ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

CARLO CELLUCCI

Operazioni di Brouwer e realizzabilità formalizzata

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 25, nº 4 (1971), p. 649-682

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1971_3_25_4_649_0>

OPERAZIONI DI BROUWER E REALIZZABILITÀ FORMALIZZATA

Carlo Cellucci (*)

Abstract - This paper discusses some applications of Kleene's realizability interpretation to the theory of Brouwer-operations IDB_0 [14]. Two formalized notions of numerical realizability are introduced and all theorems of IDB_0 and Heyting's version of Church's thesis TC are shown to be realizable in IDB_0. This yields a finitary consistency proof of $IDB_0 + TC$ relative to IDB_0. A class of formulae Γ such that $IDB_0 + TC$ is conservative over $IDB_0 \cap \Gamma$ is determined, i. e. it is shown that, for any $A \in IDB_0 \cap \Gamma$, if A is a theorem of $IDB_0 + TC$, then A is a theorem of IDB_0 The last section of the paper considers some proof-theoretic closure properties of IDB_0, e. g. closure under Church's rule.

1. Lo scopo principale di questo articolo è di illustrare alcune applicazioni dell'interpretazione di realizzabilità di Kleene alla teoria delle operazioni di Brouwer, quale formalizzata nel sistema IDB_0 di [14]. I risultati qui dimostrati sono solo degli esempi, quantunque abbastanza significativi, del tipo di questioni affrontabili con tale metodo. Essi sono comunque sufficienti per risolvere alcuni tra i principali problemi aperti di [14] § 3.8.

Per economia di esposizione ci baseremo sulla formalizzazione della teoria dei funzionali ricorsivi parziali di [9]. A causa soprattutto della diversità dei metodi di rappresentazione delle successioni finite di numeri naturali in [9] e [14] si rende necessaria una riformulazione di IDB_0. Nel § 2 si fornisce appunto tale riformulazione. Naturalmente la formulazione

---

Pervenuto alla Redazione il 18 Novembre 1970.

(*) Parte del lavoro di preparazione di questo articolo è stato eseguito ad Oxford mentre l'autore fruiva di una Fellowship della Royal Society, in base ad accordi con l'Accademia Nazionale dei Lincei. Non occorre sottolineare il debito dell'autore nei confronti del lavoro recente di Kleene, Kreisel e Troelstra sui fondamenti dell'analisi intuizionista. Senza di esso questo articolo non sarebbe stato neppure concepibile.

originaria di IDB_0 in [14] è più elegante, ma la possibilità di sfruttare senza alterazioni il minuzioso lavoro di [9] Parte I, val bene una perdita di eleganza. Per una discussione generale del significato di IDB_0 e del suo ruolo nella formalizzazione di certe nozioni di successione di scelte, si rimanda a [12], [17] e [14].

Il contenuto della parte principale dell'articolo può essere così riassunto. Nel § 3 si introducono due nozioni formalizzate di realizzabilità numerica, e si dimostra che tutti i teoremi formali di IDB_0 sono realizzabili in IDB_0 nel senso di tali nozioni. Nel § 4 si considera la versione di Heyting della tesi di Church TC, e si dimostra la realizzabilità di TC in IDB_0. Ciò permette di ottenere una dimostrazione finitaria della coerenza di $IDB_0 + TC$ rispetto a IDB_0. Ulteriore informazione in tale direzione è fornita nel § 5, in cui si determina una classe di formule per cui l'aggiunta di TC a IDB_0 è conservativa. Nel § 6 infine si considerano alcune proprietà di chiusura di IDB_0, tra cui la chiusura rispetto alla regola di Church. Per mantenere la trattazione il più possibile autonoma, le dimostrazioni sono date in dettaglio anche là dove si potrebbero ottenere con qualche adattamento da [9] Parte II. Il significato dei risultati relativi a TC dal punto di vista della formalizzazione delle nozioni di successione di scelte cui si è fatto riferimento sopra, può essere discusso lungo le linee indicate in [13].

Coi metodi sviluppati in questo articolo si possono estendere facilmente a IDB_0 i risultati di [18] sulla tesi di Church generalizzata TCG, sull'assiomatizzabilità in $IDB_0 + TCG$ della realizzabilità formale in IDB_0 nel senso dell'una o dell'altra nozione di realizzabilità numerica, ecc.. Per decidere, però, la questione generale se $IDB_0 + TC$ sia un'estensione conservativa di IDB_0, generalizzando così il risultato principale del § 5 a tutte le formule di IDB_0, occorre ricorrere presumibilmente a metodi differenti, del tipo di quelli considerati in [3].

2. Cominciamo anzitutto col descrivere il sistema IDB_0. Il *linguaggio* del sistema consta di variabili numeriche $x, y, z, u, v, w, i, j, k, l, m, n, \ldots$, di variabili per funzioni costruttive $a, b, c, d, \ldots$, del simbolo predicativo binario $=$, del simbolo predicativo unario K, di simboli funzionali appartenenti ad una lista finita $f_0, \ldots, f_p$ dove f_0 è 0 (zero) e f_1 è $'$ (successore), dell'operatore di astrazione λ, dei simboli logici $\wedge, \vee, \rightarrow, \bigwedge, \bigvee$ e di simboli ausiliari (parentesi tonde, virgola). La lista dei simboli funzionali $f_0, \ldots, f_p$ includerà in effetti ventisette simboli (cioè $p = 26$), e precisamente i simboli funzionali di [10] § 5.5 più i due simboli funzionali di [9] §§ 1.2, 1.5. *Termini* e *funtori* sono definiti in modo analogo a [10] § 3.3, naturalmente con le variabili per funzioni costruttive al posto di quelle per successioni di scelte. Adopereremo le lettere r, s, t per i termini, le lettere φ, χ, ψ per i funtori e le lettere

A, B, C per le formule. Qualora si adoperino altre lettere, ciò verrà esplicitamente indicato. Le *formule* sono introdotte induttivamente nel modo seguente. (i) Se r e s sono termini, allora $(r) = (s)$ è una formula; (ii) se φ è un funtore, $K(\varphi)$ è una formula; (iii) se A e B sono formule, allora $(A) \wedge (B)$, $(A) \vee (B)$ e $(A) \rightarrow (B)$ sono formule; (iv) se τ è una variabile numerica o una variabile per funzioni costruttive e A è una formula, allora $\bigwedge \tau (A)$ e $\bigvee \tau (A)$ sono formule. Le formule costruite usando solo (i) e (ii) si dicono *prime*.

Le convenzioni sull'uso delle parentesi sono quelle di [10] pp. 10-11. Lo stesso dicasi per tutte le altre nozioni e notazioni di [10] §§ 3-6. In particolare i numerali $0, 0', 0'', \ldots$ verranno indicati con i simboli $0, 1, 2, \ldots$ e, ove si sia introdotta una lettera x per designare un certo numero, $\mathbf{x}$ indicherà il numerale corrispondente $0^{(x)}$. $\equiv$ verrà usato come segno di abbreviazione. Poiché non si sono adottati $\neg$ e $\longleftrightarrow$ come simboli primitivi, li si introdurrà mediante le definizioni $\neg A \equiv A \rightarrow 0 = 1$ e $A \longleftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$. Per la rappresentazione delle successioni finite di numeri si rimanda a [10] § 6.2. In vista del fatto che tutta la trattazione verrà svolta in stretto accordo con [6], [10] e [9], ci riferiremo a teoremi formali ivi dimostrati semplicemente col loro numero. Per esempio *149a sta per una proposizione di [6], *25.1 per una proposizione di [10] e *34.18 per una proposizione di [9].

Gli *assiomi* e le *regole* di IDB_0 possono essere così descritti. (i) Gli assiomi dei gruppi A — D di [10] §§ 4-6, con le seguenti modifiche. 1) Si elimina lo sch. ass. 7, che diventa ridondante poiché si ottiene dallo sch. ass. 1b prendendo $0 = 1$ come C, cfr. [6] § 74, esempio 3. 2) Si rimpiazza lo schema di assioma di scelta $\bigwedge x \bigvee a$ da numeri a funzioni costruttive $^{x}2.1$, con lo schema di assioma di scelta $\bigwedge x \bigvee y$ da numeri a numeri *2.2. (ii) Gli assiomi della specie K delle operazioni di Brouwer, cioè gli assiomi $K1$ — $K3$ seguenti. Sia λ^* l'operatore di astrazione ristretto a numeri di successioni, cioè, poiché per *22.1 e $^{x}10.1$, $^{x}10.2$ $\mathrm{Seq}(x) \longleftrightarrow \mathrm{sg}(x \cdot (x)_0 \cdot \ldots \cdot (x)_{\mathrm{lh}(x) \dot{-} 1}) = 1$, $\lambda^* x\, t \equiv \lambda x\, t \cdot \mathrm{sg}(x \cdot (x)_0 \cdot \ldots \cdot (x)_{\mathrm{lh}(x) \dot{-} 1})$. Allora:

$$\text{K1.} \quad a = \lambda^* n\, y' \rightarrow K(a),$$

$$\text{K2.} \quad a(1) = 0 \wedge \bigwedge x K(\lambda^* n\, a(\langle x \rangle * n)) \rightarrow K(a),$$

$$\text{K3.} \quad \bigwedge a \bigwedge y (a = \lambda^* n\, y' \rightarrow P(a)) \wedge \bigwedge a (a(1) = 0 \wedge \bigwedge x P(\lambda^* n\, a(\langle x \rangle * n)) \rightarrow P(a)) \rightarrow \bigwedge a (K(a) \rightarrow P(a)),$$

dove P è una formula qualsiasi di IDB_0.

OSSERVAZIONE 2.1. Le principali differenze tra questa formulazione di IDB_0 e il sistema analogo di [14] sono le seguenti.

1) L'uso degli assiomi logici di [10] § 4 al posto di quelli di [16]. Come dimostrato in [16], tuttavia, gli assiomi ivi formulati contengono quelli di [10], ed è facile inoltre verificare l'inverso, cioè i due sistemi sono equivalenti. 2) L'uso di simboli funzionali con più argomenti. Naturalmente mediante le funzioni di coppia di [14] si sarebbero potuti considerare solo simboli funzionali monoargomentali, e ci si sarebbe potuti limitare ad introdurre un unico schema di definizione per ricursione primitiva. 3) L'uso dello schema di assioma di scelta $\bigwedge x \bigvee y$ al posto dello schema di assioma di scelta con unicità $\bigwedge x \bigvee ! y$. Il primo, comunque, viene impiegato solo nella dimostrazione del lemma 3.3 (vi). Per tutti gli altri usi è sufficiente il secondo, cfr. [9] p. 4, nota 7, con l'osservazione 6.5 appresso. 4) L'adozione di una diversa rappresentazione delle successioni finite di numeri naturali, certo meno conveniente di quella di [14] § 2.5.3 poiché in quest'ultima ogni numero naturale è il numero di una successione.

Naturalmente tutti i termini di IDB_0 sono totali, cioè esprimono funzioni completamente definite. Per poter dare una trattazione formale sistematica di certe abbreviazioni di formule di IDB_0, come $\{z\}(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_p) \simeq w$ e $r \simeq s$, si estenderà il linguaggio di IDB_0 introducendo nuovi simboli ausiliari (parentesi graffe, punto e virgola), e definendo termini e funtori parziali, o p-termini e p-funtori, nel modo indicato in [9] § 2.4. La formalizzazione della teoria dei funzionali ricorsivi parziali procede allora esattamente come in [9] Parte I. Oltre alle notazioni ivi introdotte, adopereremo l'abbreviazione $\{t\} \equiv \lambda y \{t\}(y)$, per ogni p-termine t. Non si farà alcun uso, ovviamente, della teoria di $\{\tau\}[\alpha]$ e della teoria di $\Lambda \alpha\, u[\alpha]$ di [9] §§ 4.3-4.5 poiché le nozioni di realizzabilità considerate in questo articolo sono nozioni di realizzabilità numerica. Al posto della seconda si introdurrà una formalizzazione della teoria di [6] § 65 nel modo seguente. Sia t un p-termine contenente libere solo le variabili numeriche $x_1, \ldots, x_n, y$. Per [9] lemma 41 c'è un numero $\mathbf{z}$ tale che $\{\mathbf{z}\}(x_1, \ldots, x_n, y) \simeq t$, e per [9] lemma 42 c'è un termine $S^n(\mathbf{z}, x_1, \ldots, x_n)$ tale che $\{S^n(\mathbf{z}, x_1, \ldots, x_n)\}(y) \simeq \{\mathbf{z}\}(x_1, \ldots, x_n, y)$, quindi per [9] lemma 10 (c) $\{S^n(\mathbf{z}, x_1, \ldots, x_n)\}(y) \simeq t$. Scriviamo $\Lambda y\, t(x_1, \ldots, x_n, y)$, o semplicemente $\Lambda y\, t(y)$, come abbreviazione di $S^n(\mathbf{z}, x_1, \ldots, x_n)$. Si ha allora il seguente risultato, formalmente analogo a *34.13a.

*34.13c. $$\vdash_{\mathrm{IDB}_0} \{\Lambda y\, t(y)\}(y) \simeq t(y).$$

Adopereremo, in particolare, $\Lambda^* y\, t(y)$ come abbreviazione di $\Lambda y\, t(y) \cdot \mathrm{sg}\,(y \cdot (y)_0 \cdot \ldots \cdot (y)_{\mathrm{lh}\,(y) \dot{-} 1})$.

3. Introduciamo ora due nozioni di realizzabilità numerica, che costituiscono gli analoghi numerici delle nozioni di **r**-realizzabilità e **q**-realizzabilità funzionale di [9] § 5.1. Mentre queste ultime sono naturali nel caso di sistemi contenenti variabili per successioni di scelte con dei principi di continuità, come quello di [10], nozioni di realizzabilità numerica costituiscono l'ovvia soluzione per sistemi con variabili per funzioni costruttive, come IDB_0. Le nozioni qui introdotte sono una versione formale di [5], [6] § 82 e [7]. La trattazione di formule prime della forma $K(\varphi)$ segue il suggerimento di [12] p. 235, adottato anche in [14] § 3.7.

Ad ogni formula F di IDB_0 associamo una formula $x\,\mathbf{r}\,F$ per induzione sulla costruzione di F. Nella definizione seguente x e y sono variabili numeriche differenti, x (e nella clausola **r5** y) non occorre libera in F, nella clausola **r7** x è libera per y in $A(y)$, e nella clausola **r9** x è libera per a in $A(a)$. In $x\,\mathbf{r}\,F$ la variabile x può essere sostituita con un termine t nel modo consueto.

r1. $x\,\mathbf{r}\,(r = s) \equiv r = s.$

r2. $x\,\mathbf{r}\,K(\varphi) \equiv K(\varphi) \wedge \{x\} \simeq \varphi.$

r3. $x\,\mathbf{r}\,(A \wedge B) \equiv (x)_0\,\mathbf{r}\,A \wedge (x)_1\,\mathbf{r}\,B.$

r4. $x\,\mathbf{r}\,(A \vee B) \equiv ((x)_0 = 0 \rightarrow (x)_1\,\mathbf{r}\,A) \wedge ((x)_0 \neq 0 \rightarrow (x)_1\,\mathbf{r}\,B).$

Quest'ultima equivale in IDB_0 a $((x)_0 = 0 \wedge (x)_1\,\mathbf{r}\,A) \vee ((x)_0 \neq 0 \wedge (x)_1\,\mathbf{r}\,B)$.

r5. $x\,\mathbf{r}\,(A \rightarrow B) \equiv \bigwedge y\,(y\,\mathbf{r}\,A \rightarrow\, !\,\{x\}(y) \wedge [\{x\}(y)\,\mathbf{r}\,B]).$

r6. $x\,\mathbf{r}\,\bigwedge y\,A(y) \equiv \bigwedge y\,(!\,\{x\}(y) \wedge [\{x\}(y)\,\mathbf{r}\,A(y)]).$

r7. $x\,\mathbf{r}\,\bigvee y\,A(y) \equiv (x)_1\,\mathbf{r}\,A((x)_0).$

r8. $x\,\mathbf{r}\,\bigwedge a\,A(a) \equiv \bigwedge y\,(\,!\,\{y\} \rightarrow\, !\,\{y\} \wedge [!\,\{x\}(y) \wedge [\{x\}(y)\,\mathbf{r}\,A(\{y\})]]).$

r9. $x\,\mathbf{r}\,\bigvee a\,A(a) \equiv\, !\,\{(x)_0\} \wedge [(x)_1\,\mathbf{r}\,A(\{(x)_0\})].$

Analogamente si ottiene la definizione di una relazione $x\,\mathbf{q}\,F$, sostituendo **r** con **q** nelle clausole **r1** — **r3**, **r6**, **r8** della definizione di $x\,\mathbf{r}\,F$ (le nuove clausole si leggeranno **q1** — **q3**, **q6**, **q8** rispettivamente), e sostituendo **r4**, **r5**, **r7**, **r9** con le nuove clausole **q4**, **q5**, **q7**, **q9** indicate appresso. Le condizioni sulle variabili già menzionate per $x\,\mathbf{r}\,F$ si applicano anche a $x\,\mathbf{q}\,F$. Come in [9] metteremo in evidenza le parti aggiunte nella definizione di $x\,\mathbf{q}\,F$ rispetto a quella di $x\,\mathbf{r}\,F$ scrivendole tra le parentesi « $\ulcorner$ » e « $\urcorner$ ».

q4. $x\,\mathbf{q}\,(A \vee B) \equiv ((x)_0 = 0 \rightarrow (x)_1\,\mathbf{q}\,A \ulcorner \wedge A \urcorner) \wedge ((x)_0 \neq 0 \rightarrow (x)_1\,\mathbf{q}\,B \ulcorner \wedge B \urcorner).$

Quest'ultima equivale in IDB_0 a $((x)_0 = 0 \wedge (x)_1 \,\mathbf{q}\, A \ulcorner \wedge A \urcorner) \vee ((x)_0 \neq 0 \wedge (x)_1 \,\mathbf{q}\, B \ulcorner \wedge B \urcorner)$.

q5. $x \,\mathbf{q}\, (A \to B) \equiv \bigwedge y\, (y \,\mathbf{q}\, A \ulcorner \wedge A \urcorner \to\, !\,\{x\}(y) \wedge [\{x\}(y) \,\mathbf{q}\, B])$.

q7. $x \,\mathbf{q}\, \bigvee y\, A(y) \equiv (x)_1 \,\mathbf{q}\, A((x)_0) \ulcorner \wedge A((x)_0) \urcorner$.

q9. $x \,\mathbf{q}\, \bigvee a\, A(a) \equiv\, !\,\{(x)_0\} \wedge [(x)_1 \,\mathbf{q}\, A(\{(x)_0\}) \ulcorner \wedge A(\{(x)_0\}) \urcorner]$.

OSSERVAZIONE 3.1. I lemmi 2, 4, 6 e le osservazioni 3, 5, 7 di [9] per $R \simeq S$ si estendono alle abbreviazioni $x \,\mathbf{r}\, F$ e $x \,\mathbf{q}\, F$ (e a $t \,\mathbf{r}\, F$ e $t \,\mathbf{q}\, F$, per un termine qualsiasi t). Cioè tali abbreviazioni non contengono variabili libere non indicate nell'abbreviazione, per cui le regole di $\bigwedge$-introd. e $\bigvee$-elim. si applicano ad esse nel modo consueto. Lo stesso dicasi per le regole di $\bigwedge$-elim., $\bigvee$-introd., sostituzione e rimpiazzamento, per opportune scelte delle variabili vincolate non indicate nell'abbreviazione.

TEOREMA 3.2. Per ogni formula F, indichiamo con $\bigwedge F$ la sua chiusura (universale). Supponiamo che $\vdash_{\mathrm{IDB}_0} F$. Allora esiste un p-termine chiuso t tale che:

(i) $\vdash_{\mathrm{IDB}_0} !\, t \wedge [t \,\mathbf{r}\, \bigwedge F]$ e $\vdash_{\mathrm{IDB}_0} !\, t \wedge [t \,\mathbf{q}\, \bigwedge F]$,

(ii) $\vdash_{\mathrm{IDB}_0} \bigvee xx \,\mathbf{r}\, \bigwedge F$ e $\vdash_{\mathrm{IDB}_0} \bigvee xx \,\mathbf{q}\, \bigwedge F$.

DIMOSTRAZIONE. (ii) segue da (i) per *34.16a, $\to$-elim. con *93 e $\wedge$-elim.. (i) si ottiene per induzione sulla lunghezza della data dimostrazione di F in IDB_0. Mostreremo cioè che (i) vale per gli assiomi di IDB_0, e che se vale per le premesse di una regola di inferenza, vale anche per la conclusione. La dimostrazione verrà data per $\mathbf{q}$. La dimostrazione per $\mathbf{r}$ si ottiene da quella per $\mathbf{q}$ semplicemente omettendo le parti scritte tra parentesi « $\ulcorner$ » e « $\urcorner$ » e leggendo ovunque $\mathbf{r}$ invece di $\mathbf{q}$. Nel caso che F sia un assioma o la conclusione di una regola di inferenza diversa dalla regola 2, ci limiteremo a mostrare che $t \,\mathbf{q}\, \bigwedge F$ (cioè che $\vdash_{\mathrm{IDB}_0} t \,\mathbf{q}\, \bigwedge F$), per qualche termine t. Infatti per *34.18 ciò equivale a dimostrare che $!\, t \wedge [t \,\mathbf{q}\, \bigwedge F]$. Per mantenere al minimo la complessità della dimostrazione, supporremo che gli assiomi e le regole di inferenza non contengano altre variabili libere oltre quelle esplicitamente indicate. La dimostrazione si estende nel modo ovvio al caso generale di assiomi e regole di inferenza contenenti un numero qualsiasi di variabili libere. Sempre per economia di esposizione la dimostrazione verrà data in dettaglio solo nei casi che presentano maggiori difficoltà, o sono particolarmente indicativi. Per i rimanenti ci limiteremo ad indicare il p-termine relativo t.

Soh. Ass. 1a. $A \to (B \to A)$. Il termine cercato t è $\Lambda u \Lambda v u$.

Soh. Ass. 1b. $(A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$. Supponiamo che
(a) $u \,\mathrm{q}\, (A \to B) \ulcorner \wedge (A \to B) \urcorner$, cioè $\bigwedge y\, (y \,\mathrm{q}\, A \ulcorner \wedge A \urcorner \to !\, \{u\}(y) \wedge [\{u\}(y) \,\mathrm{q}\, B]) \ulcorner \wedge (A \to B) \urcorner$,
(b) $v \,\mathrm{q}\, (A \to (B \to C)) \ulcorner \wedge (A \to (B \to C)) \urcorner$, cioè $\bigwedge y\, (y \,\mathrm{q}\, A \ulcorner \wedge A \urcorner \to !\, \{v\}(y) \wedge [\{v\}(y) \,\mathrm{q}\, (B \to C)]) \ulcorner \wedge (A \to (B \to C)) \urcorner$,
(c) $y \,\mathrm{q}\, A \ulcorner \wedge A \urcorner$.

Allora da (a) e (b) per $\bigwedge y$- e $\to$-elim. con (c) si ha

(1) $$!\, \{u\}(y) \wedge [\{u\}(y) \,\mathrm{q}\, B] \ulcorner \wedge B \urcorner,$$

(2) $$!\, \{v\}(y) \wedge [\{v\}(y) \,\mathrm{q}\, (B \to C)].$$

Per [9] osservazione 47 (per P-termini), supponiamo che
(d) $\{u\}(y) \simeq \overline{\{u\}(y)} \wedge \overline{\{u\}(y)} \,\mathrm{q}\, B$,
(e) $\{v\}(y) \simeq \overline{\{v\}(y)} \wedge \overline{\{v\}(y)} \,\mathrm{q}\, (B \to C)$.
Da (e) per $\wedge$-elim. (con la clausola $\mathrm{q}5$),

(3) $$\bigwedge w\, (w \,\mathrm{q}\, B \ulcorner \wedge B \urcorner \to !\, \{\overline{\{v\}(y)}\}(w) \wedge [\{\overline{\{v\}(y)}\}(w) \,\mathrm{q}\, C]).$$

Perciò per $\bigwedge$-elim. (prendendo $\overline{\{u\}(y)}$ come w, poiché $\overline{\{u\}(y)}$ è un termine, a differenza di $\{u\}(y)$), e per $\to$-elim. con (d) $\ulcorner$e (1)$\urcorner$,

(4) $$!\, \{\overline{\{v\}(y)}\}(\overline{\{u\}(y)}) \wedge [\{\overline{\{v\}(y)}\}(\overline{\{u\}(y)}) \,\mathrm{q}\, C].$$

Per (d) e (e) con *34.20 e [9] lemma 18, e usando $\bigvee$-elim. per scaricare (d) e (e),

(5) $$!\, \{\{v\}(y)\}(\{u\}(y)) \wedge [\{\{v\}(y)\}(\{u\}(y)) \,\mathrm{q}\, C].$$

Dunque per *34.13c e *34.20,

(6) $$!\, \{\Lambda y\, \{\{v\}(y)\}(\{u\}(y))\}(y) \wedge [\{\Lambda y\, \{\{v\}(y)\}(\{u\}(y))\}(y) \,\mathrm{q}\, C].$$

Da quest'ultima per $\to$-introd. (scaricando (c)), e $\bigwedge y$-introd. (con la clausola $\mathrm{q}5$),

(7) $$\Lambda y\, \{\{v\}(y)\}(\{u\}(y)) \,\mathrm{q}\, (A \to C).$$

Perciò per *34.18 e *34.13c con *34.20,

(8) $$!\, \{\Lambda v \Lambda y\, \{\{v\}(y)\}(\{u\}(y))\}(v) \wedge [\{\Lambda v \Lambda y\, \{\{v\}(y)\}(\{u\}(y))\}(v) \,\mathrm{q}\, (A \to C)].$$

Da (8) per $\rightarrow$-introd. (scaricando (b)) e $\Lambda\, v$-introd. (con la clausola q5),

(9) $$\Lambda v \Lambda y\, \{\{v\}(y)\}(\{u\}(y))\ \mathbf{q}\ ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)).$$

Con un procedimento analogo a quello con cui si è ottenuto (9) da (7) (scaricando (a)) si ha

(10) $$\Lambda u \Lambda v \Lambda y\, \{\{v\}(y)\}(\{u\}(y))\ \mathbf{q}\ ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))).$$

SCH. ASS. 3. $A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$. t è $\Lambda u \Lambda v \langle u, v \rangle$.

SCH. ASS. 4a, b. $A \wedge B \rightarrow A$, $A \wedge B \rightarrow B$. t è, rispettivamente, $\Lambda u\,(u)_0$ e $\Lambda u\,(u)_1$.

SCH. ASS. 5a, b. $A \rightarrow A \vee B$, $B \rightarrow A \vee B$. t è, rispettivamente, $\Lambda u \langle 0, u \rangle$ e $\Lambda v \langle 1, v \rangle$.

SCH. ASS. 6. $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$. Da *136, *138b e *6.7 con *61a per sostituzione si ha $(w)_0 \neq 0 \rightarrow (w)_0 = ((w)_0 \dot{-} 1)'$. Perciò per [9] lemma 44 c'è un numero z tale che

(1) $$(w)_0 = 0 \rightarrow \{\mathrm{z}\}(u, v, w) \simeq \{u\}((w)_1),$$

(2) $$(w)_0 \neq 0 \rightarrow \{\mathrm{z}\}(u, v, w) \simeq \{v\}((w)_1).$$

Supponiamo che

(a) $u\ \mathbf{q}\ (A \rightarrow C) \ulcorner\wedge (A \rightarrow C)\urcorner$, cioè $\Lambda x\, (x\ \mathbf{q}\ A \ulcorner\wedge A\urcorner \rightarrow\ !\{u\}(x) \wedge [\{u\}(x)\ \mathbf{q}\ C]) \ulcorner\wedge (A \rightarrow C)\urcorner$,
(b) $v\ \mathbf{q}\ (B \rightarrow C) \ulcorner\wedge (B \rightarrow C)\urcorner$, cioè $\Lambda y\, (y\ \mathbf{q}\ B \ulcorner\wedge B\urcorner \rightarrow\ !\{v\}(y) \wedge [\{v\}(y)\ \mathbf{q}\ C]) \ulcorner\wedge (B \rightarrow C)\urcorner$,
(c) $w\ \mathbf{q}\ (A \vee B) \ulcorner\wedge (A \vee B)\urcorner$, cioè $((w)_0 = 0 \wedge (w)_1\ \mathbf{q}\ A \ulcorner\wedge A\urcorner) \vee ((w)_0 \neq 0 \wedge (w)_1\ \mathbf{q}\ B \ulcorner\wedge B\urcorner)$.

Caso 1. $(w)_0 = 0 \wedge (w)_1\ \mathbf{q}\ A \ulcorner\wedge A\urcorner$. Per $\ulcorner\wedge$-e$\urcorner$ Λ-elim. da (a) (prendendo $(w)_1$ come x) e $\rightarrow$-elim. con l'assunzione si ha

(3) $$!\{u\}((w)_1) \wedge [\{u\}((w)_1)\ \mathbf{q}\ C].$$

Ancora per $\rightarrow$-elim. con l'assunzione da (1) si ha

(4) $$\{\mathrm{z}\}(u, v, w) \simeq \{u\}((w)_1).$$

Da (4) e (3) con *34.20,

(5) $$!\{\mathrm{z}\}(u, v, w) \wedge [\{\mathrm{z}\}(u, v, w)\ \mathbf{q}\ C].$$

Caso 2. $(w)_0 \neq 0 \wedge (w)_1 \ \mathrm{q} \ B \ulcorner\wedge B\urcorner$. Analogamente, usando (b) e (2), si ottiene ancora (5). Perciò per $\vee$-elim. (scaricando le assunzioni dei casi),

(6) $$! \{\mathrm{z}\} (u, v, w) \wedge [\{\mathrm{z}\} (u, v, w) \ \mathrm{q} \ C],$$

da cui come (10) da (5) nel caso dello sch. ass. 1b (scaricando (a), (b) e (c)) si ha

(7) $$Au \ Av \ Aw \ \{\mathrm{z}\} (u, v, w) \ \mathrm{q} \ ((A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))).$$

SCH. ASS. 8^{I}. $(A \rightarrow 0 = 1) \rightarrow (A \rightarrow B)$. Supponiamo che
(a) $u \ \mathrm{q} \ (A \rightarrow 0 = 1) \ulcorner\wedge (A \rightarrow 0 = 1)\urcorner$, cioè $\Lambda y \, (y \ \mathrm{q} \ A \ulcorner\wedge A\urcorner \rightarrow$ $! \{u\} (y) \wedge [\{u\} (y) \ \mathrm{q} \ (0 = 1)]) \ulcorner\wedge (A \rightarrow 0 = 1)\urcorner$,
(b) $y \ \mathrm{q} \ A \ulcorner\wedge A\urcorner$.
Da (a) per Λ- e $\rightarrow$-elim. con (b) si ha

(1) $$! \{u\} (y) \wedge [\{u\} (y) \ \mathrm{q} \ (0 = 1)],$$

da cui per la clausola q1 con *34.19 e $\wedge$-elim.,

(2) $$0 = 1.$$

Per $\rightarrow$-introd. (scaricando (b)),

(3) $$y \ \mathrm{q} \ A \ulcorner\wedge A\urcorner \rightarrow 0 = 1.$$

Perciò per *10a$^{\bullet}$ e Λy-introd.,

(4) $$\Lambda y \, (y \ \mathrm{q} \ A \ulcorner\wedge A\urcorner \rightarrow \, ! \{0\} (y) \wedge [\{0\} (y) \ \mathrm{q} \ B]), \text{ cioè } 0 \ \mathrm{q} \ (A \rightarrow B),$$

da cui come (9) da (7) nel caso dello sch. ass. 1b (scaricando (a)),

(5) $$Au \ 0 \ \mathrm{q} \ ((A \rightarrow 0 = 1) \rightarrow (A \rightarrow B)).$$

SCH. ASS. 10N. $\Lambda x \, A(x) \rightarrow A(r)$. t è $Au \, \{u\} (r)$.

SCH. ASS. 10F. $\Lambda a \, A(a) \rightarrow A(\varphi)$. Supponiamo che
(a) $u \ \mathrm{q} \ \Lambda a \, A(a) \ulcorner\wedge \Lambda a \, A(a)\urcorner$, cioè $\Lambda x \, (\, ! \{x\} \rightarrow \, ! \{x\} \wedge [\, ! \{u\} (x) \wedge$ $[\{u\} (x) \ \mathrm{q} \ A (\{x\})]]) \ulcorner\wedge \Lambda a \, A(a)\urcorner$.

Per [9] lemma 41 c'è un numero v tale che $\Lambda y \, \{\mathrm{v}\} (y) \simeq \varphi(y)$, perciò per [9] lemma 18 e *0.4,

(1) $$\{\mathrm{v}\} \simeq \varphi,$$

da cui per V-introd.

(2) $$!\,\{\mathrm{v}\}.$$

Da (a) per Λ-elim. (prendendo v come x) e $\rightarrow$-elim. con (2),

(3) $$!\,\{\mathrm{v}\} \wedge [\,!\,\{u\}(\mathrm{v}) \wedge [\{u\}(\mathrm{v})\ \mathrm{q}\ A(\{\mathrm{v}\})]].$$

Per (1) e *34.20 con *34.18 si ottiene

(4) $$!\,\{u\}(\mathrm{v}) \wedge [\{u\}(\mathrm{v})\ \mathrm{q}\ A(\varphi)].$$

Infine come (7) da (5) nel caso dello sch. ass. 1b (scaricando (a)),

(5) $$Au\,\{u\}(\mathrm{v})\ \mathrm{q}\ (\Lambda a\, A(a) \rightarrow A(\varphi)).$$

SCH. ASS. 11N. $A(r) \rightarrow \mathsf{V} x A(x)$. t è $Au \langle r, u \rangle$.

SCH. ASS. 11F. $A(\varphi) \rightarrow \mathsf{V} a A(a)$. Supponiamo che

(a) $u\ \mathrm{q}\ A(\varphi) \ulcorner \wedge A(\varphi) \urcorner$.

Per [9] lemma 41 c'è un numero v tale che $\Lambda y\, \{\mathrm{v}\}(y) \simeq \varphi(y)$, da cui per [9] lemma 18 e *0.4 $\{\mathrm{v}\} \simeq \varphi$. Perciò da (a) per *34.18 con *34.20,

(1) $$!\,\{\mathrm{v}\} \wedge [u\ \mathrm{q}\ A(\{\mathrm{v}\}) \ulcorner \wedge A(\{\mathrm{v}\}) \urcorner].$$

Per *25.1 $(\langle \mathrm{v}, u \rangle)_0 = \mathrm{v}$ e $(\langle \mathrm{v}, u \rangle)_1 = u$. Usando ciò in (1) con *34.20 e *34.22,

(2) $$!\,\{(\langle \mathrm{v}, u \rangle)_0\} \wedge [(\langle \mathrm{v}, u \rangle)_1\ \mathrm{q}\ A(\{(\langle \mathrm{v}, u \rangle)_0\}) \ulcorner \wedge A(\{(\langle \mathrm{v}, u \rangle)_0\}) \urcorner],$$

cioè (per la clausola q 9) $\langle \mathrm{v}, u \rangle\ \mathrm{q}\ \mathsf{V} a A(a)$. Perciò come (9) da (7) nel caso dello sch. ass. 1b (scaricando (a)),

(3) $$Au \langle \mathrm{v}, u \rangle\ \mathrm{q}\ (A(\varphi) \rightarrow \mathsf{V} a A(a)).$$

SCH. ASS. 13. $A(0) \wedge \Lambda x (A(x) \rightarrow A(x')) \rightarrow A(x)$. Come già accennato, si tratterà di mostrare il teorema per la chiusura di tale formula. Per [9] lemma 44 c'è un numero w tale che

(1) $$x = 0 \rightarrow \{\mathrm{w}\}(y, x, u) \simeq (u)_0\,,$$

(2) $$x = k' \rightarrow \{\mathrm{w}\}(y, x, u) \simeq \{\{(u)_1\}(x \dot{-} 1)\}(\{y\}(x \dot{-} 1, u)).$$

Per [9] lemma 43 c'è un numero z tale che

(3) $$\{\mathrm{z}\}(x, u) \simeq \{\mathrm{w}\}(\mathrm{z}, x, u).$$

Vogliamo far vedere che $\Lambda u\, \{\mathbf{z}\}(x, u)\ \mathbf{q}\ (A(0) \wedge \Lambda x\, (A(x) \rightarrow A(x')) \rightarrow A(x))$. Supponiamo che

$$\text{(a)} \qquad u\ \mathbf{q}\ (A(0) \wedge \Lambda x\, (A(x) \rightarrow A(x')))\ \ulcorner \wedge (A(0) \wedge \Lambda x\, (A(x) \rightarrow A(x')))\urcorner .$$

Mostriamo per induzione su x che $!\, \{\mathbf{z}\}(x, u) \wedge [\{\mathbf{z}\}(x, u)\ \mathbf{q}\ A(x)]$.

Base. Per (3) e (1),

$$\text{(4)} \qquad \{\mathbf{z}\}(0, u) \simeq (u)_0 .$$

Da (a) per $\ulcorner \wedge$-elim. e $\urcorner$ la clausola $\mathbf{q}\,3$, $(u)_0\ \mathbf{q}\ A(0)$ perciò per *34.18 e *34.20 da (4) si ottiene

$$\text{(5)} \qquad !\, \{\mathbf{z}\}(0, u) \wedge [\{\mathbf{z}\}(0, u)\ \mathbf{q}\ A(0)].$$

Passo di induzione. Supponiamo che

$$\text{(b)} \qquad !\, \{\mathbf{z}\}(x, u) \wedge [\{\mathbf{z}\}(x, u)\ \mathbf{q}\ A(x)],$$

$$\text{(c)} \qquad \{\mathbf{z}\}(x, u) \simeq \overline{\{\mathbf{z}\}(x, u)} \wedge \overline{\{\mathbf{z}\}(x, u)}\ \mathbf{q}\ A(x).$$

Per (3), (2) e *6.3,

$$\text{(6)} \qquad \{\mathbf{z}\}(x', u) \simeq \{\{(u)_1\}(x)\}(\{\mathbf{z}\}(x, u)).$$

$\ulcorner$ Da (a) per $\wedge$ - e $\rightarrow$ - elim. con lo sch. ass. 13 si ha $A(x)$, perciò $\urcorner$ per (c),

$$\text{(7)} \qquad \overline{\{\mathbf{z}\}(x, u)}\ \mathbf{q}\ A(x)\ \ulcorner \wedge A(x) \urcorner.$$

Ancora da (a) con le clausole $\mathbf{q}\,3$ e $\mathbf{q}\,6$ e Λx-elim.,

$$\text{(8)} \qquad !\, \{(u)_1\}(x) \wedge [\{(u)_1\}(x)\ \mathbf{q}\ (A(x) \rightarrow A(x'))].$$

Supponiamo che

$$\text{(d)} \qquad \{(u)_1\}(x) \simeq \overline{\{(u)_1\}(x)} \wedge \overline{\{(u)_1\}(x)}\ \mathbf{q}\ (A(x) \rightarrow A(x')),$$

da cui $\Lambda y\, (y\ \mathbf{q}\ A(x)\ \ulcorner \wedge A(x) \urcorner \rightarrow\ !\, \{\overline{\{(u)_1\}(x)}\}(y) \wedge [\{\overline{\{(u)_1\}(x)}\}(y)\ \mathbf{q}\ A(x')])$. Perciò per Λ-elim. (prendendo $\overline{\{\mathbf{z}\}(x, u)}$ come y) e $\rightarrow$ - elim. con (7),

$$\text{(9)} \qquad !\, \{\overline{\{(u)_1\}(x)}\}(\overline{\{\mathbf{z}\}(x, u)}) \wedge [\{\overline{\{(u)_1\}(x)}\}(\overline{\{\mathbf{z}\}(x, u)})\ \mathbf{q}\ A(x')].$$

Da (9) per (c) e (d) con [9] lemma 18, (6) e *34.20, e usando V-elim. per scaricare (c) e (d),

(10) $$!\,\{\mathbf{z}\}\,(x', u) \wedge [\{\mathbf{z}\}\,(x', u)\ \mathrm{q}\ A\,(x')].$$

Per lo sch. ass. 13 si conclude, dunque,

(11) $$!\,\{\mathbf{z}\}\,(x, u) \wedge [\{\mathbf{z}\}\,(x, u)\ \mathrm{q}\ A\,(x)].$$

Perciò come (7) da (5) nel caso dello sch. ass. 1b (scaricando (a)),

(12) $$\Lambda u\,\{\mathbf{z}\}\,(x, u)\ \mathrm{q}\ (A\,(0) \wedge \bigwedge x\,(A\,(x) \rightarrow A\,(x')) \rightarrow A\,(x)).$$

Per *34.18, *34.13c con *34.20,

(13) $$!\,\{\Lambda x\ \Lambda u\,\{\mathbf{z}\}\,(x, u)\}\,(x) \wedge [\{\Lambda x\ \Lambda u\,\{\mathbf{z}\}\,(x, u)\}\,(x)\ \mathrm{q}\ (A\,(0) \wedge \bigwedge x\,(A\,(x) \rightarrow A\,(x')) \rightarrow A\,(x))].$$

Perciò per $\bigwedge x$-introd. (con la clausola q 6),

(14) $$\Lambda x\ \Lambda u\,\{\mathbf{z}\}\,(x, u)\ \mathrm{q}\ \bigwedge x\,(A\,(0) \wedge \bigwedge x\,(A\,(x) \rightarrow A\,(x')) \rightarrow A\,(x)).$$

ASS. 14. $x' = y' \rightarrow x = y$. Supponiamo che

(a) $$u\ \mathrm{q}\ (x' = y')^{\ulcorner} \wedge (x' = y')^{\urcorner}.$$

Da (a) per la clausola q 1 e $\rightarrow$-elim. con l'ass. 14 $x = y$, da cui (ancora per la clausola q 1),

(1) $$0\ \mathrm{q}\ (x = y).$$

Perciò per *34 18 e *34.13c con *34.20,

(2) $$!\,\{\Lambda u\ 0\}\,(u) \wedge [\{\Lambda u\ 0\}\,(u)\ \mathrm{q}\ (x = y)].$$

Da (2) per $\rightarrow$-introd. (scaricando (a)), e $\bigwedge u$-introd. (con la clausola q 5),

(3) $$\Lambda u\ 0\ \mathrm{q}\ (x' = y' \rightarrow x = y),$$

da cui come (14) da (12) nel caso dello sch. ass. 13,

(4) $$\Lambda x\ \Lambda y\ \Lambda u\ 0\ \mathrm{q}\ \bigwedge x\ \bigwedge y\,(x' = y' \rightarrow x = y).$$

ASSIOMI 15-21, TUTTI GLI ALTRI ASSIOMI DEL GRUPPO D E GLI ASSIOMI $^{x}0.1$ E $^{x}1.1$. Questi assiomi sono facilmente trattabili in modo analogo al caso precedente. Così $\Lambda x\, 0 \,\mathrm{q}\, \bigwedge x\,(x' = 0 \rightarrow 0 = 1)$, $\Lambda x\, \Lambda y\, \Lambda z\, \Lambda u\, \Lambda v$ $0 \,\mathrm{q} \bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z\,(x = y \rightarrow (x = z \rightarrow y = z))$, $\Lambda x\, \Lambda y\, \Lambda u\, 0 \,\mathrm{q}\, \bigwedge x \bigwedge y\,(x = y \rightarrow x' = y')$, ecc.. Data l'elementarità di tali casi, per brevità non indicheremo il termine relativo per i rimanenti.

SCH. ASS. *2.2. $\bigwedge x \bigvee y A\,(x, y) \rightarrow \bigvee a \bigwedge x A\,(x, a\,(x))$. Supponiamo che

(a) $\quad u \,\mathrm{q} \bigwedge x \bigvee y A\,(x, y) \ulcorner \wedge \bigwedge x \bigvee y A\,(x, y) \urcorner$, da cui $\bigwedge x\,(\,!\,\{u\}\,(x) \wedge$

$$[(\{u\}\,(x))_1 \,\mathrm{q}\, A\,(x, (\{u\}\,(x))_0) \ulcorner \wedge A\,(x, (\{u\}\,(x))_0) \urcorner\,])\text{.}$$

Dopo $\bigwedge x$-elim, supponiamo che

(b) $\quad \{u\}\,(x) \simeq \overline{\{u\}\,(x)} \wedge (\,\overline{\{u\}\,(x)}\,)_1 \,\mathrm{q}\, A\,(x, (\,\overline{\{u\}\,(x)}\,)_0) \ulcorner \wedge A\,(x, (\,\overline{\{u\}\,(x)}\,)_0) \urcorner$.

Da (b) per [9] lemma 18 si ha $(\{u\}\,(x))_0 \simeq (\,\overline{\{u\}\,(x)}\,)_0$, da cui per $\bigvee$-introd., e usando $\bigvee$-elim. per scaricare (b), $!\,(\{u\}\,(x))_0$. Perciò per *34.13c con *32.6 $!\,\{\Lambda x\,(\{u\}\,(x))_0\}\,(x)$, da cui per $\bigwedge x$-introd. e *32.4,

(1) $$!\,\{\Lambda x\,(\{u\}\,(x))_0\}.$$

Supponiamo che

(c) $$\{\Lambda x\,(\{u\}\,(x))_0\} \simeq a.$$

Assumiamo ora di nuovo (b). Per *34.18 da (b) si ottiene

(2) $\quad !\,(\,\overline{\{u\}\,(x)}\,)_1 \wedge [(\,\overline{\{u\}\,(x)}\,)_1 \,\mathrm{q}\, A\,(x, (\,\overline{\{u\}\,(x)}\,)_0] \ulcorner \wedge A\,(x, (\,\overline{\{u\}\,(x)}\,)_0) \urcorner$.

Da (b) per [9] lemma 18 si ha $(\{u\}\,(x))_1 \simeq (\,\overline{\{u\}\,(x)}\,)_1$, da cui per *34.13c $(\,\overline{\{u\}\,(x)}\,)_1 \simeq \{\Lambda x\,(\{u\}\,(x))_1\}\,(x)$ Sempre da (b) per [9] lemma 18 si ha $(\{u\}\,(x))_0 \simeq$ $(\,\overline{\{u\}\,(x)}\,)_0$, perciò per (c), scrivendo per esteso l'abbreviazione tra p-funtori $\simeq$ e usando [9] lemma 17 e *34.13c, $(\,\overline{\{u\}\,(x)}\,)_0 = a\,(x)$. Utilizzando tutto ciò in (2) con *34.20 e *34.21, e applicando $\bigvee$-elim. per scaricare (b) e $\bigwedge x$-introd. con *87,

(3) $\quad \bigwedge x\,(\,!\,\{\Lambda x(\{u\}\,(x))_1\}\,(x) \wedge [\{\Lambda x\,(\{u\}(x))_1\}\,(x) \,\mathrm{q}\, (A\,(x, a\,(x))]) \ulcorner \wedge \bigwedge x A\,(x, a\,(x)) \urcorner$.

Da (c) e (3) per $\wedge$- e $\bigvee a$-introd. con *34.17a, e usando $\bigvee$-elim. per scaricare (c),

(4) $\quad !\,\{\Lambda x\,(\{u\}\,(x))_0\} \wedge [\bigwedge x\,(\,!\,\{\Lambda x\,(\{u\}\,(x))_1\}\,(x) \wedge$

$$[\{\Lambda x\,(\{u\}\,(x))_1\}\,(x) \,\mathrm{q}\, A\,(x, \{\Lambda x\,(\{u\}\,(x))_0\}\,(x))])$$

$$\ulcorner \wedge \bigwedge x A\,(x, \{\Lambda x\,(\{u\}\,(x))_0\}\,(x)) \urcorner\,].$$

Perciò per *25.1 con *34.20 e *34.22 (e le clausole q6 e q9),

(5) $$\langle \Lambda x (\{u\} (x))_0 , \Lambda x (\{u\} (x))_1 \rangle \ \mathbf{q} \ \bigvee a \bigwedge x A (x, a (x)).$$

Infine come (9) da (7) nel caso dello sch. ass. 1b (scaricando (a)),

(6) $$\Lambda u \langle \Lambda x (\{u\} (x))_0, \Lambda x (\{u\} (x))_1 \rangle \ \mathbf{q} \ (\bigwedge x \bigvee y A (x, y) \rightarrow \bigvee a \bigwedge x A (x, a (x))).$$

ASS. K1. $a = \lambda^* n\, y' \rightarrow K (a)$. Supponiamo che

(a) $$! \{v\},$$

(b) $$\{v\} \simeq \{\overline{v}\},$$

(c) $$u \ \mathbf{q} \ (\{\overline{v}\} = \lambda^* n\, y')^{\ulcorner} \wedge (\{\overline{v}\} = \lambda^* n\, y')^{\urcorner} .$$

Da (c) per la clausola q1 e $\rightarrow$-elim con K1,

(1) $$K (\{\overline{v}\}).$$

Da (b) e (1) per $\wedge$-introd. con la clausola q2,

(2) $$v \ \mathbf{q} \ K (\{\overline{v}\}).$$

Perciò come (9) da (7) nel caso dello sch. ass. 1b (scaricando (c)),

(3) $$\Lambda u\, v \ \mathbf{q} \ (\{\overline{v}\} = \lambda^* n\, y' \rightarrow K (\{\overline{v}\})),$$

da cui per *34.18 e *34.13c con *34.20,

(4) $$!\{\Lambda v\, \Lambda u\, v\} (v) \wedge [\{\Lambda v\, \Lambda u\, v\} (v) \ \mathbf{q} \ (\{\overline{v}\} = \lambda^* n\, y' \rightarrow K (\{\overline{v}\}))].$$

Per *34.18 e (b) con *34.20, e usando $\bigvee$-elim. per scaricare (b),

(5) $$! \{v\} \wedge [\, ! \{\Lambda v\, \Lambda u\, v\} (v) \wedge [\{\Lambda v\, \Lambda u\, v\} (v) \ \mathbf{q} \ (\{v\} = \lambda^* n\, y' \rightarrow K (\{v\}))]].$$

Perciò per $\rightarrow$-introd. (scaricando (a)) e $\bigwedge v$-introd. (con la clausola q8),

(6) $$\Lambda v\, \Lambda u\, v \ \mathbf{q} \ \bigwedge a (a = \lambda^* n\, y' \rightarrow K (a)).$$

ASS. K 2. $a (1) = 0 \wedge \bigwedge x K (\lambda^* n\, a (\langle x \rangle * n)) \rightarrow K (a)$. Analogamente al caso precedente si dimostra che t è $\Lambda v\, \Lambda u\, v$.

SCH. ASS. K 3. $\bigwedge a \bigwedge y (a = \lambda^* n\, y' \rightarrow P (a)) \wedge \bigwedge a (a (1) = 0 \wedge \bigwedge x P (\lambda^* n\, a (\langle x \rangle * n)) \rightarrow P (a)) \rightarrow \bigwedge a (K (a) \rightarrow P (a))$. Per [9] lemma 44 c'è un numero w tale che

$$(1) \qquad \{v\}(1) \simeq 0 \rightarrow \{\mathbf{w}\}(l, u, v) \simeq s(l, u, v),$$

$$(2) \qquad \{v\}(1) \simeq k' \rightarrow \{\mathbf{w}\}(l, u, v) \simeq t(u, \{v\}(1) \dot{-} 1).$$

Per [9] lemma 43 c'è un numero z tale che

$$(3) \qquad \{\mathbf{z}\}(u, v) \simeq \{\mathbf{w}\}(\mathbf{z}, u, v).$$

Poniamo

$$r(v, x) \equiv \Lambda^* n \, \{v\}(\langle x \rangle * n),$$

$$s(l, u, v) \equiv \{\{(u)_1\}(v)\}(\langle 0, \Lambda x \, \{l\}(u, r(v, x)) \rangle),$$

$$t(u, y) \equiv \{(u)_0\}(y).$$

Per semplicità verificheremo il teorema per K 3 nella forma $\bigwedge y P(\lambda^* n \, y') \wedge \bigwedge a \, (a(1) = 0 \wedge \bigwedge x P(\lambda^* n \, a(\langle x \rangle * n)) \rightarrow P(a)) \rightarrow \bigwedge a \, (K(a) \rightarrow P(a))$. Supponiamo che

$$(a) \quad u \; \mathbf{q} \; (\bigwedge y P(\lambda^* n \, y') \wedge \bigwedge a \, (a(1) = 0 \wedge \bigwedge x P(\lambda^* n \, a(\langle x \rangle * n)) \rightarrow P(a))$$

$$\ulcorner \wedge (\bigwedge y P(\lambda^* n \, y') \wedge \bigwedge a \, (a(1) = 0 \wedge \bigwedge x P(\lambda^* n \, a(\langle x \rangle * n)) \rightarrow P(a))\urcorner,$$

(b) $!\,\{v\}$,

(c) $\{v\} \simeq \overline{\{v\}}$,

(d) $w \; \mathbf{q} \; K(\overline{\{v\}}) \ulcorner \wedge K(\overline{\{v\}}) \urcorner$.

Da (a) si ottiene

$$(4) \quad \bigwedge y \, (!\,\{(u)_0\}(y) \wedge [\{(u)_0\}(y) \; \mathbf{q} \; P(\lambda^* n \, y')]),$$

$$(5) \quad \bigwedge v \, (!\,\{v\} \rightarrow !\,\{v\} \wedge [\,!\,\{(u)_1\}(v) \wedge [\bigwedge w \, (\{v\}(1) = 0 \wedge \bigwedge x \, (!\,\{(w)_1\}(x) \wedge$$
$$[\{(w)_1\}(x) \; \mathbf{q} \; P(\lambda^* n \, \{v\}(\langle x \rangle * n))]) \ulcorner \wedge (\{v\}(1) = 0 \wedge \bigwedge x P(\lambda^* n \, \{v\}(\langle x \rangle * n))) \urcorner$$
$$\rightarrow !\,\{\{(u)_1\}(v)\}(w) \wedge [\{\{(u)_1\}(v)\}(w) \; \mathbf{q} \; P(\{v\})]]]).$$

Da (d) per $\wedge$-elim. (con la clausola q2) si ha

$$(6) \quad K(\overline{\{v\}}).$$

Per induzione su K mostriamo che $!\,\{z\}(u, v) \wedge [\{z\}(u, v) \mathbf{q}\, P(\overline{\{v\}})]$.

Base. $\overline{\{v\}}$ è $\lambda^* n\, y'$. Allora per [9] lemma 17 $\overline{\{v\}}(1) = y'$, perciò per *6.3 $\overline{\{v\}}(1) \dot{-} 1 = y$, da cui per [9] lemma 17 con (c) si ha $\{v\}(1) \simeq y'$ e $\{v\}(1) \dot{-} 1 \simeq y$. Per (2) e (3) dunque $\{z\}(u, v) \simeq \{(u)_0\}(y)$, perciò da (4) dopo $\bigwedge y$-elim. per *34.20,

(7) $!\,\{z\}(u, v) \wedge [\{z\}(u, v) \mathbf{q}\, P(\overline{\{v\}})]$.

Passo di induzione. $\overline{\{v\}}(1) = 0 \wedge \bigwedge x K(\lambda^* n\, \overline{\{v\}}(\langle x \rangle * n))$. Poiché $\{r(v, x)\} \simeq \lambda^* n\, \{v\}(\langle x \rangle * n)$ [per *34.13c] $\simeq \lambda^* n\, \overline{\{v\}}(\langle x \rangle * n)$ [per [9] lemma 18 e lemma 17 con (c)], supponiamo che

(e) $\bigwedge x\,(!\,\{z\}(u, r(v, x)) \wedge [\{z\}(u, r(v, x)) \mathbf{q}\, P(\lambda^* n\, \overline{\{v\}}(\langle x \rangle * n))])$.

Da (5) per $\bigwedge v$- e $\rightarrow$-elim. con (b), e usando (c) con *34.20 e *34.18,

(8) $!\,\{(u)_1\}(v) \wedge [\bigwedge w\,(\overline{\{v\}}(1) = 0 \wedge \bigwedge x\,(!\,\{(w)_1\}(x) \wedge$

$[\{(w)_1\}(x) \mathbf{q}\, P(\lambda^* n\, \overline{\{v\}}(\langle x \rangle * n))]) \ulcorner \wedge (\overline{\{v\}}(1) = 0 \wedge \bigwedge x P(\lambda^* n\, \overline{\{v\}}(\langle x \rangle * n))) \urcorner$

$\rightarrow\, !\,\{\{(u)_1\}(v)\}(w) \wedge [\{\{(u)_1\}(v)\}(w) \mathbf{q}\, P(\overline{\{v\}})])]$.

Supponiamo che

(f) $\{(u)_1\}(v) \simeq \overline{\{(u)_1\}(v)} \wedge \bigwedge w\,(\overline{\{v\}}(1) = 0 \wedge \bigwedge x\,(!\,\{(w)_1\}(x) \wedge$

$[\{(w)_1\}(x) \mathbf{q}\, P(\lambda^* n\, \overline{\{v\}}(\langle x \rangle * n))]) \ulcorner \wedge (\overline{\{v\}}(1) = 0 \wedge \bigwedge x P(\lambda^* n\, \overline{\{v\}}(\langle x \rangle * n))) \urcorner$

$\rightarrow\, !\,\{\overline{\{(u)_1\}(v)}\}(w) \wedge [\{\overline{\{(u)_1\}(v)}\}(w) \mathbf{q}\, P(\overline{\{v\}})])]$.

$\ulcorner$ Dallo sch. ass. K 3 per $\rightarrow$-elim. con (a), $\bigwedge a$-elim. (prendendo $\lambda^* n\, \overline{\{v\}}(\langle x \rangle * n)$ come a), $\rightarrow$-elim. con $K(\lambda^* n\, \overline{\{v\}}(\langle x \rangle * n))$, $\bigwedge x$- e $\wedge$-introd. si ha

(9) $\overline{\{v\}}(1) = 0 \wedge \bigwedge x P(\lambda^* n\, \overline{\{v\}}(\langle x \rangle * n)) \urcorner$.

Per *25.1 e [9] lemma 18 con *34.13c $\{(\langle 0, \Lambda x\, \{z\}(u, r(v, x)) \rangle)_1\}(x) \simeq \{z\}(u, r(v, x))$, perciò da (e), dopo $\bigwedge$-elim., per *34.20 e $\bigwedge x$-introd.,

(10) $\bigwedge x\,(!\,\{(\langle 0, \Lambda x\, \{z\}(u, r(v, x)) \rangle)_1\}(x) \wedge$

$[\{(\langle 0, \Lambda x\, \{z\}(u, r(v, x)) \rangle)_1\}(x) \mathbf{q}\, P(\lambda^* n\, \overline{\{v\}}(\langle x \rangle * n))])$.

Da (f) per $\wedge$- e Λ-elim. (prendendo $\langle 0, \Lambda x \{\mathbf{z}\}(u, r(v, x))\rangle$ come w) e $\rightarrow$-elim. con $\overline{\{v\}}(1) = 0$ e (10) $\ulcorner$ e (9) $\urcorner$,

$$(11) \qquad !\{\overline{\{(u)_1\}(v)}\}(\langle 0, \Lambda x \{\mathbf{z}\}(u, r(v, x))\rangle) \wedge$$

$$[\{\overline{\{(u)_1\}(v)}\}(\langle 0, \Lambda x \{\mathbf{z}\}(u, r(v, x))\rangle) \ \mathbf{q} \ P(\overline{\{v\}})].$$

Poiché $\overline{\{v\}}(1) = 0$, per [9] lemma 17 con (c) si ha $\{v\}(1) \simeq 0$, perciò da (1) e (3) con (f) e [9] lemma 18, $\{\mathbf{z}\}(u, v) \simeq \{\overline{\{(u)_1\}(v)}\}(\langle 0, \Lambda x \{\mathbf{z}\}(u, r(v, x))\rangle)$. Usando ciò in (11) con *34.20,

$$(12) \qquad !\{\mathbf{z}\}(u, v) \wedge [\{\mathbf{z}\}(u, v) \ \mathbf{q} \ P(\overline{\{v\}})].$$

Per lo sch. ass. K 3 si conclude dunque,

$$(13) \qquad !\{\mathbf{z}\}(u, v) \wedge [\{\mathbf{z}\}(u, v) \ \mathbf{q} \ P\{\overline{v}\})].$$

Perciò come (7) da (5) nel caso dello sch. ass. 1 b (scaricando (d)),

$$(14) \qquad \Lambda w \{\mathbf{z}\}(u, v) \ \mathbf{q} \ (K(\overline{\{v\}}) \rightarrow P(\overline{\{v\}})).$$

Per *34.18 e *34.13c con *34.20,

$$(15) \qquad !\{\Lambda v \Lambda w \{\mathbf{z}\}(u, v)\}(v) \wedge [\{\Lambda v \Lambda w \{\mathbf{z}\}(u, v)\}(v) \ \mathbf{q} \ (K(\overline{\{v\}}) \rightarrow P(\overline{\{v\}}))].$$

Quindi per *34.18 e *34.20 con (c), e usando $\vee$-elim. per scaricare (c),

$$(16) \qquad !\{v\} \wedge [!\{\Lambda v \Lambda w \{\mathbf{z}\}(u, v)\}(v) \wedge [\{\Lambda v \Lambda w \{\mathbf{z}\}(u, v)\}(v) \ \mathbf{q} \ (K(\{v\}) \rightarrow P(\{v\}))]].$$

Per $\rightarrow$-introd. (scaricando (b)) e Λv-introd. (con la clausola $\mathbf{q}$ 8),

$$(17) \qquad \Lambda v \Lambda w \{\mathbf{z}\}(u, v) \ \mathbf{q} \ \Lambda a (K(a) \rightarrow P(a)).$$

Infine come (9) da (7) nel caso dello sch. ass. 1 b (scaricando (a)),

$$(18) \qquad \Lambda u \Lambda v \Lambda w \{\mathbf{z}\}(u, v) \ \mathbf{q} \ (\Lambda y P(\lambda^* n y') \wedge \Lambda a (a(1) = 0 \wedge$$

$$\Lambda x P(\lambda^* n a(\langle x \rangle * n)) \rightarrow P(a)) \rightarrow \Lambda a (K(a) \rightarrow P(a))).$$

Reg. inf. 2. $A, A \rightarrow B \Longrightarrow B$. $\ulcorner$ Poiché nella data dimostrazione di B in IDB_0, B si ottiene da A e $A \rightarrow B$ mediante un'applicazione della regola, si ha che $\vdash_{\mathrm{IDB}_0} A$, cioè

$$(1) \qquad A. \urcorner$$

Per ipotesi di induzione esistono dei p-termini chiusi s e t tali che

$$(2) \qquad !\, s \wedge [s \mathbf{q} A],$$

$$(3) \qquad !\, t \wedge [t \mathbf{q} (A \rightarrow B)].$$

Supponiamo che

(a) $s \simeq \bar{s} \wedge \bar{s} \mathbf{q} A$,

(b) $t \simeq \bar{t} \wedge \bar{t} \mathbf{q} (A \rightarrow B)$, cioè $t \simeq \bar{t} \wedge \Lambda x (x \mathbf{q} A \ulcorner \wedge A \urcorner \rightarrow !\{\bar{t}\}(x) \wedge [\{\bar{t}\}(x) \mathbf{q} B])$.

Da (b) per $\wedge$- e Λ-elim. (prendendo $\bar{s}$ come x) e $\rightarrow$-elim. con (a) $\ulcorner$ e (1) $\urcorner$ $!\, \{\bar{t}\}(\bar{s}) \wedge [\{\bar{t}\}(\bar{s}) \mathbf{q} B]$, perciò per (a) e (b) con [9] lemma 18 e *34.20, e usando V-elim. per scaricare (a) e (b),

$$(4) \qquad !\, \{t\}(s) \wedge [\{t\}(s) \mathbf{q} B].$$

REG. INF. 9N. $C \rightarrow A(x) \Longrightarrow C \rightarrow \Lambda x A(x)$. Per ipotesi di induzione c'è un p-termine chiuso t tale che

$$(1) \qquad !\, t \wedge [t \mathbf{q} \Lambda x (C \rightarrow A(x)), \text{ cioè } !\, t \wedge [\Lambda x (!\, \{t\}(x) \wedge [\Lambda y (y \mathbf{q} C \ulcorner \wedge C \urcorner \rightarrow !\, \{\{t\}(x)\}(y) \wedge [\{\{t\}(x)\}(y) \mathbf{q} A(x)])])].$$

Supponiamo che

(a) $t \simeq \bar{t} \wedge \Lambda x (!\, \{\bar{t}\}(x) \wedge [\Lambda y (y \mathbf{q} C \ulcorner \wedge C \urcorner \rightarrow !\, \{\{\bar{t}\}(x)\}(y) \wedge [\{\{\bar{t}\}(x)\}(y) \mathbf{q} A(x)])])$,

(b) $\{\bar{t}\}(x) \simeq \overline{\{\bar{t}\}(x)} \wedge \Lambda y (y \mathbf{q} C \ulcorner \wedge C \urcorner \rightarrow !\, \{\overline{\{\bar{t}\}(x)}\}(y) \wedge [\{\overline{\{\bar{t}\}(x)}\}(y) \mathbf{q} A(x)])$,

(c) $y \mathbf{q} C \ulcorner \wedge C \urcorner$.

Da (b), dopo $\wedge$- e Λ-elim., per $\rightarrow$ elim. con (c) si ottiene

$$(2) \qquad !\, \{\overline{\{\bar{t}\}(x)}\}(y) \wedge [\{\overline{\{\bar{t}\}(x)}\}(y) \mathbf{q} A(x)].$$

Da (a) e (b) per [9] lemma 18 si ha $\{t\}(x) \simeq \{\bar{t}\}(x)$ e $\{\{t\}(x)\}(y) \simeq \{\overline{\{\bar{t}\}(x)}\}(y)$, perciò da (2) per *34.20, e usando V-elim. per scaricare (a) e (b),

$$(3) \qquad !\, \{\{t\}(x)\}(y) \wedge [\{\{t\}(x)\}(y) \mathbf{q} A(x)].$$

Da (3) per *34.13c, *34.20 e $\bigwedge x$-introd. (con la clausola $\mathfrak{q}$ 6) si ha

(4) $$Ax\,\{\{t\}(x)\}(y)\ \mathfrak{q} \bigwedge xA(x),$$

da cui come (9) da (7) nel caso dello sch. ass. 1b (scaricando (c)),

(5) $$Ay\,Ax\,\{\{t\}(x)\}(y)\ \mathfrak{q}\ (C \rightarrow \bigwedge xA(x)).$$

Reg. inf. 9F. $C \rightarrow A(a) \Longrightarrow C \rightarrow \bigwedge aA(a)$. Analogamente al caso precedente si dimostra che, se t è un p-termine chiuso tale che $!\,t \wedge [t\ \mathfrak{q} \bigwedge a\,(C \rightarrow A(a))]$, allora $Ay\,Av\,\{\{t\}(v)\}(y)\ \mathfrak{q}\ (C \rightarrow \bigwedge aA(a))$.

Reg. inf. 12N. $A(x) \rightarrow C \Longrightarrow \bigvee xA(x) \rightarrow C$. Se t è un p-termine tale che $!\,t \wedge [t\ \mathfrak{q} \bigwedge x\,(A(x) \rightarrow C)]$, allora

$$Au\,\{\{t\}((u)_0)\}((u)_1)\ \mathfrak{q}\ (\bigvee xA(x) \rightarrow C).$$

Reg. inf. 12F. $A(a) \rightarrow C \Longrightarrow \bigvee aA(a) \rightarrow C$. Per ipotesi di induzione c'è un p-termine chiuso t tale che

(1) $$!\,t \wedge [t\ \mathfrak{q} \bigwedge a\,(A(a) \rightarrow C)],\ \text{cioè}\ !\,t \wedge [\bigwedge v\,(!\,\{v\} \rightarrow\, !\,\{v\} \wedge [!\,\{t\}(v) \wedge$$

$$[\bigwedge y\,(y\ \mathfrak{q}\ A(\{v\})\ulcorner \wedge A(\{v\})\urcorner \rightarrow\, !\,\{\{t\}(v)\}(y) \wedge [\{\{t\}(v)\}(y)\ \mathfrak{q}\ C])]])].$$

Supponiamo che

(a) $$t \simeq \bar{t} \wedge \bigwedge v\,(!\,\{v\} \rightarrow\, !\,\{v\} \wedge [!\,\{\bar{t}\}(v) \wedge [\bigwedge y\,(y\ \mathfrak{q}\ A(\{v\})\ulcorner \wedge A(\{v\})\urcorner$$

$$\rightarrow\, !\,\{\{\bar{t}\}(v)\}(y) \wedge [\{\{\bar{t}\}(v)\}(y)\ \mathfrak{q}\ C])]]),$$

(b) $$u\ \mathfrak{q} \bigvee aA(a)\ulcorner \wedge \bigvee aA(a)\urcorner,\ \text{cioè}\ !\,\{(u)_0\} \wedge [(u)_1\ \mathfrak{q}\ A(\{(u)_0\})$$

$$\ulcorner \wedge A(\{(u)_0\})\urcorner]\ulcorner \wedge \bigvee aA(a)\urcorner,$$

(c) $$\{(u)_0\} \simeq \overline{\{(u)_0\}} \wedge (u)_1\ \mathfrak{q}\ A(\overline{\{(u)_0\}})\ulcorner \wedge A(\overline{\{(u)_0\}})\urcorner.$$

Da (b) per *34.17a, $\rightarrow$-elim. con *93 e $\wedge$-elim. si ha $!\,\{(u)_0\}$. Perciò per $\rightarrow$-elim. con (a), dopo $\wedge$- e $\bigwedge$-elim. (prendendo $(u)_0$ come v), e per (c) con *34.20 e *34.18,

(2) $$!\,\{\bar{t}\}((u)_0) \wedge [\bigwedge y\,(y\ \mathfrak{q}\ A(\overline{\{(u)_0\}})\ulcorner \wedge A(\overline{\{(u)_0\}})\urcorner \rightarrow$$

$$!\,\{\{\bar{t}\}((u)_0)\}(y) \wedge [\{\{\bar{t}\}((u)_0)\}(y)\ \mathfrak{q}\ C])].$$

Supponiamo che

$$\text{(d)}\qquad \{\bar{t}\}((u)_0) \simeq \overline{\{\bar{t}\}\,((u)_0)} \wedge \bigwedge y\, (y \;\mathbf{q}\; A\, (\overline{\{(u)_0\}})\ulcorner\!\!\!\!\!\!\!\quad \wedge A\, (\overline{\{(u)_0\}})\urcorner \rightarrow$$

$$!\, \{\overline{\{\bar{t}\}\,((u)_0)}\}\, (y) \wedge [\{\overline{\{\bar{t}\}\,((u)_0)}\}\, (y) \;\mathbf{q}\; C]).$$

Per $\wedge$- e $\bigwedge$-elim. (prendendo $(u)_1$ come y), e $\rightarrow$-elim. con (c), usando $\bigvee$-elim. per scaricare (c), si ha

$$\text{(3)}\qquad !\, \{\overline{\{\bar{t}\}\,((u)_0)}\}\, ((u)_1) \wedge [\{\overline{\{\bar{t}\}\,((u)_0)}\}\, ((u)_1) \;\mathbf{q}\; C].$$

Da (a) e (d) per [9] lemma 18 $\{\{t\}\,((u)_0)\}\,((u)_1) \simeq \{\overline{\{\bar{t}\}\,((u)_0)}\}\,((u)_1)$, perciò per *34.20 e usando $\bigvee$-elim. per scaricare (a) e (d),

$$\text{(4)}\qquad !\, \{\{t\}\,((u)_0)\}\, ((u)_1) \wedge [\{\{t\}\,((u)_0)\}\, ((u)_1) \;\mathbf{q}\; C].$$

Infine come (7) da (5) nel caso dello sch. ass. 1b (scaricando (b)),

$$\text{(5)}\qquad Au\, \{\{t\}\,((u)_0)\}\, ((u)_1) \;\mathbf{q}\; (\bigvee aA\, (a) \rightarrow C).$$

LEMMA 3.3.

(i) $\vdash_{IDB_0} \bigvee xx\ \mathbf{r}\ (r = s) \longleftrightarrow (r = s)$,

(ii) $\vdash_{IDB_0} \bigvee xx\ \mathbf{r}\ K(\varphi) \longleftrightarrow K(\varphi)$,

(iii) $\vdash_{IDB_0} \bigvee xx\ \mathbf{r}\ (A \wedge B) \longleftrightarrow \bigvee xx\ \mathbf{r}\ A \wedge \bigvee xx\ \mathbf{r}\ B$,

(iv) $\vdash_{IDB_0} \bigvee xx\ \mathbf{r}\ (A \vee B) \longleftrightarrow \bigvee xx\ \mathbf{r}\ A \vee \bigvee xx\ \mathbf{r}\ B$,

(v) $\vdash_{IDB_0} \bigvee xx\ \mathbf{r}\ (A \rightarrow B) \rightarrow (\bigvee xx\ \mathbf{r}\ A \rightarrow \bigvee xx\ \mathbf{r}\ B)$,

(vi) $\vdash_{IDB_0} \bigvee xx\ \mathbf{r}\ \bigwedge yA\,(y) \longleftrightarrow \bigwedge y\, \bigvee xx\ \mathbf{r}\ A\,(y)$,

(vii) $\vdash_{IDB_0} \bigvee xx\ \mathbf{r}\ \bigvee yA\,(y) \longleftrightarrow \bigvee y\, \bigvee xx\ \mathbf{r}\ A\,(y)$,

(viii) $\vdash_{IDB_0} \bigvee xx\ \mathbf{r}\ \bigwedge aA\,(a) \rightarrow \bigwedge a\, \bigvee xx\ \mathbf{r}\ A\,(a)$,

(ix) $\vdash_{IDB_0} \bigvee xx\ \mathbf{r}\ \bigvee aA\,(a) \longleftrightarrow \bigvee a\, \bigvee xx\ \mathbf{r}\ A\,(a)$.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo solo alcuni casi particolarmente rappresentativi.

(i) $\bigvee x x \mathrm{r} (r = s) <\!\!\longrightarrow\!\!> \bigvee x (r = s)$ [per la clausola r 1] $<\!\!\longrightarrow\!\!> r = s$ [per *76, poiché x non occorre libera in $r = s$].

(ii) I. Supponiamo che (a) $\bigvee x x \mathrm{r} K(\varphi)$ e (b) $x \mathrm{r} K(\varphi)$. Da (b) per $\wedge$-elim. (con la clausola r 2) $K(\varphi)$, perciò per $\bigvee$-elim. (scaricando (b)) e $\longrightarrow$-introd. (scaricando (a)) $\bigvee x x \mathrm{r} K(\varphi) \longrightarrow K(\varphi)$. II. Supponiamo che (a) $K(\varphi)$. Per [9] lemma 41 e lemma 18 con *0.4 c'e un numero v tale che $\{\mathrm{v}\} \simeq \varphi$. Perciò per $\wedge$-introd. (con la clausola r 2) $\mathrm{v} \mathrm{r} K(\varphi)$, da cui per $\bigvee$- e $\longrightarrow$-introd. (scaricando (a)) $K(\varphi) \longrightarrow \bigvee x x \mathrm{r} K(\varphi)$.

(iv) I. Supponiamo che (a) $\bigvee x x \mathrm{r} (A \vee B)$ e (b) $x \mathrm{r} (A \vee B)$, cioè $((x)_0 = 0 \wedge (x)_1 \mathrm{r} A) \vee ((x)_0 \neq 0 \wedge (x)_1 \mathrm{r} B)$. Da (b) per casi ($\vee$-elim.), $\wedge$-elim., $\bigvee$- e $\vee$-introd., $\bigvee x x \mathrm{r} A \vee \bigvee x x \mathrm{r} B$. Perciò per $\bigvee$-elim. (scaricando (b)) e $\longrightarrow$-introd. (scaricando (a)) si ottiene $\bigvee x x \mathrm{r} (A \vee B) \longrightarrow \bigvee x x \mathrm{r} A \vee \bigvee x x \mathrm{r} B$. II. Supponiamo che (a) $\bigvee x x \mathrm{r} A \vee \bigvee x x \mathrm{r} B$. *Caso* 1. $\bigvee x x \mathrm{r} A$. Supponiamo che (b) $x \mathrm{r} A$. Per *25.1 $(\langle 0, x \rangle)_1 = x$, perciò da (b) si ottiene $(\langle 0, x \rangle)_1 \mathrm{r} A$. Ancora per *25.1 $(\langle 0, x \rangle)_0 = 0$, quindi per $\wedge$- e $\vee$-introd. (con la clausola r 4) $\langle 0, x \rangle \mathrm{r} (A \vee B)$, da cui per $\bigvee$-introd., e usando $\bigvee$-elim. per scaricare (b), $\bigvee x x \mathrm{r} (A \vee B)$. *Caso* 2. $\bigvee x x \mathrm{r} B$. Come nel caso precedente, usando $\langle 1, x \rangle$ al posto di $\langle 0, x \rangle$. Perciò per $\vee$-elim. (scaricando le assunzioni dei casi) e $\longrightarrow$-introd. (scaricando (a)) $\bigvee x x \mathrm{r} A \vee \bigvee x x \mathrm{r} B \longrightarrow \bigvee x x \mathrm{r} (A \vee B)$.

(v) Supponiamo che (a) $\bigvee x x \mathrm{r} (A \longrightarrow B)$, (b) $x \mathrm{r} (A \longrightarrow B)$, cioè $\bigwedge y (y \mathrm{r} A \longrightarrow\ ! \{x\}(y) \wedge [\{x\}(y) \mathrm{r} B])$ e (c) $\bigvee y y \mathrm{r} A$. Sia (d) $y \mathrm{r} A$. Da (b) per $\bigwedge$- e $\longrightarrow$-elim. con (d), $! \{x\}(y) \wedge [\{x\}(y) \mathrm{r} B]$. Perciò per *34.16a, $\longrightarrow$-elim. con *93 e $\wedge$-elim., e usando $\bigvee$-elim. per scaricare (d), $\bigvee x x \mathrm{r} B$, da cui per $\longrightarrow$-introd. (scaricando (c)), $\bigvee$-elim. (scaricando (b)) e $\longrightarrow$-introd. (scaricando (a)) $\bigvee x x \mathrm{r} (A \longrightarrow B) \longrightarrow (\bigvee x x \mathrm{r} A \longrightarrow \bigvee x x \mathrm{r} B)$.

(vi) I. Supponiamo che (a) $\bigvee x x \mathrm{r} \bigwedge y A(y)$ e (b) $x \mathrm{r} \bigwedge y A(y)$, cioè $\bigwedge y\, (\,! \{x\}(y) \wedge [\{x\}(y) \mathrm{r} A(y)])$. Da (b) per $\bigwedge$-elim., *34.16a, $\longrightarrow$-elim. con *93, $\wedge$-elim. e $\bigwedge y$-introd., e usando $\bigvee$-elim. per scaricare (b), $\bigwedge y \bigvee x x \mathrm{r} A(y)$, da cui per $\longrightarrow$-introd. (scaricando (a)) $\bigvee x x \mathrm{r} \bigwedge y A(y) \longrightarrow \bigwedge y \bigvee x x \mathrm{r} A(y)$. II. Supponiamo che (a) $\bigwedge y \bigvee x x \mathrm{r} A(y)$. Per lo schema di assioma di scelta *2.2 $\bigvee a \bigwedge y\, a(y) \mathrm{r} A(y)$. Sia (b) $\bigwedge y\, a(y) \mathrm{r} A(y)$. Per [9] lemma 41 c'è un numero v tale che $\bigvee y \{\mathrm{v}\}(y) \simeq a(y)$, perciò da (b) per $\bigwedge$-elim. con *34.18 e *34.20 $! \{\mathrm{v}\}(y) \wedge [\{\mathrm{v}\}(y) \mathrm{r} A(y)]$. Per $\bigwedge y$-introd. (con la clausola r 6), e usando $\bigvee$-elim. per scaricare (b), $\mathrm{v} \mathrm{r} \bigwedge y A(y)$, perciò per $\bigvee x$- e $\longrightarrow$-introd. (scaricando (a)) $\bigwedge y \bigvee x x \mathrm{r} A(y) \longrightarrow \bigvee x x \mathrm{r} \bigwedge y A(y)$.

(viii) Supponiamo che (a) $\bigvee x x \mathrm{r} \bigwedge a A(a)$ e (b) $x \mathrm{r} \bigwedge a A(a)$, cioè $\bigwedge v (! \{v\} \longrightarrow\ ! \{v\} \wedge [\, ! \{x\}(v) \wedge [\{x\}(v) \mathrm{r} A(\{v\})]])$. Da (b) per *96, *77 e $\bigwedge a$-elim. (1) $\bigwedge v (\{v\} \simeq a \longrightarrow\ ! \{v\} \wedge [\, ! \{x\}(v) \wedge [\{x\}(v) \mathrm{r} A(\{v\})]])$. Per [9] lemma 41 e lemma 18 con *0.4 c'è un numero z tale che (2) $\{\mathrm{z}\} \simeq a$. Da (1) per $\bigwedge$-elim. (prendendo z come v) e $\longrightarrow$-elim. con (2) si ha $! \{\mathrm{z}\} \wedge [\, ! \{x\}(\mathrm{z}) \wedge [\{x\}(\mathrm{z}) \mathrm{r} A(\{\mathrm{z}\})]]$, perciò per (2) e *34.20 con *34.18 $! \{x\}(\mathrm{z}) \wedge [\{x\}(\mathrm{z}) \mathrm{r} A(a)]$. Da quest' ultima per

*34.16a, $\longrightarrow$-elim. con *93, $\wedge$-elim. e $\bigwedge a$-introd., e usando $\bigvee$-elim. per scaricare (b), si ha $\bigwedge a \bigvee xx \mathbf{r} A(a)$, da cui per $\longrightarrow$-introd. (scaricando (a)) $\bigvee xx \mathbf{r} \bigwedge aA(a) \longrightarrow \bigwedge a \bigvee xx \mathbf{r} A(a)$.

(ix) I. Supponiamo che (a) $\bigvee xx \mathbf{r} \bigvee aA(a)$ e (b) $x \mathbf{r} \bigvee aA(a)$, cioè $!\{(x)_0\} \wedge [(x)_1 \mathbf{r} A(\{(x)_0\})]$. Da (b) per *34.17a, $\longrightarrow$-elim. con *93, $\wedge$-elim., $\bigvee x$-introd. e *78, e usando $\bigvee$-elim. per scaricare (b), $\bigvee a \bigvee xxx \mathbf{r} A(a)$, da cui per $\longrightarrow$-introd. (scaricando (a)) $\bigvee xx \mathbf{r} \bigvee aA(a) \longrightarrow \bigvee a \bigvee xx \mathbf{r} A(a)$. II. Supponiamo che (a) $\bigvee a \bigvee xx \mathbf{r} A(a)$ e (b) $x \mathbf{r} A(a)$. Per [9] lemma 41 e lemma 18 con *0.4 c'è un numero v tale che $\{\mathbf{v}\} \simeq a$, perciò da (b) per *34.18 e *34.20 $!\{\mathbf{v}\} \wedge [x \mathbf{r} A(\{\mathbf{v}\})]$. Per *25.1 con [9] lemma 18, *34.20 e *34.21 si ha allora $!\{(\langle \mathbf{v}, x \rangle)_0\} \wedge [(\langle \mathbf{v}, x \rangle)_1 \mathbf{r} A(\{(\langle \mathbf{v}, x \rangle)_0\})]$, da cui per la clausola r 9 e $\bigvee x$-introd., usando $\bigvee$-elim per scaricare (b) e $\longrightarrow$-elim. per scaricare (a), $\bigvee a \bigvee xx \mathbf{r} A(a) \longrightarrow \bigvee xx \mathbf{r} \bigvee aA(a)$.

COROLLARIO 3.4. Per ogni formula F, se $\vdash_{\mathrm{IDB}_0} F$ allora $\vdash_{\mathrm{IDB}_0} \bigvee xx \mathbf{r} F$ e $\vdash_{\mathrm{IDB}_0} \bigvee xx \mathbf{q} F$.

DIMOSTRAZIONE. Se $\vdash_{\mathrm{IDB}_0} F$, allora per il teor. 3.2 $\vdash_{\mathrm{IDB}_0} \bigvee xx \mathbf{r} \bigwedge F$, perciò per $\longrightarrow$-elim. col lemma 3.3 (vi), (viii) $\vdash_{\mathrm{IDB}_0} \bigwedge \bigvee xx \mathbf{r} F$ da cui per $\bigwedge$-elim. si ottiene $\vdash_{\mathrm{IDB}_0} \bigvee xx \mathbf{r} F$. Analogamente si ha $\vdash_{\mathrm{IDB}_0} \bigvee xx \mathbf{q} F$ poiché, per la particolare forma delle clausole q6 e q8, il lemma 3.3 (vi), (viii) rimane valido se si pone q al posto di r.

4. In IDB_0 si può formulare una versione della tesi di Church nel modo seguente. Per [9] § 4.2 esiste una formula standard $T(x, y, z)$ che formalizza il T-predicato di Kleene. La nozione di formula standard si suppone definita come in [10] p. 27, cioè $T(x, y, z)$ va intesa come l'abbreviazione di una formula prima della forma $t_T(x, y, z) = 0$, per un certo termine t_T, tale che $\vdash_{\mathrm{IDB}_0} t_T(x, y, z) = 0 \vee t_T(x, y, z) = 1$. $T(x, y, z)$ soddisfa la condizione di unicità *34.4, e $(z)_{0,3}$ svolge il ruolo della U-funzione di Kleene. La tesi di Church può essere espressa allora nella forma:

TC. $$\bigwedge a \bigvee x \bigwedge y \bigvee z (T(x, y, z) \wedge (z)_{0,3} = a(y)).$$

Come in [9] p. 70 sia $RG(a)$ (« a è ricorsiva generale ») un'abbreviazione della formula $\bigvee x \{x\} \simeq a$. Scrivendo per esteso l'abbreviazione tra p-funtori $\simeq$ e usando [9] lemma 17, RG(a) equivale a $\bigvee x \bigwedge y \{x\}(y) \simeq a(y)$, dunque per *34.3 a $\bigvee x \bigwedge y \bigvee z (T(x, y, z) \wedge (z)_{0,3} = a(y))$. Perciò per *71 TC equivale a $\bigwedge a \, \mathrm{RG}(a)$, cioè TC esprime nel linguaggio di IDB_0 l'asserzione:

« Ogni funzione costruttiva è ricorsiva generale ».

OSSERVAZIONE 4.1. L'uso del nome « tesi di Church » non può essere ammesso senza ulteriori spiegazioni dato che, almeno per quanto riguarda la formulazione di Turing della tesi, l'intenzione era chiaramente solo quella di asserire che tutte le funzioni *meccanicamente* calcolabili sono ricorsive generali. È altrettanto vero, però, che la distinzione tra funzioni costruttive e funzioni meccanicamente calcolabili non era affatto capita all'epoca della formulazione originaria della tesi di Church. Il carattere astratto delle nozioni costruttive, sebbene notato, per esempio, da Bernays in [1], non era generalmente riconosciuto. La versione più forte della tesi di Church formalizzata da TC si trova formulata in [4], e perciò potrebbe essere chiamata più propriamente « versione di Heyting della tesi di Church », sia pure con la necessaria precisazione che Heyting formula, ma non propone la tesi. Per una discussione della distinzione tra funzioni costruttive e funzioni meccanicamente calcolabili si rimanda a [11] § 2.7 e a [13].

TEOREMA 4.2. Esiste un termine chiuso t tale che $\vdash_{\mathrm{IDB}_0} t \,\mathbf{r}\, \mathrm{TC}$, perciò $\vdash_{\mathrm{IDB}_0} \bigvee x\, x \,\mathbf{r}\, \mathrm{TC}$.

DIMOSTRAZIONE. Basta prendere come t il termine

$\Lambda v \langle v, \Lambda y \langle \{\langle 0, \mathrm{w} \rangle\} (0, v, y), \langle 0, 0 \rangle\rangle\rangle$, per un certo numerale w specificato appresso. Infatti, per le clausole $\mathbf{r}8, \mathbf{r}7, \mathbf{r}6$ e $\mathbf{r}3$,

$$(1) \qquad t \,\mathbf{r}\, \mathrm{TC} \longleftrightarrow \bigwedge v\,(! \{v\} \rightarrow ! \{v\} \wedge [! \{t\} (v) \wedge [\bigwedge y\, (! \{(\{t\} (v))_1\} (y) \wedge$$

$$[(\{(\{t\} (v))_1\} (y))_{1,0} \;\mathbf{r}\, T ((\{t\} (v))_0 , y, (\{(\{t\} (v))_1\} (y))_0) \wedge$$

$$(\{(\{t\} (v))_1\} (y))_{1,1} \;\mathbf{r}\, ((\{(\{t\} (v))_1\} (y))_{0,0,3} = \{v\} (y))])]]).$$

Per *34.13c,

$$(2) \qquad \{t\} (v) \simeq \langle v, \Lambda y \langle \{\langle 0, \mathrm{w} \rangle\} (0, v, y), \langle 0, 0 \rangle\rangle\rangle ,$$

da cui per *32.5 e *32.6 $! \{t\} (v)$. Supponiamo che

$$(a) \qquad ! \{v\},$$

$$(b) \qquad \{v\} \simeq \overline{\{v\}}$$

$$(c) \qquad \{t\} (v) \simeq \overline{\{t\} (v)}.$$

Per *34.3,

$$(3) \qquad \bigvee z\, (T ((\overline{\{t\} (v)})_0 , y, z) \wedge (z)_{0,3} = \overline{\{v\}} (y)) \longleftrightarrow \{(\overline{\{t\} (v)})_0\} (y) \simeq \overline{\{v\}} (y).$$

Da (b) per [9] lemma 17,

(4) $$\{v\}(y) \simeq \overline{\{v\}}(y).$$

Da (c) e (2) per [9] lemma 18 e *25.1,

(5) $$(\overline{\{t\}(v)})_0 = v.$$

Da (4) e (5) per [9] lemma 18 si ottiene $\{(\overline{\{t\}(v)})_0\}(y) \simeq \overline{\{v\}}(y)$, perciò per (3),

(6) $$\mathsf{V}z\,(T((\overline{\{t\}(v)})_0, y, z) \wedge (z)_{0,3} = \overline{\{v\}}(y)).$$

Supponiamo che

(d) $$T((\overline{\{t\}(v)})_0, y, z) \wedge (z)_{0,3} = \overline{\{v\}}(y).$$

Per [9] lemma 41 c'è un numero w tale che

(7) $$\{\mathrm{w}\}(z, (\overline{\{t\}(v)})_0, y) \simeq 0 \longleftrightarrow T((\overline{\{t\}(v)})_0, y, z).$$

Per *33.10 e *34.4 da (7) si ha

(8) $$\{\langle 0, \mathrm{w}\rangle\}(0, (\overline{\{t\}(v)})_0, y) \simeq z \longleftrightarrow T((\overline{\{t\}(v)})_0, y, z),$$

perciò per (*d*), dopo $\wedge$-elim., e usando (5),

(9) $$\{\langle 0, \mathrm{w}\rangle\}(0, v, y) \simeq z.$$

Da (2) per [9] lemma 18 con *25.1 e *34.13c,

(10) $$\langle \{\langle 0, \mathrm{w}\rangle\}(0, v, y), \langle 0, 0\rangle\rangle \simeq \{(\{t\}(v))_1\}(y).$$

Da (9) per V-introd., *32.5, *32.6 e (10) si ha $!\,\{(\{t\}(v))_1\}(y)$.
Supponiamo che

(e) $$\{(\{t\}(v))_1\}(y) \simeq \overline{\{(\{t\}(v))_1\}(y)}.$$

Da (10) e (e) per [9] lemma 18, $(\langle \{\langle 0, \mathrm{w}\rangle\}(0, v, y), \langle 0, 0\rangle\rangle)_0 \simeq (\overline{\{(\{t\}(v))_1\}(y)})_0$, perciò per *25.1 e (9),

(11) $$(\overline{\{(\{t\}(v))_1\}(y)})_0 = z.$$

Sostituendo in (d), e usando V-elim. per scaricare (d), per $\wedge$-elim. si ottiene

(12) $$T((\overline{\{t\}(v)})_0, y, (\overline{\{(\{t\}(v))_1\}(y)})_0),$$

(13) $$(\overline{\{(\{t\}(v))_1\}(y)})_{0,0,3} = \overline{\{v\}}(y).$$

Poiché $T(x, y, z)$ è una formula standard, da (12) e (13) per (e), (10) e *25.1 con [9] lemma 18 e la clausola **r1** si ha

(14) $$(\overline{\{(\{t\}(v))_1\}(y)})_{1,0}\ \mathbf{r}\ T((\overline{\{t\}(v)})_0, y, (\overline{\{(\{t\}(v))_1\}(y)})_0),$$

(15) $$(\overline{\{(\{t\}(v))_1\}(y)})_{1,1}\ \mathbf{r}\ ((\overline{\{(\{t\}(v))_1\}(y)})_{0,0,3} = \overline{\{v\}}(y)).$$

Da (14) e (15) per $\wedge$-introd., *34.18 e (e) con *34.20, usando $\vee$-elim. per scaricare (e) e Λy-introd., si ha

(16) $$\Lambda y(!\{(\{t\}(v))_1\}(y) \wedge [(\{(\{t\}(v))_1\}(y))_{1,0}\ \mathbf{r}\ T((\overline{\{t\}(v)})_0, y,$$
$$(\{(\{t\}(v))_1\}(y))_0) \wedge (\{(\{t\}(v))_1\}(y))_{1,1}\ \mathbf{r}\ ((\{(\{t\}(v))_1\}(y))_{0,0,3} = \overline{\{v\}}(y))]).$$

Da (16) per (c) e (b) con *34.18 e *34.20, e applicando $\vee$-elim. (scaricando (b) e (c)), $\rightarrow$-introd. (scaricando (a)) e Λv-introd., si ottiene il lato destro di (1), perciò

(17) $$t\ \mathbf{r}\ \mathrm{TC}.$$

TEOREMA 4.3. Per ogni formula F, se $\vdash_{\mathrm{IDB}_0+\mathrm{TC}} F$ allora $\vdash_{\mathrm{IDB}_0} \vee x x\ \mathbf{r}\ F$.

DIMOSTRAZIONE. Se $\vdash_{\mathrm{IDB}_0+\mathrm{TC}} F$ allora per $\rightarrow$-introd. $\vdash_{\mathrm{IDB}_0} \mathrm{TC} \rightarrow F$, dunque per il coroll. 3.4 $\vdash_{\mathrm{IDB}_0} \vee x x\ \mathbf{r}\ (\mathrm{TC} \rightarrow F)$, da cui per $\rightarrow$-elim. col lemma 3.3 (v) $\vdash_{\mathrm{IDB}_0} \vee x x\ \mathbf{r}\ \mathrm{TC} \rightarrow \vee x x\ \mathbf{r}\ F$. Perciò per $\rightarrow$-elim. col teor. 4.2 $\vdash_{\mathrm{IDB}_0} \vee x x\ \mathbf{r}\ F$.

COROLLARIO 4.4 Se IDB_0 è coerente, tale è anche $\mathrm{IDB}_0 + \mathrm{TC}$.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $\vdash_{\mathrm{IDB}_0+\mathrm{TC}} 0 = 1$. Allora per il teor. 4.3 $\vdash_{\mathrm{IDB}_0} \vee x x\ \mathbf{r}\ (0 = 1)$, dunque per il lemma 3.3 (i) $\vdash_{\mathrm{IDB}_0} 0 = 1$, il che contraddice l'ipotesi della coerenza di IDB_0.

OSSERVAZIONE 4.5. Si noti che tutti i passi dell'argomentazione precedente sono elementari. In particolare, nel caso del teorema 3.2, è elementare il riconoscimento dell'esistenza di un'applicazione dello sch. ass. K 3 nella dimostrazione formale in IDB_0 di $t\ \mathbf{r}\ F$, per F lo sch. ass. K3. Si ha così una dimostrazione puramente finitaria della coerenza di $\mathrm{IDB}_0 + \mathrm{TC}$ rispetto a IDB_0. In tal senso il corollario 4.4 rafforza [14] teorema 3.7.4, che si basa sul teorema 3.7.2 ivi, la cui dimostrazione richiede un'applicazione vera e propria dello sch. ass. K3.

5. Consideriamo ora il problema: per quali classi di formule l'aggiunta di TC a IDB_0 è conservativa? Dimostriamo anzitutto alcuni lemmi.

LEMMA 5.1. Per ogni formula F che non contiene occorrenze di $\vee$, e in cui ogni occorrenza di $\bigvee$ è in una parte della forma $\bigvee y\,(r = s)$ o $\bigvee a\,(r = s)$, esiste un p-termine chiuso $t_{\wedge F}$ tale che

(i) $\vdash_{IDB_0} \bigvee xx\,\mathbf{r}\,F \rightarrow F$,

(ii) $\vdash_{IDB_0} F \rightarrow\, !\, t_{\wedge F} \wedge [t_{\wedge F}\,\mathbf{r}\,\bigwedge F]$,

(iii) $\vdash_{IDB_0} \bigvee xx\,\mathbf{r}\,F \longleftrightarrow F$.

DIMOSTRAZIONE. (i) e (ii) verranno dimostrate simultaneamente per induzione sulla costruzione di F. (iii) si ottiene nel modo seguente. Supponiamo che (a) $!\, t_{\wedge F} \wedge [t_{F\wedge}\,\mathbf{r}\,\bigwedge F]$. Per *34.16a, $\rightarrow$-elim. con *93 e $\wedge$-elim. $\bigvee xx\,\mathbf{r}\,\bigwedge F$, da cui come nella dimostrazione del coroll. 3.4 $\bigvee xx\,\mathbf{r}\,F$. Per $\rightarrow$-introd. (scaricando (a)) $!\, t_{\wedge F} \wedge [t_{\wedge F}\,\mathbf{r}\,\bigwedge F] \rightarrow \bigvee xx\,\mathbf{r}\,F$, da cui per (i) e (ii) con *2 e *16 segue (iii). La dimostrazione di (i) e (ii) verrà data in dettaglio nei casi più notevoli. Quanto agli altri, ci limiteremo ad indicare il p-termine relativo t_F. Per semplicità considereremo solo formule F chiuse.

Caso 1. F è $r = s$. t_F è 0.

Caso 2. F è $K(\varphi)$. (i) Per il lemma 3.3 (ii). (ii) Supponiamo che (a) $K(\varphi)$. Per [9] lemma 41 e lemma 18 con *0.4 c'è un numero $\mathbf{v}$ tale che $\{\mathbf{v}\} \simeq \varphi$. Perciò per $\wedge$-introd. (con la clausola r 2) $\mathbf{v}\,\mathbf{r}\,K(\varphi)$, da cui per $\rightarrow$-introd. (scaricando (a)) $K(\varphi) \rightarrow \mathbf{v}\,\mathbf{r}\,K(\varphi)$.

Caso 3. F è $A \wedge B$. t_F è $\langle t_A, t_B \rangle$.

Caso 5. F è $A \rightarrow B$. (i) Supponiamo che (a) $\bigvee xx\,\mathbf{r}\,(A \rightarrow B)$, (b) $x\,\mathbf{r}\,(A \rightarrow B)$, cioè $\bigwedge y\,(y\,\mathbf{r}\,A \rightarrow\, !\,\{x\}(y) \wedge [\{x\}(y)\,\mathbf{r}\,B])$, e (c) A. Dall'ip. ind. (ii) per $\rightarrow$-elim. con (c) si ha $!\, t_A \wedge [t_A\,\mathbf{r}\,A]$. Sia (d) $t_A \simeq \bar{t}_A \wedge \bar{t}_A\,\mathbf{r}\,A$. Da (b) per $\bigwedge$-elim. (prendendo $\bar{t}_A$ come y) e $\rightarrow$-elim. con (d) si ottiene $!\,\{x\}(\bar{t}_A) \wedge [\{x\}(\bar{t}_A)\,\mathbf{r}\,B]$. Perciò per *34.16a, $\rightarrow$-elim. con *93 e $\wedge$-elim., e usando $\bigvee$-elim. per scaricare (b) e (d), si ha $\bigvee xx\,\mathbf{r}\,B$. Per $\rightarrow$-elim. con l'ip. ind. (i) si ottiene allora B, da cui per $\rightarrow$-introd. (scaricando (c) e (a)) $\bigvee xx\,\mathbf{r}\,(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$. (ii) Supponiamo che (a) $A \to B$ e (b) y r A. Da (b) per $\bigvee$-introd. e $\to$-elim. con l'ip. ind. (i) si ottiene A. Perciò per $\to$-elim. con (a) e l'ip. ind. (ii) $!\, t_B \wedge [t_B$ r $B]$, da cui per *34.13c e *34.20 $!\, \{\Lambda y\, t_B\}(y) \wedge [\{\Lambda y\, t_B\}(y)$ r $B]$. Dunque per $\to$-introd. (scaricando (b)) e $\bigwedge y$-introd. (con la clausola r5) $\Lambda y\, t_B$ r $(A \to B)$, da cui per $\to$-introd. (scaricando (a)) $(A \to B) \to \Lambda y\, t_B$ r $(A \to B)$.

Caso 6. F è $\bigwedge y\, A(y)$. t_F è $\Lambda y\, t_{A(y)}$.

Caso 7. F è $\bigvee y\,(r = s)$. (i) Supponiamo che (a) $\bigvee x x$ r $\bigvee y\,(r = s)$. Per il lemma 3.3 (vii) $\bigvee y \bigvee x x$ r $(r = s)$. Sia (b) $\bigvee x x$ r $(r = s)$. Per $\to$-elim. col caso 1 precedente $r = s$, perciò per $\bigvee y$-introd., $\bigvee$-elim. (scaricando (b)) e $\to$-introd. (scaricando (a)) $\bigvee x x$ r $\bigvee y\,(r = s) \to \bigvee y\,(r = s)$. (ii) Supponiamo che (a) $\bigvee y\,(r = s)$. Per [9] p. 15, osservazione 4.1, con *149a si ha $\bigvee y\,(r = s \wedge \bigwedge u < y\,(r \neq s))$. Supponiamo che (b) $r = s \wedge \bigwedge u < y\,(r \neq s)$. Per *11.2 (1) $r = s \longleftrightarrow |r - s| = 0$, perciò per (b) si ha (2) $|r - s| = 0 \wedge \bigwedge u < y\,(|r - s| \neq 0)$. Per [9] lemma 41 c'e un numero w tale che $\bigwedge y\, \{w\}(y) \simeq |r - s|$, e per *33.10 $\{\langle 0, w\rangle\}(0) \simeq y \longleftrightarrow \{w\}(y) \simeq 0 \wedge \bigwedge u < y \bigvee k\, \{w\}(u) \simeq k'$, dunque (3) $\{\langle 0, w\rangle\}(0) \simeq y \longleftrightarrow |r - s| = 0 \wedge \bigwedge u < y\,(|r - s| \neq 0)$. Per (2) allora $\{\langle 0, w\rangle\}(0) \simeq y$, da cui per $\bigvee y$-introd. con *32.5 e *32.6, e usando $\bigvee$-elim. per scaricare (b), $!\langle \{\langle 0, w\rangle\}(0), 0\rangle$. Supponiamo che (c) $\langle \{\langle 0, w\rangle\}(0), 0\rangle \simeq \overline{\langle \{\langle 0, w\rangle\}(0), 0\rangle}$. Assumiamo di nuovo (b) e deriviamo (3) nel modo già indicato. Da (3) e (c) con [9] lemma 18 e *25.1 si ha $(\overline{\langle \{\langle 0, w\rangle\}(0), 0\rangle})_0 = y \longleftrightarrow |r - s| = 0 \wedge \bigwedge u < y\,(|r - s| \neq 0)$, perciò sostituendo y con $(\overline{\langle \{\langle 0, w\rangle\}(0), 0\rangle})_0$ e usando $\bigvee$-elim. per scaricare (b) e $\wedge$-elim. con (1) si ottiene $r^* = s^*$, dove r^* e s^* sono il risultato della sostituzione di y con $(\overline{\langle \{\langle 0, w\rangle\}(0), 0\rangle})_0$ in r e s, rispettivamente. Ancora da (c) per [9] lemma 18 e *25.1 (con la clausola r1) $(\overline{\langle \{\langle 0, w\rangle\}(0), 0\rangle})_1$ r $(r^* = s^*)$, cioè per la clausola r7 $\overline{\langle \{\langle 0, w\rangle\}(0), 0\rangle}$ r $\bigvee y\,(r = s)$. Da quest'ultima per *34.18 e *34.20 con (c), e usando $\bigvee$-elim. per scaricare (c), si ha $!\langle \{\langle 0, w\rangle\}(0), 0\rangle \wedge [\langle \{\langle 0, w\rangle\}(0), 0\rangle$ r $\bigvee y\,(r = s)]$, da cui per $\to$-introd. (scaricando (a)) $\bigvee y\,(r = s) \to\, !\langle \{\langle 0, w\rangle\}(0), 0\rangle \wedge [\langle \{\langle 0, w\rangle\}(0), 0\rangle$ r $\bigvee y\,(r = s)]$.

Caso 8. F è $\bigwedge a\, A(a)$. (i) Supponiamo che (a) $\bigvee x x$ r $\bigwedge a\, A(a)$. Per $\to$-elim. col lemma 3.3 (viii) $\bigwedge a \bigvee x x$ r $A(a)$, da cui per $\bigwedge$-e $\to$-elim. con l'ip. ind. (i) $A(a)$. Perciò per $\bigwedge a$- e $\to$-introd. (scaricando (a)) $\bigvee x x$ r $\bigwedge a\, A(a) \to \bigwedge a\, A(a)$. (ii) Supponiamo che (a) $\bigwedge a\, A(a)$, (b) $!\{v\}$ e (c) $\{v\} \simeq \overline{\{v\}}$. Da (a) per $\bigwedge$-elim. (prendendo $\overline{\{v\}}$ come a) e $\to$-elim. con l'ip. ind. (ii) si ottiene $!\, t_{A(\overline{\{v\}})} \wedge [t_{A(\overline{\{v\}})}$ r $A(\overline{\{v\}})]$, da cui per *34.13c e *34.20 $!\, \{\Lambda v\, t_{A(\overline{\{v\}})}\}(v) \wedge [\{\Lambda v\, t_{A(\overline{\{v\}})}\}(v)$ r $A(\overline{\{v\}})]$. Perciò per *34.18 e (c) con *34.20, e usando $\bigvee$-elim. per scaricare (c), $! \{v\} \wedge [! \{\Lambda v\, t_{A(\{v\})}\}(v) \wedge [\{\Lambda v\, t_{A(\{v\})}\}(v) \mathbf{r}\, A(\{v\})]]$. Per $\rightarrow$-introd. (scaricando (b)) e $\bigwedge v$-introd. (con la clausola r8) si ha $\Lambda v\, t_{A(\{v\})} \mathbf{r} \bigwedge a\, A(a)$, da cui per $\rightarrow$-introd. (scaricando (a)) $\bigwedge a\, A(a) \rightarrow \Lambda v\, t_{A(\{v\})} \mathbf{r} \bigwedge a\, A(a)$.

Caso 9. F è $\bigvee a\,(r = s)$. (i) Supponiamo che (a) $\bigvee x x\, \mathbf{r} \bigvee a\,(r = s)$. Per il lemma 3.3 (ix) $\bigvee a \bigvee x x\, \mathbf{r}\,(r = s)$. Sia (b) $\bigvee x x\, \mathbf{r}\,(r = s)$. Per il caso 1 precedente $r = s$, perciò per $\bigvee a$-introd., e usando $\bigvee$-elim. per scaricare (b) e $\rightarrow$-introd. per scaricare (a), si ha $\bigvee x x\, \mathbf{r} \bigvee a\,(r = s) \rightarrow \bigvee a\,(r = s)$. Supponiamo che (a) $\bigvee a\,(r = s)$ e (b) $r = s$. Sia $E(a)$ un'abbreviazione di $r = s$. Per *11.2 si ha (1) $E(a) \longleftrightarrow |r - s| = 0$. Per [9] lemma 32 c'è una formula standard $t(x, a) = 0$ tale che (2) $|r - s| = 0 \longleftrightarrow \bigvee x\,(t(x, a) = 0)$. Usando il fatto che $t(x, a) = 0$ è una formula standard, per *149a si ha (3) $\bigvee x\,(t(x, a) = 0) \longleftrightarrow \bigvee x\,(t(x, a) = 0 \wedge \bigwedge u < x\,(t(u, a) = 1))$. Per [9] lemma 41 c'è un numero z tale che $\bigwedge x \bigwedge a \{\mathrm{z}\}(x, a) \simeq t(x, a)$, e per *33.10 $\{\langle 0, \mathrm{z} \rangle\}(0, a) \simeq x \longleftrightarrow \{\mathrm{z}\}(x, a) \simeq 0 \wedge \bigwedge u < x \{\mathrm{z}\}(u, a) \simeq 1$. Quindi $\{\langle 0, \mathrm{z} \rangle\}(0, a) \simeq x \longleftrightarrow t(x, a) = 0 \wedge \bigwedge u < x\,(t(u, a) = 1)$, da cui per *70 si ha (4) $! \{\langle 0, \mathrm{z} \rangle\}(0, a) \longleftrightarrow \bigvee x\,(t(x, a) = 0 \wedge \bigwedge u < x\,(t(u, a) = 1))$. Per *34.1 e *70 inoltre (5) $! \{\langle 0, \mathrm{z} \rangle\}(0, a) \longleftrightarrow \bigvee v \bigvee y\,(T(\langle 0, \mathrm{z} \rangle, 0, \bar{a}(y)) \wedge (y)_{0,3} = v)$. Perciò (6) $! \{\langle 0, \mathrm{z} \rangle\}(0, a) \longleftrightarrow \bigvee y\, T(\langle 0, \mathrm{z} \rangle, 0, \bar{a}(y))$. L'implicazione in una direzione si ottiene infatti da (5) per *78, *91, $\rightarrow$-elim. con *93, $\wedge$ elim. e $\rightarrow$-introd.. Viceversa supponiamo che (A) $\bigvee y\, T(\langle 0, \mathrm{z} \rangle, 0, \bar{a}(y))$ e (B) $T(\langle 0, \mathrm{z} \rangle, 0, \bar{a}(y))$. Per *171 $\bigvee !\, v\,((y)_{0,3} = v)$. Sia (C) $(y)_{0,3} = v$. Da (B) e (C) per $\wedge$-, $\bigvee y$- e $\bigvee v$-introd., e usando $\bigvee$-elim. per scaricare (B) e (C), si ha $\bigvee v \bigvee y\,(T(\langle 0, \mathrm{z} \rangle, 0, \bar{a}(y)) \wedge (y)_{0,3} = v)$. Perciò per (5), e usando $\rightarrow$-introd. per scaricare (A), si ottiene il risultato voluto. Da (1)-(4) e (6) segue (7) $E(a) \longleftrightarrow \bigvee y\, T(\langle 0, \mathrm{z} \rangle, 0, \bar{a}(y))$. Inoltre (8) $\mathrm{Seq}(n) \wedge T(\langle 0, \mathrm{z} \rangle, 0, n) \rightarrow E(\lambda i\,(n)_i \dot{-} 1)$. Sia infatti (A) $\mathrm{Seq}(n) \wedge T(\langle 0, \mathrm{z} \rangle, 0, n)$. Per la dimostrazione di *23.6 in [10] p. 38, $n = \overline{(\lambda i\,(n)_i \dot{-} 1)}(\mathrm{lh}(n))$, perciò sostituendo in (A) e usando $\wedge$-elim. e $\bigvee y$-introd. si ha $\bigvee y\, T(\langle 0, \mathrm{z} \rangle, 0, \overline{(\lambda i\,(n)_i \dot{-} 1)}(y))$, da cui per (7) $E(\lambda i\,(n)_i \dot{-} 1)$. Quindi per $\rightarrow$-introd. (scaricando (A)) si ottiene (8). Da (7) e (b) per $\bigvee a$-introd., e usando $\bigvee$-elim. per scaricare (b), $\bigvee a \bigvee y\, T(\langle 0, \mathrm{z} \rangle, 0, \bar{a}(y))$, da cui per *23.5 (9) $\bigvee n\,(\mathrm{Seq}(n) \wedge T(\langle 0, \mathrm{z} \rangle, 0, n))$. Per [10] p. 30, # D, $\mathrm{Seq}(n) \wedge T(\langle 0, \mathrm{z} \rangle, 0, n) \longleftrightarrow t_1(n) = 0$, per una formula standard $t_1(n) = 0$, perciò da (9) per *149a si ha $\bigvee n\,(t_1(n) = 0 \wedge \bigwedge m < n\,(t_1(m) = 1))$. Supponiamo che (c) $t_1(n) = 0 \wedge \bigwedge m < n\,(t_1(m) = 1)$. Per [9] lemma 41 c'è un numero w tale che $\bigwedge n\, \{\mathrm{w}\}(n) \simeq t_1(n)$, perciò per *33.10 si ha (10) $\{\langle 0, \mathrm{w} \rangle\}(0) \simeq n \longleftrightarrow t_1(n) = 0 \wedge \bigwedge m < n\,(t_1(m) = 1)$. Da (10) e (c) per $\bigvee n$-introd., e usando $\bigvee$-elim. per scaricare (c), $! \{\langle 0, \mathrm{w} \rangle\}(0)$. Supponiamo che (d) $\{\langle 0, \mathrm{w} \rangle\}(0) \simeq \overline{\{\langle 0, \mathrm{w} \rangle\}(0)}$. Ancora da (10) si ha $\overline{\{\langle 0, \mathrm{w} \rangle\}(0)} = n \longleftrightarrow t_1(n) = 0 \wedge \bigwedge m < n\,(t_1(m) = 1)$, per cui sostituendo nel lato destro dell'equivalenza, per $\wedge$-elim. si ottiene $t_1(\overline{\{\langle 0, \mathrm{w}\rangle\}(0)}) = 0$, quindi $\mathrm{Seq}(\overline{\{\langle 0, \mathrm{w}\rangle\}(0)}) \wedge T(\langle 0, \mathrm{z}\rangle, 0, \overline{\{\langle 0, \mathrm{w}\rangle\}(0)})$. Perciò per $\rightarrow$-elim. con (8) $E(\lambda i(\overline{\{\langle 0, \mathrm{w}\rangle\}(0)})_i \dot{-} 1)$, da cui per la clausola **r1** (11) $0 \;\mathrm{r}\; E(\lambda i(\overline{\{\langle 0, \mathrm{w}\rangle\}(0)})_i \dot{-} 1)$. Per [9] lemma 18 con (d), *25.1 e *34.13c, $\{(\langle \Lambda i(\{\langle 0, \mathrm{w}\rangle\}(0))_i \dot{-} 1, 0\rangle)_0\} \simeq \lambda i(\overline{\{\langle 0, \mathrm{w}\rangle\}(0)})_i \dot{-} 1$. Ancora per *25.1, $(\langle \Lambda i(\{\langle 0, \mathrm{w}\rangle\}(0))_i \dot{-} 1, 0\rangle)_1 = 0$. Utilizzando tutto ciò in (11) con *34.18, *34.20 e *34.22, e usando V-elim. per scaricare (d), $!\,\{(\langle \Lambda i(\{\langle 0, \mathrm{w}\rangle\}(0))_i \dot{-} 1, 0\rangle)_0\} \wedge [(\langle \Lambda i\{(\langle 0, \mathrm{w}\rangle\}(0))_i \dot{-} 1, 0\rangle)_1 \;\mathrm{r}\; E(\{(\langle \Lambda i(\{\langle 0, \mathrm{w}\rangle\}(0))_i \dot{-} 1, 0\rangle)_0\})]$, cioè per la clausola **r9** $\langle \Lambda i(\{\langle 0, \mathrm{w}\rangle\}(0))_i \dot{-} 1, 0\rangle \;\mathrm{r}\; \mathsf{V}a(r = s)$. Per $\rightarrow$-introd. (scaricando (a)) $\mathsf{V}a(r = s) \rightarrow \langle \Lambda i(\{\langle 0, \mathrm{w}\rangle\}(0))_i \dot{-} 1, 0\rangle \;\mathrm{r}\; \mathsf{V}a(r = s)$.

LEMMA 5.2. (i) Per ogni formula F che non contiene occorrenze di $\vee$ nel campo di azione di $\rightarrow$ o del quantificatore universale di una variabile per funzioni costruttive Λa, e in cui V non occorre che in parti della forma $\mathsf{V}y(r = s)$ o $\mathsf{V}a(r = s)$, $\vdash_{\mathrm{IDB}_0} \mathsf{V}xx \;\mathrm{r}\; F \longleftrightarrow F$.

(ii) Analogamente per formule F del tipo sopra descritto, precedute da una lista finita di quantificatori esistenziali (di variabili numeriche e di variabili per funzioni costruttive).

DIMOSTRAZIONE. (i) Consideriamo le parti di F alla profondità maggiore in F (nel senso di [6] pp. 115-116), che non sono nel campo di azione di $\rightarrow$ o di un quantificatore universale Λa. Siano $F_1, \ldots, F_n$ tali parti. Per ogni i, $1 \leq i \leq n$, F_i è o una formula prima, oppure una formula il cui operatore principale, cioè l'operatore che è stato applicato per ultimo nella costruzione della formula, è $\rightarrow$ o un Λa. Per l'ipotesi su F, in entrambi i casi F_i non contiene occorrenze di $\vee$, nè contiene occorrenze di V tranne che in parti della forma $\mathsf{V}y(r = s)$ o $\mathsf{V}a(r = s)$. Perciò per il lemma 5.1 (iii) si ha $\vdash_{\mathrm{IDB}_0} \mathsf{V}xx \;\mathrm{r}\; F_i \longleftrightarrow F_i$. Sia F^* la formula che si ottiene a partire da $\mathsf{V}xx \;\mathrm{r}\; F_1, \ldots, \mathsf{V}xx \;\mathrm{r}\; F_n$ nello stesso modo in cui F si ottiene a partire da $F_1, \ldots, F_n$. Per il lemma 3.3 (di cui non si adoperano, naturalmente, i casi (v) e (viii) $\vdash_{\mathrm{IDB}_0} \mathsf{V}xx \;\mathrm{r}\; F \longleftrightarrow F^*$, quindi per rimpiazzamento $\vdash_{\mathrm{IDB}_0} \mathsf{V}xx \;\mathrm{r}\; F \longleftrightarrow F$.

(ii) Sia F una formula del tipo descritto in (i), e Q una lista finita di quantificatori esistenziali di variabili di entrambi i tipi. La dimostrazione di $\vdash_{\mathrm{IDB}_0} \mathsf{V}xx \;\mathrm{r}\; \mathrm{Q}F \longleftrightarrow \mathrm{Q}F$ è per induzione sulla lunghezza n di Q. Se $n = 1$, allora il risultato segue dal fatto che $\mathsf{V}y\,F(y) \longleftrightarrow \mathsf{V}y\,\mathsf{V}xx \;\mathrm{r}\; F(y)$ [per (i)] $\longleftrightarrow \mathsf{V}xx \;\mathrm{r}\; \mathsf{V}y\,F(y)$ [per il lemma 3.3 (vii)] e $\mathsf{V}a\,F(a) \longleftrightarrow \mathsf{V}a\,\mathsf{V}xx \;\mathrm{r}\; F(a)$ [per (i)] $\longleftrightarrow \mathsf{V}xx \;\mathrm{r}\; \mathsf{V}a\,F(a)$ [per il lemma 3.3 (ix)]. Il passo di induzione si ottiene in modo del tutto analogo.

LEMMA 5.3. Sia Γ la classe delle formule tali che, in ogni loro parte della forma $A \rightarrow B, A$ è una formula del tipo descritto nel lemma 5.2. Allora per ogni $F \in \Gamma$, $\vdash_{\mathrm{IDB}_0} \vee x x \ \mathbf{r} \ F \rightarrow F$.

DIMOSTRAZIONE. Per induzione sulla costruzione di F. Se F è $r = s$ o $K(\varphi)$, per il lemma 3.3 (i), (ii). Se F è $A \wedge B$, $A \vee B$, $\Lambda y \, A(y)$, $\vee y \, A(y)$, $\Lambda a \, A(a)$ o $\vee a \, A(a)$, per il lemma 3.3 (iii), (iv), (vi)—(ix) con l'ip. ind..

Caso 5. F è $A \rightarrow B$, per A come nel lemma 5.2. Supponiamo che (a) $\vee xx \ \mathbf{r} \ (A \rightarrow B)$. Allora per $\rightarrow$ elim. col lemma 3.3 (v) $\vee xx \ \mathbf{r} \ A \rightarrow \vee xx \ \mathbf{r} \ B$, da cui per il lemma 5.2 e l'ip. ind. per B, con *2, $A \rightarrow B$. Perciò per $\rightarrow$-elim. (scaricando (a)) $\vee xx \ \mathbf{r} \ (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$.

TEOREMA 5.4. $\mathrm{IDB}_0 + \mathrm{TC}$ è un'estensione conservativa di IDB_0 rispetto alle formule di Γ.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $\vdash_{\mathrm{IDB}_0+\mathrm{TC}} F$, per $F \in \Gamma$. Allora per il teor. 4.3 $\vdash_{\mathrm{IDB}_0} \vee xx \ \mathbf{r} \ F$, perciò per $\rightarrow$-elim. col lemma 5.3 $\vdash_{\mathrm{IDB}_0} F$.

OSSERVAZIONE 5.5. Il teorema permette di ottenere, in particolare, un'estensione di [18] teor. 6.3 per l'aritmetica intuizionista, con TC al posto di TCG. Il lemma 5.2 da cui esso dipende generalizza [7] teor. 2. Un risultato formalmente analogo al lemma 5.2, per la nozione di $\mathbf{r}$-realizzabilità funzionale, si può trovare in [8] teor. 8.

6. Consideriamo infine alcune proprietà di chiusura di IDB_0.

TEOREMA 6.1. Nel teor. 3.2:

(i) Il p-termine chiuso t esprime un numero x tale che x *realizza* ΛF, nel senso che si ottiene dalla definizione di $x \ \mathbf{r} \ F$ traducendola nel linguaggio non formale;

(ii) $\vdash_{\mathrm{IDB}_0} t \simeq \mathrm{w}$, per un certo numero w.

DIMOSTRAZIONE. (i) Basta rimpiazzare la dimostrazione formale in IDB_0 di $! \, t \wedge [t \ \mathbf{r} \ \Lambda F]$ con la dimostrazione non formale corrispondente di: x realizza ΛF. Equivalentemente, dopo aver constatato che il numero x di [14] teor. 3.7.2 (opportunamente adattato alla presente formulazione di IDB_0) è il numero espresso dal p-termine chiuso t del teorema 3.2, si può adoperare una dimostrazione non formale analoga a quella di [14] pp. 292-295.

(ii) Ovviamente x = w, per un certo numero w, perciò per [9] lemma 33 $\vdash_{\mathrm{IDB}_0} t \simeq \mathrm{w}$.

OSSERVAZIONE 6.2. Sebbene adoperi metodi intuizionisticamente ammissibili, la dimostrazione del teorema 6.1 non è elementare, a differenza di quella del teorema 3.2. Cfr. osservazione 4.5. Ciò va tenuto presente nel caso dei risultati la cui dimostrazione si basa su un'applicazione del teorema 6.1.

TEOREMA 6.3. (i) Se $\vdash_{\mathrm{IDB}_0} A \vee B$, dove $A \vee B$ è una formula chiusa, allora $\vdash_{\mathrm{IDB}_0} A$ oppure $\vdash_{\mathrm{IDB}_0} B$.

(ii) Se $\vdash_{\mathrm{IDB}_0} \bigvee x\, A(x)$, dove $\bigvee x\, A(x)$ è chiusa, allora c'è un numero $\mathbf{x}$ tale che $\vdash_{\mathrm{IDB}_0} A(\mathbf{x})$.

(iii) Se $\vdash_{\mathrm{IDB}_0} \bigvee a\, A(a)$, dove $\bigvee a\, A(a)$ è chiusa, allora

$$\vdash_{\mathrm{IDB}_0} \bigvee a\, (\mathrm{RG}(a) \wedge A(a)),$$

e c'è un numero $\mathbf{z}$ tale che

$$\vdash_{\mathrm{IDB}_0} \bigvee a\, (\bigwedge x \bigvee y\, (T(\mathbf{z}, x, y) \wedge (y)_{0,3} = a(x)) \wedge A(a))$$

e

$$\vdash_{\mathrm{IDB}_0} \bigwedge x \bigvee y T(\mathbf{z}, x, y) \wedge \bigwedge a\, (\bigwedge x \bigvee y\, (T(\mathbf{z}, x, y) \wedge (y)_{0,3} = a(x)) \rightarrow A(a)).$$

DIMOSTRAZIONE. (i) Si riduce a (ii) appresso, poiché $A \vee B \longleftrightarrow \bigvee x\, ((x = 0 \rightarrow A) \wedge (x \neq 0 \rightarrow B))$.

(ii) Se $\vdash_{\mathrm{IDB}_0} \bigvee x A(x)$, per il teor. 3.2 c'è un p-termine chiuso t tale che $!\, t \wedge [t\ \mathbf{q}\ \bigvee x A(x)]$, cioè $!\, t \wedge [(t)_1\ \mathbf{q}\ A((t)_0) \wedge A((t)_0)]$. Supponiamo che (a) $t \simeq \bar{t} \wedge (\bar{t})_1\ \mathbf{q}\ A((\bar{t})_0) \wedge A((\bar{t})_0)$. Per il teor. 6.1 (ii) $t \simeq \mathbf{w}$, per qualche numero $\mathbf{w}$, e per [9] lemma 33 $(\mathbf{w})_0 \simeq \mathbf{x}$ per $\mathbf{x} = (\mathbf{w})_0$, perciò per [9] lemma 18 $(t)_0 \simeq \mathbf{x}$. Da (a) ancora per [9] lemma 18 si ha quindi $(\bar{t})_0 = \mathbf{x}$, da cui per (a), e adoperando $\bigvee$-elim. per scaricare (a), si ottiene $A(\mathbf{x})$.

(iii) Se $\vdash_{\mathrm{IDB}_0} \bigvee a A(a)$, per il teor. 3.2 c'è un p-termine chiuso t tale che $!\, t \wedge [t\ \mathbf{q}\ \bigvee a A(a)]$, cioè $!\, t \wedge [\, !\, \{(t)_0\} \wedge [(t)_1\ \mathbf{q}\ A(\{(t)_0\}) \wedge A(\{(t)_0\})]]$. Supponiamo che (a) $t \simeq \bar{t} \wedge !\, \{(\bar{t})_0\} \wedge [(\bar{t})_1\ \mathbf{q}\ A(\{(\bar{t})_0\}) \wedge A(\{(\bar{t})_0\})]$. Per $\wedge$-elim. e *34.23 si ha $!\, \{(\bar{t})_0\} \wedge [(\bar{t})_1\ \mathbf{q}\ A(\{(\bar{t})_0\})] \wedge !\, \{(\bar{t})_0\} \wedge [A(\{(\bar{t})_0\})]$, da cui per $\wedge$ elim. e (a) con [9] lemma 18 e *34.20, e usando $\bigvee$-elim. per scaricare (a), (1) $!\, \{(t)_0\} \wedge [A(\{(t)_0\})]$. Per [9] lemma 41 e lemma 18 c'è un numero $\mathbf{z}$ tale che $\{\mathbf{z}\} \simeq \{(t)_0\}$, perciò da (1) con *34.20 si ottiene (2) $!\, \{\mathbf{z}\} \wedge [A(\{\mathbf{z}\})]$, cioè $\bigvee a\, (\{\mathbf{z}\} \simeq a \wedge A(a))$, da cui per $\bigvee$-introd. con *78 e *91 $\bigvee a\, (\bigvee w\, \{w\} \simeq a \wedge A(a))$, cioè (3) $\bigvee a\, (\mathrm{RG}(a) \wedge A(a))$. Ancora da (1) per [9] lemma 17 si ha $\bigvee a\, (\bigwedge x\, \{\mathbf{z}\}(x) \simeq a(x) \wedge A(a))$, quindi per *34.3 $\bigvee a\, (\bigwedge x \bigvee y\, (T(\mathbf{z}, x, y) \wedge (y)_{0,3} = a(x)) \wedge A(a))$. Analogamente per *34.17a — c con [9] lemma 17 si ha $\bigvee a \bigwedge x\, \{\mathbf{z}\}(x) \simeq a(x) \wedge \bigwedge a\, (\bigwedge x\, \{\mathbf{z}\}(x) \simeq a(x) \rightarrow A(a))$, da cui per *34.3 $\bigvee a \bigwedge x \bigvee y\, (T(\mathbf{z}, x, y) \wedge (y)_{0,3} = a(x)) \wedge \bigwedge a\, (\bigwedge x \bigvee y\, (T(\mathbf{z}, x, y) \wedge (y)_{0,3} = a(x)) \rightarrow A(a))$, perciò $\bigwedge x \bigvee y T(\mathbf{z}, x, y) \wedge \bigwedge a\, (\bigwedge x \bigvee y\, (T(\mathbf{z}, x, y) \wedge (y)_{0,3} = a(x)) \rightarrow A(a))$.

TEOREMA 6.4. Se $\vdash_{\mathrm{IDB}_0} \bigwedge x \bigvee y A(x, y)$, dove $\bigwedge x \bigvee y A(x, y)$ è una formula chiusa, allora $\vdash_{\mathrm{IDB}_0} \bigvee a\,(\mathrm{RG}(a) \wedge \bigwedge x A(x, a(x)))$, e c'è un numero z tale che $\vdash_{\mathrm{IDB}_0} \bigwedge x \bigvee y\,(T(\mathbf{z}, x, y) \wedge A(x, (y)_{0,3}))$.

DIMOSTRAZIONE. Se $\vdash_{\mathrm{IDB}_0} \bigwedge x \bigvee y A(x, y)$, per il teor. 3.2 c'è un p-termine chiuso t tale che $!\,t \wedge [t \mathrel{\mathrm{q}} \bigwedge x \bigvee y A(x, y)]$, cioè $!\,t \wedge [\bigwedge x\,(!\,\{t\}(x) \wedge [(\{t\}(x))_1 \mathrel{\mathrm{q}} A(x, (\{t\}(x))_0) \wedge A(x, (\{t\}(x))_0)])]$. Supponiamo che (a) $t \simeq \bar{t} \wedge \bigwedge x\,(!\,\{\bar{t}\}(x) \wedge [(\{\bar{t}\}(x))_1 \mathrel{\mathrm{q}} A(x, (\{\bar{t}\}(x))_0) \wedge A(x, (\{\bar{t}\}(x))_0)])$. Per $\wedge$-elim., *34.23, *87, $\wedge$-elim. e *34.16a si ha $\bigwedge x \bigvee w\,(\{\bar{t}\}(x) \simeq w \wedge A(x, (w)_0))$. Dopo $\bigwedge$-elim. supponiamo che (b) $\{\bar{t}\}(x) \simeq w \wedge A(x, (w)_0)$. Per [9] lemma 18 $(\{\bar{t}\}(x))_0 \simeq (w)_0 \wedge A(x, (w)_0)$, perciò per $\bigvee$-e $\bigwedge$-introd., e usando $\bigvee$-elim. per scaricare (b), (1) $\bigwedge x \bigvee u\,((\{\bar{t}\}(x))_0 \simeq u \wedge A(x, u))$, da cui per *2.2 si ottiene (2) $\bigvee a \bigwedge x\,((\{\bar{t}\}(x))_0 \simeq a(x) \wedge A(x, a(x)))$. Per [9] lemma 41 c'è un numero z tale che $\bigwedge x\,\{\mathbf{z}\}(x) \simeq (\{t\}(x))_0$, quindi da (2) per [9] lemma 18 con (a), e usando $\bigvee$-elim. per scaricare (a), (3) $\bigvee a \bigwedge x\,(\{\mathbf{z}\}(x) \simeq a(x) \wedge A(x, a(x)))$. Perciò per *87 e [9] lemma 18 con *0.4 si ha $\bigvee a\,(\{\mathbf{z}\} \simeq a \wedge \bigwedge x A(x, a(x)))$, cioè $!\,\{\mathbf{z}\} \wedge [\bigwedge x A(x, \{\mathbf{z}\}(x))]$. Da quest'ultima come (3) da (2) nella dimostrazione del teor. 6.3 (iii) si ottiene $\bigvee a\,(RG(a) \wedge \bigwedge x A(x, a(x)))$. Inoltre da (3) per *34.3 $\bigvee a \bigwedge x\,(\bigvee y\,(T(\mathbf{z}, x, y) \wedge (y)_{0,3} = a(x)) \wedge A(x, a(x)))$. Supponiamo che (c) $\bigwedge x\,(\bigvee y\,(T(\mathbf{z}, x, y) \wedge (y)_{0,3} = a(x)) \wedge A(x, a(x)))$. Per $\bigwedge$-elim. (4) $\bigvee y\,(T(\mathbf{z}, x, y) \wedge (y)_{0,3} = a(x)) \wedge A(x, a(x))$. Dopo $\wedge$-elim. supponiamo che (d) $T(\mathbf{z}, x, y) \wedge (y)_{0,3} = a(x)$. Da (4) e (d) per $\wedge$-elim. e rimpiazzando $a(x)$ con $(y)_{0,3}$ si ottiene $A(x, (y)_{0,3})$, da cui per $\wedge$-introd. con (d), $\bigvee$- e $\bigwedge$-introd., e usando $\bigvee$-elim. per scaricare (c) e (d), $\bigwedge x \bigvee y\,(T(\mathbf{z}, x, y) \wedge A(x, (y)_{0,3}))$.

OSSERVAZIONE 6.5. Si noti che, nella dimostrazione del teorema, l'uso dello schema di assioma di scelta $\bigwedge x \bigvee y$ invece dello schema di assioma di scelta con unicità $\bigwedge x \bigvee !\,y$ è inessenziale. Infatti per [9] lemma 8 si ha $(\{\bar{t}\}(x))_0 \simeq u \wedge (\{\bar{t}\}(x))_0 \simeq v \rightarrow u = v$, perciò per *11, *4, *31, *33 e $\bigwedge$-introd. $\bigwedge x \bigwedge u \bigwedge v\,(((\{\bar{t}\}(x))_0 \simeq u \wedge A(x, u)) \wedge ((\{\bar{t}\}(x))_0 \simeq v \wedge A(x, v)) \rightarrow u = v)$, da cui per $\wedge$-introd. con (1) e *87 $\bigwedge x \bigvee !\,u\,((\{\bar{t}\}(x))_0 \simeq u \wedge A(x, u))$.

OSSERVAZIONE 6.6 Proprietà di chiusura analoghe a quelle del teorema 6.3 sono ben note per il calcolo dei predicati intuizionista, dove si ottengono abbastanza naturalmente, e talora in forma più generale, col metodo dell'eliminazione dei tagli in un calcolo delle sequenze o in base al principio della normalizzazione delle derivazioni in un sistema di deduzione naturale. Cfr. [2] e [15] rispettivamente, cui si rimanda per ulteriori informazioni bibliografiche. I teoremi 6.3 e 6.4 sono formalmente analoghi ai risultati di [9] §§ 5.9, 5.10 per la formalizzazione dell'analisi intuizionista di [10] e per vari suoi sottosistemi, in termini di q-realizzabilità funzionale.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] P. BERNAYS, *Sur le platonisme dans les mathématiques*, L'Enseignement Mathématique, vol. 34 (1935), pp. 52-69.

[2] H. B. CURRY, *Foundations of mathematical logic*, New York (Mc Graw-Hill) 1963, pp. xii + 408.

[3] N. D. GOODMAN, *Intuitionistic arithmetic as a theory of constructions*, tesi, Stanford University, 1968, pp. v + 111.

[4] A. HEYTING, *Blick von der intuitionistischen Warte*, Dialectica, vol. 12 (1958), pp. 332-345.

[5] S. C. KLEENE, *On the interpretation of intuitionistic number theory*, The Journal of Symbolic Logic, vol. 10 (1945), pp. 109-124.

[6] S. C. KLEENE, *Introduction to metamathematics*, Amsterdam (North-Holland) e Groningen (Noordhoff) 1952, pp. x + 550.

[7] S. C. KLEENE, *Realizability and Shanin's algorithm for the constructive deciphering of mathematical sentences*, Logique et Analyse, vol. 3 (1960), pp. 154-165.

[8] S. C. KLEENE, *Classical extensions of intuitionistic mathematics*, in Logic, methodology and philosophy of science II, Proceedings of the 1964 international congress, a cura di Y. BAR-HILLEL, Amsterdam (North-Holland) 1965, pp. 31-44.

[9] S. C. KLEENE, *Formalized recursive functionals and formalized realizability*, Memoirs of the American Mathematical Society, N. 89, Providence, R. I. (American Mathematical Society) 1969, pp. 106.

[10] S. C. KLEENE e R. E. VESLEY, *The foundations of intuitionistic mathematics, especially in relation to recursive functions*, Amsterdam (North-Holland) 1965, pp. viii + 206.

[11] G. KREISEL, *Mathematical logic*, in Lectures on modern mathematics, a cura di T. L. SAATY, vol. III, New York (Wiley) 1965, pp. 95-195.

[12] G. KREISEL, *Lawless sequences of natural numbers*. Compositio Mathematica, vol. 20 (1968), pp. 222-248.

[13] G. KREISEL, *Church's thesis : a kind of reducibility axiom for constructive mathematics*, in Intuitionism and proof theory, Proceedings of the summer conference at Buffalo N. Y. 1968, a cura di A. KINO, J. MYHILL e R. E. VESLEY, Amsterdam (North-Holland) 1970, pp. viii + 516.

[14] G. KREISEL e A. S. TROELSTRA, *Formal systems for some branches of intuitionistic analysis*, Annals of Mathematical Logic, vol. 1 (1970), pp. 229-387.

[15] D. PRAWITZ, *Natural deduction. A proof-theoretical study*, Stockholm (Almqvist & Wiksell) 1965, pp. 113.

[16] C. SPECTOR, *Provably recursive functionals of analysis: a consistency proof of analysis by an extension of principles formulated in current intuitionistics mathematics*, in Recursive function theory, Proceedings of symposia in pure mathematics, vol. 5, a cura di J. C. E. DEKKER, Providence, R. I. (American Mathematical Society) 1962, pp. 1-27.

[17] A. S. TROELSTRA, *The theory of choice sequences,* in Logic, methodology and philosophy of science III, Proceedings of the third international congress, a cura di B. VAN ROOTSELAAR e J. F. STAAL, Amsterdam (North-Holland) 1968, pp. 201-223.

[18] A. S. TROELSTRA, *Notions of realizability for intuitionistic arithmetic in all finite types,* in Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium, a cura di J. E. Fenstad, in corso di pubblicazione.

The University of Sussex
Brighton, England