la più nota misura σ-dimensionale $H_\sigma(X)$.

Mi propongo di dimostrare il seguente risultato:

TEOREMA 1. *Sia $u(x)$ una soluzione del sistema* (1.1) *tale che per qualche q, $2 \leq q \leq n$, si abbia:*

$$\int_\Omega V^{p-q} \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha|=m_i} |D^\alpha u_i|^q \, dx < +\infty \tag{2}$$

se $2 \leq q \leq p$, ovvero:

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha|=m_i} |D^\alpha u_i|^q \, dx < +\infty \tag{2'}$$

se $p < q \leq n$.

Sia $\varphi(t)$ una funzione continua e positiva, definita in $[0, \operatorname{diam} \Omega]$ *e tale che:*

$$\begin{aligned} &\text{i)} \quad \varphi(t) \text{ è crescente} \\ &\text{ii)} \quad t^{-1} \varphi(t) \text{ è decrescente e } \lim_{t \to 0} t^{-1} \varphi(t) = +\infty \\ &\text{iii)} \quad \int_0^1 t^{-1} \varphi(t) \, dt < +\infty. \end{aligned} \tag{3}$$

Allora, detto Σ l'insieme singolore di u, si ha:

$$H(\Sigma, \eta_q) = 0 \tag{4}$$

dove si è posto:

$$\eta_q(t) = t^{n-q} \varphi(t)^q.$$

OSSERVAZIONE 1. In particolare se si scegle $\varphi(t) = t^{\varepsilon/q}$, $0 < \varepsilon < q$, si ottiene, ferme restando le ipotesi (2) o (2'), che

$$H_{n-q+\varepsilon}(\Sigma) = 0 \quad \text{per ogni} \quad \varepsilon > 0$$

ovvero che

$$\dim \Sigma \leq n - q.$$

OSSERVAZIONE 2. In ogni caso la (2) è verificata per $q = 2$; ne segue par ogni soluzione del sistema (1.1) la stima

$$H(\Sigma, \eta_2) = 0$$

e, grazie all'Osservazione 1:

$$\dim \Sigma \leq n - 2.$$

Questo risultato migliora quello di [2].

2. Alla dimostrazione del Teorema 1 premettiamo due lemmi.

LEMMA 1. *Sia $\varphi(t)$ come nel Teorema 1 e sia $u(x)$ una funzione di $H^{m,q}(\Omega)$. Se per un fissato punto y di Ω si ha:*

$$\int_{B(y,r)} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^q \, dx \leq M r^{n-q} \varphi(r)^q \quad \text{per ogni} \quad r < \operatorname{dist}(y, \partial\Omega) \tag{5}$$

allora esiste finito il limite

$$\lim_{r \to 0+} [P^{y,r}].$$

In partivolare si ha:

$$\sup_{0<r<\operatorname{dist}(y,\partial\Omega)} [P^{y,r}] < +\infty. \tag{6}$$

DIMOSTRAZIONE. Si ricordi che se Q è il polinomio

$$Q(x) = \sum_{|\alpha|<m} \frac{b_\alpha}{\alpha!} (x-y)^\alpha$$

si ha, per ogni $\varrho > 0$ (vedi [1], Lemma [2.1]):

$$|b_0|^q \leq c_1 \varrho^{-n} \int_{B(y,\varrho)} |Q|^q \, dx$$

Se $0 < s < r < \operatorname{dist}(y, \partial\Omega)/2$, posto

$$Q = D^\alpha (P^{y,r} - P^{y,s})$$

si ha la maggiorazione:

$$|a_\alpha(y,r) - a_\alpha(y,s)|^q \leq c_1 s^{-n} \int_{B(y,s)} |D^\alpha(P^{y,r} - P^{y,s})|^q \, dx \leq$$

$$< c_2 s^{-n} \left\{ \int_{B(y,r)} |D^\alpha(u - P^{y,r})|^q \, dx + \int_{B(y,s)} |D^\alpha(u - P^{y,s})|^q \, dx \right\}$$

e da questa, usando la disugnaglianze di Poincarè e ricordando che $|\alpha| < m$:

(7) $$| a_\alpha (y, r) - a_\alpha (y, s) |^q \leq c_3 \, s^{-n} \, r^q \int_{B(y,r)} \sum_{|\beta|=m} | D^\beta u |^q \, dx.$$

In particolare se si pone $r_j = r \, 2^{-j}$:

$$| a_\alpha (y, r_j) - a_\alpha (y, r_{j+1}) |^q \leq c_4 \, r_j^{q-n} \int_{B(y,r_j)} \sum_{|\beta|=m} | D^\beta u |^q \, dx \leq c_4 \, M \, \varphi (r_j)^q.$$

Da questa, per $h < j$:

(8) $$| a_\alpha (y, r_h) - a_\alpha (y, r_j) | \leq c_5 \sum_{i=h}^{j-1} \varphi (r_i) \leq c_6 \int_{r_j}^{r_{h-1}} t^{-1} \varphi (t) \, dt.$$

Ne segne che esiste finito il limite

$$\lim_{j \to \infty} a_\alpha (y, r_j) = \mu.$$

Se ora si scrive la (7) con r_j ed s_j al posto di r ed s si ottiene:

$$| a_\alpha (y, r_j) - a_\alpha (y, s_j) | \leq c_7 \, (r/s)^{n/q} \, \varphi (r_j)$$

che dimostra che μ non dipende da r.

Finalmente passando al limite nella (8) per $j \to \infty$ si trova:

$$| a_\alpha (y, r) - \mu | \leq c_6 \int_0^{2r} t^{-1} \varphi (t) \, dt$$

e quindi per ogni α esiste finito il limite $\lim_{r \to 0+} a_\alpha (y, r)$, il che è equivalente alla tesi.

LEMMA 2. *Sia $f(x)$ una funzione sommabile in Ω. Se si pone*

$$K_q = \left\{ y \in \Omega : \max \lim_{r \to 0+} \frac{1}{\eta_q (r)} \int_{B(y,r)} | f | \, dx > 0 \right\}$$

si ha

$$H (K_q , \eta_q) = 0$$

DIMOSTRAZIONE. Con le modifiche del caso (si tenga presente soprattutto la (3,ii)) ricalca quella del Teorema 1 di [3].

Dai Lemmi 1 e 2 segue immediatamente che se u è una fuuzione di $H^{m,q}(\Omega)$, posto

$$\Sigma_1 = \{y \in \Omega : \sup_{0<r<\operatorname{dist}(y,\, \partial\Omega)} [P^{y,r}] = +\infty\}$$

si ha

$$H(\Sigma_1, \eta_q) = 0 \tag{9}$$

dove al solito $\eta_q(t) = t^{n-q}\varphi(t)$, e φ è una qualsiasi funzione verificante le (3).

3. Passiamo ora alla dimostrazione del Teorema 1. È chiaro da [2] che affinché un punto y di Ω appartenga all'insieme singolare Σ si deve avere

$$\max_{r\to 0+} \lim J(y, r) > 0$$

oppure y deve appartenere a Σ_1.

Poiché dalla (2) (o dalla (2′) a seconda dei casi) segue che ogni u_i appartiene ad $H^{m_i,q}(\Omega)$, si ha per Σ_1 la valutazione (9).

Resta dunque da considerare l'insieme:

$$\Sigma_2 = \{y \in \Omega : \max_{r\to 0+} \lim J(y, r) > 0\}$$

Per questo ricordiamo che si ha (vedi (6.1) e (5.8)):

$$J(y, r) \leq c_7 [P^{y,r}]^{p-2} r^{2-n} \int_{B(y,r)} V^{p-2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha|=m_i} |D^\alpha u_i|^2 \, dx \tag{10}$$

$$r^{-n} \int_{B(y,r)} V^p \, dx \leq c_8 \{[P^{y,r}]^p + J(y, r)\}. \tag{11}$$

Valutando il secondo membro della (10) per mezzo della diseguaglianza di Hölder ed introducendo la (11) si ottiene:

$$J(y, r) < c_9 [P^{y,r}]^{p-2} \{[P^{y,r}]^p + J(y, r)\}^{1-2/q}\, W(y, r)^{2/q} \tag{12}$$

dove si e posto:

$$W(y, r) = r^{q-n} \int_{B(y,r)} V^{p-q} \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha|=m_i} |D^\alpha u_i|^q \, dx \tag{13}$$

D'altra parte la disuguaglianza

$$a \leq A\,(a + b)^{1-2/q}$$

implica

$$a \leq c_{10}\, A\,\{A^{q/2-1} + b^{1-2/q}\}$$

dunque dalla (12):

$$J\,(y, r) < c_{11}\, W\,(y, r)^{2/q}\,\{[P^{y,r}]^{2\,(p-1-p/q)} + [P^{y,r}]^{q\,(p/2-1)}\, W\,(y, r)^{1-2/q}\}. \tag{13}$$

È subito visto che $J\,(y, r)$ tende a zero se $y \notin \Sigma_1$ e $W\,(y, r)$ tende a zero; dalla (2) (o dalla (2′)), ricordando il Teorema 1 di [3], segue che $W\,(y, r)$ tende a zero con r per ogni $y \in \Omega$, tranne al più per un insieme di misura H_{n-q} nulla. Questo fatto e la (9) danno immediatamente la (4).

c. v. d.

BIBLIOGRAFIA

[1] CAMPANATO, S. *Proprietà di una famiglia di spazi funzionali.* Ann. S. N. S. Pisa **18** (1964) 137-160.

[2] GIUSTI, E. *Regolarità parziale delle soluzioni di sistemi ellittici quasi lineari di ordine arbitrario.* Ann. S. N. S. Pisa **23** (1969) 115-141.

[3] GIUSTI, E. *Precisazioоe delle funzioni di $H^{1,p}$ e singolarità delle soluzioni deboli di sistemi ellittici non lineari.* Boll. U. M. I. **2** (1969) 71-76.