ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

ANDRÈ HIRSCHOWITZ

Sur l'approximation des hypersurfaces

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 25, nº 1 (1971), p. 47-58

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1971_3_25_1_47_0>

SUR L'APPROXIMATION DES HYPERSURFACES

par ANDRÈ HIRSCHOWITZ

1. Introduction.

Si Ω_1 est un ouvert de Stein d'une variété de Stein Ω_2, peut-on « approcher » les hypersurfaces de Ω_1 par des hypersurfaces de Ω_2? La réponse est, en général, négative mais il s'en faut d'assez peu pour qu'on ose espérer un résultat à peine moins fort (cf. la conjecture p. 6). En attendant, on est conduit à chercher des caractérisations des couples (Ω_1, Ω_2) pour lesquels la réponse est positive. On obtient ainsi des résultats rappelant le théorème d'Oka-Weil et reliant l' « approximation » des hypersurfaces à celle des fonctions méromorphes.

2. Convergence d'ensembles analytiques.

Soit X un espace métrique compact. Si F_1 et F_2 sont deux fermés de X, on peut poser

$$\widetilde{d}(F_1, F_2) = \sup_{i=1,2} \sup_{x \in F_i} \inf_{y \in F_{3-i}} d(x, y).$$

On munit ainsi l'ensemble des fermés de X d'une structure d'espace métrique compact. La structure topologique ainsi obtenue est indépendante de la métrique choisie sur X ([0] Ch. II § 4 Exercice n^0 14).

Si maintenant X est localement compact métrisable dénombrable à l'infini, on considérera l'ensemble $F(X)$ des parties fermées de X comme un sous-ensemble de $F(\widehat{X})$ où $\widehat{X}$ est le compactifié d'Alexandroff de X, au moyen de l'injection $P \mapsto P \cup \{\infty\}$. Comme $\widehat{X}$ est métrisable, on peut ainsi

Pervenuto alla Redazione 3 Luglio 1970.

munir $F(X)$ d'une structure d'espace topologique compact métrisable. Dans la suite, nous n'utiliserons que les suites convergentes pour cette topologie. A cet égard, nous disposons du critère suivant:

Soit F_n une suite de fermés de X; la suite F_n converge vers le fermé F si et seulement si

1⁰) Pour tout x dans F il existe une suite x_n dans X telle que x_n appartienne à F_n et tende vers x.

2⁰) Pour tout compact K de X ne rencontrant pas F, il existe un rang à partir duquel F_n ne rencontre pas K.

L'ensemble des sous-ensembles analytiques d'une variété n'est pas fermé mais on a le théorème suivant dû à Bishop:

THÉORÈME 1. Soit X_n une suite convergente de sous-ensembles analytiques de dimension pure p d'un ouvert Ω de $\mathbf{C}^N$. Si le volume $2p$ dimensionnel de X_n est localement majoré indépendamment de n, la limite X de la suite X_n est un sous-ensemble analytique de Ω de dimension pure p. On trouvera une démonstration de ce théorème dans [6].

Nous ajouterons simplement un exemple dû à K. Stein [5] et qui nous intéresse tout particulièrement:

EXEMPLE. Soit Ω l'ouvert de $\mathbf{C}^2$ défini par $z_1 z_2 \neq 0$, et soit dans Ω la courbe Γ paramétrée par: $\begin{cases} z_1 = e^z \\ z_2 = e^{iz} \end{cases}$.

Soit

$$C = \{(z_1, z_2) \mid |z_1| = |z_2| = 1\}.$$

Le nombre d'intersections de C et Γ est impair. Au contraire, si H est une courbe (fermée) de $\mathbf{C}^2$, le nombre d'intersections de C et H est nul puisque C est homotope à zéro dans $\mathbf{C}^2$. A partir de cette constatation, il est facile de se convaincre de ce que Γ n'est pas limite des traces sur Ω d'une suite d'hypersurfaces de $\mathbf{C}^2$. Signalons que K. Oka a proposé un exemple analogue [4].

3. Enveloppes de compacts.

Soit Ω une variété de Stein et soit K un compact de Ω et notons $g(K)$ l'intersection des ouverts de Stein de Ω contenant K. On a la

PROPOSITION 1. Pour qu'un ouvert de Ω soit de Stein, il faut et il suffit qu'avec tout compact K il contienne $g(K)$.

DÉMONSTRATION. Vérifions d'abord que $g(K)$ est compact et admet un système fondamental de voisinages de Stein. Si U est un voisinage ouvert de Stein de K, on peut intercaler entre K et U un ouvert de Stein V relativement compact dans U. L'ensemble $g(K)$ est alors compact comme intersection de compacts. Maintenant $g(K)$ admet un système fondamental de voisinages de Stein: en effet, au besoin, à l'aide d'un plongement de Ω dans un espace numérique, on peut construire un voisinage U de $g(K)$, de Stein et relativement compact dans Ω. Soit V un voisinage de $g(K)$ contenu dans U et supposons que V ne contienne pas de voisinage de Stein de $g(K)$. Alors les fermés $\overline{W} \cap (\overline{U} - V)$ ont, lorsque W décrit la famille des voisinages ouverts de Stein de $g(K)$, la propriété de l'intersection finie. Leur intersection n'est donc pas vide. Soit x dans cette intersection: x n'est pas intérieur à chaque W sans quoi x serait dans $g(K)$. Soit donc W_0 pour lequel x est point frontière. On peut alors choisir un W voisinage de Stein de $g(K)$ relativement compact dans W_0 et donc tel que $\overline{W}$ ne contienne pas x. D'où l'absurdité.

Maintenant, la condition nécessaire étant évidente, considérons un ouvert U de Ω tel que si K est dans U, $g(K)$ aussi. En présentant U comme réunion croissante de compacts exhaustifs K_n, on a $U = \bigcup_n g(K_n) \cdot g(K_n)$ étant compact et admettant un systéme fondamental de voisinages de Stein, on peut lui trouver dans U un voisinage ouvert relativement compact dans U et de Stein, soit U_n. Comme les K_n sont exhaustifs, on peut extraire de la suite U_n une suite croissante, ce qui prouve que U est de Stein.

C.Q F.D.

PROPOSITION 2. Soit Ω une variété, K un compact de Ω. Alors l'enveloppe d'holomorphie usuelle de K s'écrit aussi:

$$\widehat{K}_\Omega = \{z \in \Omega \mid \forall f \in \mathcal{O}^*(\Omega) : |f(z) \geq \inf_{x \in K} |f(x)| \}.$$

DÉMONSTRATION. Soit z hors de $\widehat{K}_\Omega$ et $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ tel que $g(z) = 1 > \|g\|_K$. Alors e^{-g} ne s'annule pas et on a $|e^{-g(z)}| < \inf_{x \in K} |e^{-g(x)}|$.

Réciproquement, soit z dans Ω et supposons qu'il existe f dans $\mathcal{O}^*(\Omega)$ telle que $|f(z)| < \inf_{x \in K} |f(x)|$. Alors si on pose $g = \dfrac{1}{f}$,

$$|g(z)| > \sup_{x \in K} |g(x)|.$$

C. Q. F. D.

Soit Ω une variété, K un compact de Ω et soit ${}_H K_\Omega$ l'ensemble des points z de Ω tels que toute fonction analytique sur Ω s'annulant en z ait des zéros dans K.

PROPOSITION 3. ${}_H K_\Omega$ peut s'écrire

$$\{z \in \Omega \mid \forall f \in \mathcal{O}(\Omega) : |f(z)| \geq \inf_{x \in K} |f(x)|\}$$

et est en conséquence fermé.

Démonstration évidente.

PROPOSITION 4. Si Ω est de Stein, pour qu'un ouvert U de Ω soit de Stein, il faut et il suffit que pour tout compact K dans U, ${}_H K_U$ soit compact.

DÉMONSTRATION. Elle découle sans difficulté du travail de F. Docquier et H. Grauert (Math. Ann., 140, 1960, p. 94-123). C. Q. F. D.

Enfin, si Ω est une variété et K un compact de Ω, notons ${}_h K_\Omega$ l'ensemble des points z de Ω tels que toute hypersurface de Ω qui passe par z rencontre K.

Nous verrons plus loin que si Ω est de Stein, et K est un compact de Ω, ${}_h K_\Omega$ est compact. Nous donnerons ici un contre-exemple pour le cas où Ω n'est pas de Stein. Construisons Ω par éclatement (cf. [7]) de l'origine dans $\mathbf{C}^2$ et prenons pour K une sphère entourant l'origine dans $\mathbf{C}^2$. Il est facile de voir que ${}_h K_\Omega$ est dans ce cas la boule toute entière privée de l'hypersurface issue de l'éclatement.

4. Théorèmes d'approximation.

PROPOSITION 5. Soit Ω une variété de Stein, f une fonction analytique sur Ω et posons $H = f^{-1}(o)$. Toute fonction analytique sur $\Omega - H$ est limite uniforme sur les compacts d'une suite de fonctions méromorphes dans Ω dont les pôles sont contenus dans H.

DÉMONSTRATION. Si Ω est égal à $\mathbf{C}^n$ et $f(z) = z_1$, il est facile de voir que l'approximation peut se faire à l'aide des sommes partielles de la série de Laurent. Nous ramènerons donc le cas général à celui-là.

Soit p un plongement de Ω dans $\mathbf{C}^{2n+1}$ et plongeons Ω dans $\mathbf{C}^{2n+2}$ par (p, f). $\Omega - H$ est ainsi plongée dans $\mathbf{C}^{2n+2} - \mathbf{C}^{2n+1}$. En prolongeant à $\mathbf{C}^{2n+2} - \mathbf{C}^{2n+1}$ toute fonction donnée sur $\Omega - H$, on se ramène au cas antérieur. C. Q. F. D.

PROPOSITION 6. Soit Ω une variété de Stein et h une hypersurface de Ω, alors $\Omega - h$ est de Stein.

DÉMONSTRATION. Considérons Ω comme une sous-variété de $\mathbf{C}^n$ et soit U un voisinage de Stein de Ω dans $\mathbf{C}^n$ tel qu'il existe une projection analytique ϱ de U sur Ω. Un tel voisinage existe ([1] Th. VIII C 8). Posons $\tilde{h} = \varrho^{-1}(h)$; c'est une hypersurface de U. $U - \tilde{h}$ est localement pseudoconvexe donc de Stein d'après un théorème classique d'Oka. $\Omega - h$ est alors de Stein comme sous-variété d'une variété de Stein. C. Q. F. D.

PROPOSITION 7. Soit Ω une variété de Stein, h une hypersurface de Ω. Alors toute fonction analytique dans $\Omega - h$ est limite uniforme sur tout compact de $\Omega - h$ d'une suite de fonctions méromorphes dans Ω dont les pôles sont contenus dans h.

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{F}$ le faisceau analytique cohérent sur Ω des fonctions holomorphes dans $\Omega - h$ méromorphes dans Ω et admettant des singularités d'ordre 1 le long de h. Maintenant, soit x un point de h, f un germe de fonction analytique en x définissant h en x; d'après le théorème A de Cartan, $\frac{1}{f} = \Sigma\, g_i m_i$ où les m_i sont des sections globales de $\mathcal{F}$ et les g_i des germes de fonctions analytiques au voisinage de x. On a donc $1 = \Sigma\, g_i f m_i$. Mais, vu la définition de $\mathcal{F}$, fm_i est analytique au voisinage de x. Il en découle que l'une au moins des fonctions fm_i est non nulle au voisinage de x. Notons m_x la fonction méromorphe correspondante.

Maintenant, soit h_n la suite des composantes irréductibles de h et x_n un point de h_n. La suite x_n tend vers le bord de Ω. D'après ce qui précède, on peut choisir une suite m_{x_n} de fonctions méromorphes dans Ω telles que m_{x_n} soit holomorphe hors de h_n et tende vers l'infini au voisinage de x_n. La suite d'hypersurfaces h_n étant finie ou tendant vers le vide, on peut choisir des coefficients λ_n de façon que la fonction $\Sigma\, \lambda_n m_{x_n}$ soit méromorphe dans Ω, holomorphe dans $\Omega - h$, et tende vers l'infini au voisinage de chacun des points x_n. Notons r_1 cette fonction. C'est une section du faisceau $\mathcal{F}$. L'ensemble P_1 des points de h au voisinage desquels r_1 ne tend pas vers l'infini est un sous-ensemble analytique de h qui ne contient aucun des x_n donc aucun des h_n. Il est donc de codimension 1 dans h. Maintenant P_1 admet une décomposition en composantes irréductibles et si y_n est une suite de points rencontrant chacune de ces composantes irréductibles, on peut comme précédemment construire une fonction r_2 section de $\mathcal{F}$, tendant vers l'infini au voisinage de tout x de P_1 sauf sur un sous-ensemble analytique P_2 de codimension 1 dans P_1. On définit ainsi $r_3, \dots, r_n$, $P_3, \dots, P_n$ et on obtient $P_n = \emptyset$ pour n suffisamment grand puisque les dimensions des P_i sont strictement décroissantes.

Soit maintenant p un plongement de Ω dans $\mathbf{C}^N$. Nous allons voir que $p' = (p, r_1, \dots, r_n)$ réalise un plongement de $\Omega - h$ dans $\mathbf{C}^{N+n}$. Pour cela, il nous suffit évidemment de prouver que cette bijection est propre.

Soit K un compact de $\mathbf{C}^{N+n}$, $\widetilde{K}$ sa projection sur $\mathbf{C}^N$ et L l'image réciproque de $\widetilde{K}$ par p. L'ensemble L est compact dans Ω puisque p est un plongement. Il nous reste donc à montrer que $p'^{-1}(K)$ n'a pas de point adhérent dans h, ce que précisément la construction des r_i nous assure. Maintenant, soit g une fonction analytique sur $\Omega - h$; d'après le théorème B de Cartan, g, considérée comme fonction sur $p'(\Omega - h)$, est la restriction à $p'(\Omega - h)$ d'une fonction entière sur $\mathbf{C}^{N+n}$ tout entier. On peut alors approcher cette fonction sur les compacts de $p'(\Omega - h)$ par les sommes partielles de sa série de Taylor, donc par des polynômes en les coordonnées. Comme les coordonnées restreintes à $p'(\Omega - h)$ sont des fonctions méromorphes sur Ω, on obtient l'approximation cherchée. C. Q. F. D.

CONSÉQUENCE. Si on reprend les notations de l'exemple de la page 2, on déduit de la proposition précédente que toute fonction analytique dans $\Omega - \Gamma$ peut être approchée par des fonctions méromorphes dans Ω et que toute fonction analytique dans Ω peut être approchée par des fonctions méromorphes dans $\mathbf{C}^2$. Par ailleurs, il est notoire qu'il existe des fonctions analytiques dans $\Omega - \Gamma$ qu'on ne peut approcher par des fonctions méromorphes dans $\mathbf{C}^2$. On est ainsi conduit à la

CONJECTURE. Soit V une variété de Stein, U un ouvert de Stein de V, alors il existe une suite décroissante Ω_i d'ouverts de Stein de V, avec $V = \Omega_0$ et $U = \bigcap_i \Omega_i$ telle que toute fonction analytique dans Ω_i puisse être approchée uniformément sur chaque compact de Ω_i par une suite de fonctions méromorphes dans Ω_{i-1}.

Il nous est maintenant possible de prouver la

PROPOSITION 8. Si Ω est une variété de Stein et K un compact de Ω, ${}_hK_\Omega$ est compact.

DÉMONSTRATION. Soit h' une hypersurface de Ω ne rencontrant pas K. D'après la proposition 6, $\widehat{K}_{\Omega-h'}$ est compact. Il nous suffit donc de montrer que ${}_hK_\Omega = \bigcap_{h' \cap K = \emptyset} \widehat{K}_{\Omega-h'}$. Il est clair que ${}_hK_\Omega$ contient l'intersection. Montrons donc que $\widehat{K}_{\Omega-h'}$ contient ${}_hK_\Omega$. Soit z hors de $\widehat{K}_{\Omega-h'}$. Si z est dans h', z n'est pas dans ${}_hK_\Omega$. Si z est dans $\Omega - h'$, on peut trouver f analytique dans $\Omega - h'$ telle que $|f(z)| > \operatorname{Sup}_K |f|$. La proposition 7 nous permet d'affirmer l'existence d'une fonction g méromorphe dans Ω, analytique au voisinage de $K \cup \{z\}$ et telle que $|g(z)| > \operatorname{Sup}_K |g|$. L'ensemble des pôles de $\dfrac{1}{g - g(z)}$ contient z sans rencontrer K. C. Q. F. D.

En lemme on a la

PROPOSITION 9. (Oka-Weil). Soit Ω une variété de Stein, K un compact holomorphiquement convexe de Ω. Toute fonction analytique au voisinage de K est limite uniforme sur K de fonctions analytiques dans Ω (cf. [3] Théorème 5.2.8).

THÉORÈME 2. Soit Ω une variété de Stein et K un compact de Ω. Toute fonction analytique au voisinage de ${}_hK_\Omega$ est limite uniforme sur ${}_hK_\Omega$ d'une suite de fonctions méromorphes dans Ω.

DÉMONSTRATION. On peut supposer $K = {}_hK_\Omega$ d'après la proposition 8. Soit Ω' un voisinage ouvert de K où f est définie. L'ensemble $\widehat{K}_\Omega$ est un compact. Posons $L = \widehat{K}_\Omega - \Omega'$ · Il est compact. Soit h une hypersurface de Ω ne rencontrant pas $K : \widehat{K}_{\Omega-h}$ est un compact de $\Omega - h$ donc de Ω. $L_h = L \cap \widehat{K}_{\Omega-h}$ est compact et $\bigcap_{K \cap h = \emptyset} L_h = \emptyset$. Puisque L est compact, on peut trouver $h_1, \dots, h_p$ telles que $L \cap \widehat{K}_{\Omega-h_1} \cap \dots \cap \widehat{K}_{\Omega-h_p} = \emptyset$. La réunion des h_i est une hypersurface h et on a évidemment $\widehat{K}_{\Omega-h} \subset \Omega'$. Le résultat découle alors des propositions 9 et 7. C. Q. F. D.

5. Autres théorèmes d'approximation.

THÉORÈME 3. Soit V_2 une variété de Stein et V_1 un ouvert de Stein de V_2. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) Toute fonction analytique dans V_1 peut être approchée uniformément sur tout compact de V_1 par une suite de fonctions méromorphes dans V_2.

(ii) Pour tout compact K de V_1, ${}_HK_{V_1}$ contient ${}_hK_{V_2}$.

(iii) Pour tout compact K de V_1, ${}_HK_{V_1}$ contient $V_1 \cap {}_hK_{V_2}$.

(iv) Pour tout compact K de V_1, $V_1 \cap {}_hK_{V_2}$ est compact.

(v) Toute hypersurface principale de V_1 est limite dans V_1 d'une suite d'hypersurfaces de V_2.

DÉMONSTRATION. Il est évident que (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv). Montrons que (i) $\Longrightarrow$ (iii): Soit K un compact de V_1 et z dans V_1 et hors de ${}_HK_{V_1}$. Soit f une fonction analytique dans V_1 s'annulant en z sans s'annuler sur K. L'hypothèse (i) nous assure l'existence d'une fonction m méromorphe dans V_2, analytique au voisinage de $K \cup \{z\}$, s'annulant en z sans s'annuler sur K. Les pôles de $\frac{1}{m}$ forment une hypersurface h de V_2 passant par z sans rencontrer K.

Montrons que (iii) $\Longrightarrow$ (v). Soit H une hypersurface principale de V_1, et x un point de H. Pour tout compact K de $V_1 - H$, on peut trouver une hypersurface h de V_2 passant par x sans rencontrer K. Ceci implique que H contient la limite des traces sur V_1 d'une suite d'hypersurfaces h_n de V_2 passant par x. On peut alors conclure en envisageant une suite x_n de points de H partout dense dans H.

Montrons que (v) $\Longrightarrow$ (iv). Soit K un compact de V_1 et M un voisinage compact de K dans V_1. Nous montrerons le

LEMME 1. ${}_hM_{V_2}$ est un voisinage de ${}_hK_{V_2}$.

DÉMONSTRATION DU LEMME. On peut supposer que V_2 est une sous-variété de $\mathbf{C}^n$ et que Ω est un voisinage de Stein de V_2 muni d'une projection analytique ϱ sur V_2. Il est facile de voir que ${}_hK_{V_2} = {}_hK_{\Omega}$. Soit x_n une suite de points de $V_2 - {}_hM_{V_2}$ tendant vers un point x. Il nous faut montrer que $x \notin {}_hK_{V_2}$. Soit $\widetilde{M} = \varrho^{-1}(M)$. On peut trouver h^n passant par x_n sans rencontrer M. $\widetilde{h}_n = \varrho^{-1}(h_n)$ passe par x_n sans rencontrer $\widetilde{M}$. Posons $\varepsilon = d(K, \mathbf{C}^n - \widetilde{M})$. Pour n suffisamment grand $d(x, x_n) < \varepsilon$. On voit alors que $x \notin \widehat{K}_{\Omega - \tilde{h}_n}$. Le raisonnement de la proposition 7 permet de construire $\widetilde{h}$ puis h, passant par x sans rencontrer K. Le lemme est démontré.

Maintenant ${}_HH_{V_1}$ est compact. Nous montrerons que ${}_hK_{V_2} \cap V_1 \subset {}_HM_{V_1}$. Soit x hors de ${}_HM_{V_1}$ et H une hypersurface principale passant par x sans rencontrer M. Soit U un voisinage compact de x. L'hypothèse (v) nous permet d'affirmer l'existence d'une hypersurface h de V_2 rencontrant U sans rencontrer M, ce qui prouve que x n'est pas dans l'intérieur de ${}_hM_{V_2}$.

Montrons que (iv) $\Longrightarrow$ (i). Soit f analytique dans V_1. Soit M un compact de V_1. Posons $M' = {}_hM_{V_2} \cap V_1$ et $M'' = {}_hM_{V_2} \cap (V_2 - V_1)$. M' et M'' sont deux compacts disjoints et $M' \cup M'' = {}_hM_{V_2}$. D'après le théorème 2, la fonction qui vaut f sur M' et 0 sur M'' peut être approchée uniformément sur M par des fonctions méromorphes dans V_2.

Montrons que (iv) $\Longrightarrow$ (ii).

Comme (iv) $\Longrightarrow$ (i) $\Longrightarrow$ (iii), il nous suffit de montrer que si M est un compact de V_1, M'' est vide. Soit $x \in M''$. D'après le théorème 2, on peut trouver m méromorphe dans V_2 holomorphe sur M valant 0 en x et non nulle sur M'. $\dfrac{1}{m}$ définit alors une hypersurface h passant par x sans rencontrer M'.

Le théorème 3 est démontré.

THÉORÈME 4. Soit V_2 une variété de Stein, V_1 un ouvert de Stein de V_2. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Toute fonction méromorphe dans V_1 peut être uniformément approchée sur tout compact au voisinage duquel elle est holomorphe par une suite de fonctions méromorphes dans V_2.

(ii) Pour tout compact K de V_1, ${}_hK_{V_1} = {}_hK_{V_2}$

(iii) Pour tout compact K de V_1, ${}_hK_{V_1} = {}_hK_{V_2} \cap V_1$

(iv) Toute hypersurface de V_1 est limite sur V_1 d'une suite d'hypersurfaces de V_2.

DÉMONSTRATION. Elle est analogue à celle du théorème 3 :

Il est évident que (ii) $\Longrightarrow$ (iii)

Montrons que (i) $\Longrightarrow$ (iii)

Soit K un compact de V_1 et x un point de V_1 hors de ${}_hK_{V_1}$. Soit h une hypersurface de V_1 passant par x sans rencontrer K et M un voisinage compact de K ne rencontrant pas h. Enfin, soit f une fonction méromorphe dans V_1, holomorphe dans $V_1 - h$ et admettant un pôle en x. On peut construire par un procédé diagonal une suite m_n de fonctions méromorphes dans V_2 telle que pour tout compact L de $V_1 - h$, m_n soit, à partir d'un certain rang, holomorphe au voisinage de L et tende uniformément vers f sur L. Soit h_n l'ensemble des pôles de m_n. Au besoin en extrayant une sous-suite, on peut supposer que la suite de fermés $h_n \cap V_1$ converge dans V_1. Soit P la limite. Il est facile de voir que x est dans P sans quoi la formule de Cauchy montrerait que f est analytique au voisinage de x. Autrement dit, tout voisinage de x rencontre l'une des hypersurfaces h_n qui ne rencontrent pas M. Par suite, x n'est pas intérieur à ${}_hM_{V_2}$. D'après le lemme 1, x ne peut, dans ces conditions, appartenir à ${}_hK_{V_2}$.

La partie correspondante de la démonstration du théorème 3 s'adapte sans difficulté pour montrer que (iii) $\Longrightarrow$ (iv)

Montrons que (iv) $\Longrightarrow$ (iii)

Soit z un point de $V_1 - {}_hK_{V_1}$ et soit h une hypersurface de V_1 passant par z sans rencontrer K. Soit L un voisinage compact de ${}_hK_{V_1}$ ne rencontrant pas h. ${}_hL_{V_1}$ ne rencontre pas h. Maintenant, l'hypothèse nous permet de trouver une suite h_n d'hypersurfaces de V_2 tendant vers h sur V_1 sans rencontrer ${}_hL_{V_1}$. Il en découle que z n'est pas intérieur à ${}_hL_{V_2}$, donc n'est pas contenu dans ${}_hK_{V_2}$ d'après le lemme 1.

Montrons que (iii) $\Longrightarrow$ (i) et (iii) $\Longrightarrow$ (ii)

Soit m méromorphe dans V_1 et K un compact de V_1 au voisinage duquel m est holomorphe. Alors m est holomorphe au voisinage de ${}_hK_{V_1}$ et par suite, au voisinage de ${}_hK_{V_2} \cap V_1$. Prolongeons m par la fonction constante et égale à N au voisinage de ${}_hK_{V_2} - V_1$ D'après le théorème 2, le prolongement obtenu $\widetilde{m}$ est limite uniforme sur ${}_hK_{V_2}$ d'une suite de fonctions méromorphes m_n dans V_2.

Ceci démontre (i).

Maintenant, pour N suffisamment grand, en envisageant des fonctions de la forme $\dfrac{1}{m_n - (N + \varepsilon)}$, on prouve que ${}_hK_{V_2} - V_1$ est vide c'est à dire (ii). C. Q. F. D.

6. Exemples divers.

En développant l'étude de l'approximation par les fonctions méromorphes, qu'on pourrait appeler rationnelles, dont l'ensemble des pôles est une hypersurface principale, on pourrait démontrer deux théorèmes analogues aux théorèmes 3 et 4 et concernant l'approximation à l'aide d'hypersurfaces principales. Nous préférons montrer des exemples prouvant que des propriétés d'approximation ne sont pas équivalentes.

Pour une paire (V_1, V_2) de variétés de Stein emboîtées, notons L_{Hh} (resp. L_{HH}) la propriété d'approximation des hypersurfaces principales de V_1 par des hypersurfaces (resp. hypersurfaces principales) de V_2 et L_{hh} celle d'approximation des hypersurfaces de V_1 par des hypersurfaces de V_2. Comme nous l'avons vu sur l'exemple de K. Stein, la propriété L_{Hh} n'est pas « transitive ». Elle ne saurait donc être équivalente à aucune des propriétés L_{HH} ou L_{hh}. Sur le même exemple $(\Omega, \mathbf{C}^2)$ on voit que L_{HH} n'implique pas L_{hh}. Je ne sais que dire en ce qui concerne l'implication inverse. $(\mathbf{C} - \{0\}, \mathbf{C})$ fournit l'exemple d'une paire qui vérifie L_{HH} et L_{hh} sans être de Runge. Enfin, il est clair que toute paire de Runge a la propriété L_{HH} mais elle n'a pas, en général, la propriété L_{hh}.

7. Les variétés compactes.

Certaines variétés compactes présentent suffisamment de fonctions méromorphes pour rendre intéressants des résultats analogues aux théorèmes 2, 3 et 4. Nous n'énoncerons que ce qui concerne l'espace projectif mais tout s'étend sans difficulté aux sous-variétés du projectif dont les hypersurfaces sont traces d'hypersurfaces du projectif, ce qui est le cas, par exemple, pour les variétés grassmanniennes [2]. Notons l'espace projectif P.

PROPOSITION 10. Soit h une hypersurface de P, toute fonction analytique dans $P - h$ est limite uniforme sur les compacts de fonctions méromorphes dans P ayant leurs pôles sur h.

DÉMONSTRATION. Elle devient évidente lorsque le lemme suivant est acquis.

LEMME 2. Il existe une suite finie $(f_1, \dots, f_N)$ de fonctions méromorphes réalisant un plongement de $P - h$ dans $\mathbf{C}^N$.

Soient $(x_1, \dots, x_{n+1})$ des coordonnées projectives, f une équation de h. Posons $f_\alpha(x) = \dfrac{x^\alpha}{f(x)}$ $|\alpha| =$ degré de f. Il est facile de voir que les f_α réalisent une injection propre de $P - h$ dans un espace numérique. Cette injection est même régulière hors d'une hypersurface de P. En envisageant un nombre suffisant de systèmes de coordonnées, on parvient à diminuer jusqu'à -1 la dimension de l'ensemble des points de non régularité. C.Q.F.D.

En s'appuyant sur la proposition 10, on démontre sans difficulté supplémentaire les

THÉORÈME 5. Soit K un compact du projectif dont le complémentaire est réunion d'hypersurfaces. Toute fonction analytique au voisinage de K est limite uniforme sur K d'une suite de fonctions méromorphes dans P.

THÉORÈME 6. Soit Ω un ouvert de Stein de P. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Toute fonction analytique dans Ω est limite uniforme sur les compacts de Ω de fonctions méromorphes dans P.

(ii) Pour tout compact K de Ω, ${}_hK_P \subset {}_HK_\Omega$

(iii) Pour tout compact K de Ω, $\Omega \cap {}_hK_P \subset {}_HK_\Omega$

(iv) Pour tout compact K de Ω, $\Omega \cap {}_hK_P$ est compact

(v) Toute hypersurface principale de Ω est limite dans Ω d'une suite d'hypersurfaces de P.

THÉORÈME 7. Pour un ouvert de Stein Ω de l'espace projectif, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Toute fonction méromorphe dans Ω peut être uniformément approchée sur tout compact au voisinage duquel elle est holomorphe, par une suite de fonctions méromorphes dans P.

(ii) Pour tout compact K de Ω, ${}_hK_\Omega = {}_hK_P$

(iii) Pour tout compact K de Ω, ${}_hK_\Omega = {}_hK_P \cap \Omega$

(iv) Toute hypersurface de Ω est limite sur Ω d'une suite d'hypersurfaces de P.

Je remercie chaudement A. Douady qui n'aura pas quitté Nice sans lire ce manuscrit, apporter à son contenu les plus heureuses modifications et doter la Proposition 7 de la démonstration correcte qui lui faisait cruellement défaut.

BIBLIOGRAPHIE

[0] BOURBAKI, N. : *Topologie générale* 4e éd. Chap. I-II. Paris Hermann 1965.

[1] GUNNING, R. C., et H. ROSSI : *Analytic functions of several complex variables.* New Jersey: Prentice-Hall 1965.

[2] HODGE, W. V. D., et D. PEDOE : *Methods of Algebraic Geometry.* Cambridge, at the University Press.

[3] HÖRMANDER, L. : *An introduction to Complex Analysis in Several Variables.* Princeton N. J., D. Van Nostrand 1966.

[4] OKA, K. : *Domaines d'holomorphie et domaines rationnellement convexes.* Japanese Journal of Mathematics 17 (1941), 517-521.

[5] STEIN, K. : *Topologische Bedingungen für die Existenz analytischer Funktionen komplexer Veränderlichen zu vorgegebenen Nullstellenflächen.* Math. Ann. 117, 727-757 (1940-1941).

[6] STOLZENBERG, G : *Volumes, Limits and Extensions of Analytic Varieties.* Lecture Notes in Mathematics N⁰ 19 Springer-Verlag, Berlin — New York 1966.

[7] DOUADY, A : *Espaces analytiques sous-algébriques.* Séminaire Bourbaki Juin 1968.

André Hirschowitz
Département de Mathématique
Faculté des Sciences
Parc Valrose — 06 — Nice (France)