

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

MARIANNE GUILLEMOT-TEISSIER

**Développements des distributions en séries de fonctions
orthogonales. Séries de Legendre et de Laguerre**

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 25,
n° 3 (1971), p. 519-573

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1971_3_25_3_519_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

**DEVELOPPEMENTS DES DISTRIBUTIONS EN SERIES
DE FONCTIONS ORTHOGONALES.
SERIES DE LEGENDRE ET DE LAGUERRE**

MARIANNE GUILLEMOT - TEISSIER

Introduction.

L'objet de ce travail est l'étude des développements en séries de fonctions orthogonales de distributions définies sur des variétés « avec bord », dans le cas le plus simple de la dimension 1 ; il s'agit donc des distributions ayant leur support sur l'intervalle fermé $[-1, 1]$ de la droite réelle (séries de Legendre) et des distributions tempérées ayant leur support sur la demi-droite fermée \bar{R}_+ (séries de Laguerre). Les résultats obtenus sont, en partie, analogues à ceux que l'on connaît dans le cas des variétés « sans bord » (séries de Fourier et séries de Hermite). [11]

On montre ainsi que toute fonction indéfiniment dérivable sur $[-1, 1]$ (élément de $\mathcal{D}([-1, 1])$) est développable en une série de polynômes de Legendre dont la suite des coefficients est à décroissance rapide, et qui converge vers f dans $\mathcal{D}([-1, 1])$ (proposition I ch. I) ; et que toute distribution à support dans $[-1, 1]$ (élément de $\mathcal{D}'([-1, 1])$) est développable en une série de Legendre dont la suite des coefficients est à croissance lente, et qui converge dans $\mathcal{D}'([-1, 1])$. (proposition II ch I).

Des résultats analogues sont obtenus dans le cas des fonctions indéfiniment dérivables sur \bar{R}_+ et à décroissance rapide à l'infini (éléments de $\mathcal{S}(\bar{R}_+)$), et des distributions tempérées ayant leur support dans \bar{R}_+ (éléments de $\mathcal{S}'(\bar{R}_+)$), pour les développements en séries de fonctions de Laguerre (prop. I et II ch II).

Les polynômes de Legendre sont fonctions propres de l'opérateur de Legendre D , défini par $Df = \frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{df}{dx} \right)$; D est autoadjoint pour la forme bilinéaire $(u, v) = \int_{-1}^1 u(x) \overline{v(x)} dx$. Cela permet de définir des structures

hilbertiennes sur certains sous espaces de $\mathcal{D}'([-1, 1])$; nous appelons \mathcal{F}' l'ensemble des distributions T de $\mathcal{D}'([-1, 1])$ telles que $(I - D)^t T$ appartient à $L^2([-1, 1])$; nous comparons ces espaces \mathcal{F}' aux espaces de Sobolev $\mathcal{H}^s([-1, 1])$ (ou $\mathring{\mathcal{H}}^s([-1, 1])$) et montrons que, à la différence de ce qui se produit dans le cas des variétés compactes « sans bord » [2], il y a des relations d'inclusion stricte, mais non de coïncidence entre ces espaces; cela permet d'établir des relations entre la « rapidité de convergence » de la série de Legendre d'une distribution et la « régularité » de celle-ci; cela permet aussi d'étudier la régularité des solutions de l'équation différentielle de Legendre. (Prop. III ch I).

Une étude analogue est faite pour les séries de Laguerre (Prop. III ch II).

Dans le cas des séries de Laguerre, le fait que les distributions envisagées aient leur support sur la demi-droite \bar{R}_+ permet de définir la transformation de Laplace et la convolution des séries de Laguerre; on étudie quelques exemples de séries de Laguerre.

Enfin on montre que, dans l'étude de $\mathcal{D}'([-1, 1])$, si on remplace les polynômes de Legendre par ceux, plus généraux, de Jacobi, les résultats concernant $\mathcal{D}'([-1, 1])$ (prop. I) restent vrais, mais non ceux concernant les distributions (prop. II). Il en est de même si on remplace les fonctions de Laguerre par les « fonctions de Laguerre générales ».

Signalons que des résultats analogues à ceux de la proposition I (ch. I) ont été obtenus par M. MITYAGIN [9] en remplaçant les polynômes de Legendre par ceux de Tchebychev.

Les résultats obtenus ici ont été généralisés au cas d'une dimension quelconque M. BAOUENDI et GOULAOUIC [1].

Des études analogues ont été faites par M. TRIEBEL [14] et par M. ZERNER [15].

J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur Laurent SCHWARTZ qui m'a suggéré cette étude et à Monsieur Mohamaed-Salah BAOUENDI qui m'a donné des conseils utiles pour sa rédaction.

CHAPITRE I

SERIES DE LEGENDRE

Ce chapitre est consacré à l'étude des développements en séries de polynomes de Legendre des distributions ayant leurs supports dans l'intervalle fermé $[-1, 1]$ de la droite réelle.

1. Notations.

Dans ce qui suit, on désigne par Ω l'ouvert $]1, -1[$, donc par $\bar{\Omega}$ le fermé $[-1, 1]$, par $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ l'espace des fonctions C^∞ dans $[-1, 1]$, par $\mathcal{D}'(\bar{\Omega})$ l'espace des distributions définies sur R et ayant leur support dans $[-1, 1]$. Ce dernier espace s'identifie au dual de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$. (cf. Schwartz. [11], th II bis ch IX).

On appelle D l'opérateur de Legendre

$$f(x) \rightarrow Df(x) = (1 - x^2) \frac{d^2 f}{dx^2} - 2x \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} \left((1 - x^2) \frac{df}{dx} \right).$$

Pour tout entier $n \geq 0$, on désigne par $P_n(x)$ le n -ième polynôme de Legendre normalisé, fonction propre de l'opérateur D associée à la valeur propre $-n(n+1)$. Les $P_n(x)$ forment une base orthonormale de $L^2[-1, 1]$. (On a $P_n(x) = \left(n + \frac{1}{2}\right)^{1/2} p_n(x)$, $p_n(x)$ étant le n -ième polynôme de Legendre usuel, vérifiant $p_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2 - 1)^n$).

Si φ est une fonction sommable sur $[-1, 1]$, on appelle n -ième coefficient de Legendre de φ le nombre

$$a_n(\varphi) = \int_{-1}^1 \varphi(x) P_n(x) dx.$$

La série de Legendre de φ est

$$a_0(\varphi) P_0(x) + a_1(\varphi) P_1(x) \dots + a_n(\varphi) P_n(x) + \dots$$

2. Coefficients de Legendre des fonctions de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$.

Notons (u, v) le produit scalaire défini par $L^2[-1, 1]$;

$$(u, v) = \int_{-1}^1 u(x) \overline{v(x)} dx.$$

L'opérateur D est autoadjoint pour la structure préhilbertienne induite par $L^2[-1, 1]$ sur $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$.

En effet, si $f, g \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$,

$$\begin{aligned} (Df, g) &= \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{df}{dx} \right] \bar{g} dx = \left[(1-x^2) \frac{df}{dx} \bar{g} \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (1-x^2) \frac{df}{dx} \frac{d\bar{g}}{dx} dx \\ &= - \int_{-1}^1 (1-x^2) \frac{df}{dx} \frac{d\bar{g}}{dx} dx = (f, Dg), \end{aligned}$$

à cause du rôle symétrique joué par f et \bar{g} .

(Dans ce calcul on suppose seulement $f, g \in \mathcal{D}^2(\bar{\Omega})$).

Puisque $a_n(\varphi) = (\varphi, P_n)$ et que $DP_n = -n(n+1)P_n$, il en résulte que

$$a_n(D\varphi) = (D\varphi, P_n) = (\varphi, DP_n) = -n(n+1)(\varphi, P_n) = -n(n+1)a_n(\varphi).$$

En itérant l'opérateur D , si $\varphi \in \mathcal{D}^{2p}(\bar{\Omega})$, on en déduit que

$$a_n(D^p \varphi) = (-1)^p n^p (n+1)^p a_n(\varphi).$$

Si $f \in L^2[-1, 1]$, la suite des coefficients $a_n(f)$ est bornée. En particulier, si $f \in \mathcal{D}^{2p}(\bar{\Omega})$, nous avons

$$a_n(D^p f) = 0 \quad (1), \text{ donc } a_n(f) = 0 \quad (n^{-2p}).$$

D'où : si $f \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$, les coefficients $a_n(f)$ sont à décroissance rapide.

3. Majoration des dérivées des polynômes de Legendre sur $[-1, 1]$.

On note $P_n^{(k)}(x)$ (resp. $p_n^{(k)}(x)$) la k -ième dérivée de $P_n(x)$ (resp. $p_n(x)$),
 $p_n^{(0)}(x) = p_n(x)$, $P_n^{(0)}(x) = P_n(x)$.

Nous allons montrer que

$$(3.1) \quad \text{pour } -1 \leq x \leq 1, \quad |P_n^{(k)}(x)| \leq P_n^{(k)}(1);$$

(on montre ci-dessous que $P_n^{(k)}(1) > 0$), n, k , entiers, $n \geq 0$, $0 \leq k \leq n$.

On sait ([6] p. 20) que pour $-1 \leq x \leq 1$, $|p_n(x)| \leq p_n(1) = 1$, donc
 $|P_n(x)| \leq P_n(1) = \left(n + \frac{1}{2}\right)^{1/2}$. La formule (3.1) est donc vérifiée, quel que
 soit n , pour $k = 0$.

En dérivant k fois la relation ([6] p. 33)

$$(n + 1)p_n(x) + xp_n'(x) = p_{n+1}(x)$$

on obtient

$$(3.2) \quad (n + 1)p_n^{(k)}(x) + xp_n^{(k+1)}(x) + kp_n^{(k)}(x) = p_{n+1}^{(k+1)}(x), \quad n \geq 0, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Si on sait que (3.1) est vérifiée pour $n \leq N$, $0 \leq k \leq n$, alors il résulte
 de (3.2) que $|p_{N+1}^{(k+1)}(x)| \leq p_{N+1}^{(k+1)}(1)$ pour $0 \leq k \leq N$. On sait par ailleurs
 que $|p_{N+1}^0(x)| \leq p_{N+1}^0(1)$. Donc (3.1) est vérifiée pour $n = N + 1$, $0 \leq k \leq N + 1$;
 comme (3.1) est vraie pour $k = n = 0$, (3.1) est vérifiée pour tout n et tout k .

Calcul de $P_n^k(1)$.

En dérivant $k - 1$ fois l'équation de Legendre

$$\frac{d}{dx} [(1 - x^2) P_n'(x)] + n(n + 1) P_n(x) = 0$$

on obtient

$$(1 - x^2) P_n^{(k+1)}(x) - 2kx P_n^{(k)}(x) - k(k - 1) P_n^{(k-1)}(x) + n(n + 1) P_n^{(k-1)}(x) = 0.$$

D'où, pour $x = 1$,

$$2k P_n^k(1) = (n(n + 1) - k(k - 1)) P_n^{k-1}(1) = (n - k + 1)(n + k) P_n^{k-1}(1).$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } P_n^k(1) &= \frac{(n-k+1)(n+k)P_n^{k-1}(1)}{2k} = \dots \\ &= \frac{(n-k+1)(n-k+2)\dots(n+k)P_n(1)}{2^k k!} = \frac{(n+k)! \left(n + \frac{1}{2}\right)^{1/2}}{2^k (n-k)! k!}. \end{aligned}$$

Pour k fixe, $P_n^k(1) \left(n + \frac{1}{2}\right)^{-1/2}$ est un polynôme de degré $2k$ en n .

4. Convergence des séries de Legendre des fonctions de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$.

Soit f une fonction de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$, $\sum a_n P_n(x)$ sa série de Legendre.

D'après ce que nous venons de voir, pour tout entier k , $-1 \leq x \leq 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n P_n^{(k)}(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| P_n^k(1).$$

Les a_n étant à décroissance rapide et les $P_n^k(1)$ à croissance polynomiale, la série de droite est convergente; donc chaque série dérivée de la série de Legendre de f converge uniformément sur $[-1, 1]$. D'où :

La série de Legendre d'une fonction de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ converge dans $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$.

Réciproquement, si une suite a_n est à décroissance rapide, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$ converge uniformément ainsi que toutes les séries dérivées; donc :

Si la suite a_n est à décroissance rapide, la série de Legendre $\sum a_n P_n(x)$ converge dans $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$.

5. Distributions de $\mathcal{D}'(\bar{\Omega})$.

Soit T une distribution de $\mathcal{D}'(\bar{\Omega})$ (ayant son support dans $[-1, 1]$) et soit a_n une suite à décroissance rapide; nous avons vu que la série de Legendre $\sum a_n P_n(x)$ converge dans $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ vers une fonction f ; en raison de la dualité entre $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ et $\mathcal{D}'(\bar{\Omega})$,

$$\left\langle T, \sum_{n=0}^N a_n P_n \right\rangle \rightarrow \langle T, f \rangle \quad \text{quand } N \rightarrow \infty,$$

$\langle T, f \rangle$ désignant le produit scalaire entre $T \in \mathcal{D}'(\bar{\Omega})$ et $f \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$. Si u est une fonction définie sur une partie de R contenant $[-1, 1]$, nous appellerons $\tilde{u}(x)$ la fonction égale à $u(x)$ pour $x \in [-1, 1]$, à zéro à l'extérieur de cet intervalle. Nous avons en particulier

$$\langle \tilde{P}_n, P_n \rangle = \int_{-1}^1 P_n(x) P_n(x) dx = \delta_{nn}.$$

Considérons la somme finie $\sum_{n=0}^N a_n P_n$. Nous avons

$$\langle T, \sum_{n=0}^N a_n P_n \rangle = \sum_{n=0}^N a_n \langle T, P_n \rangle = \langle \sum_{n=0}^N \langle T, P_n \rangle \tilde{P}_n, \sum_{n=0}^N a_n P_n \rangle,$$

à cause de l'orthogonalité des P_n ; et

$$\langle \sum_{n=0}^N \langle T, P_n \rangle \tilde{P}_n, \sum_{n=0}^N a_n P_n \rangle = \langle \sum_{n=0}^N \langle T, P_n \rangle \tilde{P}_n, \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n \rangle = \langle \sum_{n=0}^N \langle T, P_n \rangle \tilde{P}_n, f \rangle.$$

Quand $N \rightarrow \infty$, comme $\langle T, \sum_{n=0}^N a_n P_n \rangle \rightarrow \langle T, f \rangle$, la série $\sum_{n=0}^N \langle T, P_n \rangle \tilde{P}_n$ converge vers T dans $\mathcal{D}'(\bar{\Omega})$. La série $\sum_{n=0}^{\infty} \langle T, P_n \rangle \tilde{P}_n$ sera appelée *série de Legendre de la distribution T*.

D'où

Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\bar{\Omega})$ a pour développement en série de Legendre $\sum_{n=0}^{\infty} \langle T, P_n \rangle \tilde{P}_n$; cette série converge vers T dans $\mathcal{D}'(\bar{\Omega})$.

Nous allons montrer que les coefficients de Legendre d'une distribution sont à *croissance lente*.

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \tilde{P}_n$ la série de Legendre d'une distribution, et soit a_n une suite à décroissance rapide. Il résulte de ce qui précède que

$$\langle \sum_{n=0}^{\infty} b_n \tilde{P}_n, \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} b_n a_n,$$

et que la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} b_n a_n$ est convergente.

Supposons que la suite b_n ne soit pas à croissance lente; alors à la suite des entiers $1, 2, \dots, k; \dots$ on peut faire correspondre une suite d'indices croissants n_1, \dots, n_k, \dots tels que $|b_{n_k}| > n_k^k$.

Posons $C_{n_k} = 1/b_{n_k}$, $C_i = 0$ si i n'est pas dans la suite des n_k ; alors la suite C_n est à décroissance rapide, et $\sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n$ converge dans $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$; et nous obtenons $\langle \sum_{n=0}^{\infty} b_n \tilde{P}_n, \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} b_n C_n < +\infty$. Mais d'autre part la série $\sum_{n=0}^{\infty} b_n C_n$ est divergente, les $b_n C_n$ étant égaux à 0 ou à 1 (à 1 pour un ensemble infini d'indices). Il y a donc contradiction. On en déduit que :

Les coefficients de Legendre d'une distribution sont à croissance lente.

Réciproquement, si b_n est une suite à croissance lente, il existe un entier p tel que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(-n(n+1))^p} \tilde{P}_n(x)$ converge uniformément vers une fonction f continue sur $[-1, 1]$; alors $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \tilde{P}_n(x) = b_0 \tilde{P}_0 + D^p f$, et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \tilde{P}_n(x)$ est la série de Legendre d'une distribution $\in \mathcal{D}'(\bar{\Omega})$. (En effet, $D \tilde{P}_n = -n(n+1) \tilde{P}_{n+1}$, la dérivation étant au sens des distributions; voir ci-dessous § 7).

Donc, si la suite b_n est à croissance lente, la série $\sum b_n \tilde{P}_n(x)$ converge dans $\mathcal{D}'(\bar{\Omega})$.

En résumé :

PROPOSITION I. *Une fonction $f \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ admet un développement en série de Legendre $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) P_n(x)$, qui converge vers f dans $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$. La suite des coefficients $a_n = \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx$ est à décroissance rapide. Réciproquement, si une suite a_n est à décroissance rapide, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$ converge dans $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$.*

PROPOSITION II. *Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\bar{\Omega})$ admet un développement en série de Legendre $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(T) \tilde{P}_n(x)$ qui converge vers T dans $\mathcal{D}'(\bar{\Omega})$. La suite des coefficients $b_n(T) = \langle T, P_n \rangle$ est à croissance lente. Réciproquement, si une suite b_n est à croissance lente, la série $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \tilde{P}_n(x)$ converge dans $\mathcal{D}'(\bar{\Omega})$.*

6. Exemples de séries de Legendre de distributions.

1. Mesure de Dirac δ .

$$\delta = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0) \tilde{P}_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(4n+1)^{1/2} 1.3 \dots (2n-1)}{2^{n+1/2} n!} \tilde{P}_{2n}(x).$$

2. Mesure de Dirac δ_1 au point $x = 1$.

$$\delta_1 = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1) \tilde{P}_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right)^{1/2} \tilde{P}_n(x).$$

3. Mesure de Dirac δ_{-1} au point $x = -1$.

$$\delta_{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-1) \tilde{P}_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(n + \frac{1}{2}\right)^{1/2} \tilde{P}_n(x).$$

4. Dérivation à gauche au point $x = 1$.

$$\frac{d}{dx_{x=1}} = \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(1) \tilde{P}_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right)^{1/2} \frac{n(n+1)}{2} \tilde{P}_n(x).$$

7. Structures hilbertiennes.

L'opérateur de Legendre D vérifie

$$D P_n = -n(n+1) P_n.$$

Il vérifie également

$D \tilde{P}_n = -n(n+1) \tilde{P}_n$, car, (la dérivation étant au sens des distributions dans R),

$\langle D \tilde{P}_n, \varphi \rangle = \langle \tilde{P}_n, D\varphi \rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{C}(R)$, D étant son propre adjoint dans la dualité entre $\mathcal{C}(R)$ et $\mathcal{C}'(R)$, et

$$\begin{aligned} \langle \tilde{P}_n, D\varphi \rangle &= \int_{-1}^1 P_n D(\varphi) dx = \int_{-1}^1 D(P_n) \varphi dx \text{ (d'après le calcul § 2)} \\ &= -n(n+1) \int_{-1}^1 P_n \varphi dx = -n(n+1) \langle \tilde{P}_n, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Nous utiliserons de préférence l'opérateur $I - D$, dont les valeurs propres $1 + n(n + 1)$, associées aux fonctions propres P_n (ou \tilde{P}_n), sont toutes positives.

Il résulte de ce que nous avons vu que $I - D$ applique isomorphiquement $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ sur lui-même et $\mathcal{D}'(\bar{\Omega})$ sur lui-même.

La structure d'espace de Hilbert de $L^2[-1, 1]$, pour laquelle les P_n forment une base orthogonale, conduit à définir l'opérateur $(I - D)^s$ (s réel quelconque), et de nouveaux espaces de Hilbert.

DÉFINITION. s étant un nombre réel quelconque, on appelle \mathcal{F}^s le sous-espace de $\mathcal{D}'[-1, 1]$ formé des distributions $T = \sum b_n \tilde{P}_n$ telles que

$$\sum |b_n|^2 n^{4s} < +\infty.$$

\mathcal{F}^s est l'ensemble des distributions $T \in \mathcal{D}'(\bar{\Omega})$ telles que $(I - D)^s T \in L^2[-1, 1]$. \mathcal{F}^s est un espace de Hilbert, pour lequel les P_n forment une base orthogonale et la norme est définie par :

$$\|T\|_{\mathcal{F}^s}^2 = \|(I - D)^s T\|_{L^2[-1, 1]}^2 = \sum |b_n|^2 (n(n + 1) + 1)^{2s}.$$

On peut prendre une norme équivalente plus simple :

$$\|T\|_{\mathcal{F}^s}^2 \propto \sum |b_n|^2 \cdot (n + 1)^{4s}.$$

\mathcal{F}^0 est évidemment confondu avec $L^2[-1, 1]$. $I - D$ définit un isomorphisme de \mathcal{F}^s sur \mathcal{F}^{s-1} ; si $s > s'$, \mathcal{F}^s est inclus dans $\mathcal{F}^{s'}$ avec une topologie plus fine et dense dans $\mathcal{F}^{s'}$.

Les espaces \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^{-s} sont duals l'un de l'autre.

Toute distribution de $\mathcal{D}'(\bar{\Omega})$, ayant des coefficients de Legendre à croissance lente, appartient à un espace \mathcal{F}^s . D'autre part, toute distribution à support compact appartient à un espace de Sobolev \mathcal{H}^s . Nous allons dans ce qui suit étudier les relations d'inclusion entre les \mathcal{F}^s et les \mathcal{H}^s .

Rappelons d'abord les définitions suivantes ([7], p. 51) :

On appelle $\mathcal{H}^s(\bar{\Omega})$ l'ensemble des distributions $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telles qu'il existe $U \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R})$ avec $U = u$ sur Ω .

On appelle $\mathring{\mathcal{H}}^s(\bar{\Omega})$ l'ensemble des distributions u appartenant à $\mathcal{H}^s(\mathbb{R})$ et dont le support est dans $\bar{\Omega}$.

$\mathcal{H}^s(\bar{\Omega})$ et $\mathring{\mathcal{H}}^{-s}(\bar{\Omega})$ sont duals l'un de l'autre.

Pour $s = 0$, $\mathcal{H}^0(\bar{\Omega}) = \mathring{\mathcal{H}}^0(\bar{\Omega}) = L^2[-1, 1]$.

PROPOSITION III. Pour tout s réel ≥ 0 , les inclusions algébriques et topologiques suivantes sont vérifiées :

$$(III.1) \quad \mathcal{F}^s \subset \mathcal{H}^s(\bar{\Omega}) \subset \mathcal{F}^{\frac{s}{2}};$$

si $\frac{s}{2} < t < s$, on n'a ni $\mathcal{F}^t \subset \mathcal{H}^s(\bar{\Omega})$, ni $\mathcal{H}^s(\bar{\Omega}) \subset \mathcal{F}^t$.

$$(III.2) \quad \mathcal{F}^{-\frac{s}{2}} \subset \mathring{\mathcal{H}}^{-s}(\bar{\Omega}) \subset \mathcal{F}^{-s};$$

si $\frac{s}{2} < t < s$, on n'a ni $\mathcal{F}^{-t} \subset \mathring{\mathcal{H}}^{-s}(\bar{\Omega})$, ni $\mathring{\mathcal{H}}^{-s}(\bar{\Omega}) \subset \mathcal{F}^{-t}$.

REMARQUES 1. Pour $s \geq 0$, un élément de \mathcal{F}^s est une fonction et peut être identifié à un élément de $\mathcal{D}'(\Omega)$; c'est dans ce sens que sont envisagées les inclusions de (III.1).

2. Ces inclusions donnent une propriété de régularité de l'opérateur $I - D$; ainsi, pour $s \geq 0$, si $(I - D)f$ appartient à $\mathcal{H}^s(\bar{\Omega})$, f appartient à $\mathcal{H}^{\frac{s}{2}+1}(\bar{\Omega})$.

8. Dérivées et primitives.

Si $T \in \mathcal{D}'(R)$ (en particulier, si $T \in \mathcal{D}'(\bar{\Omega})$), nous désignerons par $\frac{dT}{dx}$ la dérivée de T au sens de $\mathcal{D}'(R)$. Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\frac{d^*T}{dx}$ désigne la dérivée de T au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$; on sait que $\frac{d^*}{dx}$ est l'adjoint de $-\frac{d}{dx}$ dans la dualité entre les $\mathcal{H}^s(\bar{\Omega})$ et les $\mathring{\mathcal{H}}^{-s}(\bar{\Omega})$. On remarque d'autre part que si $u \in \mathcal{H}^s(\bar{\Omega})$, $s \geq 1$, on a $\frac{d^* \tilde{u}}{dx} = \frac{d \tilde{u}}{dx}$ si et seulement si $u(x) = 0$ pour $x = \pm 1$.

De la relation suivante, vérifiée par les polynômes usuels

$$(2n + 1)p_n = \frac{d}{dx} p_{n+1} - \frac{d}{dx} p_{n-1}$$

on tire, puisque $p_n(1) = 1$, $p_n(-1) = (-1)^n$ pour tout n ,

$$(2n + 1)\tilde{p}_n = \frac{d}{dx} (\tilde{p}_{n+1} - \tilde{p}_{n-1})$$

et

$$\tilde{P}_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \frac{d}{dx} \left(\frac{\tilde{P}_{n+1}}{\sqrt{2n+3}} - \frac{\tilde{P}_{n-1}}{\sqrt{2n-1}} \right);$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tilde{P}_n(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2n+1}} \left[\frac{\tilde{P}_{n+1}(x)}{\sqrt{2n+3}} - \frac{\tilde{P}_{n-1}(x)}{\sqrt{2n-1}} \right]$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tilde{P}_n(x) &= \frac{d}{dx} \left[-\frac{a_1}{\sqrt{3}} \tilde{P}_0(x) - \frac{a_2}{\sqrt{15}} \tilde{P}_1(x) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_{n-1}}{\sqrt{2n-1}} - \frac{a_{n+1}}{\sqrt{2n+3}} \right) \frac{\tilde{P}_n(x)}{\sqrt{2n+1}} \right]. \end{aligned}$$

Cette égalité montre que toute distribution de $\mathcal{D}'(\Omega)$, $T = \sum a_n \tilde{P}_n(x)$, telle que $\langle T, 1 \rangle = a_0 = 0$, admet une primitive, nécessairement unique, dans $\mathcal{D}'(\bar{\Omega})$. Si $\langle T, 1 \rangle \neq 0$; T n'a pas de primitive dans $\mathcal{D}'(\bar{\Omega})$, puisque la dérivée d'une distribution à support compact est orthogonale aux constantes.

REMARQUES I. Si $\sum a_n P_n(x)$ converge, pour $-1 < x < 1$, vers une fonction sommable f , il existe une infinité de fonctions F vérifiant

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) = \frac{d^*}{dx} F,$$

$$F = \frac{1}{2} [F(1) + F(-1)] - \frac{a_1 P_0}{\sqrt{3}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_{n-1}}{\sqrt{2n-1}} - \frac{a_{n+1}}{\sqrt{2n+3}} \right) \frac{P_n(x)}{\sqrt{2n+1}}$$

(cf. [10] vol II p. 311)

F est une « primitive de f dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ ».

II. La formule permettant d'obtenir la dérivée d'une série de Legendre donnée est moins simple.

9. Normes sur les espaces $\mathring{\mathcal{H}}^{-s}(\bar{\Omega})$ et $\mathcal{H}^s(\bar{\Omega})$ (s entier ≥ 0).

Etudions d'abord le cas de $\mathring{\mathcal{H}}^{-s}(\bar{\Omega})$ qui est le plus simple.

Si $T \in \mathcal{D}'(\bar{\Omega})$, nous pouvons écrire $T = a_0 \tilde{P}_0 + \sum_{n>0} a_n \tilde{P}_n$; d'après le paragraphe précédent, il existe $\mathcal{C} \in \mathcal{D}'(\bar{\Omega})$ tel que $\sum_{n>0} a_n \tilde{P}_n = \frac{d\mathcal{C}}{dx}$. D'autre

part, on sait (voir par exemple [11]) que la dérivation $\frac{d}{dx}$ établit un monomorphisme de $\mathcal{H}^m(\bar{\Omega})$ dans $\mathcal{H}^{m-1}(\bar{\Omega})$, donc $\frac{d\mathcal{C}}{dx} \in \mathcal{H}^m(\bar{\Omega}) \iff \mathcal{C} \in \mathcal{H}^{m-1}(\bar{\Omega})$. D'autre part $a_0 \tilde{P}_0$ appartient à $\mathcal{H}^0(\bar{\Omega})$, donc à tout $\mathcal{H}^{-s}(\bar{\Omega})$, $s \geq 0$. D'où le lemme suivant :

LEMME 1. Toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\bar{\Omega})$ peut s'écrire sous la forme $T = a_0 \tilde{P}_0 + \frac{d\mathcal{C}}{dx}$, $\mathcal{C} \in \mathcal{D}'(\bar{\Omega})$. Si $s \geq 0$, $a_0 \tilde{P}_0 + \frac{d\mathcal{C}}{dx} \in \mathcal{H}^{-s}(\bar{\Omega}) \iff \mathcal{C} \in \mathcal{H}^{-(s-1)}(\bar{\Omega})$.

On définit par récurrence, pour s entier ≥ 0 , une norme de T dans $\mathcal{H}^{-s}(\bar{\Omega})$ en posant

$$\left\| a_0 \tilde{P}_0 + \frac{d\mathcal{C}}{dx} \right\|_{\mathcal{H}^{-s}(\bar{\Omega})}^2 = |a_0|^2 + \|\mathcal{C}\|_{\mathcal{H}^{-(s-1)}(\bar{\Omega})}^2 ;$$

si $T \in \mathcal{H}^0(\bar{\Omega})$, $\|T\|_{\mathcal{H}^0(\bar{\Omega})} = \|T\|_{L^2}$.

On vérifie qu'on a bien ainsi défini une norme. Montrons par récurrence que cette norme est équivalente à la norme usuelle de $\mathcal{H}^{-s}(R)$, en supposant l'équivalence établie jusqu'à l'ordre $s - 1$. Dans l'hyperplan $\frac{d}{dx}(\mathcal{H}^{-(s-1)}(\bar{\Omega}))$ cette équivalence résulte du monomorphisme $\frac{d}{dx}$ de $\mathcal{H}^{-(s-1)}(\bar{\Omega})$ dans $\mathcal{H}^{-s}(\bar{\Omega})$ et de l'hypothèse de récurrence. Dans l'espace $\mathcal{H}^{-s}(\bar{\Omega})$, les topologies définies respectivement par la nouvelle norme et par la norme usuelle coïncident toutes deux avec la somme directe des topologies induites par $\mathcal{H}^{-s}(\bar{\Omega})$ sur $\frac{d}{dx}(\mathcal{H}^{-(s-1)}(\bar{\Omega}))$ et sur le sous espace engendré par \tilde{P}_0 . Les deux normes sont donc équivalentes.

Considérons maintenant une fonction $\varphi \in \mathcal{H}^s(\bar{\Omega})$, $s \geq 1$. Alors

$$\frac{d^* \varphi}{dx} \in \mathcal{H}^{s-1}(\bar{\Omega}) \subset \mathcal{H}^0(\bar{\Omega}) ;$$

$\frac{d^* \varphi}{dx}$ est une fonction L^2 , donc L^1 sur $(-1, 1)$, et par conséquent $\varphi(x)$ tend vers des limites finies $\varphi(1)$ et $\varphi(-1)$ quand x tend vers 1 ou -1 . Il existe donc deux constantes l et m telles que $\varphi = lP_0 + mP_1 + \varphi_1$, avec $\varphi_1(\pm 1) = 0$.

(comme $P_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $P_1 = x \sqrt{\frac{3}{2}}$ on a $l = \frac{\varphi(1) + \varphi(-1)}{\sqrt{2}}$ et $m = \frac{\varphi(1) - \varphi(-1)}{\sqrt{6}}$).

On obtient immédiatement le lemme suivant :

LEMME 2. Si $\varphi \in \mathcal{H}^s(\bar{\Omega})$, $s \geq 1$, il existe des constantes l et m telles que $\varphi = lP_0 + mP_1 + \varphi_1$, avec $\varphi_1(\pm 1) = 0$, et on a les relations d'appartenance

$$(9.1) \quad \varphi_1 \in \mathcal{H}^s(\bar{\Omega}); \frac{d^* \varphi}{dx} \in \mathcal{H}^{s-1}(\bar{\Omega}); \frac{d^* \varphi_1}{dx} \in \mathcal{H}^{s-1}(\bar{\Omega}); \frac{d \tilde{\varphi}_1}{dx} \in \mathcal{H}^{s-1}(\bar{\Omega}).$$

Réciproquement, si $\varphi = lP_0 + mP_1 + \varphi_1$, $\varphi_1(\pm 1) = 0$, et si une des quatre relations (9.1) est vérifiée, $\varphi \in \mathcal{H}^s(\bar{\Omega})$.

On définit, par récurrence pour s entier ≥ 0 , une norme sur $\mathcal{H}^s(\bar{\Omega})$ en posant

$$\|\varphi\|_{\mathcal{H}^0(\bar{\Omega})} = \|\varphi\|_{L^2};$$

si $\varphi = lP_0 + mP_1 + \varphi_1 \in \mathcal{H}^s(\bar{\Omega})$,

$$\|\varphi\|_{\mathcal{H}^s(\bar{\Omega})}^2 = |l|^2 + |m|^2 + \left\| \frac{d^* \varphi_1}{dx} \right\|_{\mathcal{H}^{s-1}(\bar{\Omega})}^2.$$

On vérifie facilement qu'on a bien défini une norme et on montre par récurrence que cette norme est équivalente à la norme usuelle sur $\mathcal{H}^s(\bar{\Omega})$. Il suffit pour cela de vérifier que

$$(9.2) \quad \|\varphi\|_{\mathcal{H}^s(\bar{\Omega})}^2 \asymp \|\varphi\|_{\mathcal{H}^{s-1}(\bar{\Omega})}^2 + \left\| \frac{d^* \varphi}{dx} \right\|_{\mathcal{H}^{s-1}(\bar{\Omega})}^2.$$

En effet la norme usuelle vérifie une équivalence analogue; si nous supposons l'équivalence entre la nouvelle norme et la norme usuelle établie jusqu'à l'ordre $s-1$, elle sera alors établie à l'ordre s .

Soit donc $\varphi = lP_0 + mP_1 + \varphi_1$.

$$(9.3) \quad \frac{d^* \varphi}{dx} = \sqrt{3} m P_0 + \frac{d^* \varphi_1}{dx}.$$

Pour vérifier la relation (9.2) il suffit de vérifier

$$|l|^2 + |m|^2 + \left\| \frac{d^* \varphi_1}{dx} \right\|_{\mathcal{H}^{s-1}(\bar{\Omega})}^2 \asymp \|\varphi\|_{\mathcal{H}^{s-1}(\bar{\Omega})}^2 + \left\| \frac{d^* \varphi}{dx} \right\|_{\mathcal{H}^{s-1}(\bar{\Omega})}^2.$$

Si $\varphi \in \mathcal{H}^s(\bar{\Omega})$, $s \geq 1$, des relations

$$\int_{-1}^1 \varphi dx = [x\varphi]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 x\varphi' dx \quad \text{et} \quad \int_{-1}^1 2x\varphi dx = [x^2\varphi]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 x^2\varphi' dx$$

on tire

$$|\varphi(1) + \varphi(-1)|^2 \leq K_1 \left(\|\varphi\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{d^* \varphi}{dx} \right\|_{L^2}^2 \right)$$

$$|\varphi(1) - \varphi(-1)|^2 \leq K_2 \left(\|\varphi\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{d^* \varphi}{dx} \right\|_{L^2}^2 \right).$$

D'où, vu les expressions de l et de m , (§ 9), $|l|^2$ et $|m|^2$ sont majorées, à un facteur constant près, par le second membre de (9.2).

De (9.3) et de la majoration de $|m|^2$, on déduit que $\left\| \frac{d^* \varphi_1}{dx} \right\|_{\mathcal{G}^{s-1}(\bar{\Omega})}^2$ (et, par conséquent, le premier membre de (9.2)) est majoré, à un facteur constant près, par le second. On voit également d'après (9.3) que $\left\| \frac{d^* \varphi}{dx} \right\|_{\mathcal{G}^{s-1}(\bar{\Omega})}^2$ est majoré, à un facteur constant près, par le premier membre. D'autre part

$$\|\varphi\|_{\mathcal{G}^{s-1}(\bar{\Omega})}^2 \leq K_3 (\|\varphi_1\|_{\mathcal{G}^{s-1}(\bar{\Omega})}^2 + |l|^2 + |m|^2)$$

et

$$\|\varphi_1\|_{\mathcal{G}^{s-1}(\bar{\Omega})}^2 \leq \left\| \frac{d \tilde{\varphi}_1}{dx} \right\|_{\mathcal{G}^{s-1}(\bar{\Omega})}^2 = \left\| \frac{d^* \varphi_1}{dx} \right\|_{\mathcal{G}^{s-1}(\bar{\Omega})}^2,$$

φ_1 ayant un support compact. D'où le second membre est majoré, à un facteur constant près, par le premier et l'équivalence est démontrée.

10. Dérivation dans les espaces \mathcal{G}^s .

LEMME 3. Si $T \in \mathcal{D}'(\bar{\Omega})$, $\frac{dT}{dx} \in \mathcal{G}^s \implies T \in \mathcal{G}^{s+\frac{1}{2}}$, pour tout s réel.

En effet, soit $\frac{dT}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tilde{P}_n(x)$, $T = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \tilde{P}_n(x)$; nous avons vu que

$$T = -\frac{a_1}{\sqrt{3}} \tilde{P}_0(x) - \frac{a_2}{\sqrt{15}} \tilde{P}_1(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_{n-1}}{\sqrt{2n-1}} - \frac{a_{n+1}}{\sqrt{2n+3}} \right) \frac{\tilde{P}_n(x)}{\sqrt{2n+1}};$$

$$T \in \mathcal{G}^{s+\frac{1}{2}} \iff \sum |b_n|^2 n^{4s+2} < +\infty$$

et $\|T\|_{\mathcal{G}^{s+\frac{1}{2}}}^2 \infty \sum |b_n|^2 (n+1)^{4s+2}$.

Or, pour $n > 1$,

$$|b_n|^2 (n+1)^{4s+2} = \left| \frac{a_{n-1}}{\sqrt{2n-1}} - \frac{a_{n+1}}{\sqrt{2n+3}} \right|^2 \frac{(n+1)^{4s+2}}{2n+1}$$

$$\leq 2 \left(\frac{|a_{n-1}|^2}{2n-1} + \frac{|a_{n+1}|^2}{2n+3} \right) (n+1)^{4s+1};$$

On en déduit qu'il existe une constante K , indépendante de T , telle

$$\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 (n+1)^{4s+2} \leq K^2 \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^2| (n+1)^{4s}.$$

D'où, si la série $\sum |a_n|^2 (n+1)^{4s}$ converge, c'est à dire si $\frac{dT}{dx} \in \mathcal{F}^s$, alors la série $\sum |b_n|^2 (n+1)^{4s+2}$ converge, autrement dit $T \in \mathcal{F}^{s+\frac{1}{2}}$ et

$$\|T\|_{\mathcal{F}^{s+\frac{1}{2}}} < K \left\| \frac{dT}{dx} \right\|_{\mathcal{F}^s}.$$

COROLLAIRE. Si $s \geq 0$, $\frac{d^* \varphi}{dx} \in \mathcal{F}^s \implies \varphi \in \mathcal{F}^{s+\frac{1}{2}}$.

En effet, d'après ce que nous avons vu § 9 si $\frac{d^* \varphi}{dx} \in \mathcal{F}^s$, $s \geq 0$, alors $\frac{d^* \varphi}{dx} \in L^2(-1, 1)$, et nous pouvons écrire $\varphi = lP_0 + mP_1 + \varphi_1$, ($\varphi_1(\pm 1) = 0$), et $\frac{d^* \varphi}{dx} = \sqrt{3} mP_0 + \frac{d^* \varphi_1}{dx}$; or $\frac{d^* \varphi}{dx} \in \mathcal{F}^s \iff \frac{d^* \varphi_1}{dx} \in \mathcal{F}^s \iff \frac{\tilde{d} \varphi_1}{dx} \in \mathcal{F}^s \implies \varphi_1 \in \mathcal{F}^{s+\frac{1}{2}} \implies \varphi \in \mathcal{F}^{s+\frac{1}{2}}$.

LEMME 4.

4.1. $\text{Si } s \geq 1, \varphi \in \mathcal{F}^s \rightarrow \frac{d^* \varphi}{dx} \in \mathcal{F}^{s-1}.$

4.2. $\text{Si } s \geq 0, T \in \mathcal{F}^{-s} \implies \frac{dT}{dx} \in \mathcal{F}^{-s-1}.$

Etudions d'abord 4.1.

Pour la commodité des calculs, nous considérons φ comme la somme d'une série à termes de rangs pairs et d'une série à termes de rangs impairs, qu'on étudiera séparément.

En employant des notations analogues à celle du lemme 3, considérons la fonction paire

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n} P_{2n} = -\frac{a_1}{\sqrt{3}} P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_{2n-1}}{\sqrt{4n-1}} - \frac{a_{2n+1}}{\sqrt{4n+3}} \right) \frac{P_{2n}}{\sqrt{4n+1}}.$$

Alors, si $\varphi \in \mathcal{F}^s$, la série $\sum \left| \frac{a_{2n-1}}{\sqrt{4n-1}} - \frac{a_{2n+1}}{\sqrt{4n+3}} \right|^2 n^{4s-1}$ est convergente, et

il existe K tel que $\left| \frac{a_{2n-1}}{\sqrt{4n-1}} - \frac{a_{2n+1}}{\sqrt{4n+3}} \right| < \frac{K}{n^{2s-\frac{1}{2}}}$; comme $s \geq 1$, la série de terme général $\left(\frac{a_{2n-1}}{\sqrt{4n-1}} - \frac{a_{2n+1}}{\sqrt{4n+3}} \right)$ est absolument convergente, et la série $\sum b_{2n} P_{2n}(x)$ est uniformément convergente sur $[-1, 1]$, donc $\sum_{n=0}^N \sqrt{2} b_{2n} P_{2n}(1) = -\frac{a_{2N+1}}{\sqrt{4N+3}}$ tend vers la limite finie $l = \sqrt{2} \varphi(1)$ quand $N \rightarrow \infty$.

Posons $\varphi = l P_0 + \varphi_1$; alors $\varphi_1(1) = \varphi_1(-1) = 0$ (φ_1 étant une fonction paire comme φ); φ_1 appartient aussi à \mathcal{F}^s . Alors, si $\varphi_1 = \sum \beta_{2n} P_{2n} = \frac{-\alpha_1}{\sqrt{3}} P_0 + \sum_{n>0} \left(\frac{\alpha_{2n-1}}{\sqrt{4n-1}} - \frac{\alpha_{2n+1}}{\sqrt{4n+3}} \right) \frac{P_{2n}}{\sqrt{4n+1}}$, en raisonnant comme pour φ nous voyons que $\frac{-\alpha_{2n+1}}{\sqrt{4n+3}}$ tend vers $\sqrt{2} \varphi_1(1) = 0$.

D'autre part :

$$\frac{\alpha_{2n-1}}{\sqrt{4n-1}} - \frac{\alpha_{2n+1}}{\sqrt{4n+3}} = \beta_{2n} \sqrt{4n+1},$$

d'où

$$\frac{\alpha_{2n-1}}{\sqrt{4n-1}} - \frac{\alpha_{2n+2p+1}}{\sqrt{4n+4p+3}} = \sum_{k=0}^p \beta_{2(n+k)} \sqrt{4(n+k)+1},$$

D'après l'inégalité de Schwarz,

$$\left| \frac{\alpha_{2n-1}}{\sqrt{4n-1}} - \frac{\alpha_{2n+2p+1}}{\sqrt{4n+4p+3}} \right|^2 \leq \left(\sum_{k=0}^p |\beta_{2(n+k)}|^2 (4(n+k)+1)^{4s-1} \right) \left(\sum_{k=0}^p (4(n+k)+1)^{-4s+2} \right).$$

Or

$$\sum_{k=0}^p (4(n+k)+1)^{-4s+2} < \frac{1}{4s-3} (4n)^{-4s+3};$$

Faisons tendre p vers l'infini, nous obtenons

$$\left| \frac{\alpha_{2n-1}}{\sqrt{4n-1}} \right|^2 \leq \frac{1}{4s-3} (4n)^{-4s+3} \sum_{k=0}^{\infty} |\beta_{2(n+k)}|^2 (4(n+k)+1)^{4s-1}$$

la série de droite étant convergente, puisque $\varphi_1 \in \mathcal{F}^s$. D'où, en additionnant toutes les inégalités obtenues quand n varie de 1 à l'infini

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\alpha_{2n-1}}{\sqrt{4n-1}} \right|^2 (4n)^{4s-3} \leq \frac{1}{4s-3} \sum_{n=1}^{\infty} n |\beta_{2n}|^2 (4n+1)^{4s-1}.$$

La série de droite converge, puisque $\varphi_1 \in \mathcal{G}^s$, donc celle de gauche aussi, et il existe une constante K telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{2n-1}|^2 (4n)^{4s-4} \leq K \sum_{n=1}^{\infty} |\beta_{2n}|^2 (4n+1)^{4s}.$$

Cette inégalité montre que $\varphi_1 \in \mathcal{G}^s \rightarrow \frac{d\tilde{\varphi}_1}{dx} \in \mathcal{G}^{s-1}$, et que $\left\| \frac{d\tilde{\varphi}_1}{dx} \right\|_{\mathcal{G}^{s-1}}^2 \leq K \|\varphi_1\|_{\mathcal{G}^s}^2$. Comme $\frac{d\tilde{\varphi}_1}{dx} = \frac{d^*\tilde{\varphi}_1}{dx}$, et comme

$$\frac{d^*\tilde{\varphi}_1}{dx} \in \mathcal{G}^{s-1} \iff \frac{d^*\varphi}{dx} \in \mathcal{G}^{s-1}$$

il en résulte que $\varphi \in \mathcal{G}^s \implies \frac{d^*\varphi}{dx} \in \mathcal{G}^{s-1}$.

Si φ est une fonction impaire de la forme $\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} P_{2n-1}$, avec des notations et calculs analogues nous montrerons que $\sum b_{2n-1} P_{2n-1}(1)$ tend vers la limite finie $\sqrt{\frac{3}{2}} m = \varphi(1)$, et que si nous posons $\varphi = mP_1 + \varphi_1$, φ_1 a des propriétés analogues à celles que nous avons vues dans l'étude des fonctions paires. Il en résulte que, dans le cas général, pour $\varphi \in \mathcal{G}^s$, $s \geq 1$, on a

$$\varphi = lP + mP + \varphi_1, \varphi_1(\pm 1) = 0;$$

$$(10.1) \quad \varphi_1 \in \mathcal{G}^s; \quad \frac{d\tilde{\varphi}_1}{dx} = \frac{d^*\tilde{\varphi}_1}{dx} \in \mathcal{G}^{s-1}; \quad \left\| \frac{d\tilde{\varphi}_1}{dx} \right\|_{\mathcal{G}^{s-1}}^2 \leq K \|\varphi_1\|_{\mathcal{G}^s}^2.$$

$$l = \sum \sqrt{2} b_{2n} P_{2n}(1) = \sum b_{2n} (4n+1)^{1/2};$$

$$|l|^2 \leq (\sum |b_{2n}|^2 (4n+1)^{4s}) (\sum (4n+1)^{-4s+1}) \leq K_1 \|\varphi\|_{\mathcal{G}^s}^2.$$

De même,

$$|m^2| \leq K_2 \|\varphi\|_{\mathcal{G}^s}^2,$$

d'où, puisque $\varphi_1 = \varphi - lP_0 - mP_1$,

$$\|\varphi_1\|_{\mathcal{G}^s}^2 \leq K' (\|\varphi\|_{\mathcal{G}^s}^2 + |l|^2 + |m^2|) \leq K_3 \|\varphi\|_{\mathcal{G}^s}^2$$

done

$$\|\varphi_1\|_{\mathcal{G}^s}^2 + |l|^2 + |m^2| \leq K_4 \|\varphi\|_{\mathcal{G}^s}^2.$$

Par ailleurs $\|\varphi\|_{\mathcal{G}^s}^2 = \|lP_0 + mP_1 + \varphi_1\|_{\mathcal{G}^s}^2 \leq K_5(|l|^2 + |m|^2 + \|\varphi_1\|_{\mathcal{G}^s}^2)$,

$$(10.2) \quad \text{donc} \quad \|\varphi\|_{\mathcal{G}^s}^2 \infty \|\varphi_1\|_{\mathcal{G}^s}^2 + |l|^2 + |m|^2.$$

Rappelons que $\frac{d^* \varphi}{dx} = \sqrt{3}m P_0 + \frac{d^* \varphi_1}{dx} = \sqrt{3}m P_0 + \frac{d\tilde{\varphi}_1}{dx}$. Donc $\left\| \frac{d^* \varphi}{dx} \right\|_{\mathcal{G}^{s-1}}^2 = 3|m^2| + \left\| \frac{d\tilde{\varphi}_1}{dx} \right\|_{\mathcal{G}^{s-1}}^2$. Il résulte alors des formules (10.1) et (10.2) que

$$\left\| \frac{d^* \varphi}{dx} \right\|_{\mathcal{G}^{s-1}}^2 \leq C \|\varphi\|_{\mathcal{G}^s}^2.$$

LEMME 4.2. Montrons que pour $s \geq 0$, $T \in \mathcal{G}^{-s} \implies \frac{dT}{dx} \in \mathcal{G}^{-s-1}$.

En employant des notations analogues à celles du lemme 3 nous posons :

$$T = \sum b_n \tilde{P}_n, \quad \frac{dT}{dx} = \sum_{n>0} a_n \tilde{P}_n,$$

et nous avons

$$T = \frac{-a_1}{\sqrt{3}} \tilde{P}_0 - \frac{a_2}{\sqrt{15}} \tilde{P}_1 + \sum_{n>1} \left(\frac{a_{n-1}}{\sqrt{2n-1}} - \frac{a_{n+1}}{\sqrt{2n+3}} \right) \frac{\tilde{P}_n}{\sqrt{2n+1}}.$$

Là également, nous étudierons séparément les distributions paires et les distributions impaires.

Si

$$T = \sum b_{2n} \tilde{P}_{2n}, \quad b_0 = -\frac{a_1}{\sqrt{3}}, \quad b_{2n} = \left(\frac{a_{2n-1}}{\sqrt{4n-1}} - \frac{a_{2n+1}}{\sqrt{4n+3}} \right) \frac{1}{\sqrt{4n+1}},$$

nous avons

$$-\frac{a_{2n}+1}{\sqrt{4n+3}} = \sum_{p=0}^n b_{2p} \sqrt{4p+1}.$$

Posons $b_{2p} = p^{2s} C_p$; d'où $T \in \mathcal{G}^{-s} \iff \sum |C_p|^2 < +\infty$, et

$$\left| \frac{a_{2n+1}}{\sqrt{4n+3}} \right|^2 = \left| \sum_{p=0}^n b_{2p} \sqrt{4p+1} \right|^2 < k_1 \left| \sum_{p=1}^n p^{2s+1/2} C_p \right|^2 \leq K_1 \sum_{p=1}^n p^{4s} \sum_{p=1}^n p |C_p|^2$$

d'après l'inégalité de Schwarz.

Or, si $s \geq 0$,

$$\sum_{p=1}^n p^{4s} \leq (n+1)^{4s+1}$$

d'où

$$|a_{2n+1}|^2 (n+1)^{-4s-2} \leq K_2 \sum_{p=1}^n p |C_p|^2,$$

et

$$|a_{2n+1}|^2 (n+1)^{-4s-4} \leq K_3 \frac{\sum_{p=1}^n p |C_p|^2}{n(n+1)}.$$

Un calcul classique montre que, si $U_n > 0$ est le terme général d'une série convergente, la série de terme général $\frac{\sum_{p=1}^n p U_p}{n(n+1)}$ converge et a pour somme $\sum U_n$, d'où :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{2n+1}|^2 (n+1)^{-4s-4} \leq K_3 \sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2,$$

et $T \in \mathcal{F}^{-s} \implies \frac{dT}{dx} \in \mathcal{F}^{-s-1}$; et $\left\| \frac{dT}{dx} \right\|_{\mathcal{F}^{-s-1}} \leq C \|T\|_{\mathcal{F}^{-s}}$.

On obtiendrait un résultat analogue pour une distribution impaire, donc pour une distribution quelconque.

11. Démonstration de la proposition III.

Montrons d'abord que pour s entier ≥ 0 les inclusions algébriques et topologiques suivantes sont vérifiées

$$\mathcal{F}^s \subset \mathcal{H}^s(\bar{\Omega}) \subset \mathcal{F}^{s/2} \quad (\text{proposition III. 1}).$$

On le montre par récurrence; pour $s = 0$ la propriété est évidente parce que $\mathcal{F}^0 = \mathcal{H}^0(\bar{\Omega}) = L^2[-1, 1]$. Supposons la propriété vérifiée jusqu'à l'indice $s - 1$, $s \geq 1$.

Soit $\varphi \in \mathcal{F}^s$, $s \geq 1$. Alors $\frac{d^* \varphi}{dx} \in \mathcal{F}^{s-1}$ (lemme 4) d'où $\frac{d^* \varphi}{dx} \in \mathcal{H}^{s-1}(\bar{\Omega})$ (hypothèse de récurrence), donc $\varphi \in \mathcal{H}^s$ (lemme 2). On a montré que $\mathcal{F}^s \subset \mathcal{H}^s(\bar{\Omega})$ algébriquement. Soit maintenant $\psi \in \mathcal{H}^s(\bar{\Omega})$; alors $\frac{d^* \psi}{dx} \in \mathcal{H}^{s-1}(\bar{\Omega})$ (lemme 2),

d'où $\frac{d^* \psi}{dx} \in \mathcal{G}^{\frac{s-1}{2}}$ (hypothèse de récurrence); donc $\psi \in \mathcal{G}^s$ (corollaire du lemme 3).

Donc $\mathcal{H}^s(\bar{\Omega}) \subset \mathcal{G}^{\frac{s}{2}}$ algébriquement.

Montrons maintenant les inclusions topologiques; pour $s \geq 1$, on peut écrire $\varphi = l P_0 + m P_1 + \varphi_1$, $\varphi_1(\pm 1) = 0$. Nous avons (lemme 2)

$$\|\varphi\|_{\mathcal{H}^s(\bar{\Omega})}^2 = |l|^2 + |m|^2 + \left\| \frac{d^* \varphi_1}{dx} \right\|_{\mathcal{H}^{s-1}(\bar{\Omega})}^2.$$

D'après l'hypothèse de récurrence $\left\| \frac{d^* \varphi_1}{dx} \right\|_{\mathcal{H}^{s-1}(\bar{\Omega})}^2 \leq C \left\| \frac{d^* \varphi_1}{dx} \right\|_{\mathcal{G}^{s-1}}^2$; et d'après le lemme 4 $\left\| \frac{d^* \varphi_1}{dx} \right\|_{\mathcal{G}^{s-1}}^2 \leq C_1 \|\varphi_1\|_{\mathcal{G}^s}^2$; donc

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{\mathcal{H}^s(\bar{\Omega})}^2 &= |l|^2 + |m|^2 + \left\| \frac{d^* \varphi_1}{dx} \right\|_{\mathcal{H}^{s-1}(\bar{\Omega})}^2 \leq |l|^2 + |m|^2 + C \left\| \frac{d^* \varphi_1}{dx} \right\|_{\mathcal{G}^{s-1}}^2 \\ &\leq |l|^2 + |m|^2 + C C_1 \|\varphi_1\|_{\mathcal{G}^s}^2 \leq C_2 \|\varphi\|_{\mathcal{G}^s}^2 \end{aligned}$$

(lemme 4 1), d'où l'inclusion topologique $\mathcal{G}^s \subset \mathcal{H}^s(\bar{\Omega})$.

Soit maintenant $\psi \in \mathcal{H}^s(\bar{\Omega})$, $s \geq 1$, $\psi = \lambda P_0 + \mu P_1 + \psi_1$, $\psi_1(\pm 1) = 0$.

Nous avons vu que $\psi \in \mathcal{G}^{s/2}$ et que nous pouvons prendre pour norme dans $\mathcal{G}^{s/2}$ (voir 10.2)

$$\|\psi\|_{\mathcal{G}^{s/2}}^2 = |\lambda|^2 + |\mu|^2 + \|\psi_1\|_{\mathcal{G}^{s/2}}^2.$$

On a vu (lemme 3) que $\|\tilde{\psi}_1\|_{\mathcal{G}^{s/2}}^2 \leq K \left\| \frac{d \tilde{\psi}_1}{dx} \right\|_{\mathcal{G}^{\frac{s-1}{2}}}^2$; d'après l'hypothèse de récurrence $\left\| \frac{d \tilde{\psi}_1}{dx} \right\|_{\mathcal{G}^{\frac{s-1}{2}}}^2 \leq K_1 \left\| \frac{d \tilde{\psi}_1}{dx} \right\|_{\mathcal{H}^{s-1}(\bar{\Omega})}^2$; d'où

$$\|\psi\|_{\mathcal{G}^{s/2}}^2 \leq |\lambda|^2 + |\mu|^2 + K K_1 \left\| \frac{d \tilde{\psi}_1}{dx} \right\|_{\mathcal{H}^{s-1}(\bar{\Omega})}^2 \leq K_2 \|\psi\|_{\mathcal{H}^s(\bar{\Omega})}^2;$$

d'où l'inclusion topologique $\mathcal{H}^s(\bar{\Omega}) \subset \mathcal{G}^{s/2}$.

12. Cas où s n'est pas un entier.

Si s est un entier ≥ 1 , nous avons vu que \mathcal{G}^s est un espace de Hilbert contenu dans \mathcal{G}^{s-1} , algébriquement et topologiquement et dense dans

\mathcal{G}^{s-1} ; de même $\mathcal{H}^s(\bar{\Omega})$ est un espace de Hilbert contenu dans $\mathcal{H}^{s-1}(\bar{\Omega})$, algébriquement et topologiquement, et dense dans $\mathcal{H}^{s-1}(\bar{\Omega})$. D'autre part, il existe une injection continue de \mathcal{G}^{s-1} dans $\mathcal{H}^{s-1}(\bar{\Omega})$ (proposition III) dont la restriction à \mathcal{G}^s est une injection continue dans $\mathcal{H}^s(\bar{\Omega})$.

Il résulte alors de la définition des espaces $\mathcal{H}^s(\bar{\Omega})$, \mathcal{G}^s et du *théorème d'interpolation de Lions* [8], que pour tout s' tel que $s - 1 < s' < s$, il existe une injection continue de $\mathcal{G}^{s'}$ dans $\mathcal{H}^{s'}(\bar{\Omega})$; donc $\mathcal{G}^{s'} \subset \mathcal{H}^{s'}(\bar{\Omega})$. On montrera de même que $\mathcal{H}^{s'}(\bar{\Omega}) \subset \mathcal{G}^{\frac{s'}{2}}$.

Donc pour tout s réel ≥ 0 , les inclusions algébriques et topologiques suivantes sont vérifiées

$$\mathcal{G}^s \subset \mathcal{H}^s(\bar{\Omega}) \subset \mathcal{G}^{\frac{s}{2}}.$$

13. Montrons qu'il est impossible d'« améliorer » ces inclusions, c'est à dire que pour $\frac{s}{2} < t < s$, on n'a ni $\mathcal{G}^t \subset \mathcal{H}^s$, ni $\mathcal{H}^s \subset \mathcal{G}^t$.

En vertu du théorème d'interpolation, il suffit de montrer que pour $\frac{1}{2} < t < 1$, on n'a ni $\mathcal{G}^t \subset \mathcal{H}^1$, ni $\mathcal{H}^1 \subset \mathcal{G}^t$. En effet, s'il existait s', t' , vérifiant $\frac{s'}{2} < t' < s'$, et tels que $\mathcal{G}^{t'} \subset \mathcal{H}^{s'}$ (resp $\mathcal{H}^{s'} \subset \mathcal{G}^{t'}$), par application du théorème d'interpolation nous aurions $\mathcal{G}^{\frac{t'}{2}} \subset \mathcal{H}^1$ (resp $\mathcal{H}^1(\bar{\Omega}) \subset \mathcal{G}^{\frac{t'}{2}}$).

Il suffit donc de montrer que pour tout t tel que $\frac{1}{2} < t < 1$, il existe $\varphi \in \mathcal{G}^t$ tel que $\varphi \notin \mathcal{H}^1(\bar{\Omega})$, et il existe $\psi \in \mathcal{H}^1(\bar{\Omega})$ tel que $\psi \notin \mathcal{G}^t$; α étant un nombre *négatif*, nous définissons φ de la façon suivante.

Soit $\frac{a_{2n+1}}{\sqrt{4n+3}} = (n+1)^\alpha$, $\frac{-a_1}{\sqrt{3}} = b_0$, $\frac{a_{2n+1}}{\sqrt{4n-1}} - \frac{a_{2n+1}}{\sqrt{4n+3}} = b_{2n}\sqrt{4n+1}$, ($n > 0$), $\varphi(x) = \sum b_{2n} P_{2n}(x)$.

La série $\sum_{n=0}^\infty b_{2n}\sqrt{4n+1}$ est absolument convergente, car $b_{2n}\sqrt{4n+1} \infty \alpha n^{\alpha-1}$; d'autre part $\sum_{p=0}^n b_{2p}\sqrt{4p+1} = \frac{-a_{2n+1}}{\sqrt{4n+3}}$, et $\frac{-a_{2n+1}}{\sqrt{4n+3}}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Donc $\sum_{n=0}^\infty b_{2n}\sqrt{4n+1} = \sqrt{2} \sum_{n=1}^\infty b_{2n} P_{2n}(1) = \sqrt{2}\varphi(1) = 0$.

De même φ étant paire, $\varphi(-1) = 0$ et par conséquent

$\frac{d^* \tilde{\varphi}}{dx} = \frac{d \tilde{\varphi}}{dx} = \sum_{n=0}^\infty a_{2n+1} \tilde{P}_{2n+1}(x)$. Comme $b_{2n}^2 n^{4t} \infty \frac{\alpha^2}{4} n^{2\alpha+4t-3}$, $\varphi \in \mathcal{G}^t \iff \iff \sum n^{2\alpha+4t-3} < + \infty \iff \alpha < 1 - 2t$; d'autre part $\varphi \in \mathcal{H}^1(\bar{\Omega}) \iff$

$\Leftrightarrow \frac{d^* \varphi}{dx} \in \mathcal{H}^0(\bar{\Omega}) \Leftrightarrow \sum |a_n|^2 < +\infty \Leftrightarrow \sum_n^{2\alpha+1} < +\infty \Leftrightarrow \alpha < -1$;
 si $-1 \leq \alpha < 1 - 2t < 0$, (un tel α existe si $\frac{1}{2} < t < 1$), alors $\varphi \in \mathcal{J}^t$ et
 $\varphi \notin \mathcal{H}^1(\bar{\Omega})$.

Posons maintenant

$$\frac{a_{2n+1}}{\sqrt{4n+3}} = (-1)^n (n+1)^\beta; \quad \frac{a_1}{\sqrt{3}} = b_0; \quad \frac{a_{2n-1}}{\sqrt{4n-1}} - \frac{a_{2n+1}}{\sqrt{4n+3}} = b_{2n} \sqrt{4n+1}$$

pour $n > 0$.

Soit $\psi = \sum b_{2n} P_{2n}(x)$; nous avons $|b_{2n}| \asymp n^{\beta - \frac{1}{2}}$, $|a_{2n+1}| \asymp 2n^{\beta + \frac{1}{2}}$.

Si $\sum |a_{2n+1}|^2 < +\infty$, c'est-à-dire si $\beta < -1$, alors $\frac{d^* \psi}{dx} \in \mathcal{H}^0(\bar{\Omega})$,
 donc $\psi \in \mathcal{H}^1(\bar{\Omega})$. D'autre part $\psi \in \mathcal{J}^t(\bar{\Omega}) \Leftrightarrow \sum |b_{2n}^2| n^{4t} < +\infty \Leftrightarrow$
 $2\beta - 1 + 4t < -1 \Leftrightarrow \beta < -2t$. Donc si on choisit β tel que
 $-2t \leq \beta < -1$, ce qui est possible si $t > \frac{1}{2}$, on trouve ψ tel que
 $\psi \in \mathcal{H}^1(\bar{\Omega})$ et $\psi \notin \mathcal{J}^t$.

14. PROPOSITION III.2. La proposition III.2 peut se déduire de III.1. par dualité; on peut d'autre part la démontrer directement par récurrence pour s entier ≥ 0 .

Pour $s = 0$, la proposition est évidente. Supposons la vraie jusqu'à l'indice $s - 1$. Soit $T \in \mathcal{J}^{-\frac{s}{2}}$, alors $T = a_0 \tilde{P}_0 + \frac{d\mathcal{C}}{dx}$ avec $\frac{d\mathcal{C}}{dx} \in \mathcal{J}^{-\frac{s}{2}}$; donc $\mathcal{C} \in \mathcal{J}^{-\frac{(s-1)}{2}}$ (lemme 3). D'après l'hypothèse de récurrence $\mathcal{C} \in \mathring{\mathcal{H}}^{-(s-1)}(\bar{\Omega})$; donc $T = a_0 P_0 + \frac{d\mathcal{C}}{dx} \in \mathring{\mathcal{H}}^{-s}(\bar{\Omega})$ (lemme 1). Nous avons donc montré que $\mathcal{J}^{-\frac{s}{2}} \subset \mathring{\mathcal{H}}^{-s}(\bar{\Omega})$ algébriquement. Soit maintenant $T \in \mathring{\mathcal{H}}^s(\bar{\Omega})$; alors $T = a_0 \tilde{P}_0 + \frac{d\mathcal{C}}{dx}$, avec $\mathcal{C} \in \mathring{\mathcal{H}}^{-(s-1)}(\bar{\Omega})$ (lemme 1); donc $\mathcal{C} \in \mathcal{J}^{-(s-1)}$ (hypothèse de récurrence) et $\frac{d\mathcal{C}}{dx} \in \mathcal{J}^{-s}$ (lemme 4.2); donc $T \in \mathcal{J}^{-s}$, et $\mathring{\mathcal{H}}^{-s}(\bar{\Omega}) \subset \mathcal{J}^{-s}$ algébriquement.

Montrons les inclusions topologiques :

Soit $T = a_0 \tilde{P}_0 + \frac{d\mathcal{C}}{dx}$; alors d'après le lemme 4

$$\left\| \frac{d\mathcal{C}}{dx} \right\|_{\mathcal{J}^{-s}}^2 \leq C_1 \|\mathcal{C}\|_{\mathcal{J}^{-(s-1)}}^2;$$

D'après l'hypothèse de récurrence

$$\| \mathcal{T} \|_{\mathcal{G}^{-(s-1)}}^2 \leq C_2 \| \mathcal{T} \|_{\mathcal{Q}_\ell^{-(s-1)}(\bar{\Omega})}^2 \leq C_3 \| \mathcal{T} \|_{\mathcal{G}^{-\frac{s-1}{2}}}^2;$$

Et, d'après le lemme 3,

$$\| \mathcal{T} \|_{\mathcal{G}^{-\frac{(s-1)}{2}}}^2 \leq C_4 \left\| \frac{d\mathcal{T}}{dx} \right\|_{\mathcal{G}^{-\frac{s}{2}}}^2.$$

D'autre part, $\| T \|_{\mathcal{G}^{-s}}^2 = |a_0|^2 + \left\| \frac{dT}{dx} \right\|_{\mathcal{G}^{-s}}^2$ et

$$\| T \|_{\mathcal{Q}_\ell^{-s}(\bar{\Omega})}^2 \asymp |a_0|^2 + \| \mathcal{T} \|_{\mathcal{Q}_\ell^{-(s-1)}(\bar{\Omega})}^2;$$

il résulte alors des inégalités précédentes que

$$\| T \|_{\mathcal{G}^{-s}}^2 \leq K_1 \| T \|_{\mathcal{Q}_\ell^{-s}(\bar{\Omega})}^2 \leq K_2 \| T \|_{\mathcal{G}^{-\frac{s}{2}}}^2.$$

Pour s non entier, la proposition III.2 se démontre comme la proposition III.1.

15. Pour montrer que les inclusions de III.2 ne peuvent pas être améliorées, on peut soit raisonner par dualité à partir de III.1, soit trouver directement des contre-exemples montrant que pour $\frac{s}{2} < t < s$, on n'a ni $\mathcal{G}^{-t} \subset \mathcal{Q}_\ell^{-s}(\bar{\Omega})$, ni $\mathcal{Q}_\ell^{-s}(\bar{\Omega}) \subset \mathcal{G}^{-t}$.

Comme pour III.1, il suffit, en vertu du théorème d'interpolation, de le montrer pour $s = 1$. Alors, en posant $T = \sum a_{2n+1} \tilde{P}_{2n+1}(x)$,

$$\frac{a_{2n+1}}{\sqrt{4n+3}} = (n+1)^\alpha, \quad \frac{-a_1}{\sqrt{3}} = b_0, \quad \sqrt{4n+1} b_{2n} = \frac{a_{2n+1}}{\sqrt{4n+3}} - \frac{a_{2n-1}}{\sqrt{4n-1}}$$

pour $n > 0$, d'où $\sqrt{4n+1} b_{2n} \asymp \alpha n^{\alpha-1}$; nous avons

$$T \in \mathcal{G}^{-t} \iff \sum |a_{2n+1}|^2 n^{-4t} < +\infty \iff 2\alpha + 1 - 4t < -1 \iff \alpha < 2t - 1;$$

d'autre part $T \in \mathcal{Q}_\ell^{-1}(\bar{\Omega})$ si T est la dérivée d'une fonction de $\mathcal{Q}_\ell^0(\bar{\Omega})$, donc

$$T \in \mathcal{Q}_\ell^{-1}(\bar{\Omega}) \iff \sum |b_{2n}|^2 < +\infty \iff 2\alpha - 3 < -1 \iff \alpha < 1.$$

Donc si $2t - 1 \leq \alpha < 1$, ce qui est possible si $t < 1$, on a $T \in \overset{\circ}{\mathcal{H}}^{-1}(\bar{\Omega})$ et $T \notin \mathcal{G}^{-t}$; donc $\overset{\circ}{\mathcal{H}}^{-1}(\bar{\Omega}) \not\subset \mathcal{G}^{-t}$.

Si nous posons maintenant $\frac{a_{2n+1}}{\sqrt{4n+3}} = (-1)^n (n+1)^\beta$,

$$|\sqrt{4n+1} b_{2n}| = \left| \frac{a_{2n+1}}{\sqrt{4n+3}} - \frac{a_{2n+1}}{\sqrt{4n-1}} \right| \asymp 2n^\beta,$$

et si $U = \sum a_{2n+1} \tilde{P}_{2n+1}(x)$, nous avons

$$U \in \mathcal{G}^{-t} \iff \beta < 2t - 1,$$

et

$$U \in \overset{\circ}{\mathcal{H}}^{-1}(\bar{\Omega}) \iff \sum |b_{2n}|^2 < +\infty \iff 2\beta - 1 < -1 \iff \beta < 0.$$

Donc si $0 < \beta \leq 2t - 1$, ce qui est possible si $t > \frac{1}{2}$, nous avons $U \in \mathcal{G}^{-t}$ et $U \notin \overset{\circ}{\mathcal{H}}^{-1}(\bar{\Omega})$. Donc $\mathcal{G}^{-t} \not\subset \overset{\circ}{\mathcal{H}}^{-1}(\bar{\Omega})$.

CHAPITRE II

SÉRIES DE LAGUERRE

Dans ce chapitre sont étudiés les développements en séries de fonctions de Laguerre des distributions appartenant à $\mathcal{S}'(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

1. Les polynômes de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$ définis par

$$e^{-x} x^\alpha L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n!} \left(\frac{d}{dx} \right)^n (e^{-x} x^{n+\alpha})$$

vérifient

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\alpha L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) dx = \Gamma(\alpha + 1) \binom{n + \alpha}{n} \delta_{nm} \quad ([13] \text{ p. } 100).$$

En particulier, pour $\alpha = 0$, nous avons

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n^{(0)}(x) L_m^{(0)}(x) dx = \delta_{nm}.$$

Nous appellerons les fonctions $\mathcal{L}_n(x) = e^{-\frac{x}{2}} L_n^{(0)}(x)$ *fonctions de Laguerre*. Les fonctions de Laguerre forment une base orthonormale de $L^2[0, \infty]$. ([13] p. 108).

Equation différentielle vérifiée par les fonctions de Laguerre — Opérateur de Laguerre.

Les polynômes $y = L_n^{(0)}(x)$ vérifie l'équation différentielle

$$xy'' + (1 - x)y' + ny = 0.$$

En posant $y = e^{\frac{x}{2}} Y$, nous voyons que la fonction $Y = \mathcal{L}_n(x)$ vérifie l'équation différentielle

$$xY'' + Y' - \frac{xY}{4} + \left(n + \frac{1}{2}\right)Y = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dx} \left(x \frac{dY}{dx} \right) - \frac{xY}{4} = - \left(n + \frac{1}{2} \right) Y.$$

Les fonctions de Laguerre $\mathcal{L}_n(x)$ sont fonctions propres de l'opérateur

$$Y \rightarrow E(Y) = \frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} Y \right) - \frac{xY}{4}.$$

L'opérateur E sera appelé *opérateur de Laguerre*. La valeur propre associée à $\mathcal{L}_n(x)$ est $-\left(n + \frac{1}{2}\right)$.

Nous rappelons la définition suivante :

On appelle $\mathcal{S}(\bar{R}_+)$ l'espace des fonctions qui sont C^∞ dans \bar{R}_+ et qui peuvent être prolongées par des fonctions appartenant à $\mathcal{S}(R)$.

Autrement dit, $\mathcal{S}(\bar{R}_+)$ est l'espace des fonctions $f(x)$ qui sont C^∞ pour $x \geq 0$ et telles quels que soient les entiers positifs p et k , la fonction $x^k \left(\frac{d}{dx}\right)^p f(x)$ soit bornée sur la demi-droite $x \geq 0$. ([7], [11]).

Toute dérivation et toute multiplication par une puissance de x applique $\mathcal{S}(\bar{R}_+)$ dans lui-même. Donc l'opérateur de Laguerre E applique $\mathcal{S}(\bar{R}_+)$ dans lui-même.

Montrons que E est *auto-adjoint* pour la structure préhilbertienne induite par $L^2(0, \infty)$ sur $\mathcal{S}(\bar{R}_+)$.

Notons $(u, v) = \int_0^\infty u(x) \overline{v(x)} dx$. Montrons que $(Ef, g) = (f, Eg)$ pour $f, g \in$

$\mathcal{S}(\bar{R}_+)$;

$$(Ef, g) = \int_0^\infty \frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} f \right) \bar{g} dx - \int_0^\infty \frac{x}{4} f \bar{g} dx$$

$$\int_0^\infty \frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} f \right) \bar{g} dx = \left[\left(x \frac{d}{dx} f \right) \bar{g} \right]_0^\infty - \int_0^\infty x \frac{df}{dx} \frac{d\bar{g}}{dx} dx.$$

La partie intégrée est nulle, donc

$$(Ef, g) = - \int_0^\infty x \left(\frac{df}{dx} \frac{d\bar{g}}{dx} - \frac{f\bar{g}}{4} \right) dx = (f, Eg)$$

à cause des rôles symétriques joués par f et \bar{g} .

2. Séries de Laguerre.

Les fonctions de Laguerre appartiennent à $\mathcal{S}(\overline{R}_+)$.

Soit $f \in \mathcal{S}(\overline{R}_+)$; on pose

$$a_n(f) = (f, \mathcal{L}_n);$$

$a_n(f)$ est le n -ième coefficient de Laguerre de f .

La série de Laguerre de $f(x)$ est

$$\sum a_n(f) \mathcal{L}_n(x).$$

Coefficients de Laguerre de $f \in \mathcal{S}(\overline{R}_+)$.

On sait que pour $x \geq 0$, $|\mathcal{L}_n(x)| \leq \mathcal{L}_n(0) = 1$ ([13] p. 164);

$$|a_n(f)| = \left| \int_0^\infty f(x) \mathcal{L}_n(x) dx \right| \leq \int_0^\infty |f(x)| dx.$$

Posons $I(f) = \int_0^\infty |f(x)| dx$.

Calculons les coefficients de Laguerre de $E(f)$;

$$a_n(Ef) = (Ef, \mathcal{L}_n) = (f, E(\mathcal{L}_n)) = -\left(n + \frac{1}{2}\right)(f, \mathcal{L}_n) = -\left(n + \frac{1}{2}\right)a_n(f)$$

d'où, en itérant p fois,

$$a_n(E^p f) = (-1)^p \left(n + \frac{1}{2}\right)^p a_n(f),$$

donc

$$\left| \left(n + \frac{1}{2}\right)^p a_n(f) \right| \leq I(E^p f),$$

ce qui montre que les coefficients de Laguerre de $f \in \mathcal{S}(\overline{R}_+)$ sont à décroissance rapide.

3. Majoration des fonctions de Laguerre.

De la relation de récurrence entre polynômes de Laguerre

$$\frac{d}{dx} L_n^{(0)}(x) = - \sum_{r=0}^{n-1} L_r^{(0)}(x) \quad ([13] \text{ p. } 102)$$

on tire

$$\frac{d}{dx} \mathcal{L}_n(x) = - \sum_{r=0}^{n-1} \mathcal{L}_r(x) - \frac{1}{2} \mathcal{L}_n(x),$$

d'où

$$(3.1) \quad \frac{d}{dx} [\mathcal{L}_{n+1}(x) - \mathcal{L}_n(x)] = - \frac{1}{2} [\mathcal{L}_n(x) + \mathcal{L}_{n+1}(x)].$$

En dérivant p fois on obtient

$$(3.2) \quad \left(\frac{d}{dx}\right)^{p+1} \mathcal{L}_{n+1}(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{p+1} \mathcal{L}_n(x) - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d}{dx}\right)^p \mathcal{L}_n(x) + \left(\frac{d}{dx}\right)^p \mathcal{L}_{n+1}(x) \right],$$

formule de récurrence permettant de calculer les dérivées des fonctions de Laguerre.

Nous allons montrer que, quels que soient $x \geq 0, n, p, k$ entiers ≥ 0 , nous avons la majoration suivante :

$$(3.3) \quad \left| x^k \left(\frac{d}{dx}\right)^p \mathcal{L}_n(x) \right| \leq C_{p,k} (n+1)^{p+k},$$

$C_{p,k}$ étant une constante ne dépendant que de p et de k .

Cette démonstration sera faite par récurrence par rapport à p et par rapport à n .

1^o) Montrons d'abord que pour $p = 0$, nous avons

$$|x^k \mathcal{L}_n(x)| \leq C_{0,k} (n+1)^k,$$

$C_{0,k}$ étant une constante ne dépendant que de k .

La formule est vraie pour $k = 0$, puisque $|\mathcal{L}_n(x)| \leq 1$. ([13] p. 164).

La formule

$$x \mathcal{L}_n(x) = (2n+1) \mathcal{L}_n(x) - (n+1) \mathcal{L}_{n+1}(x) - n \mathcal{L}_{n-1}(x), \quad (n \geq 1)$$

([13] p. 97) itérée k fois, donne, pour $n \geq k$

$$x^k \mathcal{L}_n(x) = A_k \mathcal{L}_{n+k}(x) + A_{k-1} \mathcal{L}_{n+k-1}(x) \dots + A_{-k} \mathcal{L}_{n-k}(x)$$

où les $A_r, (-k \leq r \leq k)$, sont des polynômes de degré k en n dont les coefficients ne dépendent que de k, A_r ayant le signe de $(-1)^{k-r}$, d'où

$$|x^k \mathcal{L}_n(x)| \leq |A_k| + |A_{k-1}| \dots + |A_{-k}| = P_k(n),$$

polynôme en n de degré k , dont les coefficients ne dépendent que de k .
Donc, il existe une constante C_k telle que, pour $n \geq k, P_k(n) \leq C_k (n+1)^k$.

L'entier k étant donné, il existe un nombre fini de fonctions $\mathcal{L}_n(x)$ telles que $n < k$, et les fonctions $\mathcal{L}_n(x) x^k$ sont bornées ; si nous posons

$$C_{0, k} = \sup \left(C_k, \frac{|\mathcal{L}_n(x) x^k|}{(n+1)^k} \right) \quad (x \geq 0, 0 \leq n \leq k-1)$$

nous avons bien la majoration voulue.

2^o) Montrons la majoration (3.3) par récurrence sur p . Elle est vérifiée pour $p = 0$, d'après ce que nous venons de montrer.

Supposons la vraie pour $p = P$ et montrons la pour $p = P + 1$, par récurrence sur n . Montrons que nous pouvons choisir la constante en posant ;

$$C_{P+1, k} = \sup_{x \geq 0} \left(C_{P, k}, \left| x^k \left(\frac{d}{dx} \right)^{P+1} \mathcal{L}_0(x) \right| \right).$$

En effet, la formule (3.3) est alors vérifiée pour $p = P + 1$ et $n = 0$.

Supposons la vraie pour $p = P + 1$ et $n = N$. En multipliant la formule (3.2) par x^k et utilisant les hypothèses de récurrence pour les majorations nous avons

$$\left| x^k \left(\frac{d}{dx} \right)^{P+1} \mathcal{L}_{N+1}(x) \right| \leq C_{P+1, k} \left[(N+1)^{P+k+1} + \frac{1}{2} ((N+1)^{P+k} + (N+2)^{P+k}) \right].$$

Le crochet de droite est majoré par $(N+2)^{P+k+1}$, en vertu de la relation $a^{m+1} - b^{m+1} > (a-b)(a^m + b^m)$ pour $a > b > 0$.

Nous obtenons bien la majoration (3.3) pour $p = P + 1$ et $n = N + 1$, ce qui achève la démonstration par récurrence.

4. Convergence des séries de Laguerre dans $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

Considérons une suite a_n à décroissance rapide et la série de Laguerre $\sum a_n \mathcal{L}_n(x)$. D'après ce que nous avons vu, p et k étant deux entiers donnés,

$\sum \left| x^k \left(\frac{d}{dx} \right)^p (a_n \mathcal{L}_n(x)) \right|$ est majorée par $C_{p, k} \sum |a_n| (n+1)^{p+k}$ qui est convergente, puisque les a_n sont à décroissance rapide.

On en déduit qu'une série de Laguerre dont les coefficients sont à décroissance rapide converge dans $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

En particulier, la série de Laguerre d'une fonction $f \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ converge vers f au sens de $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

5. **Séries de Laguerre des distributions appartenant à $\mathcal{S}'(\overline{R}_+)$.**

Nous appellerons $\mathcal{S}'(\overline{R}_+)$ l'espace des distributions tempérées sur R dont le support est dans \overline{R}_+ . $\mathcal{S}'(\overline{R}_+)$ est le dual de $\mathcal{S}(\overline{R}_+)$. ([11])

REMARQUE: Hormander ([7]) désigne par $\overset{\circ}{\mathcal{S}}'(\overline{R}_+)$ le dual de $\mathcal{S}(\overline{R}_+)$.

L'étude des séries de Laguerre des distributions est faite à partir de la dualité entre $\mathcal{S}'(\overline{R}_+)$ et $\mathcal{S}(\overline{R}_+)$ de la même façon que celle des séries de Legendre des distributions à partir de la dualité entre $\mathcal{D}'[-1, 1]$ et $\mathcal{D}[-1, 1]$. Si u est une fonction définie pour $x \geq 0$, on appelle $\overline{u(x)}$ la fonction égale à $u(x)$ pour $x \geq 0$ et à 0 pour $x < 0$. En raison de l'orthogonalité des \mathcal{L}_n (§ 1) on a

$$\langle \overline{\mathcal{L}_n(x)}, \mathcal{L}_m(x) \rangle = \delta_{nm}$$

$\langle T, f \rangle$ désigne le produit scalaire de $T \in \mathcal{S}'(\overline{R}_+)$ et de $f \in \mathcal{S}(\overline{R}_+)$.

Soit une distribution $T \in \mathcal{S}'(\overline{R}_+)$ et une fonction $f \in \mathcal{S}(\overline{R}_+)$, et soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathcal{L}_n(x)$ la série de Laguerre de f .

En raison de l'orthogonalité des \mathcal{L}_n , nous avons

$$\begin{aligned} \langle T, \sum_{n=0}^N a_n \mathcal{L}_n \rangle &= \sum_{n=0}^N a_n \langle T, \mathcal{L}_n \rangle = \left\langle \sum_{n=0}^N \langle T, \mathcal{L}_n \rangle \overline{\mathcal{L}_n}, \sum_{n=0}^N a_n \mathcal{L}_n \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{n=0}^N \langle T, \mathcal{L}_n \rangle \overline{\mathcal{L}_n}, f \right\rangle; \end{aligned}$$

quand $N \rightarrow \infty$, en raison de la dualité entre $\mathcal{S}(\overline{R}_+)$ et $\mathcal{S}'(\overline{R}_+)$ le premier membre de cette suite d'égalités tend vers $\langle T, f \rangle$.

Donc $\sum_{n=0}^{\infty} \langle T, \mathcal{L}_n \rangle \overline{\mathcal{L}_n}$ converge vers T dans $\mathcal{S}'(\overline{R}_+)$. $\sum_{n=0}^{\infty} \langle T, \mathcal{L}_n \rangle \overline{\mathcal{L}_n}$ est la série de Laguerre de la distribution T .

La dualité entre $\mathcal{S}(\overline{R}_+)$ et $\mathcal{S}'(\overline{R}_+)$ montre (exactement comme, dans le cas des séries de Legendre, la dualité entre $\mathcal{D}[-1, 1]$ et $\mathcal{D}'[-1, 1]$) que la série de Laguerre d'une distribution à nécessairement des coefficients à croissance lente.

Réciproquement, soit une série de Laguerre $\sum b_n \overline{\mathcal{L}_n}$ où les b_n sont à croissance lente. Il existe un entier p tel que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|b_n|}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^p} < +\infty$; alors

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n \overline{\mathcal{L}_n}}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^p}$ converge uniformément vers une fonction f continue et bornée sur \overline{R}_+ , et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \overline{\mathcal{L}_n}$ converge vers $(-E)^p$ [11]; $(-E)^p f$ est une distribution appartenant à $\mathcal{S}'(\overline{R}_+)$.

Une série de Laguerre dont les coefficients sont à croissance lente converge dans $\mathcal{S}'(\overline{R}_+)$.

En résumé :

PROPOSITION I. *Une fonction $f \in \mathcal{S}(\overline{R}_+)$ admet un développement en série de Laguerre $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) \mathcal{L}_n(x)$, qui converge vers f dans $\mathcal{S}(\overline{R}_+)$. Les coefficients $a_n(f) = \langle f, \mathcal{L}_n \rangle$ sont à décroissance rapide. Réciproquement, si une suite a_n est à décroissance rapide, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathcal{L}_n(x)$ converge dans $\mathcal{S}(\overline{R}_+)$.*

PROPOSITION II. *Une distribution $T \in \mathcal{S}'(\overline{R}_+)$ admet un développement en série de Laguerre $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(T) \overline{\mathcal{L}_n(x)}$ qui converge vers T dans $\mathcal{S}'(\overline{R}_+)$. Les coefficients $b_n(T) = \langle T, \mathcal{L}_n \rangle$ sont à croissance lente. Réciproquement, si une suite b_n est à croissance lente, la série $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \overline{\mathcal{L}_n(x)}$ converge dans $\mathcal{S}'(\overline{R}_+)$.*

REMARQUE. De

$$(5.1) \quad E(\mathcal{L}_n(x)) = -\left(n + \frac{1}{2}\right) \mathcal{L}_n(x)$$

on déduit

$$(5.2) \quad E(\overline{\mathcal{L}_n(x)}) = -\left(n + \frac{1}{2}\right) \overline{\mathcal{L}_n(x)}$$

(les dérivations étant au sens des distributions) soit par dualité, soit directement, en remarquant que

$$\frac{d}{dx} \overline{(\mathcal{L}_n(x))} = \overline{\left(\frac{d}{dx} \mathcal{L}_n(x)\right)} + \delta, \quad \text{d'où} \quad x \frac{d}{dx} \overline{(\mathcal{L}_n(x))} = x \overline{\left(\frac{d}{dx} \mathcal{L}_n(x)\right)}.$$

6. Exemples de séries de Laguerre de distributions.

Mesure de Dirac δ .

d'où
$$\langle \delta, \mathcal{L}_n(x) \rangle = \mathcal{L}_n(0) = 1$$

$$\delta = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\mathcal{L}_n(x)}.$$

Dérivations à l'origine.

$$E(\delta) = x\delta'' + \delta' - \frac{x\delta}{4} = x\delta'' + \delta' = -\delta'$$

car

$$\frac{d^2}{dx^2}(x\delta) = x\delta'' + 2\delta' = 0$$

d'où

$$\delta' = -E(\delta) = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) \overline{\mathcal{L}_n(x)}.$$

On peut établir une formule de récurrence permettant de calculer la série de Laguerre de $\delta^{(p)} = \left(\frac{d}{dx}\right)^p \delta$; p étant un entier positif,

$$E(\delta^{(p)}) = x\delta^{(p+2)} + \delta^{(p+1)} - \frac{x}{4}\delta^{(p)};$$

or $\left(\frac{d}{dx}\right)^p(x\delta) = x\delta^{(p)} + p\delta^{(p-1)} = 0$, d'où $E(\delta^{(p)}) = -(p+1)\delta^{(p+1)} + \frac{p}{4}\delta^{(p-1)}$

et $\delta^{(p+1)} = \frac{1}{p+1} \left(\frac{p}{4}\delta^{(p-1)} - E(\delta^{(p)})\right)$.

Fonction de Heaviside.

De la formule (3.1) on tire, en remarquant que $\mathcal{L}_{n+1}(x) - \mathcal{L}_n(x)$ s'annule pour $x = 0$,

$$(6.1) \quad \frac{d}{dx}(\overline{\mathcal{L}_n(x)} - \overline{\mathcal{L}_{n+1}(x)}) = \frac{1}{2}(\overline{\mathcal{L}_n(x)} + \overline{\mathcal{L}_{n+1}(x)})$$

on en tire

$$\frac{d}{dx} \left(a_0 \overline{\mathcal{L}_0(x)} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1}) \overline{\mathcal{L}_n(x)} \right) = \frac{1}{2} a_0 \overline{\mathcal{L}_0(x)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n-1}}{2} \overline{\mathcal{L}_n(x)}.$$

Calculons les coefficients a_n de façon à avoir dans le second membre la

série de Laguerre de δ . Nous avons

$$a_0 = 2, \quad a_2 = 0, \dots, \quad a_{2n} = 2, \quad a_{2n+1} = 0, \dots$$

d'où

$$\frac{d}{dx} \left(2 \overline{\mathcal{L}_0(x)} + \sum_{n=1}^{\infty} 2 (-1)^n \overline{\mathcal{L}_n(x)} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\mathcal{L}_n(x)}$$

et

$$Y(x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \overline{\mathcal{L}_n(x)}.$$

Fonction $x^p Y = \widehat{x^p}$.

de

$$E(Y) = \frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} Y \right) - \frac{xY}{4} = \frac{d}{dx} (x\delta) - \frac{xY}{4} = -\frac{xY}{4}$$

on tire

$$xY = -4 E(Y) = 4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \overline{\mathcal{L}_n(x)}.$$

Si p est un entier positif,

$$E(x^p Y) = \frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} (x^p Y) \right) - \frac{x^{p+1} Y}{4}$$

or

$$\frac{d}{dx} (x^p Y) = x^p \delta + px^{p-1} Y = px^{p-1} Y$$

d'où

$$E(x^p Y) = p^2 x^{p-1} Y - \frac{x^{p+1} Y}{4}$$

et

$$x^{p+1} Y = 4 (p^2 x^{p-1} Y - E(x^p Y))$$

formule de récurrence permettant de calculer la série de Laguerre d'une fonction de la forme $x^p Y$.

7. Transformation de Laplace des séries de Laguerre. Autres exemples de séries de Laguerre.

Appliquons la transformation de Laplace à l'équation différentielle vérifiée par les fonctions de Laguerre (5.1); $l_n(p)$, transformée de $\mathcal{L}_n(x)$, vérifie

$$p \frac{d}{dp} (p l_n(p)) - \frac{1}{4} \frac{d}{dp} (l_n(p)) = \left(n + \frac{1}{2} \right) l_n(p).$$

$Z = l_n(p)$ est donc solution de l'équation différentielle

$$\left(p^2 - \frac{1}{4}\right)Z' + \left(p - \frac{1}{2} - n\right)Z = 0.$$

Cette solution est de la forme

$$Z = \frac{K}{p + \frac{1}{2}} \left(\frac{p - \frac{1}{2}}{p + \frac{1}{2}}\right)^n.$$

Pour calculer la constante K , nous voyons que Z est un polynôme en $\frac{1}{p + \frac{1}{2}}$ dont le terme de plus bas degré est $\frac{K}{p + \frac{1}{2}}$; $\frac{K}{p + \frac{1}{2}}$ est le trans-

formé du produit de $e^{-\frac{x}{2}}$ par le terme constant de $L_n^{(0)}(x)$. Comme $L_n^{(0)}(0) = 1$,

$$K = 1. \text{ D'où } l_n(p) = \frac{1}{p + \frac{1}{2}} \left(\frac{p - \frac{1}{2}}{p + \frac{1}{2}}\right)^n.$$

D'une façon générale soit \mathcal{T}_p la transformée de Laplace d'une distribution $T_x \in \mathcal{S}'(\bar{R}_+)$

$$\mathcal{T}_p = \langle T_x, e^{-px} \rangle$$

\mathcal{T}_p existe pour $\mathcal{R}_e(p) > 0$.

La série de Laguerre de $T_x = \overline{\Sigma b_n \mathcal{L}_n(x)}$ se transforme dans la série

$$\frac{1}{p + \frac{1}{2}} \Sigma b_n \left(\frac{p - \frac{1}{2}}{p + \frac{1}{2}}\right)^n.$$

C'est une série entière en $\frac{p - \frac{1}{2}}{p + \frac{1}{2}}$. Si $\mathcal{R}_e(p) > 0$, $\left|\frac{p - \frac{1}{2}}{p + \frac{1}{2}}\right| < 1$ et la série

converge puisque les b_n sont à croissance lente. On retrouve le fait que la transformée de Laplace d'une distribution de $\mathcal{S}'(\bar{R}_+)$ est une fonction holo-

morphe pour $\mathcal{R}_e(p) > 0$, et on peut vérifier que cette fonction est à croissance lente pour $|p| \rightarrow \infty$.

REMARQUES : *Autres exemples de séries de Laguerre.*

1) Remarquons que

$$l_n(p) = \langle \overline{e^{-px}}, \mathcal{L}_n(x) \rangle = \langle \overline{\mathcal{L}_n(x)}, e^{-px} \rangle.$$

Ce qui nous permet d'obtenir la série de Laguerre de la fonction e^{-px} pour $\mathcal{R}_e(p) > 0$

$$e^{-px} = \sum_{n=0}^{\infty} l_n(p) \mathcal{L}_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p + \frac{1}{2}} \left(\frac{p - \frac{1}{2}}{p + \frac{1}{2}} \right)^n \mathcal{L}_n(x).$$

Cette série converge vers e^{-px} au sens de $\mathcal{S}(\overline{R}_+)$.

2) Nous pouvons encore calculer $l_n(p)$ pour $\mathcal{R}_e(p) = 0$. Nous avons alors

$$l_n(i\lambda) = \langle \overline{e^{-i\lambda x}}, \mathcal{L}_n(x) \rangle = \frac{1}{i\lambda + \frac{1}{2}} \left(\frac{i\lambda - \frac{1}{2}}{i\lambda + \frac{1}{2}} \right)^n, \quad (\lambda \text{ réel}).$$

Si nous posons $\text{tg } \vartheta = 2\lambda$, $-\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{1}{\frac{1}{2} + i\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \frac{1}{4}}} e^{-i\vartheta} = 2 \cos \vartheta e^{-i\vartheta} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\frac{1}{2} - i\lambda}{\frac{1}{2} + i\lambda} \right)^n = e^{-2in\vartheta}.$$

d'où :

$$\begin{aligned} \overline{e^{i\lambda x}} &= e^{i\frac{x}{2} \text{tg } \vartheta} = 2 \cos \vartheta \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{i(2n+1)\vartheta} \overline{\mathcal{L}_n(x)} \\ \cos\left(\frac{x}{2} \text{tg } \vartheta\right) &= 2 \cos \vartheta \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cos(2n+1)\vartheta \overline{\mathcal{L}_n(x)}. \\ \sin\left(\frac{x}{2} \text{tg } \vartheta\right) &= 2 \cos \vartheta \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sin(2n+1)\vartheta \overline{\mathcal{L}_n(x)}. \end{aligned}$$

Ces formules pourraient permettre d'étudier les transformations de Fourier d'une série de Laguerre.

CONVOLUTION. Etudions le produit de convolution de deux fonctions de Laguerre à l'aide de la transformation de Laplace.

$\overline{\mathcal{L}_m(x)} * \overline{\mathcal{L}_n(x)}$ a pour transformée

$$\frac{\left(p - \frac{1}{2}\right)^{n+m}}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^{n+m+2}} = \frac{\left(p - \frac{1}{2}\right)^{n+m}}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^{n+m+1}} - \frac{\left(p - \frac{1}{2}\right)^{n+m+1}}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^{n+m+2}}$$

$$\left(\text{puisque } \frac{1}{p + \frac{1}{2}} = 1 - \frac{p - \frac{1}{2}}{p + \frac{1}{2}} \right)$$

d'où :

$$\overline{\mathcal{L}_m(x)} * \overline{\mathcal{L}_n(x)} = \overline{\mathcal{L}_{m+n}(x)} - \overline{\mathcal{L}_{m+n+1}(x)}.$$

Formule qui permet de calculer le produit de convolution de deux séries de Laguerre.

8. Structures hilbertiennes.

Rappelons que les fonctions de Laguerre $\mathcal{L}_n(x)$ forment une base orthogonale de $L^2[0, \infty]$. Ce sont les fonctions propres de l'opérateur de Laguerre $E : Y \rightarrow \frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} Y \right) - \frac{x}{4} Y$, associées aux valeurs propres $-\left(n + \frac{1}{2}\right)$.

Les relations (5.1) et (5.2) montrent que E établit un isomorphisme de $\mathcal{S}(\overline{R}_+)$ sur lui-même et de $\mathcal{S}'(\overline{R}_+)$ sur lui-même. L'opérateur $-E$ étant positif, nous pouvons définir $(-E)^s$ pour s réel quelconque, et introduire de nouveaux espaces de Hilbert.

DÉFINITION. s étant un nombre réel quelconque, on appelle \mathcal{K}^s le sous-espace de $\mathcal{S}(\overline{R}_+)$ formé des distributions $T = \sum a_n \overline{\mathcal{L}_n(x)}$ telles que $\sum |a_n|^2 n^{2s} < +\infty$

\mathcal{K}^s est le sous-espace de $\mathcal{S}'(\overline{R}_+)$ formé des distributions T telles que $(-E)^s T \in L^2[0, \infty]$. \mathcal{K}^s est un espace de Hilbert, pour lequel les $\overline{\mathcal{L}_n(x)}$

forment une base orthogonale, avec la norme

$$\|T\|_{\mathcal{C}^s}^2 = \|(-E)^s T\|_{L^2}^2 = \sum |a_n|^2 \left(n + \frac{1}{2}\right)^{2s}.$$

E établit un isomorphisme de \mathcal{C}^s sur \mathcal{C}^{s-1} .

Toute distribution de $\mathcal{S}'(R_+)$ appartient à un espace \mathcal{C}^s , puisque la suite de ses coefficients est à croissance lente.

9. Dérivées et primitives de séries de Laguerre.

On rappelle qu'une distribution appartenant à $\mathcal{S}'(\overline{R}_+)$ admet une primitive unique dans $\mathcal{S}'(\overline{R}_+)$.

De la formule (6.1) on déduit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (a_0 \overline{\mathcal{L}_0(x)} + (a_1 - a_0) \overline{\mathcal{L}_1(x)} \dots + (a_n - a_{n-1}) \overline{\mathcal{L}_n(x)} \dots) &= \frac{1}{2} (a_0 \overline{\mathcal{L}_0(x)} + \\ &+ (a_0 + a_1) \overline{\mathcal{L}_1(x)} \dots + (a_{n-1} + a_n) \overline{\mathcal{L}_n(x)} \dots \end{aligned}$$

formule qui permet de calculer, de proche en proche, les coefficients de la dérivée ou de la primitive d'une série de Laguerre donnée.

Il sera parfois plus commode d'utiliser, au lieu de la dérivation, l'opérateur $\theta = \frac{d}{dx} + \frac{1}{2}$. Nous avons en effet

$$\theta [\mathcal{L}_n(x) - \mathcal{L}_{n+1}(x)] = \mathcal{L}_n(x),$$

$$\theta [\overline{\mathcal{L}_n(x)} - \overline{\mathcal{L}_{n+1}(x)}] = \overline{\mathcal{L}_n(x)},$$

d'où :

$$\begin{aligned} (9.1) \quad \theta [a_0 \overline{\mathcal{L}_0(x)} + (a_1 - a_0) \overline{\mathcal{L}_1(x)} \dots + (a_n - a_{n-1}) \overline{\mathcal{L}_n(x)} \dots] &= \\ &= a_0 \overline{\mathcal{L}_0(x)} + \dots + a_n \overline{\mathcal{L}_n(x)} + \dots \end{aligned}$$

Rappel de définitions (d'après [7]).

On appelle $\mathcal{H}^s(\overline{R}_+)$ l'ensemble des éléments $u \in \mathcal{D}'(R_+)$ tels qu'il existe $U \in \mathcal{H}^s(R)$ vérifiant $U = u$ sur R_+ .

On appelle $\mathring{\mathcal{H}}^s(\overline{R}_+)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{H}^s(R)$ dont le support est dans \overline{R}_+ .

$\mathcal{H}^s(\bar{R}_+)$ et $\overset{\circ}{\mathcal{H}}^{-s}(\bar{R}_+)$ sont deux espaces en dualité. Les relations d'inclusion suivantes sont vérifiées, algébriquement et topologiquement :

$$\mathcal{D}(\bar{R}_+) \subset \mathcal{S}(\bar{R}_+) \subset \mathcal{H}^{s'}(\bar{R}_+) \subset \mathcal{H}^s(\bar{R}_+) \subset \mathcal{D}'(R_+),$$

$$\mathcal{D}(R_+) \subset \overset{\circ}{\mathcal{H}}^{-s}(\bar{R}_+) \subset \overset{\circ}{\mathcal{H}}^{-s'}(\bar{R}_+) \subset \mathcal{S}'(\bar{R}_+) \subset \mathcal{D}'(\bar{R}_+) \quad (s, s' \in R, s < s');$$

deux espaces symétriques par rapport au centre de ce tableau sont en dualité.

Si $T \in \mathcal{D}'(R)$, on désigne par $\frac{dT}{dx}$ la dérivée de T dans $\mathcal{D}'(R)$ (en particulier dans $\mathcal{D}'(\bar{R}_+)$).

Si $T \in \mathcal{D}'(R_+)$, on désigne par $\frac{d^*T}{dx}$ la dérivée de T dans $\mathcal{D}'(R_+)$. $\frac{d}{dx}$ applique $\overset{\circ}{\mathcal{H}}^s(\bar{R}_+)$ dans $\overset{\circ}{\mathcal{H}}^{s-1}(\bar{R}_+)$ et $\frac{d^*}{dx}$ applique $\mathcal{H}^s(\bar{R}_+)$ dans $\mathcal{H}^{s-1}(\bar{R}_+)$. $\frac{d}{dx}$ est l'opérateur adjoint de $-\frac{d^*}{dx}$ dans la dualité entre les $\mathcal{H}^s(\bar{R}_+)$ et les $\overset{\circ}{\mathcal{H}}^{-s}(\bar{R}_+)$.

Si u est une fonction dérivable définie sur \bar{R}_+ , nous avons $\overline{\frac{d^*u}{dx}} = \overline{\frac{du}{dx}}$ si et seulement si $u(0) = 0$.

Cherchons des relations d'inclusion entre les espaces de Hilbert que nous avons définis sur des sous espaces de $\mathcal{S}'(\bar{R}_+)$ (les espaces \mathcal{K}^s) et les espaces $\mathcal{H}^s(\bar{R}_+)$ ou $\overset{\circ}{\mathcal{H}}^{-s}(\bar{R}_+)$.

PROPOSITION III. Pour tout $s \geq 0$, les inclusions algébriques et topologiques suivantes sont vérifiées :

III.1. $\mathcal{K}^s \subset \mathcal{H}^s(\bar{R}_+),$

III.2. $\overset{\circ}{\mathcal{H}}^{-s}(\bar{R}_+) \subset \mathcal{K}^{-s}.$

On ne peut pas améliorer ces inclusions ; autrement dit pour $t < s$, on n'a pas $\mathcal{K}^t \subset \mathcal{H}^s(\bar{R}_+)$ (ni $\overset{\circ}{\mathcal{H}}^{-s}(\bar{R}_+) \subset \mathcal{K}^{-t}$).

REMARQUES-I. Pour $s \geq 0$, un élément de \mathcal{K}^s est une fonction et peut être identifié à un élément de $\mathcal{D}'(R_+)$; c'est dans ce sens qu'est envisagée l'inclusion III.1.

II. A la différence des séries de Legendre, pour s quelconque, $v \geq 1$, $\mathcal{H}^s(\bar{R}_+)$ n'est pas inclus dans un espace \mathcal{H}^v (de même $\mathring{\mathcal{H}}^{-s}(\bar{R}_+)$ ne contient pas d'espace \mathcal{H}^{-v}); en effet les fonctions de \mathcal{H}^v vérifient des conditions de décroissance à l'infini que ne vérifient pas nécessairement celles de $\mathcal{H}^s(\bar{R}_+)$. (Par exemple une fonction φ égale à $\frac{1}{x}$ pour $x \geq 1$ et convenablement régularisée pour $0 \leq x \leq 1$ appartient à tous les $\mathcal{H}^s(\bar{R}_+)$, $s \geq 0$, et n'appartient pas à \mathcal{H}^1 , car $E(\varphi) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}$ pour $x \geq 1$, donc $E(\varphi)$ n'appartient pas à $L^2[1, +\infty]$).

10. Lemmes. Normes sur $\mathcal{H}^s(\bar{R}_+)$ et $\mathring{\mathcal{H}}^{-s}(\bar{R}_+)$, s entier ≥ 0 .

Soit $\varphi \in \mathcal{H}^s(\bar{R}_+)$, $s \geq 1$. Alors $\frac{d^*\varphi}{dx}$ est une fonction de $L^2[0, \infty]$, donc sommable au voisinage de 0; par conséquent φ tend vers une limite finie l quand $x \rightarrow 0$. La fonction $\varphi_1 = \varphi - l\mathcal{L}_0$ s'annule donc pour $x = 0$, et $\overline{\frac{d^*\varphi_1}{dx}} = \frac{d}{dx} \overline{\varphi_1}$. Comme au § 9, posons $\theta = \frac{d}{dx} + \frac{1}{2}$, et posons $\theta^* = \frac{d^*}{dx} + \frac{1}{2}$.

LEMME 1. Soit $\varphi = l\mathcal{L}_0 + \varphi_1$, $\varphi_1(0) = 0$. Les hypothèses suivantes sont équivalentes : ($s \geq 1$)

$$\varphi \in \mathcal{H}^s(\bar{R}_+); \quad \varphi_1 \in \mathcal{H}^s(\bar{R}_+); \quad \theta^*\varphi \in \mathcal{H}^{s-1}(\bar{R}_+); \quad \theta^*\varphi_1 \in \mathcal{H}^{s-1}(\bar{R}_+);$$

$$\overline{\theta\varphi_1} \in \mathcal{H}^{s-1}(\bar{R}_+).$$

En effet il résulte des propriétés classiques des espaces de Sobolev que $\varphi \in \mathcal{H}^s(\bar{R}_+) \iff \theta^*\varphi \in \mathcal{H}^{s-1}(\bar{R}_+)$ (voir par exemple [7]).

On définit, par récurrence pour s entier ≥ 0 , une norme $\mathcal{H}^s(\bar{R}_+)$ en posant : $\|\varphi\|_{\mathring{\mathcal{H}}(\bar{R}_+)} = \|\varphi\|_{L^2}$; si $\varphi \in \mathcal{H}^s(\bar{R}_+)$, $s \geq 1$, et si $\varphi = l\mathcal{L}_0 + \varphi_1$, $\varphi_1(0) = 0$, nous posons $\|\varphi\|_{\mathcal{H}^s(\bar{R}_+)}^2 = |l|^2 + \|\theta^*\varphi_1\|_{\mathcal{H}^{s-1}(\bar{R}_+)}^2$.

On vérifie facilement qu'on a bien une norme. Montrons par récurrence que cette norme est équivalente à la norme usuelle. Si nous supposons l'équivalence vérifiée jusqu'à $s - 1$, il suffit de montrer que

$$\|\varphi\|_{\mathcal{H}^s(\bar{R}_+)}^2 \sim \|\varphi\|_{\mathcal{H}^{s-1}(\bar{R}_+)}^2 + \left\| \frac{d^*\varphi}{dx} \right\|_{\mathcal{H}^{s-1}(\bar{R}_+)}^2$$

puisque la norme usuelle vérifie une équivalence analogue. Il suffit donc de vérifier que

$$(10.1) \quad |l^2| + \|\theta^* \varphi_1\|_{\mathcal{Q}^{s-1}(\bar{R}_+)}^2 \asymp \|\varphi\|_{\mathcal{Q}^{s-1}(\bar{R}_+)}^2 + \left\| \frac{d^* \varphi}{dx} \right\|_{\mathcal{Q}^{s-1}(\bar{R}_+)}^2.$$

De

$$\int_0^\infty 2 \varphi \varphi' dx = [\varphi^2]_0^\infty$$

on déduit

$$|l^2| = |\varphi(0)|^2 \leq \|\varphi\|_{L^2}^2 + \|\varphi'\|_{L^2}^2.$$

D'où $|l^2|$ est majoré, à un facteur constant près, par le second membre de (10.1) pour $s \geq 1$.

D'autre part

$$\|\theta^* \varphi_1\|_{\mathcal{Q}^{s-1}(\bar{R}_+)}^2 = \|\theta^* \varphi\|_{\mathcal{Q}^{s-1}(\bar{R}_+)}^2 \quad \text{puisque } \theta^* \mathcal{L}_0 = 0$$

et, d'après la définition de θ , cette expression est majorée, à un facteur constant près, par le second membre de (10.1).

D'autre part $\|\varphi\|_{\mathcal{Q}^{s-1}(\bar{R}_+)}^2$ et $\left\| \frac{d^* \varphi}{dx} \right\|_{\mathcal{Q}^{s-1}(\bar{R}_+)}^2$ sont majorés, à un facteur constant près, par $\|\theta^* \varphi\|_{\mathcal{Q}^{s-1}(\bar{R}_+)}^2$, donc par le premier membre, ce qui montre l'équivalence.

REMARQUE (Lemme 1.2).

L'opérateur θ a un inverse unique dans $\mathcal{S}'(\bar{R}_+)$, qui coïncide avec la convolution par $\overline{\mathcal{L}_0} = e^{-\frac{x}{2}}$; et pour $s \geq 0$ nous avons

$$T \in \overset{\circ}{\mathcal{Q}}\mathcal{L}^{-s}(\bar{R}_+) \iff \theta T \in \overset{\circ}{\mathcal{Q}}\mathcal{L}^{-(s+1)}(\bar{R}_+)$$

On définit alors par récurrence une norme sur $\overset{\circ}{\mathcal{Q}}\mathcal{L}^{-s}(\bar{R}_+)$ (s entier ≥ 0), équivalente à la norme usuelle, en posant

$$\|T\|_{\overset{\circ}{\mathcal{Q}}\mathcal{L}^{-s}(\bar{R}_+)} = \|\mathcal{T}\|_{\overset{\circ}{\mathcal{Q}}\mathcal{L}^{-(s-1)}(\bar{R}_+)} \quad \text{pour } s \geq 1, \quad \text{si } T = \theta \mathcal{T}, \mathcal{T} \in \mathcal{S}'(\bar{R}_+).$$

$$\text{Si } T \in \overset{\circ}{\mathcal{Q}}\mathcal{L}^0(\bar{R}_+), \quad \|T\|_{\overset{\circ}{\mathcal{Q}}\mathcal{L}^0(\bar{R}_+)} = \|T\|_{L^2}.$$

L'équivalence des normes peut être montrée à l'aide de la transformation de Fourier.

LEMME 2. *Dérivation et espaces \mathcal{K}^s*

2.1. Si $\varphi \in \mathcal{K}^s$, $s \geq 1$, $\theta^* \varphi \in \mathcal{K}^{s-1}$.

2.2. Si $T \in \mathcal{K}^{-s}$ $s \geq 0$, $\theta T \in \mathcal{K}^{-(s+1)}$.

DÉMONSTRATION de 2.1. ; cas $s \geq 1$.

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} \overline{b_n \mathcal{L}_n(x)}$ la série de Laguerre de φ , et soit $a_n = b_0 + b_1 \dots + b_n$. Alors $b_n = a_n - a_{n-1}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n \mathcal{L}_n(x)}$ est la série de Laguerre de $\theta \overline{\varphi}$ (voir (9.1)) et

$$\varphi \in \mathcal{K}^s \iff \sum |b_n|^2 n^{2s} < +\infty \iff \sum |a_n - a_{n-1}|^2 n^{2s} < +\infty.$$

Nous avons

$$(10.2) \quad |a_{n+p} - a_n|^2 = |b_{n+1} + \dots + b_{n+p}|^2 \leq (|b_{n+1}| + \dots + |b_{n+p}|)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^p |b_{n+k}|^2 (n+k)^{2s} \right) \left(\sum_{k=1}^p (n+k)^{-2s} \right) \quad (\text{d'après l'inégalité de Schwarz}).$$

Comme $\sum_{n=1}^p |b_{n+k}|^2 (n+k)^{2s}$ est borné et comme

$$\sum_{k=1}^p (n+k)^{-2s} \leq \frac{1}{2s-1} \frac{1}{n^{2s-1}},$$

la suite a_n est de Cauchy et tend donc vers une limite l .

Considérons la série de Laguerre de $\varphi_1 = \varphi - l\mathcal{L}_0$; elle ne diffère de celle de φ que par le premier terme $b'_0 = b_0 - l$.

Si nous posons $\alpha_n = b'_0 + b_1 + \dots + b_n$, nous voyons que $\alpha_n = b_0 + b_1 \dots + b_n - l \rightarrow 0$. $\sum \overline{\alpha_n \mathcal{L}_n(x)}$ est la série de Laguerre de $\theta \overline{\varphi_1}$ (d'après formule (9.1)).

REMARQUE. La formule (10.2) montre que la série $\sum b_n$ est absolument convergente; donc $\sum \overline{b_n \mathcal{L}_n(x)}$ converge uniformément et $\varphi(0) = \sum_0^{\infty} b_n = l$; la constante l , donc la fonction φ_1 , sont bien celles envisagées dans le lemme 1.

Supposons maintenant $s > 1$.

Comme

$$\alpha_n \rightarrow 0, \alpha_n = b'_0 + b_1 \dots + b_n = -(b_{n+1} + b_{n+2} \dots + b_{n+p} + \dots),$$

$$|\alpha_n|^2 = |b_{n+1} + b_{n+2} \dots + b_{n+p} \dots|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_{n+k}|^2 (n+k+1)^{2s-1} \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (n+k+1)^{-2s+1} \right)$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_{n+k}|^2 (n+k+1)^{2s-1} \right) \frac{1}{2s-2} \frac{1}{(n+1)^{2s-2}},$$

d'où,

$$(n+1)^{2s-2} |\alpha_n|^2 \leq \frac{1}{2s-2} \sum_{k=1}^{\infty} |b_{n+k}|^2 (n+k)^{2s-1},$$

d'où,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{2s-2} |\alpha_n|^2 \leq \frac{1}{2s-2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |b_{n+k}|^2 (n+k)^{2s-1} = \frac{1}{2s-2} \sum_{n=1}^{\infty} n^{2s} |b_n|^2.$$

Pour $s = 1$, comme $\alpha_n = (b_{n+1} + b_{n+2} \dots + b_{n+p} \dots)$, il résulte de l'inégalité de Hardy ([5] p. 246) que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|^2 \leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |b_n|^2.$$

Or

$$\sum n^{2s} |b_n|^2 < +\infty \iff \varphi \in \mathcal{K}^s \iff \varphi_1 \in \mathcal{K}^s,$$

et :

$$\sum n^{2s-2} |\alpha_n|^2 < +\infty \iff \overline{\theta \varphi_1} \in \mathcal{K}^{s-1}.$$

Il résulte donc des inégalités précédentes que, pour $s \geq 1$,

$$\varphi_1 \in \mathcal{K}^s \implies \overline{\theta \varphi_1} \in \mathcal{K}^s.$$

On sait que

$$\varphi_1 \in \mathcal{K}^s \iff \varphi \in \mathcal{K}^s$$

et d'autre part

$$\overline{\theta \varphi_1} = \overline{\theta^* \varphi_1} \text{ et } \theta^* \varphi_1 = \theta^* \varphi, \text{ puisque } \theta^* \mathcal{L}_0 = 0;$$

d'où

$$\varphi \in \mathcal{K}^s \implies \theta^* \varphi \in \mathcal{K}^{s-1}.$$

Il résulte des calculs que

$$\|\theta^* \varphi_1\|_{\mathcal{K}^{s-1}} \leq K \|\varphi_1\|_{\mathcal{K}^s} \text{ pour } s \geq 1$$

d'où

$$\| \theta^* \varphi \|_{\mathcal{C}^{s-1}} \leq K \| \varphi \|_{\mathcal{C}^s}.$$

DÉMONSTRATION de 2.2. (lemme 2).

Nous désignons encore par $\overline{\Sigma b_n \mathcal{L}_n(x)}$ la série de Laguerre de T et posons $a_n = b_0 + b_1 \dots + b_n$.

Nous avons $T \in \mathcal{C}^{-s} \iff \Sigma |b_n|^2 n^{-2s} < +\infty$. $\overline{\Sigma a_n \mathcal{L}_n(x)}$ est la série de Laguerre de θT .

Supposons d'abord $s > 0$.

Nous avons :

$$\begin{aligned} |a_n|^2 &= |b_0 + b_1 \dots + b_n|^2 \leq \left(\sum_{k=0}^n |b_k|^2 k^{-2s+1} \right) \left(\sum_{k=0}^n k^{2s-1} \right) \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^n |b_k|^2 k^{-2s+1} \right) \frac{(n+1)^{2s}}{2s} \end{aligned}$$

d'où :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 (n+1)^{-2s-2} \leq K_1 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{|b_k|^2 k^{-2s+1}}{(n+1)^2}.$$

Or, Σu_n étant une série à termes positifs, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n < +\infty$ entraîne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{k=1}^n k u_k}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n < +\infty.$$

Donc :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 (n+1)^{-2s-2} \leq K_2 \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 (n+1)^{-2s}.$$

Pour $s = 0$, d'après l'inégalité de Hardy ([5] p. 239)

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 (n+1)^{-2} \leq K_3 \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2.$$

Nous voyons donc que, pour $s \geq 0$, $T \in \mathcal{C}^{-s} \implies \theta T \in \mathcal{C}^{-s-1}$ et

$$\| \theta T \|_{\mathcal{C}^{-s-1}} \leq K \| T \|_{\mathcal{C}^{-s}}.$$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION III.

Démonstration de 3.1 pour s entier.

Pour $s = 0$, $\mathcal{K}^0 = \mathcal{H}^0(\bar{R}_+) = L^2[0, +\infty]$. Supposons la formule 3.1 vraie jusqu'à l'indice $s - 1$.

Alors $\varphi \in \mathcal{K}^s \implies \theta^* \varphi \in \mathcal{K}^{s-1}$ (lemme 2); $\theta^* \varphi \in \mathcal{K}^{s-1} \implies \theta^* \varphi \in \mathcal{H}^{s-1}(\bar{R}_+)$ (hypothèse de récurrence); $\theta^* \varphi \in \mathcal{H}^{s-1}(\bar{R}_+) \implies \varphi \in \mathcal{H}^s(\bar{R}_+)$ (lemme 1).

L'inclusion topologique résulte de la comparaison des normes.

On montre que la proposition 3.1 est vraie également pour $s > 0$ non entier, en utilisant le théorème d'interpolation de Lions, par un raisonnement identique à celui qui a été utilisé dans l'étude des séries de Legendre.

Montrons que la relation 3.1 ne peut pas être « améliorée », c'est-à-dire que pour $t < s$, $\mathcal{K}^t \not\subset \mathcal{H}^s(\bar{R}_+)$.

En appliquant le théorème d'interpolation, on voit qu'il suffit de le montrer pour $s = 1$.

Considérons la suite a_n définie par $a_n = (n + 1)^{-\alpha}$, $\alpha > 0$ et posons $b_0 = a_0 = 1$, $b_n = a_n - a_{n-1}$; alors $b_n = (n + 1)^{-\alpha} - n^{-\alpha} \sim -\alpha n^{-\alpha-1}$ et la série $\sum b_n$ est absolument convergente; donc $\sum b_n \overline{\mathcal{L}_n(x)}$ converge uniformément, soit $\varphi(x)$ sa somme; alors $\varphi(0) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n = 0$ et

$$\overline{\theta^* \varphi} = \overline{\frac{\varphi}{2}} + \overline{\frac{d^* \varphi}{dx}} = \overline{\frac{\varphi}{2}} + \overline{\frac{d\varphi}{dx}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{\mathcal{L}_n(x)}.$$

$$\varphi \in \mathcal{K}^t \iff \sum |b_n|^2 n^{2t} < +\infty \iff \sum n^{-2\alpha-2+2t} < +\infty \iff 2\alpha > 2t - 1;$$

$$\varphi \in \mathcal{H}^1(\bar{R}_+) \iff \overline{\theta^* \varphi} \in \mathcal{H}^0(\bar{R}_+) \iff \sum n^{-2\alpha} < +\infty \iff 2\alpha > 1.$$

Si $2t - 1 < 2\alpha < 1$, ce qui est possible lorsque $t < 1$, alors $\varphi \in \mathcal{K}^t$ et $\varphi \notin \mathcal{H}^1(\bar{R}_+)$. Donc, pour $t < 1$, $\mathcal{K}^t \not\subset \mathcal{H}^1(\bar{R}_+)$.

Démonstration de 3.2.

3.2 peut se déduire de 3.1 par dualité; on peut aussi le montrer directement, par récurrence, pour s entier, à l'aide des lemmes. Pour $s = 0$, $\mathcal{K}^0 = \overset{\circ}{\mathcal{H}}^0(\bar{R}_+) = L^2[0, \infty]$. Supposons la formule 3.2. démontrée jusqu'à l'indice $s - 1$. Alors, si $T \in \mathcal{H}^{-s}(\bar{R}_+)$; il existe $\mathcal{C} \in \overset{\circ}{\mathcal{H}}^{-(s-1)}(\bar{R}_+)$ tel que $T = \theta \mathcal{C}$ (Lemme 1.2); donc, d'après l'hypothèse de récurrence, $\mathcal{C} \in \mathcal{K}^{-(s-1)}$; et, d'après le lemme 2.2, $T = \theta \mathcal{C} \in \mathcal{K}^{-s}$.

La formule 3.2. s'étend, comme la formule 3.1, au cas où s n'est pas entier.

Comme 3.1, on montre qu'elle ne peut pas être « améliorée », c'est-à-dire que pour $t > 1$, $\overset{\circ}{\mathcal{H}}^{-s} \not\subset \mathcal{K}^{-t}$. Ici encore on peut se ramener au cas $s = 1$.

Soit $T = \sum a_n \overline{\mathcal{L}_n(x)}$; prenons $a_n = n^\alpha$; si $T = \mathcal{D}\mathcal{C}$, \mathcal{C} a pour série de Laguerre $\mathcal{C} = \sum b_n \overline{\mathcal{L}_n(x)}$, avec $b_n = a_n - a_{n-1} \asymp \alpha n^{\alpha-1}$.

Alors :

$$T \in \mathcal{K}^{-t} \iff \sum |a_n|^2 n^{-2t} < +\infty \iff \sum n^{2\alpha-2t} < +\infty \iff 2\alpha < 2t - 1$$

$$T \in \mathring{\mathcal{H}}^{-1}(\bar{R}_+) \iff \mathcal{C} \in \mathring{\mathcal{H}}^0(\bar{R}_+) \iff \sum |b_n|^2 < +\infty \iff \sum n^{2\alpha-2} < +\infty$$

$$\iff 2\alpha < 1.$$

Si $2t - 1 < 2\alpha < 1$, ce qui est possible pour $t < 1$, alors $T \in \mathring{\mathcal{H}}^{-1}(\bar{R}_+)$ et $T \notin \mathcal{K}^{-t}$; donc, pour $t < 1$, $\mathring{\mathcal{H}}^{-1}(\bar{R}_+) \not\subset \mathcal{K}^{-t}$.

CHAPITRE III

POLYNOMES DE JACOBI

1. Opérateur de Jacobi $D_{\alpha, \beta}$.

α, β étant des nombres réels > -1 , considérons l'opérateur $f \rightarrow D_{\alpha, \beta} f$ défini par :

$$D_{\alpha, \beta} f = \frac{d}{dx} \left[(1-x)^{1-\alpha} (1+x)^{1-\beta} \frac{d}{dx} ((1-x)^\alpha (1+x)^\beta f) \right].$$

f est, pour le moment, une fonction suffisamment dérivable sur $[-1, 1]$. (On posera $\Omega =]-1, 1[$, donc $\bar{\Omega} = [-1, 1]$).

En développant, sous obtenons :

$$D_{\alpha, \beta} f = (1-x^2) \frac{d^2 f}{dx^2} + (\beta - \alpha - (\beta + \alpha + 2)x) \frac{df}{dx} - (\beta + \alpha) f.$$

Les *polynômes de Jacobi* $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ vérifient ([13], p. 60)

$$D_{\alpha, \beta} (P_n^{(\alpha, \beta)}(x)) = - (n + \alpha + \beta) (n + 1) P_n^{(\alpha, \beta)}(x), \quad n \text{ entier } \geq 0.$$

Ce sont des *fonctions propres* de $D_{\alpha, \beta}$ pour les valeurs propres

$$- (n + \alpha + \beta) (n + 1).$$

Cas particuliers $\alpha = \beta = 0$, polynômes de Legendre,

$$\alpha = \beta = -\frac{1}{2} \quad \gg \quad \gg \quad \text{Tchebychev, etc.}$$

REMARQUE : le polynôme de Jacobi $p_n^{\alpha, \beta}$, usuel (non normalisé) peut être défini par

$$(1-x)^\alpha (1+x)^\beta p_n^{\alpha, \beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \{ (1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta} \}.$$

Le polynôme $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, qui lui est colinéaire, et normalisé, c'est-à-dire tel que

$$\int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \{ P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \}^2 dx = 1$$

vérifie

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \left(\frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n + \alpha + \beta + 1} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\Gamma(n + \alpha + 1) \Gamma(n + \beta + 1)}{\Gamma(n + 1) \Gamma(n + \alpha + \beta + 1)} \right)^{-\frac{1}{2}} p_n^{(\alpha, \beta)}(x)$$

([13] p. 67-68)

$D_{\alpha, \beta}$ est autoadjoint pour la forme bilinéaire

$$(f, g) = \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta f(x) \overline{g(x)} dx,$$

autrement dit : $(D_{\alpha, \beta} f, g) = (f, D_{\alpha, \beta} g)$ (on suppose $f, g \in \mathcal{D}^2(\overline{\Omega})$, de sorte que toutes les intégrales ci dessous existent).

En effet,

$$\begin{aligned} (D_{\alpha, \beta} f, g) &= \\ &= \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \frac{d}{dx} \left[(1-x)^{1-\alpha} (1+x)^{1-\beta} \frac{d}{dx} ((1-x)^\alpha (1+x)^\beta f) \right] \overline{g} dx \\ &= \left[(1-x^2) \frac{d}{dx} [(1-x)^\alpha (1+x)^\beta f] \overline{g} \right]_{-1}^1 \\ &\quad - \int_{-1}^1 (1-x)^{1-\alpha} (1+x)^{1-\beta} \frac{d}{dx} [(1-x)^\alpha (1+x)^\beta f] \frac{d}{dx} [(1-x)^\alpha (1+x)^\beta \overline{g}] dx. \end{aligned}$$

La partie intégrée est nulle et dans l'intégrale restante f et \overline{g} jouent un rôle symétrique : donc $(D_{\alpha, \beta} f, g) = (f, D_{\alpha, \beta} g)$.

2. Séries de Jacobi.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$; alors $(\varphi, P_n^{(\alpha, \beta)})$ existe ; posons

$$a_n(\varphi) = (\varphi, P_n^{(\alpha, \beta)}) = \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \varphi(x) P_n^{(\alpha, \beta)}(x) dx ;$$

$a_n(\varphi)$ est le n -ième coefficient de Jacobi de φ ; $\sum a_n(\varphi) P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ est la série de Jacobi de φ (pour les constantes α et β).

Coefficients de Jacobi de $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$.

Soient α, β fixes > -1 . Les $P_n^{(\alpha, \beta)}$ forment un système orthonormal pour la forme bilinéaire définie ci-dessus. Alors, d'après l'inégalité de Bessel

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(\varphi)|^2 < +\infty \text{ d'où } a_n(\varphi) = 0 \text{ (1).}$$

Soit $D_{\alpha, \beta}^k$ l'opérateur $D_{\alpha, \beta}$ itéré k fois. (k entier > 0).

Alors

$$\begin{aligned} a_n(D_{\alpha, \beta}^k \varphi) &= (D_{\alpha, \beta}^k \varphi, P_n^{(\alpha, \beta)}) = (\varphi, D^k P_n^{(\alpha, \beta)}) = \\ &= [-(n + \alpha + \beta)(n + 1)]^k (\varphi, P_n^{(\alpha, \beta)}) = [-(n + \alpha + \beta)(n + 1)]^k a_n(\varphi) \end{aligned}$$

par ailleurs $a_n(D_{\alpha, \beta}^k \varphi) = 0$ (1).

D'où $a_n(\varphi) = 0$ (n^{-2k}) quel que soit k .

D'où : la suite des coefficients $a_n(\varphi)$ est à décroissance rapide.

3. Majoration des polynômes de Jacobi et de leurs dérivées sur $[-1, 1]$.

De la formule entre polynômes de Jacobi « usuels » ([13], p. 63)

$$\frac{d}{dx} (p_n^{(\alpha, \beta)}(x)) = \frac{1}{2} (n + \alpha + \beta + 1) p_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(x)$$

en itérant k fois la dérivation, on obtient

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k (p_n^{(\alpha, \beta)}(x)) = \frac{1}{2^k} (n + \alpha + \beta + 1)(n + \alpha + \beta + 2) \dots (n + \alpha + \beta + k) p_{n-k}^{(\alpha+k, \beta+k)}(x).$$

Or $\sup_{x \in [-1, 1]} p_{n-k}^{(\alpha+k, \beta+k)}(x) = \binom{n-k+q}{n-k} \asymp (n-k)^q$ quand $n \rightarrow \infty$ si

$\sup(\alpha + k, \beta + k) \geq -\frac{1}{2}$, en posant $q = \sup(\alpha + k, \beta + k)$; d'autre part

$\sup_{x \in [1, 1]} |p_{n-k}^{(\alpha+k, \beta+k)}(x)| \asymp n^{-\frac{1}{2}}$, si $\sup(\alpha + k, \beta + k) < -\frac{1}{2}$ ([13], p. 168).

Donc, en posant $q = \sup(\alpha + k, \beta + k)$ si $\sup(\alpha + k, \beta + k) \geq -\frac{1}{2}$, et

$q = -\frac{1}{2}$ si $\sup(\alpha + k, \beta + k) < -\frac{1}{2}$ (ce dernier cas suppose $k = 0$), on a dans tous les cas

$$\sup \left| \left(\frac{d}{dx}\right)^k p_n^{(\alpha, \beta)}(x) \right| \asymp \frac{1}{2^k} n^{q+k} \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Revenons au polynôme normalisé $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$; nous avons $P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \asymp \left(\frac{n}{2^{\alpha+\beta}}\right)^{-\frac{1}{2}} p_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ quand $n \rightarrow \infty$. D'où

$$\sup \left| \left(\frac{d}{dx}\right)^k P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \right| \asymp \frac{n^{q+k-\frac{1}{2}}}{2^{k-\frac{\alpha+\beta}{2}}}.$$

4. Convergence de la série de Jacobi de $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$.

Considérons la série de Jacobi d'une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$, soit $\sum a_n P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$. Comme $|P_n^{(\alpha, \beta)}(x)|$ est majoré sur $[-1, 1]$ par un polynôme en n , pour n assez grand, qu'il est de même pour chacune de ses dérivées; comme, d'autre part, la suite des $a_n(\varphi)$ est à décroissance rapide, la série $\sum a_n P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ converge uniformément ainsi que ses dérivées sur $[-1, 1]$.

Donc cette série converge dans $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$. Elle converge vers une fonction dont les coefficients de Jacobi sont les $a_n(\varphi)$, et qui coïncide donc avec φ , puisque les $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ forment un système total sur $[-1, 1]$.

5. Coefficients de Jacobi des distributions.

Soit T une distribution ayant un support contenu dans l'ouvert $\Omega =]-1, 1[$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$. Sur le support de T , la fonction $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta \varphi$ est C^∞ (elle ne l'est pas en général dans $\bar{\Omega}$).

Alors $\langle T, (1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n^{(\alpha, \beta)} \rangle$ existe.

D'autre part, toute fonction C^∞ à support dans Ω peut s'écrire $\tilde{\Phi} = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta \varphi$, φ étant une fonction C^∞ qui peut être prolongée par une fonction C^∞ dans $\bar{\Omega}$.

Si u est une fonction définie dans une partie de \mathbb{R} contenant $[-1, 1]$, on appelle $\tilde{u}(x)$ la fonction égale à $u(x)$ pour $x \in [-1, 1]$ et à zéro à l'extérieur de cet intervalle.

Alors puisque $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta \varphi = \tilde{\Phi} \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\langle \tilde{P}_n^{(\alpha, \beta)}, (1-x)^\alpha(1+x)^\beta \varphi \rangle \text{ existe.}$$

Soit $\sum a_n P_n^{(\alpha, \beta)}$ le développement de Jacobi de φ . Alors : (dans ce qui suit, nous écrivons P_n au lieu de $P_n^{(\alpha, \beta)}$)

$$\begin{aligned} & \left\langle \sum_{n=0}^N \langle T, (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n \rangle \tilde{P}_n, (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \varphi \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{n=0}^N \langle T, (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n \rangle \tilde{P}_n, (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \sum_{n=0}^N a_n P_n \right\rangle \\ &= \sum_{n=0}^N a_n \langle T, (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n \rangle \text{ à cause de l'orthonormalité des } P_n \\ &= \left\langle T, (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \sum_{n=0}^N a_n P_n \right\rangle. \end{aligned}$$

Quand $N \rightarrow \infty$, $(1-x)^\alpha (1+x)^\beta \sum a_n P_n$ converge uniformément ainsi que ses dérivées sur le support de T ; la dernière expression obtenue tend donc vers $\langle T, (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \varphi \rangle$, et la série $\sum_{n=0}^\infty \langle T, (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n^{\alpha, \beta} \rangle \tilde{P}_n^{\alpha, \beta}$ que nous appellerons *série de Jacobi* de T , converge vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Les coefficients de Jacobi de la distribution T ,

$$b_n = \langle T, (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \cdot P_n^{\alpha, \beta}(x) \rangle$$

forment une suite à *croissance lente* (même démonstration que pour les séries de Legendre).

6. Montrons maintenant que si une distribution T a son support contenu dans $\bar{\Omega}$, (et non dans Ω), il n'existe en général pas de série de Jacobi convergeant vers T , si α ou β est $\neq 0$.

Montrons par exemple que pour $\alpha \neq 0$, aucune série de Jacobi ne converge vers la mesure de Dirac au point $+1$, notée δ_1 .

En effet, supposons que $\sum_{n=0}^\infty b_n \tilde{P}_n^{(\alpha, \beta)} = \delta_1$; $\sum_{n=0}^\infty b_n \tilde{P}_n^{(\alpha, \beta)}$ est alors une mesure, elle peut être prolongée aux fonctions continues sur $[-1, 1]$.

En particulier, si $\alpha > 0$,

$$\left\langle \sum_{n=0}^\infty b_n \tilde{P}_n^{(\alpha, \beta)}, (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_k^{(\alpha, \beta)} \right\rangle = 0 \text{ pour tout entier } k.$$

Mais l'orthogonalité des $P_n^{(\alpha, \beta)}$ entraîne

$$\left\langle \sum_{n=0}^\infty b_n \tilde{P}_n^{(\alpha, \beta)}, (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_k^{(\alpha, \beta)} \right\rangle = b_k.$$

δ_1 aurait donc un développement en série de Jacobi dont tous les coefficients seraient nuls, ce qui est impossible.

Dans le cas $\alpha < 0$ on montrerait de même que tous les coefficients de Jacobi de δ_1 seraient infinis.

7. Réciproque.

Une série de Jacobi $\sum b_n \tilde{P}_n^{(\alpha, \beta)}$ dont la suite des coefficients est à croissance lente converge vers une distribution de $\mathcal{D}'(\Omega)$ qui ne se prolonge pas nécessairement en une distribution de $\mathcal{D}'(\bar{\Omega})$.

En effet, si les b_n sont à croissance lente, il existe un entier k tel que

$$\sum \frac{b_n P_n^{(\alpha, \beta)}}{(-1)^k (n + \alpha + \beta)^k (n + 1)^k}$$

converge vers une fonction f continue sur Ω ; sur l'ouvert Ω , $\sum b_n P_n^{(\alpha, \beta)}$ converge vers $D_{\alpha, \beta}^k(f)$, qui est donc une distribution sur Ω . (En effet, les singularités des coefficients de $D_{\alpha, \beta}$ n'existent qu'aux bornes de l'intervalle Ω).

Ce raisonnement ne s'applique pas aux distributions de $\mathcal{D}'(\bar{\Omega})$, l'opérateur $D_{\alpha, \beta}$ n'étant en général pas défini aux bornes de l'intervalle Ω .

Montrons, sur un exemple, qu'une série de Jacobi dont la suite des coefficients est à croissance lente ne définit pas nécessairement une distribution de $\mathcal{D}'(\bar{\Omega})$. Ainsi, pour α et $\beta > 0$, la série

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (2n + \alpha + \beta) p_{2n}^{(\alpha, \beta)}(x) = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (2n + \alpha + \beta) \left(\frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(2n + \alpha + 1) \Gamma(2n + \beta + 1)}{(4n + \alpha + \beta + 1) \Gamma(2n + 1) \Gamma(2n + \alpha + \beta + 1)} \right)^{\frac{1}{2}} P_{2n}^{(\alpha, \beta)}(x) \end{aligned}$$

a ses coefficients à croissance lente, et cependant

$$\left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (2n + \alpha + \beta) \tilde{p}_{2n}^{(\alpha, \beta)}, 1 \right\rangle \quad \text{n'est pas défini, autrement dit la série}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-1}^1 \frac{1}{2} (2n + \alpha + \beta) p_{2n}^{(\alpha, \beta)}(x) dx \right) \quad \text{est divergente.}$$

En effet, de la formule ([13], p. 63)

$$\frac{d}{dx} (p_{2n+1}^{(\alpha-1, \beta-1)}(x)) = \frac{1}{2} (2n + \alpha + \beta) p_{2n}^{(\alpha, \beta)}(x),$$

on déduit

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{2} (2n + \alpha + \beta) p_{2n}^{(\alpha, \beta)}(x) dx = p_{2n+1}^{(\alpha-1, \beta-1)}(1) - p_{2n+1}^{(\alpha-1, \beta-1)}(-1).$$

Or

$$p_{2n+1}^{(\alpha-1, \beta-1)}(1) = \binom{2n + \alpha}{2n + 1} \circlearrowleft (2n + 1)^{\alpha-1}$$

et

$$p_{2n+1}^{(\alpha-1, \beta-1)}(-1) = (-1)^{2n+1} \binom{2n + \beta}{2n + 1} \circlearrowleft - (2n + 1)^{\beta-1}.$$

D'où

$$p_{2n+1}^{(\alpha-1, \beta-1)}(1) - p_{2n+1}^{(\alpha-1, \beta-1)}(-1) \circlearrowleft \begin{cases} (2n + 1)^{q-1} & \text{si } \alpha \neq \beta, q = \sup(\alpha, \beta) \\ 2(2n + 1)^{\alpha-1} & \text{si } \alpha = \beta. \end{cases}$$

Dans tous les cas

$$\left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (2n + \alpha + \beta) p_{2n}^{(\alpha, \beta)}, 1 \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} (p_{2n+1}^{(\alpha-1, \beta-1)}(1) - p_{2n+1}^{(\alpha-1, \beta-1)}(-1)),$$

cette somme est infinie.

Donnons un autre contre-exemple avec α et $\beta < 0$; considérons les polynômes de Tchebychev $P_n^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(x)$, définis par $P_n^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(\cos \vartheta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos n \vartheta$.

Considérons la somme finie

$$1 + \sqrt{2\pi} \sum_{n=1}^N P_{2n}^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(x) = 1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos 2n \vartheta = \frac{\sin(2N+1)\vartheta}{\sin \vartheta} = S_N(x).$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \langle \tilde{S}_N(x), P_k^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(x) \rangle &= \int_{-1}^1 S_N(x) P_k^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(x) dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \sin(2N+1)\vartheta \cos k\vartheta d\vartheta = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1}{2N+k+1} + \frac{1}{2N-k+1} \right) \end{aligned}$$

si k est pair. Cette expression tend vers zéro quand $N \rightarrow \infty$. Le premier

membre est nul, si k est impair. Or $1 + 2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} P_{2n}^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(x)$ est une série de Jacobi dont les coefficients sont à croissance lente. Nous pouvons considérer que cette série converge vers une distribution qui annule tous les $P_k^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(x)$, donc toutes les fonctions de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$; c'est donc une distribution nulle sur $[-1, 1]$; il n'y a donc pas unicité de la représentation des distributions sur $[-1, 1]$ par des séries de polynômes de Tchebychev.

D'une façon analogue, les fonctions de Laguerre générales

$$\mathcal{L}_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{\sqrt{\Gamma(\alpha+1) \binom{n+\alpha}{n}}} e^{-\frac{x}{2}} L_n^{(\alpha)}(x), \alpha > -1$$

forment une base orthonormale de $L^2[0, \infty]$, les $L_n^{(\alpha)}(x)$ étant les polynômes de Laguerre généraux, vérifiant

$$e^{-x} x^\alpha L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n!} \left(\frac{d}{dx} \right)^n (e^{-x} x^{n+\alpha}).$$

On montrerait, comme pour les polynômes de Jacobi, qu'on peut représenter les fonctions de $\mathcal{S}(\bar{R}_+)$ par des séries $\sum a_n L_n^\alpha(x)$ dont les coefficients sont à décroissance rapide, mais que, pour $\alpha \neq 0$, il ne peut y avoir en général de représentation des distributions de $\mathcal{S}(\bar{R}_+)$ par des séries $\sum b_n \tilde{\mathcal{L}}_n^\alpha(x)$ dont les coefficients sont à croissance lente. (A cause du facteur $x^{\frac{\alpha}{2}}$).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. BAOUENDI et C. GOULAOUIC, *Comptes-rendus 266 série A* - 1968 p. 336.338 et *Archive for rational mechanics and analysis* Vol. 34, N 5, 1969, p. 361-379.
- [2] M. GUILLEMOT-TEISSIER, *Comptes-rendus 262 série A* - 1966 p. 1159.1157.
- [3] M. GUILLEMOT-TEISSIER, *Comptes-rendus 265 série A* - 1967 p. 419.421.
- [4] M. GUILLEMOT-TEISSIER, *Comptes-rendus 265 série A* - 1967 p. 461.464.
- [5] HARDY, LITTLEWOOD, POLYA, *Inequalities* - Cambridge 1952.
- [6] E. W. HOBSON, *Spherical and ellipsoidal harmonics*. Chelsea.
- [7] L. HORMANDER, *Linear partial differential operators* - Springer-Verlag, Berlin.
- [8] J. L. LIONS, *Bull. Math. Soc. Sc. math. Phys. R. P. Roumaine, nouv. série 2* (50) n° 4, 1958, p. 419.432.
- [9] MITIAGIN, *Uspeki Math. Nauk* 16. 1961 p. 63.132.
- [10] L. ROBIN, *Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroïdales Gauthier-Villars, Paris* (3 volumes).
- [11] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris 1966.
- [12] L. SCHWARTZ, *Ecuaciones diferenciales parciales elípticas* - Bogota 1956.
- [13] G. SZEGO, *Orthogonal polynomials* - Am. Math. Soc. Colloquium 1959.
- [14] H. TRIEBEL, *Math. Annalen* 177 (1968) p. 247.264.
- [15] M. ZERNER, *Comptes-rendus 268 série A* 1969 - p. 218.220.