ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

A. ABDIK

Dérivation sur un groupe localement compact et abélien

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 25, nº 2 (1971), p. 269-290

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1971_3_25_2_269_0>

DÉRIVATION SUR UN GROUPE LOCALEMENT COMPACT ET ABÉLIEN

A. Abdik

Chapitre I

DÉRIVEE CONVOLUTIVE DANS UN GROUPE ABÉLIEN LOCALEMENT COMPACT

I. Quelques propriétés importantes.

1.1.1. - 1. *Notations*. Dans tout ce qui suit G désignera toujours un groupe localement compact abélien et nous écrirons : G est LCA. La loi de composition de G sera notée multiplicativement, e désignera son élément neutre et m sa mesure de Haar. Si H est un sous-groupe fermé de G, nous noterons par m_H sa mesure de Haar, par $m_{G/H}$ celle de G/H. Nous noterons par H le sous-groupe de $\widehat{G}$ orthogonal à H. $\widehat{G}$ étant le groupe dual de G, $\widehat{e}$ son élément neutre et λ sa mesure de Haar.

Chaque fois que nous parlerons d'une fonction sur G, il s'agira toujours d'une fonction définie sur G à valeurs complexes. $K(G)$, $C^0(G)$, $C^\infty(G)$, $C(G)$ désigneront respectivement l'ensemble des fonctions continues sur G, à support compact ; l'ensemble des fonctions continues sur G, nulles à l'infini ; l'ensemble des fonctions continues et bornées sur G, l'ensemble des fonctions continues sur G. Chaque espace cité sera muni de sa topologie habituelle. $L^1(G)$ sera l'ensemble des fonctions définies sur G, m-intégrables ; $M^1(G)$ sera l'ensemble des mesures bornées sur G. $L^1(G)$ et $M^1(G)$ seront munis de leurs topologies habituelles.

Pervenuto alla Redazione il 24 Giugno 1970.

Nous noterons i_H l'application canonique de G sur G/H. Si f est une fonction définie sur G/H, l'application $j_H: f \longrightarrow f \circ i_H$ permet d'identifier f avec une fonction définie sur G, invariante par H.

1.1.2. - 2. Nous annoncerons, sans démontrer, les propriétés suivantes.

1.1.2. PROPRIÉTÉ 1. Soit H un sous groupe fermé du groupe G, LCA. En choisissant bien m, m_H et $m_{G/H}$, on a :

a) $M^1(G/H)$ est l'image de $M^1(G)$ par i_H.

b) l'application π_H: $g \longrightarrow g * m_H$, $g \in L^1(G)$, est un homomorphisme surjectif de $L^1(G)$ sur $L^1(G/H)$

$$\int_G g(x)\, dm(x) = \int_{G/H} (g * m_H)(\dot{x})\, dm_{G/H}(\dot{x}); \quad \dot{x} = i_H(x)$$

voir [1].

1.1.2. PROPRIÉTÉ 2. Si $f \in L^1(G)$, $\widehat{f} = \mathcal{F} f$ est la transformée de Fourier de f. $\widehat{f}(y) = \int_G \langle x, y \rangle f(x)\, dm(x)$, $y \in \widehat{G}$. Si $\widehat{f} \in L^1(G)$, on a :

$$f(x) = \int_{\widehat{G}} \langle x, y \rangle \widehat{f}(y)\, d\lambda(y) = (\overline{\mathcal{F}} \widehat{f})(x).$$

On sait que $\widehat{f}(y)$ est définie $\forall y \in \widehat{G}$, et $\widehat{f}$ est une fonction continue sur $\widehat{G}$ et nulle à l'infini. Si f et $g \in L^1(G)$, $\mathcal{F}(f * g) = \widehat{f}\, \widehat{g}$. Soit $A(G) = \mathcal{F}(L^1(G))$. $A(G)$ est une algèbre partout dense dans $C^0(\widehat{G})$; en outre $\mathcal{F}$ est une *application linéaire*, continue et injective de $L^1(G)$ dans $C^0(\widehat{G})$.

Si $\mu \in M^1(G)$, $\mathcal{F}\mu = \widehat{\mu}$ est la transformée de Fourier de la mesure bornée μ; $\widehat{\mu}$ est une fonction continue et bornée sur $\widehat{G}$. L'image de l'algèbre $M^1(G)$ par $\mathcal{F}$ sera notée par $B(\widehat{G})$ qui est une sous-algèbre de $C^\infty(G)$, $\mathcal{F}$ est encore linéaire, continue et injective. Voir [1].

1.1.2. PROPRIÉTÉ 3. Soient H un sous-groupe fermé de G, $H^\perp$ le sous-groupe de $\widehat{G}$ orthogonal à H, μ une mesure bornée sur $\widehat{G}$. Pour que $\widehat{\mu} = \mathcal{F}\mu$ soit invariante par H il faut et il suffit que le support de μ soit contenu dans $H^\perp$. Voir [1].

1.1.3. - *Nous allons tirer quelques résultats.*

1.1.3. Proposition 1. Soient H un sous-groupe fermé de G, $H^\perp$ le sous-groupe orthogonal dans $\widehat{G}$, μ, une mesure bornée dans G, v son image dans G/H. Alors $\mathcal{F}v$ est la restriction de $\mathcal{F}\mu$ à $H^\perp$.

Cette proposition est évidente quand on identifie $H^\perp$ au dual de G/H.

1.1.3. Proposition 2. Soient H un sous-groupe fermé de G, LCA, $H^\perp$ le sous-groupe orthogonal à H dans $\widehat{G}$, $f \in L^1(G)$, $\pi_H(f) = f * m_H = \dot{f}$. La restriction de $\widehat{f}$ à $H^\perp$ est égale à la transformée de Fourier de $\pi_H(f)$.

C'est une conséquence de la propriété 1 - (1.1.2.) et de la proposition 1 - (1.1.3.).

Corollaire 1. Soient H un sous-groupe fermé de G, H son orthogonal dans $\widehat{G}$. On a alors les résultats suivants:

1⁰) Les fonctions de $A(H^\perp)$ sont les restrictions à $H^\perp$ des fonctions appartenant à $A(\widehat{G})$. Les fonctions de $B(H^\perp)$ sont les restrictions à $H^\perp$, des fonctions appartenant à $B(\widehat{G})$.

2⁰) Pour que $f * m_H = 0$, $f \in L^1(G)$, il faut et il suffit que la restriction de $\widehat{f}$ à $H^\perp$ s'annulle.

La première partie est le résultat de la propriété 1 - (1.1.2). La deuxième partie est évidente.

Corollaire 2. Soient H un sous-groupe fermé de G, LCA, $H^\perp$ son orthogonal dans $\widehat{G}$, $g \in L(G)$. On suppose les hypothèses suivantes vérifiées:

a) l'application : $x \longrightarrow \int_H g(xh)\, dm_H(h)$, $(x \in G)$, est continue.

b) la restriction de $\mathcal{F}g$ à $H^\perp$ est $\lambda_{H^\perp}$-intégrable. On a alors :

$$\int_H g(h)\, dm_H(h) = \int_{H^\perp} (\mathcal{F}g)(\gamma)\, d\lambda_{H^\perp}(\gamma).$$

La mesure gm sur G, a pour image dans G/H la mesure $\dot{g}m_{G/H}$ (où $i(x) = \dot{x}$, $\dot{g} = g * m_H$) ; $\dot{g}$ est continue intégrable (hypothèse : a) $\int_H g(h)\, dm_H(h)$ est la valeur de la $\dot{g}$ en l'élément neutre de G/H. $\int_{H^\perp} (\mathcal{F}g)(\gamma)\, d\lambda_{H^\perp}(\gamma)$ est la valeur de la transformée de Fourier de la mesure bornée $(\mathcal{F}g)\lambda_{H^\perp}$ en l'élément neutre de G/H. D'où la proposition.

Remarquons que $\int\limits_{H} (g(h))\, dm_H(h)$ peut être considéré comme la valeur de la transformée de Fourier de la mesure bornée gm_H en l'élément neutre de $\widehat{G}/H^{\perp}$.

1.1.4. - On sait, [1], que $A(\widehat{G})$ est partout dense dans $C^0(\widehat{G})$ et dans $C(\widehat{G})$. Il en résulte qu'à partir de $L^1(G)$ on peut obtenir toutes les fonctions continues sur $\widehat{G}$, $A(\widehat{G})$ étant muni de la topologie de la convergence uniforme, son complété est $C^0(\widehat{G})$; si l'on munit $A(\widehat{G})$ de la topologie de la convergence compacte son complété redonne $C(\widehat{G})$.

Munissons $A(\widehat{G})$ de la topologie de la convergence uniforme, alors toute forme lineaire continue sur $A(\widehat{G})$ peut être identifiée à une mesure bornée sur $\widehat{G}$. De même, toute forme linéaire continue sur $A(\widehat{G})$ quand on munit $A(\widehat{G})$ de la topologie de la convergence compacte peut être identifiée à une mesure à support compact sur $\widehat{G}$. De plus, comme l'application : $\mathcal{F}: f \longrightarrow \widehat{f}$ est linéaire, injective continue de $L^1(G)$ dans $C^0(\widehat{G})$, sa transposée $\overline{\mathcal{F}}$ est une application linéaire et faiblement continue de $M^1(\widehat{G})$ dans $L^\infty(G)$; $L^\infty(G)$ est le dual de $L^1(G)$.

II. Certaines propriétés des sous-groupes.

1.2.1. - 1. Les sous-groupes d'un groupe G, LCA, vont jouer un rôle important dans la suite, nous allons les étudier de près.

1.2.1. THÉORÈME 1. *Pour qu'un sous-groupe fermé H d'un groupe G, LCA soit non-ouvert, il faut et il suffit qu'il soit localement m-négligeable.*

Il est m-mesurable, s'il n'est pas localement m - négligeable, alors $H\bar{H}^{-1} = H$ est un voisinage de e, donc H est ouvert.

Si H est localement m-négligeable, comme le support de m est G, H n'est pas ouvert.

REMARQUE 1. Soit H un sous-groupe fermé de G. Si H n'est pas ouvert, alors m et m_H sont étrangères. Par contre si H est ouvert, on a alors $m_H = \alpha(m/H)$, α étant une constante ; m/H : la restriction de m à H.

REMARQUE 2. Tout sous-groupe K compact et non ouvert de G est m-négligeable.

COROLLAIRE 1. Soit G un groupe LCA, et non-discret. Alors tout sous groupe H discret de G est non-ouvert; $H^{\perp}$ n'est pas compact dans $\widehat{G}$.

H est localement m-négligeable (puisque m est une mesure diffuse). Donc H est non-ouvert: théorème 1 — (1.2.1.) — il en résulte que $H^{\perp}$ est non compact.

1.2.1. PROPOSITION 1. *Soit P une partie m-mesurable de G; si P n'est pas localement m-négligeable, alors le sous-groupe H engendré par P est nécessairement ouvert.*

$P \subset H$, et par hypothèse H n'est pas localement m-négligeable, H est ouvert: théorème 1. (1.2.1.).

COROLLAIRE 1. Soit $g \in L^1(G)$, $g \neq 0$; le support $S(g)$ de g engendre un sous-groupe H ouvert.

$S(g)$ n'est pas localement m-négligeable; donc H est ouvert: proposition 1 - (1.2.1.). Voici une autre preuve: $\mathcal{F}g = \widehat{g}$ est continue sur $\widehat{G}$, invariante par $H^{\perp}$ qui est nécessairement compact puisque $\widehat{g}$ est nulle à l'infini, donc H est ouvert.

1.2.1. PROPOSITION 2. *Soient H un sous-groupe fermé de G, H_1 un autre sous-groupe fermé contenu dans H. Pour que H_1 soit localement m_H-négligeable, il faut et il suffit que H_1 ne soit pas ouvert relativement à H. Dans le cas où H est non ouvert et compact dans G, H_1 supposé ouvert relativement à H, alors H_1 n'est pas localement m_H-négligeable, alors qu'il est localement m-négligeable; de plus H/H_1 constitué d'un nombre fini d'éléments.*

C'est une simple conséquence du théorème 1 - (1.2.1.) appliqué H.

Remarquons que si l'on se donne un sous groupe H fermé de G, alors $g \in L^1(H)$ peut être identifiée à une mesure bornée gm_H de G. Donc la transformée de Fourier de $g \cdot m_H$ est un élément de $B(\widehat{G})$ et aussi de $A(\widehat{G}/H^{\perp})$; mais non de $A(\widehat{G})$.

III. Une autre caractérisation.

1.3.1. - 1. Désignons par Hom (G, R), l'espace vectoriel formé par les représentations réelles et continues de G. Sur Hom (G, R) la topologie de la convergence simple et la topologie de la convergence compacte sont identiques. Hom (G, R) muni de l'une des deux topologies devient un espace complet et localement convexe. Hom (G, R) et Hom $(R, \widehat{G})$ sont isomorphes. Si H est un sous-groupe ouvert de G, l'application Q_H qui fait correspondre à $l \in$ Hom (G, R) sa restriction $Q_H(l)$ à H, est linéaire continue, surjective. (Cf. : [2], page 48).

1.3.1. PROPOSITION 1. *Si H est un sous-groupe ouvert d'un groupe G, LCA ;* Hom (H, R) *est isomorphe à l'espace quotient de* Hom (G, R) *par* Hom $(G/H, R)$.

C'est une autre formulation du théorème 1, ch. 1 de Ries [2].

COROLLAIRE 1. Si H est un sous-groupe ouvert de G, tel que :

$$\mathrm{Hom}\,(H, R) = \{0\},$$

alors Hom $(G, R) =$ Hom $(G/H, R)$.

C'est une conséquence de la proposition 1 - (1.3.1.).

1.3.1. PROPOSITION 2. *Soit G un groupe LCA, alors* Hom (G, R) *est un espace de Baire.*

$G = R^n \times G'$ où G' admet un sous-groupe ouvert compact G'' [3]. Donc

$$\mathrm{Hom}\,(G, R) = \mathrm{Hom}\,(R^n \times G', R) \simeq R^n \times \mathrm{Hom}\,(G', R).$$

D'autre part, Hom $(G'', R) = \{0\}$, car G'' est compact, donc :

$$\mathrm{Hom}\,(G', R) = \mathrm{Hom}\,(G'/G'', R).$$

Corollaire 1 de la proposition 1 - (1.3.1.). Il en résulte que :

$$\mathrm{Hom}\,(G, R) \simeq R^n \times \mathrm{Hom}\,(G'/G'', R),$$

on sait [2] que Hom $(G'/G'', R)$ est un espace de Baire : G'/G'' est discret : Hom (G, R) est un espace de Baire.

1.3.1. THÉORÈME 1. Si H_1 est un sous-groupe fermé de G, LCA, à chaque $l_1 \in$ Hom (H_1, R) il correspond $l \in$ Hom (G, R) telle que la restriction de l à H_1 est l_1 (Cf. [4]).

1.3.1. LEMME 1. *Soient G un groupe LCA et $x \in G$. Ou bien $n \longrightarrow x^n$ est un isomorphisme de Z sur son image ou bien l'image de Z par cette représentation est un sous-groupe relativement compact de G.* Voir : A. Weil [3].

1.3.2. - 2. Nous allons étudier certaines caractéristiques d'un groupe G, LCA.

1.3.2. DEFINITIONS. *Soient G un groupe LCA et $a \in G$.*

1) *Nous dirons que a est un élément de torsion de G si l'ordre de a est fini.*

2) *Nous dirons que a est un élément compact de G s'il existe un sous-groupe compact K contenant a.*

Tout élément de torsion de G est évidemment un élément compact; mais la réciproque n'est pas toujours vraie: par exemple si G est compact tout élément de G est compact, mais il n'est pas en général un élément de torsion. Par contre si G est discret, alors tout élément compact de G est un élément de torsion.

1.3.2. THÉORÈME 1. *Soient G un groupe LCA et $x_0 \in G$; x_0 est un élément compact de G si et seulement si $l(x_0) = 0$, pour tout $l \in \mathrm{Hom}(G, R)$.*

x_0 est un élément compact de G; il existe, par définition un sous-groupe compact K contenant x_0. Or toute $l \in \mathrm{Hom}(G, R)$ s'annule sur K, donc

$$l(x_0) = 0, \qquad \forall\, l \in \mathrm{Hom}(G, R).$$

Supposons que $\forall\, l \in \mathrm{Hom}(G, R)$, $l(x_0) = 0$. Soit H le sous-groupe cyclique engendré par x_0; désignons par $\bar{H}$ sa fermeture. Si $\bar{H}$ n'est pas compact, il est nécessairement isomorphe à Z. Lemme 1 - (1.3.1.). Donc, alors, $\mathrm{Hom}(\bar{H}, R) \neq \{0\}$.

Soit alors $l_1 \in \mathrm{Hom}(\bar{H}, R)$, $l_1 \neq 0$, évidemment $l_1(x_0) \neq 0$. On sait — 1 - (1.2.1.) — qu'à l_1 il correspond $l \in \mathrm{Hom}(G, R)$ dont la restriction à $\bar{H}$ est l_1. On aura donc $l(x_0) \neq 0$; ce qui est contraire à l'hypothèse. Autrement dit $\bar{H}$ est nécessairement compact: lemme 1 - (1.3.1.); x_0 est donc un élément compact de G.

1.3.2. THÉORÈME 2. *L'ensemble des éléments compacts H_0, d'un groupe G, LCA; est un sous-groupe fermé de G.*

Considérons le sous-groupe H défini par:

$$H = \bigcap_l \overset{-1}{l}\{0\}, \quad l \in \mathrm{Hom}(G, R).$$

Si $x \in H$, $l(x) = 0$, $\forall\, l \in \mathrm{Hom}(G, R) \Longrightarrow H \subset H_0$: théorème 1 - (1.3.2.), en vertu du même théorème si $x \in H_0$, $l(x) = 0$ pour toute $l \in \mathrm{Hom}(G, R) \Longrightarrow$ $\Longrightarrow H_0 \subset H$. Donc $H_0 = H$ qui est évidemment un sous.groupe *fermé* de G.

Remarquons que si $x \notin H_0$, il existe alors $l_0 \in \mathrm{Hom}(G, R)$, telle que $l_0(x) \neq 0$.

1.3.2. PROPOSITION 1. *Soient G un groupe LCA et H un sous-groupe fermé de G. On suppose :*

1⁰) *aucun élément de H sauf e, n'est compact,*

2⁰) *aucun élément de G/H sauf $\dot{e}$, élément neutre de G/H, n'est compact. Alors G ne possède aucun élément compact.*

Il suffit de montrer que si $x \in G$ $(x \notin H)$, alors x n'est pas compact. Soit i_H: $G \longrightarrow G/H$. Si x est compact, il existe un sous-groupe compact K contenant x; alors $i_H(\dot{x})$ est compact en G/H, car il est contenu dans $i_H(K)$ qui est un sous groupe compact de G/H. Ce qui est contraire à l'hypothèse.

1.3.2. PROPOSITION 2. *Soient G un groupe LCA et H un sous-groupe ouvert de G. Si* $\mathrm{Hom}(H, R) \simeq \{0\}$ *et* $\mathrm{Hom}(G/H, R) = \{0\}$ *alors* $\mathrm{Hom}(G, R) = \{0\}$.

On a immédiatement:

$$\mathrm{Hom}(G, R) = \mathrm{Hom}(G/H, R).$$

Corollaire 1 de la proposition 1 - (1.3.1). Donc $\mathrm{Hom}(G, R) = \{0\}$.

1.3.2. PROPOSITION 3. *Soient G un groupe LCA et H_0 l'ensemble des éléments compacts de G; alors aucun élément de G/H_0 sauf $\dot{e} = i_{H_0}(e)$ n'est compact.*

H_0 est un sous-groupe fermé de G: théorème 2 - (1.3.2.). Soit $\dot{x} \in G/H_0$, $\dot{x} = xH_0$, $x \in G$, $(x \notin H_0)$, $x \notin H_0 \Longrightarrow \exists\, l_0 \in \mathrm{Hom}(G, R)$ telle que $l_0(x) \neq 0$ et $l_0(xH_0) = l_0(x)$, puisque l_0 s'annule sur H_0: théorème 1 - (1.3.2.). On voit qu'il existe

$$\widetilde{l}_0 \in \mathrm{Hom}(G/H_0, R),$$

telle que $\widetilde{l}_0(\dot{x}) = l_0(x) \neq 0$. Donc aucun élément de G/H_0 n'est compact.

1.3.2. NOTATIONS. Soient G un groupe LCA et $\widehat{G}$, le groupe dual. On désignera par :

g_0, (resp. γ_0), la composante connexe de e (resp. $\widehat{e}$)

H_0, (resp. Γ_0), l'ensemble des éléments compacts de G, (resp. $\widehat{G}$).

1.3.2. LEMME 1. *Soient G un groupe LCA et $\widehat{G}$ le groupe dual ; on a alors :*

$$g_0^{\perp} = \Gamma_0 , \; \Gamma_0^{\perp} = g_0 \quad \text{et} \quad \gamma_0^{\perp} = H_0 , \; H_0^{\perp} = \gamma_0 .$$

(voir Hewitt-Ross [5]).

1.3.2. THÉORÈME 3. *Soit G un groupe LCA, les trois propriétés sont équivalentes :*

(i) *G est connexe*

(ii) *tout élément de $\widehat{G}$ est non compact, sauf $\widehat{e}$*

(iii) *tout sous-groupe fermé de G, distinct de G, est localement m-négligeable.*

Pour l'équivalence de (i) et (ii) voir Hewitt-Ross [5], ou le lemme 1.1.3.2.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Aucun sous-groupe, sauf $\widehat{e}$ de $\widehat{G}$ n'est compact, puisque tout élément de $\widehat{G}$, sauf $\widehat{e}$ est non compact. Donc tout sous-groupe H fermé de G, $(H \neq G)$ est non ouvert, ce qui équivaut à : H est localement m-négligeable : théorème 1 - (1.2.1.).

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) : Si tout sous-groupe fermé H de G, $(H \neq G)$, est localement m-négligeable, alors H est non ouvert : théorème 1 - (1.2.1.), donc $\widehat{H}$ n'est pas compact dans $\widehat{G}$ D'où le résultat.

COROLLAIRE 1. Soient G un groupe LCA et $\widehat{G}$ le groupe dual. Il existe un sous-groupe fermé H de G, tel que G/H soit connexe, si et seulement si $\widehat{G}$ possède un élément non compact.

Si $y \in \widehat{G}$ est non compact, le sous-groupe cyclique Γ, engendré par y est isomorphe à Z ; $\widetilde{\Gamma} \simeq G/\Gamma^{\perp}$ est compact, connexe.

Si $H \neq G$ est un sous-groupe fermé de G, tel que G/H soit connexe, alors aucun élément de $(G/H)^{\wedge} \simeq H^{\perp}$, sauf $\widehat{e}$ n'est compact : théorème 3 - (1.3.2.).

1.3.2. THÉORÈME 4. *Soient G un groupe LCA et G le groupe dual. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *G est totalement discontinu*

(ii) $\mathrm{Hom}\,(R, G) = \{0\}$

(iii) *il existe un sous-groupe ouvert Γ de $\widehat{G}$ tel que :*

$$\mathrm{Hom}\,(\Gamma, R) = \{0\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Hom}\,(\widehat{G}/\Gamma, R) = \{0\}.$$

(i) $\Longleftrightarrow$ (ii) : G est totalement discontinu $\Longleftrightarrow g_0 = \{e\} \Longleftrightarrow g_0^{\perp} = \{e\}^{\perp} \Longleftrightarrow \Gamma_0 = \widehat{G} \Longleftrightarrow \mathrm{Hom}\,(\widehat{G}, R) = \{0\} \Longleftrightarrow \mathrm{Hom}\,(R, G) = \{0\}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) : $\mathrm{Hom}\,(R, G) = \{0\} \Longleftrightarrow \mathrm{Hom}\,(\widehat{G}, R) = \{0\}$, $= \widehat{G}$, répond à la question.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii): Si Γ est un sous-groupe ouvert de $\widehat{G}$ tel que: $\mathrm{Hom}(\Gamma, R) = \{0\}$ et $\mathrm{Hom}(\widehat{G}/\Gamma, R) = \{0\}$; on a: $\mathrm{Hom}(\widehat{G}, R) = \{0\}$: corollaire 1, de la proposition 1 - (1.3.1.) donc $\mathrm{Hom}(R, G) = \{0\}$.

1.3.3. - 3. Soient G un groupe LCA, $\widehat{G}$ le groupe dual H_0, g_0 et Γ_0, γ_0 étant tels qu'ils sont définis dans « Notations » - (1.3.2.).

1.3.3. Théorème 1. *Le sous-groupe $g_0 H_0$ est ouvert dans G; il est le plus petit sous groupe ouvert de G, contenant H_0.*

On sait [3] que : 1°) $g_0 \simeq R^n \times F$ où F est un groupe abélien compact et connexe; 2°) $G \simeq R^n \times G'$ où G' est un groupe LCA, contenant un sous-groupe G'' compact et ouvert.

H_0 est un sous-groupe de G' et $G'_{,} \subset H_0$; donc H_0 est ouvert dans G'. Il en résulte que $R^n \times H_0$ est un sous-groupe ouvert de G. Or $g_0 H_0 \simeq$ $\simeq R^n \times H_0$, puisque $F \subset H_0$. Donc $g_0 H_0$ est ouvert; évidemment il est le plus petit sous-groupe ouvert de G, contenant H_0, (puisque $g_0 H_0 \simeq R^n \times H_0$). Signalosons de plus que: $g_0 \cap H_0$ est compact.

Remarquons aussi que dans ce cas $g_0 H_0 = (\gamma_0 \cap \Gamma_0)^{\perp}$ car $g_0 H_0 = \overline{g_0 H_0}$, puisque $g_0 H_0$ est ouvert.

Remarque 1. Si G est totalement discontinu, alors H_0 est ouvert; puisque $g_0 = \{e\}$ et $g_0 H_0 = H_0$ est ouvert: théorème 1 - (1.3.3.). Donc si G est totalement discontinu et de plus $H_0 = \{e\}$, alors G est discret.

Soit un groupe LCA; si H_0 est ouvert alors g_0 est compact. Car $g_0 \subset H_0$; $g_0 = g_0 \cap H_0$ est compact. Réciproquement si g_0 est compact alors H_0 est ouvert. En effet, $g_0 \subset H_0$ et $g_0 H_0$ est ouvert: théorème 1 - (1.3.3.); comme $H_0 = g_0 H_0$, H_0 est bien ouvert.

Ramarque 2. Supposons G connexe, alors H_0 est compact. En effet, $g_0 = G$ et $H_0 = H_0 \cap g_0$ qui est compact. Alors $H_0^{\perp} = \gamma_0$ est ouvert $\Longrightarrow \widehat{G} = \gamma_0 \times \widehat{G}/\gamma_0$: [7].

1.3.4. - 4. Considérons l'espace $\mathcal{O}^1(G)$ formé par les fonctions f sur $\widehat{G}$ telles que $f \in L^1(\widehat{G})$ et $\overline{\mathcal{F}} f \in L^1(G)$. On sait [3] que les fonctions appartenant à $\mathcal{O}^1(G)$ sont continues et que $\mathcal{O}^1(\widehat{G}) = \mathcal{F}(\mathcal{O}^1(G))$.

Si f et $g \in \mathcal{O}^1(G)$, alors $f * g \in \mathcal{O}^1(G)$ et $fg \in \mathcal{O}^1(G)$. Autrement dit, $\mathcal{O}^1(G)$ possède deux structures algébriques : structure d'algèbre convolutive qu'on notera par $\mathcal{O}^1 * (G)$; structure d'algèbre multiplicative qu'on désignera par $\mathcal{O}^1 \cdot (G)$.

Si $f \in \mathcal{O}^1(G)$; $N(f) = \|f\|_1 + \|\widehat{f}\|_1$ est visiblement une norme. L'espace $\mathcal{O}^1(G)$ muni de cette norme est complet. En effet, soit une suite de Cauchy, $f_n \in \mathcal{O}^1(G)$ pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N > 0$, tel que n et $m > N \Longrightarrow$ $\Longrightarrow \|f_n - f_m\|_1 + \|\widehat{f_n} - \widehat{f_m}\|_1 \leq \varepsilon$. Donc;

1⁰) $\|f_n - f_m\|_1 \leq \varepsilon \Longrightarrow f_n$ est une suite de Cauchy dans $L^1(G)$; elle admet donc une limite $f_0 \in L^1(G)$.

2⁰) $\|\widehat{f_n} - \widehat{f_m}\| \leq \varepsilon \Longrightarrow \widehat{f_n}$ est une suite de Cauchy dans $L^1(\widehat{G})$; elle admet donc une limite $g_0 \in L^1(\widehat{G})$.

D'autre part comme $\|\widehat{f_0} - \widehat{f_n}\| \leq \|f_0 - f_n\|_1$; $\widehat{f_0}$ est la limite, pour la convergence uniforme, de $\widehat{f_n}$. On sait: ([7] corollaire 1 du théorème 2, chap. 4, 2), que $\widehat{f_0} = g_0$. Il en résulte que $f_0 \in \mathcal{O}^1(G)$.

De plus pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M > 0$, tel que $\|f_0 - f_n\| \, \varepsilon/2$ dès que $n > M$, d'après 1⁰); et $\|\widehat{f_0} - \widehat{f_n}\|_1 \leq \varepsilon/2$ dès que $n > M$, d'après 2⁰). Donc $N(f_0 - f_n) = \|f_n - f_0\|_1 + \|\widehat{f_n} - \widehat{f_0}\|_1$ tend vers 0, quand n tend vers l'infini. L'espace $\mathcal{O}^1(G)$ est donc un espace de Banach.

Soit $\mu \in M^1(G)$; pour toute $f \in \mathcal{O}^1(G)$, on a $\mu * f \in \mathcal{O}^1(G)$. En effet, $\mu * f \in L^1(G)$, de plus $\mathcal{F}(\mu * f) = \widehat{\mu}\,\widehat{f} \in L^1(\widehat{G})$ et elle est continue.

Soit $\mu \in M^1(G)$ l'application: $f \longrightarrow \mu * f$ de $\mathcal{O}^1(G)$ dans $\mathcal{O}^1(G)$ est un endomorphisme; cette application est continue: il suffit de remarquer que l'on ait:

$$\|\mu * f\|_1 \leq \|\mu\| \, \|f\|_1 \quad \text{et} \quad \|\widehat{\mu}\,\widehat{f}\|_1 \leq \|\widehat{\mu}\| \, \|\widehat{f}\|_1 \leq \|\mu\| \, \|\widehat{f}\|_1 .$$

1⁰) $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ établissent entre les espaces $\mathcal{O}^1(G)$ et $\mathcal{O}^1(\widehat{G})$ deux isomorphismes, dont l'un est la réciproque de l'autre.

Désignons par $\mathcal{O}^\infty(G)$ le dual topologique de $\mathcal{O}^1(G)$. On q les résultats suivants:

a) $\mathcal{O}^1(G)$ est partout dense dans $C^0(G)$; la topologie induite par $C^0(G)$ sur $\mathcal{O}^1(G)$ est moins fine que la topologie initiale. Donc toute forme linéaire continue sur $C^0(G)$ est aussi une forme linéaire continue sur $\mathcal{O}^1(G)$: autrement dit $M^1(G)$ s'identifie à un sous-espace de $\mathcal{O}^\infty(G)$.

b) On sait: [3] que $\mathcal{O}^1(G)$ est partout dense dans $L^1(G)$ et la topologie induite par $L^1(G)$ sur $\mathcal{O}^1(G)$ est moins fine que la topologie initiale. Donc toute forme linéaire continue sur $L^1(G)$ est aussi une forme linéaire continue sur $\mathcal{O}^1(G)$: autrement dit $L^\infty(G)$ qui est le dual de $L^1(G)$, s'identifie à un sous-espace de $\mathcal{O}^\infty(G)$. En particulier $B(G)$ et $\mathcal{O}^1(G)$ s'identifient à deux sous-espaces de $\mathcal{O}^\infty(C)$ car:

$$B(G) \subset L^\infty(G) \quad \text{et} \quad \mathcal{O}^1(G) \subset L^\infty(G).$$

2^0) $\mathcal{O}^\infty(G)$ étant muni de la topologie forte, $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ établissent entre $\mathcal{O}^\infty(G)$ et $\mathcal{O}^\infty(\widehat{G})$ deux isomorphismes. $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ seront définis par transposition, compte tenu du résultat de 1^0).

Si $f \in \mathcal{O}^1(G)$ et $L \in \mathcal{O}^\infty(G)$, on a:

$$\langle L, \mathcal{F} f\rangle = \langle \mathcal{F} L, f\rangle \quad \text{et} \quad \langle L, \overline{\mathcal{F}} f\rangle = \langle \overline{\mathcal{F}} L, f\rangle .$$

Si la mesure de Haar m sur G et la mesure de Haar λ sur $\widehat{G}$ sont harmonisées.

1.3.4. PROPOSITION 1. *Soit $U \in \mathcal{O}^\infty(G)$. Si U est une mesure bornée sur G, les définitions des $\mathcal{F} U$ et $\overline{\mathcal{F}} U$, au sens de* 2^0) (1.3.4.) *coïncident avec celles de la propriété* 2 - (1.1.2.).

Si U est une mesure bornée sur G, désignons par f sa transformée de Fourier au sens de la propriété 2 - (1.1.2.). On sait que $f \in B(\widehat{G})$ et f peut être identifiée à un élément de $\mathcal{O}^\infty(\widehat{G})$. Alors pour toute $\varphi \in \mathcal{O}^1(\widehat{G})$, on a:

$$\int_{\widehat{G}} f(y)\, \varphi(y)\, d\lambda(y) = \int_G (\mathcal{F}\varphi)(x)\, dU(x)\,;$$

donc $\mathcal{F} U = f$.

Si μ est une mesure bornée sur G, $\mathcal{F}\mu$ ne dépend pas du choix d'une mesure de Haar.

Il en résulte que $M^1(G)$ et $B(\widehat{G})$ sont isomorphes si l'on identifie $M^1(G)$ à un sous-espace de $\mathcal{O}^\infty(G)$, et $B(\widehat{G})$ à un sous-espace de $\mathcal{O}^\infty(\widehat{G})$. Même remarque pour $L^1(G)$ et $A(\widehat{G})$.

On a déjà vu que si $\mu \in M^1(\widehat{G})$ et $g \in \mathcal{O}^1(\widehat{G})$ on a: $\mu * g \in \mathcal{O}^1(\widehat{G})$. On aura également la propriété suivante: si $g \in \mathcal{O}^1(\widehat{G})$ et $\varphi \in B(\widehat{G})$, nous avons:

$$\varphi\, g \in \mathcal{O}^1(\widehat{G}).$$

4. Dérivée convolutive.

1.4.1. - 1. Soit G un groupe LCA. Nous désignerons par $U(G)$ la famille des sous-groupes ouverts de G, tels que la dimension de l'espace $\mathrm{Hom}(H, R)$ soit finie. Si $H \in U(G)$ alors $\mathrm{Hom}(G, R)/\mathrm{Hom}(G/H, R)$ est de dimension finie, puisque $\mathrm{Hom}(G, R)/\mathrm{Hom}(G/H, R)$ est isomorphe à $\mathrm{Hom}(H, R)$: proposition 1 - (1.3.1.).

Nous noterons, avec Riss: [2] par $H(G)$ la famille des sous-groupes compacts K de G, tels que la codimension de Hom (R, K) soit finie dans Hom (R, G).

Si $K \in H(\widehat{G})$, alors on a $K^{\perp} \in U(G)$ et réciproquement. En effet, si $k \in H(\widehat{G})$, par définition Hom $(R, \widehat{G}/K)$ est de dimension finie d'après ([2], chap. I, th. 1). Donc Hom $(K^{\perp}, R)$ est de dimension finie, comme $K^{\perp}$ est ouvert dans G; on a $K^{\perp} \in U(G)$. La réciproque est évidente. Remarquons de plus:

a) le sous-groupe $g_0 H_0 \in U(G)$, car $g_0 H_0$ est ouvert; théorème 1 - (1.3.3.) et $g_0 H_0 \simeq R^n \times H_0$: Hom $(g_0 H_0, R)$ est de dimension finie. Puisque $\gamma_0 \Gamma_0 \in U(\widehat{G})$, on a: $g_0 \cap H_0 \in U(G)$.

b) Si g_0 est compact, alors H_0 et Γ_0 sont ouverts: remarque 1 du théorème 1 - (1.3.3.). Donc $H_0 \in U(G)$ et $\Gamma_0 \in U(\widehat{G}) \Longrightarrow g_0 \in H(G)$ et $\gamma_0 \in H(\widehat{G})$.

c) Si K est un bon sous-groupe compact de $\widehat{G}$, au sens de Bruhat: [8], alors $K \in H(\widehat{G})$. En effet, $\widehat{G}/K$ est un groupe de Lie et il est l'extension d'un groupe discret Δ, par $R^n \times T^p \Longrightarrow K^{\perp} \cong R^n \times Z^p \times E$ où E est un groupe compact. D'où le résultat.

1.4.2. - 2. Nous allons définir une autre notion de dérivée sur un groupe G, $L \subset A$, qui sera liée à la structure d'algèbre convolutive de $L^1(G)$.

1.4.2. Definition 1. *Soient G un groupe LCA, l_0 un élément non nul de* Hom (G, R); *nous dirons qu'une fonction f définie sur G est convotutivement dérivable relativement à l_0, si $f \in L^1(G)$ et $l_0 f \in L^1(G)$.*

$l_0 f$ sera appelée dérivée convolutive de f relativement à l_0.

Dans toute le suite, au lieu de: «f est convolutivement dérivable» relativement à l_0, nous dirons: «f est C-dérivable» relativement à l_0.

Désignons par $L^1(G; l_0)$ l'ensemble de toutes les fonctions définies sur G et C-dérivables relativement à l_0. On a évidemment $L^1(G; l_0) \subset L^1(G)$. Nous avons les propriétés suivantes:

(P_1): l'application $f \longrightarrow l_0 f$ est linéaire de $L^1(G, l_0)$ dans $L^1(G)$.

(P_2): si f et $g \in L^1(G, l_0)$, on a: $l_0(f * g) = l_0 f * g + f * l_0 g$. En effet:

$$(l_0 f * g)(x) = \int l_0(xt^{-1}) f(xt^{-1}) g(t)\, dm(t),$$

et

$$(f * l_0 g)(x) = \int f(xt^{-1}) l_0(t) g(t)\, dm(t),$$

d'où

$$l_0(f * g) = l_0 f * g + f * l_0 g\,.$$

Comme $l_0 f$ et $l_0 g \in L^1(G)$, nous avons : $l_0(f * g) \in L^1(G)$. Donc :

$$f * g \in L^1(G\,;\,l_0).$$

1.4.2. DEFINITION 2. *Nous dirons qu'une fonction f définie sur G est une fois C-dérivable, si $f \in L^1(G)$ et si $l f \in L^1(G)$ pour tout $l \in \operatorname{Hom}(G, R)$. Nous désignerons par $L^1(G\,;\,i, J)$ l'ensemble de toutes les fonctions définies sur G et une fois C-dérivables.*

Soit m un entier positif. Nous dirons qu'une fonction f définie sur G est m fois C-dérivable, si pour tout système d'entiers positifs :

$$\{P_1, P_2, \dots, P_n\} \quad \text{avec} \quad P_1 + P_2 + \dots + P_n \leq m,$$

pour tout système :

$$\{l_1, l_2, \dots, l_n\}$$

les $l_1 \in \operatorname{Hom}(G, R)$, on a :

$$(l_1^{P_1}\, l_2^{P_2}, \dots, l_n^{P_n}) f \in L^1(G).$$

Nous désignerons par $L^1(G\,;m,J)$ l'ensemble de toutes les fonctions définies sur G et m fois C-dérivables.

Soit l'espace : $L^1(G;\infty,J) = \bigcap\limits_m L^1(G\,;m,J)$. Si une fonction $f \in L^1(G\,;\infty,J)$ nous dirons que f est indéfiniment C-dérivable. Nous avons alors :

$$K(G) \subset L^1(G\,;\,\infty, J) \subset L^1(G\,;\,m, J) \subset L^1(G\,;\,i, J) \subset L^1(G, l_0) \subset L^1(G).$$

1.4.2. GENERALISATION. Soit l_0 un élément non nul de $\operatorname{Hom}(G, R)$. Notons par $M''(G, l_0)$, l'ensemble des mesures bornées sur G, telles que $l_0 \mu \in M^1(G)$. L'application : $\mu \longrightarrow l_0 \mu$ de $M^1(G, l_0)$ dans $M^1(G)$ est évidemment linéaire. Si μ et $\nu \in M^1(G, l_0)$ on a :

$$l_0(\mu * \nu) = l_0 \mu * \nu + \mu * l_0 \nu.$$

De plus la mesure de Dirac δ est l'élément-unité de $M^1(G, l_0)$ et $l_0 \delta = 0$. Nous avons ainsi défini la C-dérivée sur $M^1(G, l_0)$.

Nous formerons de même les espaces $M^1(G\,;\,1, J)$, $M^1(G\,;\,m, J)$ et $M^1(G\,;\,\infty, J)$. Evidemment $\delta \in M^1(G;\,\infty, J)$. Plus généralement toute mesure sur G, à support compact appartient à $M^1(G\,;\,\infty, J)$. En particulier une mesure ponctuelle εx de masse égale à 1, placée en $x \in G$ est un élément de l'espace $M^1(G\,;\,\infty, J)$.

1.4.3. - 3. H étant un sous-groupe ouvert de G, $L \subset A$, formons l'espace $L^1(H\,;\,1, J)$, toute fonction $f \in L^1(H\,;\,1, J)$ peut être considérée comme une fonction sur G, nulle en dehors de H et égale à f sur H. D'après (1.3.1.) et la remarque 1 du théorème 1 - (1.2.1.), f devient alors un élément de $L^1(G\,;1,J)$. Donc pour tout $H \in U(G)$, l'espace $L^1(H\,;1,J)$ peut être identifié à un sous-espace de $L^1(G\,;1,J)$.

1.4.4. - 4. Soit H un sous-groupe fermé de G, LCA.

a) L'espace $L^1(H\,;1,J)$ peut être identifié à un sous espace de $M^1(G\,;1,J)$. En effet, à chaque $l \in \mathrm{Hom}(H,R)$ correspond $\widetilde{l} \in \mathrm{Hom}(G,R)$ telle que la restriction de $\widetilde{l}$ à H est l: théorème 1 - (1.3.1.); si $f \in L^1(H;1,J)$, fm_H et lfm_H peuvent être identifiées à des mesures bornées sur G.

b) Si $\varphi \in L^1(G/H;1,J)$, $j_H(\varphi)$ et $j_H(l\varphi) \in L^1(G)$ pour tout $l \in \mathrm{Hom}(G/H,R)$. Donc, on peut identifier φ à une fonction g sur G, qui est une fois C-dérivable relativement aux $l \in \mathrm{Hom}(G,R)$ qui sont nulles sur H.

c) Soit $f \in L^1(G\,;1,J)$, on a:

$$f * m_H \in L^1(G/H) \quad \text{et} \quad lf * m_H \in L^1(G/H),$$

pour toute $l \in \mathrm{Hom}(G/H, R)$, donc $f * m_H \in L^1(G/H\,;1,J)$. Si $l \in \mathrm{Hom}(G,R)$ est non nulle sur H, on a encore $f * m_H$ et $lf * m_H \in L^1(G/H)$, mais on n'a pas $l(f * m_H) = lf * m_H$.

Pourtant si $H^\perp$ est compact ou si $H = H_0$, alors pour tout $l \in \mathrm{Hom}(G,R)$ et pour tout $f \in L^1(G\,;1,J)$ nous avons: $l(f * m_H) = lf * m_H \in L^1(G/H)$.

d) Supposons $H^\perp$ totalement discontinu, alors $\mathrm{Hom}(G/H,R) = \{0\}$: théorème 4 - (1.3.2.). Alors tout $f \in L^1(G)$, $f * m_H \in L^1(G/H\,;\infty,J)$ et toute C-dérivée de $f * m_H$ est nulle sur G/H. Par contre si $g \in L^1(G\,;1,J)$ et $l \in \mathrm{Hom}(G,R)$, $lf * m_H \in L^1(G/H)$, mais $lf * m_H$ n'est pas nulle en général.

Remarque. Soit $\mu \in M^1(G)$: si le support de μ est contenu dans H_0, alors μ est indéfiniment C-dérivable, mais toute C-dérivée de μ est nulle.

Supposons H_0 ouvert; c'est le cas par exemple si g_0 est compact: remarque 1, du théorème 1 - (1.3.3.). Soit $f \in L^1(G)$; si le support de f est contenu dans H_0, alors $f \in L^1(G\,;\infty,J)$, mais toute C-dérivée de f est nulle.

CHAPITRE II

DÉRIVÉE AU SENS DE J; COMPARAISONS

1. Définition de la dérivée au sens de J.

2.1.1. - 1. Reprenons l'espace $L^1(G, l_0)$ de la définition 1 - (1.4.2.).

DEFINITION. Soit $f \in L^1(G, l_0)$, on a f et $l_0 f \in L^1(G)$. Donc $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$ et $\mathcal{F}(l_0 f) \in A(\widehat{G})$. Posons $J\, l_0 \widehat{f} = \mathcal{F}(l_0 f)$. Nous appellerons $J\, l_0 \widehat{f}$ dérivée au sens de J, de la fonction $\widehat{f}$, suivant l_0.

Dans toute la suite au lieu de « $J\, l_0 \widehat{f}$ est la dérivée, au sens de J, de la fonction $\widehat{f}$, suivant l_0 », nous dirons « $J\, l_0 \widehat{f}$ est J-dérivée de $\widehat{f}$, suivant l_0 ».

Désignons par $\mathcal{F}(L^1(G, l_0))$ l'image de $L^1(G, l_0)$ par $\mathcal{F}$. Nous avons les propriétés suivantes :

a) l'application : $\widehat{f} \to J\, l_0 \widehat{f}$ de l'espace $\mathcal{F}(L^1(G, l_0))$ dans $A(\widehat{G})$ est linéaire : définition 1 - (1.4.2.) - (P_1).

b) si $\widehat{f}$ et $\widehat{g} \in \mathcal{F}(L^1(G, l_0))$, on a :

$$J\, l_0 (\widehat{f}\, \widehat{g}) = (J\, l_0 \widehat{f})\, \widehat{g} + \widehat{f} (J\, l_0\, \widehat{g})$$

définition 1 - (1.4.2.) - (P_2) et

$$\widehat{f}\, \widehat{g} \in \mathfrak{f}(L^1(G, l_0)), \quad J\, l_0 (\widehat{f}\, \widehat{g}) \in A(\widehat{G}).$$

Formons les espaces $\mathcal{F}(L^1(G; 1, J))$, $\mathcal{F}(L^1(G; m, J))$ et $\mathcal{F}(L^1(G; \infty J))$.

Si $\widehat{f} \in \mathcal{F}(L^1(G; 1, J))$, on a $\widehat{f} \in A(G)$; $J\, l\, \widehat{f}$ existe pour tout $l \in \mathrm{Hom}(G, R)$ et appartient à $A(\widehat{G})$. Nous dirons : $\widehat{f}$ est une fois continuement J-dérivable.

Notons par $J_l^p = J\, l_0\, J\, l_0 \ldots J\, l$, où p est un entier ≥ 0 et $l \in \mathrm{Hom}(G, R)$. Désignons par $J^{\overline{p}}_{l_1 l_2 \ldots l_n} = J^{p_1}_{l_1} \circ J^{p_2}_{l_2} \circ \ldots \circ J^{p_n}_{l_n}$, $\overline{p} = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ étant un système d'entiers positifs et les $l_i \in \mathrm{Hom}(G, R)$.

Soit $\widehat{f} \in \mathcal{F}(L^1(G; m, J))$, $J^{\overline{p}}_{l_1 l_2 \ldots l_n} \widehat{f}$ existe pour tout système d'entiers positifs $\overline{p} = \{p_1, p_2 \ldots, p_n\}$ avec $p_1 + p_2 + \ldots + p_n \leq m$ et pour tout système

$\{l_1, l_2, \dots, l_n\}$; les $l_i \in \mathrm{Hom}(G, R)$. Nous dirons que $\widehat{f}$ est m fois continuement J-dérivable. Evidemment $J^{\bar{p}}_{l_1 \dots l_n} \widehat{f} \in A(\widehat{G})$. L'entier positif m s'appelle l'ordre de dérivation.

Soit $\widehat{f} \in \mathcal{F}(L^1(G; \infty, J))$; toute dérivée de tout ordre de $\widehat{f}$ existe, continue et appartient à $\mathcal{F}(L^1(G; \infty, J))$. $\widehat{f}$ sera dite indéfiniment et continuement J-dérivable.

Generalisation. Soit $M^1(G, l_0)$, l'espace défini dans généralisation (1.4.2.). Si $\mu \in M^1(G, l_0)$, μ et $\mu_0 \in M^1(G)$. Donc $\mathcal{F}\mu = \widehat{\mu}$ et $\mathcal{F}(l_0 \mu) \in B(\widehat{G})$; posons

$$J\, l_0 \widehat{\mu} = \mathcal{F}(l_0 \mu).$$

Nous dirons que $J\, l_0 \widehat{\mu}$ est J-dérivée de $\widehat{\mu}$ suivant l_0. L'application:

$$\widehat{\mu} \longrightarrow J\, l_0 \widehat{\mu}$$

est linéaire de $\mathcal{F}(M^1(G, l_0))$ dans $B(\widehat{G})$, si $\widehat{\mu}$ et $\widehat{\nu} \in \mathcal{F}(M^1(G, l_0))$, on a:

$$J\, l_0 (\widehat{\mu}\, \widehat{\nu}) = (J\, l_0 \widehat{\mu})\, \widehat{\nu} + \widehat{\mu}\, (J\, l_0 \widehat{\nu})$$

et

$$\widehat{\mu}\, \widehat{\nu} \in \mathcal{F}(M^1(G, l_0)), J\, l_0 (\widehat{\mu}\, \widehat{\nu}) \in B(\widehat{G}).$$

Nous formerons de même les espaces $\mathfrak{f}(M^1(G; 1, J))$, $\mathfrak{f}(M^1(G; m, J))$ et $\mathcal{F}(M^1(G; \infty, J))$. Si $\widehat{\mu} \in (M^1(G; 1, J))$, $\widehat{\mu}$ est continuement, une fois J-dérivable. $J\, l\, \widehat{\mu}$ existe pour tout $l \in \mathrm{Hom}(G, R)$, et $\widehat{\mu}$, $J\, l\, \widehat{\mu} \in B(\widehat{G})$. Soit

$$\widehat{\mu} \in \mathcal{F}(M^1(G; m, J)),$$

$\widehat{\mu}$ est m fois continuement J-dérivable. Si $\widehat{\mu} \in \mathfrak{f}(M^1(G; \infty, J)$, $\widehat{\mu}$ est indéfiniment et continuement J-dérivable. Toute J-dérivée de tout ordre de $\widehat{\mu}$ appartient à $B(\widehat{G})$.

Evidemment $\mathcal{F}\delta = 1$ est un élément unité de $B(\widehat{G})$ de plus $J\, 1 = 0$ pour tout $l \in \mathrm{Hom}(G, R)$; puisque $l\, \delta = 0$ pour tout $l \in \mathrm{Hom}(G, R)$.

2.1.2. - 2. Soient H un sous-groupe fermé de G et $\mu \in M^1(G; 1, J)$, nous supposons que le support de μ soit contenu dans H. Alors $\widehat{\mu}$ est invariante par $H^\perp$ et $J\, l\, \widehat{\mu} = 0$ pour tout $l \in \mathrm{Hom}(G/H, R)$.

Soit Γ un sous-groupe fermé de $\widehat{G}$. Nous avons:

1⁰) Si $\varphi \in L^1(\Gamma^1; 1, J)$, on a $\widehat{\varphi} \in A(\widehat{G}/\Gamma)$ et $J\, l\, \widehat{\varphi} \in A(\widehat{G}/\Gamma)$ pour tout $l \in \mathrm{Hom}(G, R)$; on peut identifier $\widehat{\varphi}$ à un élément de $\mathcal{F}(M^1(G; 1, J))$ **(1.4.4.)** - *a*.

2⁰) Soit $\varphi \in L^1(G/\Gamma^1; 1, J)$ on a $\widehat{\varphi} \in A(\Gamma)$ et $J\, l\, \widehat{\varphi} \in A(\Gamma)$ pour tout $l \in \mathrm{Hom}(G/\Gamma^1, R)$. De plus, il existe $g \in L^1(G; 1, J)$ telle que la restriction de $\widehat{g}$ à Γ est $\widehat{\varphi}$, et la restriction de $J\, l\, \widehat{\varphi}$, pour tout $l \in \mathrm{Hom}(G/\Gamma^1, R)$ à Γ est $J\, l\, \widehat{\varphi}$: (1.4.4.) - *b*.

3⁰) Soit $\widehat{f} \in \mathcal{F}(L^1(G; 1, J)$, la restriction de $J\, l\, \widehat{f}$ à Γ n'est pas, en général, égale à la J-dérivée suivant l de la restriction de $\widehat{f}$ à Γ: (1.4.4.) - *c*.

Pourtant si Γ est ouvert ou si $\Gamma = \gamma_0$, alors la restriction de $J\, l\, \widehat{f}$ à Γ est égale à la J-dérivée suivant l, de la restriction de $\widehat{f}$ à Γ.

4⁰) Supposons Γ totalement discontinu, soit $\widehat{g} \in \mathcal{F}(L^1(G; 1, J)$ la restriction de $J\, l\, \widehat{g}$ à Γ n'est pas nulle en général, mais, la J-dérivée suivant l, de la restriction de $\widehat{g}$ à l est nulle.

2.1.3. - 3. Soit $\mu \in M^1(G)$, telle que le support μ soit contenu dans H_0. $\widehat{\mu}$ est non constante, continue sur $\widehat{G}$, bornée, indéfiniment J-dérivable et $J\, l\, \widehat{\mu} = 0$ pour tout $l \in \mathrm{Hom}(G, R)$.

Supposons H_0 ouvert. Soit $f \in L^1(G)$ telle que le support de f soit contenu dans H_0. Alors $\widehat{f} \in A(\widehat{G})$ et $\widehat{f}$ est indifiniment J-dérivable, on a $J\, l\, \widehat{f} = 0$ pour tout $l \in \mathrm{Hom}(G, R)$.

Soit g une fonction sur $\widehat{G}$ indéfiniment et continuement J-dérivable; nous dirons que g est du type dérivée-nulle si g n'est pas constante et si $J\, l\, g = 0$ pour tout $l \in \mathrm{Hom}(G, R)$.

2. Comparaison de la dérivée au sens de Riss avec J-dérivée.

2.2.1. - 1. On sait [2] que $\mathrm{Hom}(G, R)$ et $\mathrm{Hom}(R, \widehat{G})$ sont isomorphes. Nous noterons par $\widehat{l}$ l'élèment de $\mathrm{Hom}(R, \widehat{G})$ qui correspond à $l \in \mathrm{Hom}(G, R)$.

2.2.1. THÉORÈME 1. *Soient G un groupe LCA, $\widehat{G}$ le groupe dual et $x_0 \in G$; x_0^{-1} considérée comme une fonction su $\widehat{G}$ est indéfiniment, continuement J-dérivable. Et on a $J\, l\, x_0^{-1} = l(x_0)\, x_0^{-1}$ pour tout* $l \in \mathrm{Hom}(G, R)$.

Soit εx_0 la mesure ponctuelle de masse égale à 1 placée en x_0. On a

$$\mathcal{F}\varepsilon x_0 = x_0^{-1}, \quad x_0^{-1}(y) = \langle \overline{x_0, y} \rangle .$$

Or

$$\varepsilon x_0 \in M^1(G; \infty, J),$$

donc x_0^{-1} est indéfiniment, continuement J-dérivable : généralisation (2.1.1.).

PREUVE 1. Soient $l \in \mathrm{Hom}(G, R)$ et $g \in L^1(G)$. Nous avons

$$(l \varepsilon x_0 * g)(x) = l(x_0)\, g(x x_0^{-1}) = l(x_0) \cdot (\varepsilon x_0 * g)(x).$$

D'où :

$$\mathcal{F}(l \varepsilon x_0 * g) = l(x_0)\, \mathcal{F}(\varepsilon x_0 * g),$$

$$J\, l\, x_0^{-1} \cdot \mathcal{F} g = l(x_0)\, x_0^{-1}\, \mathcal{F} g,$$

d'où :

$$J\, l\, x_0^{-1} = l(x_0)\, x_0^{-1} .$$

$$(J\, l\, x_0^{-1})(y) = l(x_0)\, x_0^{-1}(y) = l(x_0) \langle \overline{x_0, y} \rangle .$$

PREUVE 2. εx_0 et $l \varepsilon x_0$ peuvent être identifier à deux éléments de $\mathcal{O}^\infty(G)$ (1.3.4.). Soit $g \in \mathcal{O}^1(\widehat{G})$. Nous avons $\langle \mathcal{F}(l \varepsilon x_0), g \rangle = l(x_0)\, (\mathcal{F} g)(x_0) = \langle l(x_0)\, x_0^{-1}, g \rangle$. Donc on a : $J\, l\, x_0^{-1} = l(x_0)\, x_0^{-1}$: proposition 1 - (1.3.4.).

2.2.2. - 2. Soient G un groupe $L \subset A$, $\widehat{G}$ le groupe dual.

2-2.2. LEMME 1. Soit x_0 un élément de G. Considérons x_0^{-1} comme une fonction sur $\widehat{G}$, alors pour tout $l \in \mathrm{Hom}(G, R)$, on a : $d\, \widehat{l}\, x_0^{-1} = J\, l\, x_0^{-1}$.

Soit $l \in \mathrm{Hom}(G, R)$; nous avons $J\, l\, x_0^{-1} = l(x_0)\, x_0^{-1}$: théorème 1 - (2.2.1.).

Or

$$d\, \widehat{l}\, x_0^{-1} = l(x_0)\, x_0^{-1}$$

([2], chap. 1.) avec :

$$\langle x_0, \widehat{l}(t) \rangle = \langle l(x_0), t \rangle, \quad t \in R \quad \text{et} \quad l \in \mathrm{Hom}(G, R).$$

Donc

$$J\, l\, x_0^{-1} = d\, \widehat{l}\, x_0^{-1} .$$

2.2.2. THÉORÈME 1. *Soit* $g \in \mathcal{O}^1(\widehat{G})$ *dérivable au sens de Riss suivant* $\widehat{l_0}$, $\widehat{l_0} \in \mathrm{Hom}(R, \widehat{G})$; *si* $d\, \widehat{l_0}\, g \in \mathcal{O}^1(\widehat{G})$, *alors il correspond à* $\widehat{l_0}$, *l'élément* $l_0 \in \mathrm{Hom}(G, R)$, *tel que* g *est* J-*dérivable suivant* l_0 *et on a* $d\, \widehat{l_0}\, g = J\, l\, g$.

Soit x_0 un élément quelconque de G. Nous avons

$$d\,\widehat{l_0}\,(x_0^{-1} * g) = d\,\widehat{l_0}\,x_0^{-1} * g = x_0^{-1} * d\,\widehat{l_0}\,g$$

([2], chap. 1, § 3, proposition 6 et 7). On sait: lemme 1 - (2.2.2.), que à $\widehat{l_0}$ il correspond l'élément $l_0 \in \mathrm{Hom}(G, R)$ tel que $d\,\widehat{l_0}\,x_0^{-1} = J\,l_0\,x_0^{-1} = l_0(x_0)\,x_0^{-1}$.

$$d\,\widehat{l_0}\,x_0^{-1} * g = l_0(x_0)\,x_0^{-1} \cdot (\overline{\mathcal{F}}\,g)(x_0) \quad \text{et} \quad x_0^{-1} * d\,\widehat{l_0}\,g = x_0^{-1} \cdot (\overline{\mathcal{F}}\,d\,\widehat{l_0}\,g)\,(x_0),$$

ce qui donne:

$$l_0\,\overline{\mathcal{F}}\,g = \overline{\mathcal{F}}\,d\,\widehat{l_0}\,g.$$

Or g et $d\,\widehat{l_0}\,g \in \mathcal{O}^1(\widehat{G})$ donc $\overline{\mathcal{F}}\,g \in \mathcal{O}^1(G)$ et $\overline{\mathcal{F}}\,d\,\widehat{l_0}\,g = l_0\,\overline{\mathcal{F}}\,g \in \mathcal{O}^1(G)$. Ce qui prouve que g est J-dérivable suivant l_0 et on a:

$$\mathcal{F}\{\overline{\mathcal{F}}\,d\,\widehat{l_0}\,g\} = \mathcal{F}\{l_0\,\overline{\mathcal{F}}\,g\}:\ d\,\widehat{l_0}\,g = J\,l_0\,g.$$

2.2.2. PROPOSITION 1. $A(\widehat{G})$ étant l'espace défini par Riss ([2]), toute fonction g appartenant à $A(\widehat{G})$ est indéfiniment continuement J-dérivable; pour tout $l \in \mathrm{Hom}(G, R)$, on a $J\,l\,g = d\,\widehat{l}\,g$.

Soit g une fonction sur $\widehat{G}$, quelconque, appartenant à $A(\widehat{G})$. On a $\overline{\mathcal{F}}\,g \in A(G)$ et $\overline{\mathcal{F}}\,g$ est indéfiniment C-dérivable, de plus toute C-dérivée de $\overline{\mathcal{F}}\,g$ appartient à $A(G)$; donc g est indéfiniment, continuement J-dérivable et toute J-dérivée de g de tout ordre appartient a $A(\widehat{G})$.

Soient $g \in A(\widehat{G})$ et $l \in \mathrm{Hom}(G, R)$. Evidemment $J\,l\,g$ existe et appartient à $A(\widehat{G})$. A t'élément l il correspond l'élément $\widehat{l} \in \mathrm{Hom}(R, \widehat{G})$. Par hypothèse $d\,\widehat{l}\,g \in A(\widehat{G})$. Nous avons donc g et $d\,\widehat{l}\,g \in \mathcal{O}^1(\widehat{G})$, les conditions du théorème 1 - (2.2.2.) sont remplies. Il en résulte que à $\widehat{l}$ il correspond le même l, et on a $J\,l\,g = d\,\widehat{l}\,g$.

COROLLAIRE 1. Soit $A^1(\widehat{G})$ le dual de $A(\widehat{G})$. Sur l'espace $A^1(\widehat{G})$ la transposée ${}^tJ\,l$, de la J-dérivée suivant l, et la transposée ${}^td\,\widehat{l}$ de la dérivée au sens de Riss suivant $\widehat{l}$ coïncident pour tout $l \in \mathrm{Hom}(G, R)$.

Soit $T \in A^1(\widehat{G})$ une S-distribution quelconque. On a

$$\langle {}^tJ\,l\,T, g \rangle = \langle T, J\,l\,g \rangle \quad \text{et} \quad \langle {}^td\,\widehat{l}\,T, g \rangle = \langle T, d\,\widehat{l}\,g \rangle$$

pour tout $g \in A(\widehat{G})$ et pour tout $l \in \mathrm{Hom}(G, R)$ nous avons $J\, l\, g = d\, \widehat{l}\, g$: proposition 1 - (2.2.2.). Donc ${}^tJ\, l\, T = {}^td\, \widehat{l}\, T$ pour tout $T \in A'(\widehat{G})$.

2.2.2. THÉORÈME 2. *Soit* $\varphi \in \mathcal{F}(M^1(G, l_0))$, φ *et* $J\, l_0\, \varphi \in B(\widehat{G})$ *généralisation* (2.1.1.). *On a les propriétés suivantes* :

a) On peut identifier φ *à un élément* T *de* $A'(\widehat{G})$ *et* $J\, l_0$ *à un élément* T_1 *de* $A'(\widehat{G})$. *De plus nous avons* ${}^tJ\, l_0\, T = T_1$.

b) A l'élément $l_0 \in \mathrm{Hom}(G, R)$ *il correspond l'élément* $\widehat{l_0} \in \mathrm{Hom}(R, \widehat{G})$, *tel que* $J\, l_0\, \varphi = d\, \widehat{l}\, \varphi$.

Si D est un polynôme de dérivation au sens de Riss et P un polynôme en $\widehat{r_i}, \widehat{r_i} \in \mathrm{Hom}(\widehat{G}, R)$; il est évident que pour tout $g \in A(\widehat{G})$, $\varphi\, P(Dg)$ et $(J\, l_0\, \varphi)\, P(Dg) \in L^1(\widehat{G})$. Donc on peut identifier φ à un élément T de $A'(\widehat{G})$, et $J\, l_0\, \varphi$ à un élément T_1 de $A'(\widehat{G})$. Nous avons

$$J\, l_0\, (\varphi\, g) = (J\, l_0\, \varphi)\, g + \varphi\, (J\, l_0\, g).$$

D'où

$$\int \varphi\,(y)\,(J\, l_0\, g)\,(y)\, d\lambda\,(y) = -\int (J\, l_0\, \varphi)\,(y)\, g\,(y)\, d\lambda\,(y).$$

Donc

$$\langle T, J\, l_0\, g \rangle = -\langle T_1, g \rangle .$$

Ce qui donne ${}^tJ\, l_0\, T = -T_1 = -J\, l_0\, \varphi$.

Nous pouvons donc poser $J\, l_0 T = T_1 = J\, l_0 \varphi$. Or à l_0 correspond $\widehat{l_0}$, tel que ${}^tJ\, l_0\, T = {}^td\, l_0\, T$: corollaire 1 de la proposition 1 - (2.2.2.); il en résulte que $J\, l_0\, \varphi = d\, \widehat{l_0}\, \varphi$ au sens de $A'(\widehat{G})$. Comme φ et $J\, l_0\, \varphi$ sont continues, on a aussi $J\, l_0\, \varphi = d\, \widehat{l_0}\, \varphi$ au sens de fonction.

CONSEQUENCE. Sur les espaces de fonctions définie dans (2.1.1.), $J\, l$ et $d\, \widehat{l}$ coïncident pour tout $l \in \mathrm{Hom}(G, R)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] LOOMIS, L. H., *An introduction to abstract harmonic analysis.* New York (1953).

[2] RISS, J., *Eléménts de Calcul différentiel et théorie des distributions dans les groupes abéliens localement compacts.* Acta Mathématica (1953) tome 89.

[3] WEIL, A., *Intégration dans les groupes topologiques et ses applications.* Actual Sci. (1940).

[4] DIXMIER, J., *Quelques propriétés des groupes abéliens localement compacts.* Bull. Sci. Math. (1957).

[5] HEWITT-ROSS, E. K., *Abstract analysis.* 1963.

[6] BOURBAKI, N., *Intégration.* Livre VI.

[7] BRACONNIER, J., *Sur les groupes topologiques localement compacts,* Journal de Math. Pures (1948).

[8] BRUAT, F., *Distributions sur un groupe localement compact,* Bull. Sci. Math. (1961).

[9] SCHWARTZ, L., *Théorie des distributions.*

[10] CARTAN H. et GODEMENT R., Ann. Scient. E. N. S. (1947),

[11] RUDIN, W., *Fourier analysis on groups.* Inter. Troc. (1962).

[12] PONTRAJAGIN, L., *Topological groups.*

[13] BOURBAKI, N., *Eléménts de Mathématiques.*
Livre II, chap. 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Livre III, chap. 1 à 10.
Livre IV, chap. 1 et 2.
Livre V, chap. 1 et 2.
Livre VI, chap. 1 et 2, 3, 4, 5, et 7.

[14] CARLEMAN, T., *Integrale de Fourier et questions qui s'y rattachent.* Uppsala (1944).

[15] RAIKOV, D. A., *Fonctions de type positif sur les groupes commutatifs,* C. R. Acad. Sci. U. R. S. S..

[16] REITHER, H., *Invertigations in harmonic analysis.* Trans. Amer. Math. Soc. (1952).

[17] STONE, H., Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. (1940).

[18] WIENER, N., *The Fourier Integral an certain of its applications* (1933). Cambridge. Univ.

[19] HALMOS, P., *Mesure theory et On Monothetic groups.* New-York (1950).

[20] HELSON, H., *Fourier Transforms on perfect sets.* Studia. Math. (1954).

[21] MONTGOMERY and ZIPPIN, *Topological transformation groups* (1955).

[22] POLLARD, H., *The harmonic analysis of bounded functions,* Duk. Math. J. (1953).

[23] KREIN, M., *Sur une généralisation du théorème de Plancherel au cas des intégrales de Fourier sur un groupe abélien,* C. R. Acad. Sci. U. R. S. S. (1941).

[24] MACKEY, G. W., *The Laplace transform for locally compact groups,* Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. (1948).