Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Marco Biroli

Sulla perturbazione delle disequazioni d'evoluzione paraboliche

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 25, nº 1 (1971), p. 1-24
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1971_3_25_1_1_0>

SULLA PERTURBAZIONE DELLE DISEQUAZIONI D'EVOLUZIONE PARABOLICHE

Nota di MARCO BIROLI (*)

SUNTO - Si dimostra un teorema di esistenza ed unicità per il problema di Cauchy relativo a disequazioni d'evoluzione paraboliche contenenti perturbazioni M di $L(C(O, T; H); L^{\infty}(O, T; H))$.
(per il significato delle notazioni cfr. § 1)

§ 1. Introduzione ed enunciati.

Sia V uno spazio di Hilbert reale di norma $\| \;\|$, V^* il duale di V e $\| \;\|^*$ la norma duale su V^*.

Sia H uno spazio di Hilbert identificato con il suo duale per il prodotto scalare $(\,,)$, $| \;|$ la norma indotta su H dal prodotto scalare $(\,,)$.

Sia W uno spazio di Banach reale uniformemente convesso di norma $\| \;\|_W$, W^* il duale di W e $\| \;\|_{W^*}$ la norma duale su W^*.

Supponiamo che lo spazio $V \cap W$ sia identificato con un sottospazio denso e separabile di H; indichiamo con $(V \cap W)^*$ il duale di $V \cap W$ e con $\langle \,, \rangle$ la dualità tra $V \cap W$ e $(V \cap W)^*$.

Supponiano inoltre che l'iniezione di $V \cap W$ in H sia compatta.

Sia K un insieme chiuso e convesso di $V \cap W$; supponiamo $O \in K$ e che K sia chiuso in W.

Indichiamo con $a(u, v)$ una forma bilineare su V soddisfacente alle seguenti proprietà:

$$(1,1) \qquad |a(u,v)| \leq C \|u\| \, \|v\| \qquad \forall\, u, v \in V$$

$$(1,2) \qquad a(u,u) \geq \alpha [u]^2 \qquad \forall\, u \in V$$

Pervenuto alla Redazione il 18 Luglio 1970.

(*) Istituto di Matematica del Politecnico di Milano. Lavoro eseguito usufruendo di una borsa di studio del C. N. R. presso l'Università di Parigi.

ove [ ] è una seminorma su V tale che $(|u|^2 + [u]^2)^{1/2}$ definisce una norma equivalente su V.

Sia poi $A \in L(V, V^*)$, tale che

$$\langle Au, v \rangle = a(u, v) \qquad \forall\, u, v \in V \tag{1, 3}$$

Indichiamo con B un operatore non lineare da W in W^*, che gode delle seguenti proprietà:

$$\langle Bu - Bv, u - v \rangle \geq 0 \qquad \forall u, v \in V \cap W \tag{1, 4}$$

$$\langle Bu, u \rangle \geq \beta_1 \| u \|_W^p - \beta_0 | u |^p \qquad \forall\, u, v \in V \cap W \tag{1, 5}$$

ove $\beta_0 \geq 0$, $\beta_1 > 0$ e $1 < p < +\infty$;

$$\| Bu \|_W^* \leq \gamma \| u \|_W^{p-1} + K \qquad \gamma > 0 \quad \forall\, u, \in V \cap W \tag{1, 6}$$

Diamo ora una definizione:

Df. I. *Sia* $M \in L(C(O, T; H); L^\infty(O, T; H))$ *e* $u(t)$ in $L^\infty(O, T; H)$; *poniamo*

$$r_t u(s) = \begin{cases} = u(s) & \text{q. o. su } [o, t] \\ = 0 & \text{q. o. su } [t, T] \end{cases}$$

Si dice che M è di tipo locale se esiste una costante μ, tale che $\forall\, t_0 \in [0, T]$ sia

$$\| r_{t_0} M u(t) \|_{L^\infty(O, T; H)} \leq \mu \| r_{t_0} u(t) \|_{L^\infty(O, T; H)}$$

Artolà in [1] ha dimostrato il seguente teorema:

Th. I. *Sia* $f_1(t) \in L^1(O, T; H)$, $f_2(t) \in L^2(O, T; V^*)$, $f_3(t) \in L^{p'}(O, T; W^*)$ (p' indica coniugato a p) $f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)$ e $M \in L(C(O, T; H); L^\infty(O, T; H))$ *di tipo locale*; *consideriamo il problema*

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) + Bu(t) + Mu(t) = f(t) \\ u(0) = u_0 \in H \end{cases} \tag{1, 7}$$

Tale problema ammette una ed una sola soluzione $u(t)$ tale che

$$u(t) \in C(O, T; H) \cap L^2(O, T; V) \cap L^p(O, T; W)$$

Lo scopo di questo lavoro è estendere il Th. I al caso di disequazioni d'evoluzione paraboliche, che contengono funzionali non differenziabili.

Indichiamo con $H(u)$ un funzionale convesso definito su $V \cap W$ e con $H_\eta(u)$ dei funzionali convessi definiti su $V \cap W$ Gateaux-differenziabili.

Supponiamo che $H(u)$ e $H_\eta(u)$ soddisfino le seguenti proprietà:

(1, 8) $H_\eta'(u)$, Gâteaux-derivata di $H(u)$, può prolungarsi ad un operatore lineare, positivo emicontinuo da V in V^* e

$$\| H_\eta'(u) \|^* \leq C \| u \| + K \qquad \forall\, u \in V$$

oppure

(1, 8′) $H_\eta'(u)$ può prolungarsi ad un operatore monotono positivo emicontinuo da W in W^* con

$$\| H_\eta'(u) \|_W^* \leq C \| u \|_W^{p-1} + K \qquad \forall\, u \in W;$$

inoltre

(1, 9) $$\forall\, v(t) \in L^p(O, T;\ W) \cap L^2(O, T;\ V)$$

$H(v(t)), H_\eta(v(t))$ sono integrabili e $\forall\, s \in [O, T]$

$$\lim_{\eta \to 0} \int_0^s H_\eta(v(t))\, dt = \int_0^s H(v(t))\, dt$$

(1, 10) sia $\{v_n(t)\}$ una successione in $L^p(O, T;\ W) \cap L^2(O, T;\ V)$ tale che

$$\lim_{n \to \infty} v_n(t) = v(t)$$

in $L^2(O, T;\ V)$ e in $L^p(O, T;\ W)$; si ha $\forall\, s \in [O, T]$

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^s H(v_n(t))\, dt = \int_0^s H(v(t))\, dt;$$

(1, 11) sia $\{v_\eta(t)\}$ tale che

$$\lim_{\eta \to 0}{}^* v_\eta(t) = v(t)$$

in $L^p(O, T;\ W)$ e in $L^2(O, T;\ V)$; si ha in $[O, T]$

$$\min \lim_{\eta \to 0} \int_0^s H_\eta(v_\eta(t))\, dt \leq \int_0^s H(v(t))\, dt$$

Dimostreremo i seguenti risultati:

Th. II. *Siano* $f(t)$, $u_0 \in K$, M *come al* Th. I.
Consideriamo la disequazione d'evoluzione parabolica

$$\int_0^s \{ \langle v'(t), v(t) - u(t) \rangle + \langle Au(t), v(t) - u(t) \rangle \tag{1, 12}$$

$$+ \langle Bu(t), v(t) - u(t) \rangle + \langle Mu(t), v(t) - u(t) \rangle$$

$$+ H(v(t)) - H(u(t)) - \langle f(t), v(t) - u(t) \rangle \} \, dt \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \{ |v(s) - u(s)|^2 - |v(o) - u_0|^2 \}$$

$$\forall \, v(t) \in L^2(O, T; V) \cap L^p(O, T; W) \text{ con } v'(t) \in L^2(O, T; H)$$

$$v(t) \in K \text{ q. o. in } [O, T]$$

$$u(t) \in C(O, T; H) \cap L^2(O, T; V) \cap L^p(O, T; W) \qquad u(t) \in K \text{ q. o.}$$

$$\text{in } [O, T], \quad u(o) = u_0$$

Esiste una ed una sola soluzione di (1, 12)

Th. III. *Siano* $\{f_{1,n}(t)\}$, $\{f_{2,n}(t)\}$, $\{f_{3,n}(t)\}$ *successioni rispettivamente in* $L^1(O, T; H)$, $L^2(O, T; V^*)$, $L^{p'}(O, T; W^*)$ (p' indice coniugato a p).
Supponiamo che

$$\lim_{n \to \infty} f_{1,n}(t) = f_1(t) \text{ in } L^1(O, T; H) \tag{1, 13}$$

$$\lim_{n \to \infty} f_{2,n}(t) = f_2(t) \text{ in } L^2(O, T; V^*) \tag{1, 14}$$

$$\lim_{n \to \infty} f_{3,n}(t) = f_3(t) \text{ in } L^{p'}(O, T; W^*) \tag{1, 15}$$

e poniamo

$$f_n(t) = f_{1,n}(t) + f_{2,n}(t) + f_{3,n}(t) \text{ e } f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t).$$

Sia $\{u_{0,n}\}$ *una successione in* K *tale che*

$$\lim_{n \to \infty}{}^{*} u_{0n} = u_0 \quad \text{in } V \cap W \tag{1,16}$$

Consideriamo le disequazioni d'evoluzione paraboliche

$$(1,17)\qquad \int_0^s \{\langle v'(t), v(t) - u(t)\rangle + \langle Au(t), v(t) - u(t)\rangle$$

$$+ \langle Bu(t), v(t) - u(t) + \langle Mu(t), v(t) - u(t)\rangle + H(v(t)) -$$

$$- H(u(t)) - \langle f(t), v(t) - u(t)\rangle\}\, dt \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\{|v(s) - u(s)|^2 - |v(o) - u_0|^2\}$$

$\forall\, v(t) \in L^2(0, T; V) \cap L^p(0, T; W)$ con $v'(t) \in L^2(0, T; H)$,

$v(t) \in K$ q. o. in $[0, T]$

$u(t) \in C(O, T; H) \cap L^2(0, T; W) \cap L^p(0, T; W)$ $\quad u(t) \in K$ q. o.

in $[0, T]$, $u(o) = u_0$

e

$$(1,18)\qquad \int_0^s \{\langle v'(t), v(t) - u(t)\rangle + \langle Au(t), v(t) - u(t)\rangle$$

$$+ \langle Bu(t), v(t) - u(t)\rangle + \langle Mu(t), v(t) - u(t)\rangle$$

$$+ H(v(t)) - H(u(t)) - \langle f_n(t), v(t) - u(t)\rangle\}\, dt \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\{|v(s) - u(s)|^2 - |v(o) - u_{0,n}|^2\}$$

$\forall\, v(t) \in L^2(0, T; V) \cap L^p(0, T; W)$ con $v'(t) \in L^2(0, T; H)$

$v(t) \in K$ q. o. iu $[0, T]$

$u(t) \in C(0, T; H) \cap L^2(0, T; V) \cap L^p(0, T; W)$ $\quad u(t) \in K$

q o. in $[0, T.]$ $u(o) = u_{0,n}$,

ove $M \in L(C(0, T; H); L^\infty(0, T; H))$ *è di tipo locale.*

Indichiamo con $u(t)$ *la soluzione di* (1,17) *e con* $u_n(t)$ *la soluzione di* (1,18); *si ha*

$$\lim_{\rightarrow} u_n(t) = u(t)$$

in $C(0, T; H)$ *e in* $L^2(0, T; V)$ *e*

$$\lim_{n\to\infty}{}^{*} u_n(t) = u(t)$$

in $L^p(0, T; W)$.

Nel § 2 si dimostra il Th. II applicando il metodo di penalizzazione ed un metodo di regolarizzazione analogo a [3].

Nel § 3 si dimostra il Th. III ed infine nel § 4 si forniscono esempi di applicazione dei risultati ottenuti.

§ 2. Dimostrazione del Th. II.

Incominciamo con il dimostrare la unicità della soluzione di (1,12)

a) Unicità

Siano $u_1(t)$ e $u_2(t)$ due soluzioni della disequazione d'evoluzione (1,12); poniamo

$$w(t) = \frac{1}{2}(u_1(t) + u_2(t)).$$

Sia $w_\eta(t)$ definito dalla relazione

$$\eta\, w'_\eta(t) + w_\eta(t) = w(t)$$

$$w(o) = u_0 .$$

Si ha allora

$$w_\eta(t) \in L^2(0, T; V) \cap L^p(0, T; W),\ w_\eta(t) \in K \text{ q. o. in } [0, T] \tag{2,1}$$

$$w'_\eta(t) \in L^2(0, T; H) \tag{2,2}$$

$$\lim_{\eta\to 0} w_\eta(t) = w(t) \text{ in } C(0, T; H),\ L^2(0, T; V),\ L^p(0, T; W) \tag{2,3}$$

$$\max\lim_{\eta\to 0} \int_0^s \langle w'_\eta(t), w_\eta(t) - w(t)\rangle\, dt \leq 0 \tag{2,4}$$

$$\forall\, s \in [0, T].$$

Poniamo in (1,12) $w_\eta(t) = v(t)$; si ha

$$\int_0^s \{\langle w'_\eta(t), w_\eta(t) - u_1(t)\rangle + \langle Au_1(t), w_\eta(t) - u_1(t)\rangle \tag{2,5}$$

$$+ \langle Bu_1(t), w_\eta(t) - u_1(t) \rangle + \langle Mu_1(t), w_\eta(t) - u_1(t) \rangle +$$

$$+ H(w_\eta(t)) - H(u_1(t)) - \langle f(t), w_\eta(t) - u_1(t) \rangle\} \, dt \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} | w_\eta(s) - u_1(s) |^2$$

$$\int_0^s \{\langle w'_\eta(t), w_\eta(t) - u_2(t) \rangle + \langle Au_2(t), w_\eta(t) - u_2(t) \rangle + \tag{2,6}$$

$$+ \langle Bu_2(t), w_\eta(t) - u_2(t) \rangle + \langle Mu_2(t), w_\eta(t) - u_2(t) \rangle +$$

$$+ H(w_\eta(t)) - H(u_2(t)) - \langle f(t), w_\eta(t) - u_2(t) \rangle\} \, dt \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} | w_\eta(s) - u_2(s) |^2 .$$

Facendo la semisomma di (2,5) e (2,6) si ottiene

$$\int_0^s \{\langle w'_\eta(t), w_\eta(t) - w(t) \rangle + \langle Aw(t), w_\eta(t) - w(t) \rangle + \tag{2,7}$$

$$+ \frac{1}{2} \langle Bu_1(t), w_\eta(t) - u_1(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle Bu_2(t), w_\eta(t) - u_2(t) \rangle +$$

$$+ \langle Mw(t), w_\eta(t) - w(t) \rangle + H(w_\eta(t)) - \frac{1}{2} (H(u_1(t)) + H(u_2(t))) -$$

$$- \langle f(t), w_\eta(t) - w(t) \rangle\} \, dt \geq 1/4 \, \{ | w_\eta(s) - u_2(s) |^2 +$$

$$+ | w_\eta(s) - u_1(s) |^2 \}.$$

Facendo tendere $\eta \to 0$ e tenendo conto di (2,3) e (2,4) si ottiene

$$\frac{1}{2} | u_1(s) - u_2(s) |^2 \leq \int_0^s \langle Bu_1(t) - Bu_2(t), u_2(t) - u_1(t) \rangle \, dt \leq 0 \tag{2,8}$$

da cui

$$| u_1(s) - u_2(s) |^2 \leq 0 \Longrightarrow u_1(s) = u_2(s)$$

da cui la tesi.

b) Esistenza

Cominciamo con il dimostrare la tesi nel caso in cui si abbia $H(u) = 0$. Sia $J : W \to W^*$ la mappa di dualità tale che

$$\langle Ju, u \rangle = \| u \|_W^p \qquad \forall \, u \in W.$$

Indichiamo con $P_K u$ la proiezione in W di $u \in W$ su K e consideriamo l'operatore

$$\beta u = J(u - P_K u).$$

L'operatore $\beta : W \longrightarrow W^*$, (4), è un operatore di penalizzazione per K ed essendo $0 \in K$, si ha

$$\langle \beta u, u \rangle \geq 0 \qquad \forall u \in W.$$

Consideriamo il problema

$$(2,9) \qquad u'(t) + Au(t) + Bu(t) + Mu(t) + \frac{1}{\varepsilon} \beta u(t) = f(t)$$

$$u(o) = u_0 .$$

In base al Th. I, il problema considerato ammette una ed una sola soluzione $u_\varepsilon(t)$.

Procedendo come in [1] si ottiene

$$(2,10) \qquad |u_\varepsilon(t)| \leq C$$

$$(2,11) \qquad \left(\int_0^T \| u_\varepsilon(t) \|^2 \, dt\right)^{1/2} \leq C$$

$$(2.12) \qquad \left(\int_0^T \| u_\varepsilon(t) \|_W^p \, dt\right)^{1/p} \leq C$$

$$(2,13) \qquad |u_\varepsilon(t)|^2 \leq |u_0|^2 + 2\int_0^t < f(\eta), u_\varepsilon(\eta) > d\eta - 2\int_0^t \langle Mu_\varepsilon(\eta), u_\varepsilon(\eta) \rangle \, d\eta$$

Enunziamo ora il seguente lemma, la cui dimostrazione à identica alla dimostrazione del teorema di Ascoli-Arzelà vettoriale:

LEMMA 1. Sia $\{u_\varepsilon(t)\}$ una successione in $C(0, T; H)$. Supponiamo che vi sia una successione $\{t_n\}$ densa in $[0, T]$, tale che l'insieme $\{u_\varepsilon(t_n)\}$ sia, $\forall n$, relativamente compatto in H e che fissato $\sigma > 0$ arbitrario esistano δ_0, ε_0, dipendenti da σ, tali che

$$|u_\varepsilon(t + \delta) - u_\varepsilon(t)| \leq \sigma \qquad 0 \leq \delta \leq \delta_0$$

$$\forall\, t + \delta,\ t \in [0, T], \qquad \varepsilon \leq \varepsilon_0 ;$$

allora la successione $\{u_\varepsilon(t)\}$ è relativamente compatta in $C(0, T; H)$.

Osserviamo ora che si ha:

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \langle \beta u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) \rangle \, dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\{ | u_\varepsilon(T) |^2 + | u_0 |^2 \} - \int_0^T A u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) \rangle \, dt -$$

$$- \int_0^T \langle B u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) \rangle \, dt - \int_0^T \langle M u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) \rangle \, dt$$

$$+ \int_0^{T'} \langle f(t), u_\varepsilon(t) \rangle \, dt \leq C$$

da cui

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \langle \beta u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) \rangle \, dt = C$$

ossia

(2,14)
$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \| u_\varepsilon(t) - P_k u_\varepsilon(t) \|_W^p \, dt = C$$

ossia

(2,15)
$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \int_0^T \frac{1}{\varepsilon} (\| \beta u_\varepsilon(t) \|_{\overset{*}{W}})^{p'} \, dt \leq C.$$

Dimostriamo ora che le funzioni $u_\varepsilon(t)$ soddisfano le ipotesi del lemma 1. Fissiamo σ positivo arbitrario e dimostriamo che se $T \leq \dfrac{\sigma}{10 \mu C^2}$ è possibile determinare δ_0 indipendente da ε e da u_0, che si suppone variare in un insieme limitato di $V \cap W$, tale che

$$| u_\varepsilon(t + \delta) - u_\varepsilon(t) |^2 \leq \sigma \qquad 0 \leq \delta \leq \delta_0$$

$$\forall\, t,\, t + \delta \in [0, T] \; (\delta < T).$$

Si ha

(2,16)
$$\langle u_\varepsilon'(t), u_\varepsilon(t) - u_0 \rangle + \langle A(u_\varepsilon(t) - u_0), u_\varepsilon(t) - u_0 \rangle +$$

$$+ \langle B(u_\varepsilon(t)), u_\varepsilon(t) - u_0 \rangle +$$

$$\langle Mu_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) - u_0 \rangle + \frac{1}{\varepsilon} \langle \beta u_\varepsilon(t) - \beta u_0, u_\varepsilon(t) - u_0 \rangle = \langle f(t), u_\varepsilon(t) - u_0 \rangle -$$

$$- \langle Au_0, u_\varepsilon(t) - u_0 \rangle$$

da cui

$$\frac{d}{dt} | u_\varepsilon(t) - u_0 |^2 \leq \langle f(t) - Au_0, u_\varepsilon(t) - u_0 \rangle \tag{2,17}$$

$$- \langle B(u_\varepsilon(t)), u_0 \rangle - \langle Mu_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) - u_0 \rangle$$

Integrando (2,17) si ottiene

$$| u_\varepsilon(t) - u_0 |^2 \leq 2 \int_0^t \langle f(\eta) - Au_0, u_\varepsilon(\eta) - u_0 \rangle \, d\eta$$

$$- 2 \int_0^t \langle B(u_\varepsilon(\eta)), u_0 \rangle \, d\eta - 2 \int_0^t \langle Mu_\varepsilon(\eta), u_\varepsilon(\eta) - u_0 \rangle \, d\eta .$$

In base a (2,10), (2,11) e (2,12) esiste δ_0 indipendente da ε e da u_0, che varia in un insieme limitato di $V \cap W$, tale che

$$| u_\varepsilon(\delta) - u_0 |^2 \leq \frac{\sigma}{5} . \qquad 0 \leq \delta \leq \delta_0$$

Osserviamo che si ha

$$(u'_\varepsilon(t+\delta) - u'_\varepsilon(t)) + A(u_\varepsilon(t+\delta) - u_\varepsilon(t)) +$$

$$+ (B(u_\varepsilon(t+\delta)) - B(u_\varepsilon(t))) + M(u_\varepsilon(t+\delta) - u_\varepsilon(t)) +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon} (\beta(u_\varepsilon(t+\delta)) - \beta(u_\varepsilon(t))) = f(t+\delta) - f(t) .$$

Moltiplichiamo la relazione sopra scritta per $u_\varepsilon(t+\delta) - u_\varepsilon(t)$

$$\langle u'_\varepsilon(t+\delta) - u'_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t+\delta) - u_\varepsilon(t) \rangle + \langle A(u_\varepsilon(t+\delta) - u_\varepsilon(t)),$$

$$, u_\varepsilon(t+\delta) - u_\varepsilon(t) \rangle + \langle B(u_\varepsilon(t+\delta)) - B(u_\varepsilon(t)), u_\varepsilon(t+\delta) -$$

$$- u_\varepsilon(t) \rangle + \langle M(u_\varepsilon(t+\delta) - u_\varepsilon(t)), u_\varepsilon(t+\delta) - u_\varepsilon(t) \rangle$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon} \langle \beta(u_\varepsilon(t+\delta)) - \beta(u_\varepsilon(t)), u_\varepsilon(t+\delta) - u_\varepsilon(t) \rangle = f(t+\delta) - f(t)$$

da cui

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\varepsilon(t+\delta)-u_\varepsilon(t)|^2 \leq \langle f(t+\delta)-f(t), u_\varepsilon(t+\delta)-$$
$$-u_\varepsilon(t)\rangle - \langle M(u_\varepsilon(t+\delta)-u_\varepsilon(t)), u_\varepsilon(t+\delta)-u_\varepsilon(t)\rangle$$

ed integrando

$$|u_\varepsilon(t+\delta)-u_\varepsilon(t)|^2 \leq |u_\varepsilon(\delta)-u_0|^2 +$$
$$+2\int_0^t \langle f(\eta+\delta)-f(\eta), u_\varepsilon(\eta+\delta)-u_\varepsilon(\eta)\rangle\, d\eta -$$
$$-2\int_0^t \langle M(u_\varepsilon(\eta+\delta)-u_\varepsilon(\eta)), u_\varepsilon(\eta+\delta)-u_\varepsilon(\eta)\rangle\, d\eta.$$

Osserviamo che, senza perdita di generalità, può supporsi

(2,18) $$\int_0^{T-\delta} |f_1(t+\delta)-f_1(t)|\, dt \leq \frac{\sigma}{10\,C} \qquad 0\leq\delta\leq\delta_0$$

(2,19) $$\left(\int_0^{T-\delta} (\|f_2(t+\delta)-f_2(t)\|^*)^2\, dt\right)^{1/2} \leq \frac{\sigma}{10\,C} \qquad 0\leq\delta\leq\delta_0$$

(2,20) $$\left(\int_0^{T-\delta} (\|f_3(t+\delta)-f_3(t)\|_W^*)^p\, dt\right)^{1/p} \leq \frac{\sigma}{10\,C}. \qquad 0\leq\delta\leq\delta_0$$

Inoltre da (2,10), tenendo conto che $T\leq\dfrac{\sigma}{10\,\mu C^2}$ si ha

(2,21) $$2\int_0^t \langle M(u_\varepsilon(\eta+\delta)-u_\varepsilon(\eta)), u_\varepsilon(\eta+\delta)-u_\varepsilon(\eta)\rangle\, d\eta \leq \frac{\sigma}{5}.$$

Da (2,18), (2,19), (2,20) e (2,21) si ha

(2,22) $$|u_\varepsilon(t+\delta)-u_\varepsilon(t)|^2 \leq \sigma. \qquad 0\leq\delta\leq\delta_0$$

Ora da (2,11) e (2,12) si ottiene che è possibile suddividere l'intervallo $[0, T]$, se $T > \dfrac{\sigma}{10\,\mu\,C^2}$, in intervalli di ampiezza minore di $\dfrac{\sigma}{10\,\mu\,C^2}$, mediante punti $t_1, t_2, \ldots, t_n$ tali che l'insieme $\{u_\varepsilon(t_i)\}_{i=1,\ldots,n}$ si mantenga limitato in $V \cap W$ e $\frac{1}{\varepsilon} \| \beta(u_\varepsilon(t_i)) \|_W^* \leq C$.

Possiamo allora affermare che (2,22) è valida comunque scelto T.

Si conclude dunque che le funzioni $u_\varepsilon(t)$ soddisfano le ipotesi del lemma 1.

In base al lemma 1, è possibile estrarre da $u_\varepsilon(t)$ una sottosuccessione, che ancora indichiamo con $u_\varepsilon(t)$, tale che

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(t) = u(t) \quad \text{in} \quad C(0, T; H).$$

Sempre da (2,11) e (2,12) si può supporre, senza perdere di generalità,

$$\lim_{\varepsilon \to 0}{}^* u_\varepsilon(t) = u(t) \quad \text{in} \quad L^2(0, T; V)$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0}{}^* u_\varepsilon(t) = u(t) \quad \text{in} \quad L^p(0, T; W).$$

Dimostriamo che $u(t) \in K$ q. o. in $[0, T]$.

Da (2,15) si ha

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^T (\| \beta u_\varepsilon(t) \|_W^*)^{p'} \, dt = 0$$

quindi

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \beta u_\varepsilon(t) = 0 \quad \text{in} \quad L^{p'}(0, T; W). \tag{2,23}$$

Da (2,21) e (2,23) si ha

$$\beta u(t) = 0 \text{ q. o. in } [0, T].$$

Quindi

$$u(t) \in K \text{ q. o. in } [0, T].$$

Dimostriamo ora che $u(t)$ è soluzione della disequazione (1,12), supponendo $H = 0$. Sia $v(t) \in L^2(0, T; V) \cap L^p(0, T; W)$ con $v'(t) \in L^2(0, T; H)$ e $v(t) \in K$ q. o. in $[0, T]$. Si ha

$$\beta v(t) = 0.$$

Quindi

$$\langle \beta u_\varepsilon(t), v(t) - u_\varepsilon(t) \rangle \leq \langle \beta v(t), v(t) - u_\varepsilon(t) \rangle \leq 0.$$

Si ha poi

$$\int_0^s \langle v'(t), v(t) - u_\varepsilon(t) \rangle + \langle A u_\varepsilon(t), v(t) - u_\varepsilon(t) \rangle + \tag{2,24}$$

$$+ \langle Bu_\varepsilon(t), v(t) - u_\varepsilon(t) \rangle + \langle Mu_\varepsilon(t), v(t) - u_\varepsilon(t) \rangle -$$

$$- \langle f(t), v(t) - u_\varepsilon(t) \rangle \} \, dt \geq \int_0^s \langle v'(t) - u'_\varepsilon(t), v(t) - u_\varepsilon(t) \rangle \, dt$$

$$- \frac{1}{\varepsilon} \int_0^s \langle \beta u_\varepsilon(t), v(t) - u_\varepsilon(t) \rangle \, dt \geq$$

$$\geq \int_0^s \langle v'(t) - u'_\varepsilon(t), v(t) - u_\varepsilon(t) \rangle \, dt \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \{ |v(s) - u_\varepsilon(s)|^2 - |v(o) - u_0|^2 \} .$$

Si ha

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^s \langle v'(t), v(t) - u_\varepsilon(t) \rangle \, dt = \int_0^s \langle v'(t), v(t) - u(t) \rangle \, dt \tag{2,25}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^s \langle f(t), v(t) - u_\varepsilon(t) \rangle \, dt = \int_0^s \langle f(t), v(t) - u(t) \rangle \, dt \tag{2,26}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} |v(s) - u_\varepsilon(s)|^2 = |v(s) - u(s)|^2 \tag{2,27}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^s \langle Mu_\varepsilon(t), v(t) - u_\varepsilon(t) \rangle \, dt = \int_0^s \langle Mu(t), v(t) - u(t) \rangle \, dt \tag{2,28}$$

Dimostriamo ora che

$$\int_0^s \Big\{ \langle Au(t), u(t) - v(t) \rangle + \langle Bu(t), u(t) - v(t) \rangle \Big\} \, dt \tag{2,29}$$

$$\leq \min \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^s \langle Au_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) - v(t) \rangle + \langle Bu_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) - v(t) \rangle \Big\} \, dt$$

Osserviamo, [2], che la funzione $u(t)$ può essere approssimata mediante una successione $\{u_n(t)\}$ tale che

$$u_n(0) = u_0 \,, \; u_n(t) \in K \quad \text{q. o. in } [0, T] \tag{2,30}$$

$$u_n'(t) \in L^2(0, T; H) \tag{2,31}$$

$$\lim_{n \to \infty} u_n(t) = u(t) \text{ in } L^2(0, T; V), L^p(0, T; W) \text{ e in } C(0, T; H) \tag{2,32}$$

$$\max\lim_{n \to \infty} \int_0^s \langle u_n'(t), u_n(t) - u(t) \rangle \, dt \leq 0 \tag{2,33}$$

Da (2,32) si ha

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^s \Big\{ \langle Au_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) - u_n(t) \rangle + \langle Bu_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) - u_n(t) \rangle \Big\} dt = \tag{2,34}$$

$$= \int_0^s \Big\{ \langle Au_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) - u(t) \rangle + \langle Bu_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) - u(t) \rangle \Big\} dt$$

uniformemente rispetto ad ε; dunque

$$\max\lim_{\varepsilon \to 0} \; \max\lim_{n \to \infty} \int_0^s \Big\{ \langle Au_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) - u_n(t) \rangle + \tag{2,35}$$

$$+ \langle Bu_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) - u_n(t) \rangle \Big\} dt =$$

$$\max\lim_{n \to \infty} \; \max\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^s \Big\{ \langle Au_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) - u_n(t) \rangle +$$

$$+ \langle Bu_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) - u_n(t) \rangle \Big\} dt =$$

$$= \max\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^s \Big\{ \langle Au_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) - u(t) \rangle + \langle Bu_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) - u(t) \rangle \Big\} dt$$

Si ha allora

$$\max\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^s \Big\{ \langle Au_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) - u(t) \rangle + \langle Bu_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) - u(t) \rangle \, dt =$$

$$= \max\lim_{n \to \infty} \; \max\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^s \Big\{ \langle Au_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) - u_n(t) \rangle + \langle Bu_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) - u_n(t) \rangle \Big\} dt \leq$$

$$\leq \max_{n\to\infty} \lim \max_{\varepsilon\to 0} \lim \left\{ \int_0^s [\langle u_n'(t), u_n(t) - u_\varepsilon(t) \rangle + \langle Mu_\varepsilon(t), u_n(t) - \right.$$

$$\left. - u_\varepsilon(t) \rangle - \langle f(t), u_n(t) - u_\varepsilon(t) \rangle]\, dt - \frac{1}{2} | u_n(s) - u_\varepsilon(s) |^2 \right\} \leq$$

$$\leq \max_{n\to\infty} \lim \left\{ \int_0^s [\langle u_n'(t), u_n(t) - u(t) \rangle + \langle Mu(t), u_n(t) - u(t) \rangle - \right.$$

$$\left. - \langle f(t), u_n(t) - u(t) \rangle]\, dt \leq 0 \right.$$

Consideriamo l'operatore $(A + B)(u(t)) = Au(t) + Bu(t)$; tale operatore è monotono limitato emicontinuo da $L^2(0, s; V) \cap L^p(0, s; W)$ a $L^2(0, s; V^* + L^{p'}(0, s; W^*)$; allora, [4], si ha

$$(2,36) \qquad \int_0^s \left\{ \langle Au(t), u(t) - v(t) \rangle + \langle Bu(t)\, u(t) - v(t) \rangle \right\} dt \leq$$

$$\leq \min_{\varepsilon\to 0} \lim \left\{ \int_0^s \langle Au_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) - v(t) \rangle + \langle Bu_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) - v(t) \rangle \right\} dt$$

Da (2,25) (2,26) (2,27) (2,28) e (2,36) si ha

$$\int_0^s \left\{ \langle v'(t), v(t) - u(t) \rangle + \langle Au(t), v(t) - u(t) \rangle + \right.$$

$$+ \langle Bu(t), v(t) - u(t) \rangle + \langle Mu(t), v(t) - u(t) \rangle -$$

$$\left. - \langle f(t), v(t) - u(t) \rangle \right\} dt \geq \frac{1}{2} \{ | v(s) - u(s) |^2 - | v(0) - u_0 |^2 \}$$

La tesi è così dimostrata nel caso particolare considerato.

Passiamo ora a dimostrare la tesi nel caso generale.

Consideriamo la disequazione d'evoluzione

$$(2,37) \qquad \int_0^s \left\{ \langle v'(t), v(t) - u(t) \rangle + \langle Au(t), v(t) - u(t) \rangle + \langle Bu(t), v(t) - u(t) \rangle \right.$$

$$+ \langle Mu(t), v(t) - u(t) \rangle + \langle H_\eta' u(t), v(t) - u(t) \rangle -$$

$$- \langle f(t), v(t) - u(t) \rangle \Big\} \, dt \geq \frac{1}{2} \{ |v(s) - u(s)|^2 - |v(0) - u_0|^2 \}$$

$v(t) \in L^2(0, T; V) \cap L^p(0, T; W)$ con $v'(t) \in L^2(0, T; H)$ e $v(t) \in K$ q. o. in $[0, T]$

$u(t) \in C(0, T; H) \cap L^2(0, T; V) \cap L^p(0, T; W)$, $u(t) \in K$ q. o. in $[0, T]$, $u(0) = u_0$.

Dalla parte precedente si ottiene che tale disequazione variazionale ammette una ed una sola soluzione $u_\eta(t)$.

Sempre precedendo come nella parte precente si ricava che

(2,38) le funzioni $u_\eta(t)$ sono equicontinue ed equilimitate in H.

$$\int_0^T \| u_\eta(t) \|^2 \, dt \leq C \tag{2,39}$$

$$\int_0^T \| u_\eta(t) \|_W^p \, dt \leq C \tag{2,40}$$

È possibile allora estrarre da $u_\eta(t)$ una sottosuccessione, che indichiamo ancora con $\{u_\eta(t)\}$, tale che

$$\lim_{\eta \to 0} u_\eta(t) = u(t) \text{ in } C(0, T; H) \tag{2,41}$$

$$\lim_{\eta \to 0}{}^{*} u_\eta(t) = u(t) \text{ in } L^2(0, T; V) \text{ e } L^p(0, T; W) \tag{2,42}$$

Si ha allora: $u(t) \in K$ q. o. in $[0, T]$ e

$$\lim_{\eta \to 0} \int_0^s \langle v'(t), v(t) - u_\eta(t) \rangle \, dt = \int_0^s \langle v'(t), v(t) - u_\eta(t) \rangle \, dt \tag{2,43}$$

$$\lim_{\eta \to 0} \int_0^s \langle f(t), v(t) - u_\eta(t) \rangle \, dt = \int_0^s \langle f(t), v(t) - u(t) \rangle \, dt \tag{2,44}$$

$$\lim_{\eta \to 0} | v(s) - u_\eta(s) |^2 = | v(s) - u(s) |^2 \tag{2,45}$$

$$\int_0^s \langle Mu_\eta(t), v(t) - u_\eta(t) \rangle \, dt = \int_0^s \langle Mu(t), v(t) - u(t) \rangle \, dt \tag{2,46}$$

Dimostriamo ora che

$$\int_0^s \left\{ \langle Au(t), u(t) - v(t) \rangle + \langle Bu(t), u(t) - v(t) \rangle \right\} dt \leq$$

$$\leq \min_{\eta \to 0} \lim \int_0^s \left\{ \langle Au_\eta(t), u_\eta(t) - v(t) \rangle + \langle Bu_\eta(t), u_\eta(t) - v(t) \rangle \right\} dt$$

Consideriamo la disequazione (2,37): è evidente che ogni soluzione di (2,37) è pure soluzione della disequazione

(2,47)
$$\int_0^s \left\{ \langle v'(t), v(t) - u(t) \rangle + \langle Au(t), v(t) - u(t) \rangle + \langle Bu(t), v(t) - u(t) \rangle \right.$$

$$\left. + \langle Mu(t), v(t) - u(t) \rangle + H_\eta(v(t)) - H_\eta(u(t)) - \langle f(t), v(t) - u(t) \rangle \right\} dt \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \left\{ |v(s) - u(s)|^2 - |v(0) - u_0|^2 \right\}$$

$$v(t) \in L^2(0, T; V) \cap L^p(0, T; W) \text{ con } v'(t) \in L^2(0, T; H)$$

$$v(t) \in K \text{ q. o. in } [0, T]$$

$$u(t) \in C(0, T; H) \cap L^2(0, T; V) \cap L^p(0, T; W) \quad u(t) \in K \text{ q. o. in } [0, T]$$

$$u(o) = u_0$$

Osserviamo inoltre che è sempre possibile, [2], trovare una successione $\{u_n(t)\}$ approssimate $u(t)$ tale che

(2,48)
$$u_n(t) \in K \text{ q. o. in } [0, T], \, u_n(o) = u_0$$

(2,49)
$$u_n'(t) \in L^2(0, T; H)$$

(2,50)
$$\lim_{n \to \infty} u_n(t) = u(t) \text{ in } C(0, T; H), L^2(0, T; V) \text{ e } L^p(0, T; W)$$

(2,51)
$$\max_{n \to \infty} \lim \int_0^s \langle u_n'(t), u_n(t) - u(t) \rangle \, dt \leq 0$$

Poniamo in (2,47) $u_n(t) = v(t)$; si ha

$$\int_0^s \Big\{ \langle Au_\eta(t), u_\eta(t) - u_n(t) \rangle + \langle Bu_\eta(t), u_\eta(t) - u_n(t) \rangle \Big\} dt \leq \tag{2,52}$$

$$\leq \int_0^s \Big\{ \langle u_n'(t), u_n(t) - u_\eta(t) \rangle + \langle Mu_n(t), u_n(t) - u_\eta(t) \rangle +$$

$$+ H_\eta(u_n(t)) - H_\eta(u_\eta(t)) - \langle f(t), u_n(t) - u_\eta(t) \rangle \Big\} dt$$

Osserviamo ora che si ha

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^s \Big\{ \langle Au_\eta(t), u_\eta(t) - u_n(t) \rangle + \langle Bu_\eta(t), u_\eta(t) - u_n(t) \rangle \Big\} dt =$$

$$= \int_0^s \Big\{ \langle Au_\eta(t), u_\eta(t) - u(t) \rangle + \langle Bu_\eta(t), u_\eta(t) - u(t) \rangle \Big\} dt$$

uniformemente rispetto ad η

Si ha allora

$$\max\lim_{\eta \to 0} \int_0^s \Big\{ \langle Au_\eta(t), u_\eta(t) - u(t) \rangle + \langle Bu_\eta(t), u_\eta(t) - u(t) \rangle \Big\} dt = \tag{2,53}$$

$$= \max\lim_{\eta \to 0} \; \max\lim_{n \to \infty} \int_0^s \Big\{ \langle Au_\eta(t), u_\eta(t) - u(t) \rangle + \langle Bu_\eta(t), u_\eta(t) - u(t) \rangle \Big\} dt =$$

$$= \max\lim_{n \to \infty} \; \max\lim_{\eta \to 0} \int_0^s \Big\{ \langle Au_\eta(t), u_\eta(t) - u(t) \rangle + Bu_\eta(t), u_\eta(t) - u(t) \rangle \Big\} dt \leq$$

$$\leq \max\lim_{n \to \infty} \; \max\lim_{\eta \to 0} \int_0^s \Big\{ \langle u_n'(t), u_n(t) - u_\eta(t) \rangle + \langle Mu_\eta(t), u_n(t) - u_\eta(t) \rangle$$

$$+ H_\eta(u_n(t)) - H_\eta(u_\eta(t)) - \langle f(t), u_n(t) - u_\eta(t) \rangle \Big\} dt \leq$$

$$\leq \max\lim_{n \to \infty} \int_0^s \{ \langle u_n'(t), u_n(t) - u(t) \rangle + \langle Mu(t), u_n(t) - u(t) \rangle +$$

$$+ H(u_n(t)) - H(u(t)) - \langle f(t), u_n(t) - u(t) \rangle \} dt \leq 0.$$

Consideriamo l'operatore $(A + B)(u(t)) = Au(t) + Bu(t)$; tale operatore è monotono limitato emicontinuo da $L^2(o, s, V) \cap L^p(o, s, W)$ in $L^2(o, s, V^*) + L^{p'}(o, s, W^*)$; allora, [4], si ha

$$\int_0^s \{\langle Au(t), u(t) - v(t) \rangle + \langle Bu(t), u(t) - v(t) \rangle\}\, dt \leq \tag{2,54}$$

$$\leq \min_{\eta \to 0} \lim \int_0^s \{\langle Au_\eta(t), u_\eta(t) - v(t) \rangle + \langle Bu_\eta(t), u_\eta(t) - v(t) \rangle\}\, dt.$$

Dimostriamo ora che $u(t)$ è soluzione della disequazione d'evoluzione (1,12). Osserviamo che

$$\lim_{\eta \to 0} \int_0^s H_\eta(v(t))\, dt = \int_0^s H(v(t))\, dt \tag{2,55}$$

$$\min_{\eta \to 0} \lim \int_0^s H_\eta(u_\eta(t))\, dt \geq \int_0^s H(u(t))\, dt. \tag{2,56}$$

Da (2,43) (2,44) (2,45) (2,46) (2,54) (2,55) e (2,56) si ha

$$\int_0^s \{v'(t), v(t) - u(t) \rangle + \langle Au(t), v(t) - u(t) \rangle + \langle Bu(t), v(t) - u(t) \rangle$$

$$+ \langle Mu(t), v(t) - u(t) \rangle + H(v(t)) - H(u(t)) + \langle f(t), v(t) - u(t) \rangle\}\, dt \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \{ | v(s) - u(s) |^2 - | v(o) - u_0 |^2 \}.$$

Dunque $u(t)$ è la soluzione di (1,12); la tesi è così completamente dimostrata.

§ 3. **Dimostrazione del Th. III.**

Osserviamo che da (1,16) segue

$$\lim_{n \to \infty} u_{0,n} = u_0 \quad \text{in } H \tag{3,1}$$

ed

$$\| u_{0,n} \| + \| u_{0,n} \|_W \leq C. \tag{3,2}$$

Inoltre da (1,13) (1,14) e (1,15) segue che, fissato σ positivo arbitrario, è possibile determinare δ_0 indipendente da n tale che, per $\delta \leq \delta_0$

$$\int_0^{T-\delta} | f_{1,n}(t+\delta) - f_{1,n}(t) | \, dt \leq \frac{\sigma}{10\,C} \tag{3,3}$$

$$\left(\int_0^{T-\delta} (\| f_{2,n}(t+\delta) - f_{2,n}(t) \|^*)^2 \, dt \right)^{1/2} \leq \frac{\sigma}{10\,C} \tag{3,4}$$

$$\left(\int_0^{T-\delta} (\| f_{3,n}(t+\delta) - f_{3,n}(t) \|_W^*)^p \, dt \right)^{1/p} \leq \frac{\sigma}{10\,C} \,. \tag{3,5}$$

Da (3,2) (3,3) (3,4) e (3,5) si deduce allora che le funzioni $u_n(t)$ sono equicontinue in H procedendo come al § precedente.

Sempre procedendo come al § precedente si deduce facilmente che è possibile estrarre da $\{u_n(t)\}$, una sottosuccessione che ancora indichiamo con $\{u_n(t)\}$, tale che

$$\lim_{n \to \infty} u_n(t) = u_*(t) \quad \text{in} \quad C(0, T; H) \tag{3,6}$$

$$\lim_{n \to \infty} u_n(t) = u_*(t) \quad \text{in} \quad L^2(0, T; V) \quad \text{e in} \quad L^p(0, T; W). \tag{3,7}$$

Da (3,7) si ha: $u_*(t) \in K$ q. o. in $[0, T]$.

Da (3,1) (3,6) e (3,7) si ha

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^s \langle v'(t), v(t) - u_n(t) \rangle \, dt = \int_0^s \langle v'(t), v(t) - u_*(t) \rangle \, dt \tag{3,8}$$

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^s \langle f(t), v(t) - u_n(t) \rangle \, dt = \int_0^s \langle f(t), v(t) - u_*(t) \rangle \, dt \tag{3,9}$$

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^s \langle Mu_n(t), v(t) - u_n(t) \rangle \, dt = \int_0^s \langle Mu_*(t), v(t) - u_*(t) \rangle \, dt \tag{3,10}$$

$$\lim_{n \to \infty} | v(o) - u_{0,n} |^2 = | v(o) - u_0 |^2 \tag{3,11}$$

$$\lim_{n \to \infty} | v(s) - u_n(s) |^2 = | v(s) - u_*(s) |^2. \tag{3,12}$$

Con un procedimento analogo a quello usato nel § precedente si ottiene

$$\int_0^s \langle Au_*(t), u_*(t) - v(t) \rangle + \langle Bu_*(t), u_*(t) - v(t) \rangle\} \, dt \leq \tag{3,13}$$

$$\leq \min_{n \to \infty} \lim \int_0^s \{\langle Au_n(t), u_n(t) - v(t) \rangle + \langle Bu_n(t), u_n(t) - v(t) \rangle\} \, dt.$$

Procedendo ancora come al § precedente si deduce che $u_*(t)$ è soluzione di (1,17) e dalla unicità della soluzione di (1,17) si deduce che $u_*(t) = u(t)$ e che (3,6) e (3,7) valgono per l'intera successione $\{u_n(t)\}$.

Da (3,13) si ha poi

$$\max_{n \to \infty} \lim \int_0^s \langle Au_*(t) - Au_n(t), u_*(t) - u_n(t) \rangle \, dt \leq 0 \tag{3,14}$$

da cui

$$\lim_{n \to \infty} [u_n(t) - u_*(t)] = 0. \tag{3,15}$$

Da (3,6) e (3,15) si ottiene

$$\lim_{n \to \infty} u_n(t) = u_*(t) \quad \text{in} \quad L^2(0, T; V).$$

§ 4. Esempi.

Sia $\Omega \subset R^n$ un aperto di frontiera Γ sufficientemente regolare e sia $V = H^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$

$$a(u, v) = \int_\Omega \left\{ \sum_{ij=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + a_0(x) \, u(x) \, v(x) \right\} dx$$

ove

$$a_{ij}(x), \quad a_0(x) \in L^\infty(\Omega)$$

$$\sum_{ij=1}^n a_{ij}(x) \, \xi_i \, \xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n | \xi_i |^2$$

$$\forall \; \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in R^n, \text{ q. o. in } \Omega \qquad a_0(x) \geq 0 \text{ q. o. in } \Omega.$$

a) sia ora $W = W^{1,p}(\Omega)$ e $B: W \longrightarrow W^*$ definito dalla relazione

$$\langle Bu, v \rangle = \int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-1} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + b(x) \mid u(x) \mid^{p-1} u(x)\, v(x) \right\} dx$$

$$(p > 1), \quad b(x) \in L^\infty(\Omega).$$

Sia poi $\forall\, u(t) \in C(0, T; H)$

$$Mu(t, x) = \int_0^t K(s, t)\, u(s, x)\, ds$$

ove $\forall\, t \in [0, T]$ $K(\cdot, t) \in L^1(0, T)$ e $K: [0, T] \longrightarrow L^1(0, T)$ è in $L^\infty(0, T; L^1(0, T))$.

È facile verificare, [1], che $M \in L(C(0, T; H); L^\infty(0, T; H))$ è un operatore di tipo locale.

Sia infine

$$f(t, x) \in L^1(0, T; L^2(\Omega)) + L^2(0, T; (H^1(\Omega)^*)) + L^{p'}(0, T; (W^{1,p}(\Omega))^*).$$

Poniamo poi $Hu = 0$ e

$$K = \{v(x) \mid v(x) \in H^1(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega),\ v(x) \geq 0 \text{ su } \Gamma\}.$$

In questo caso particolare tutte le ipotesi del Th. II sono valide e quindi possiamo asserire che (1,12) ammette una ed una sola soluzione

$$u(t, x) \in C(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^p(0, T; W^{1,p}(\Omega)).$$

Poniamo ora, supposto $v(x)$ sufficientemente regolare,

$$\frac{\partial v}{\partial \nu_{A,B}} = \sum_{ij=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(\nu, x_j) + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-1} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(\nu, x_i).$$

Allora (1,12) è formalmente equivalente al problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{ij=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-1} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \int_0^t K(s, t)\, u(s, x)\, ds = f(t)$$

$$u(t, x)\, |_\Gamma \geq 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_{A,B}} \geq 0 \qquad \text{su } \Gamma \times [0, T]$$

$$u \frac{\partial u}{\partial \nu_{A,B}} = 0 \qquad \text{su } \Gamma \times [0, T]$$

b) Sia ora

$$V = W, \langle Bu, v \rangle = a(u, v) \ \forall u, v \in V$$

e

$$H(v) = g \int_{\Gamma} | v(x) | \, d\sigma \, ; \ g > o, \ \forall v(x) \in H^1(\Omega) = V$$

$$K = V$$

Sia $b(t, x) \in L^\infty([0, T) \times \Omega)$ e $w(t)$ nna funzione soddisfacente alle seguenti proprietà

(*a*) $w(t)$ è misurabile su $[0, T]$

(*b*) esiste $t_0 \geq 0$ tale che $t - w(t) \geq 0$ per $t \in [t_0, T]$ e $t - w(t) < 0$ per $t \in [0, t_0[$.

Poniamo

$$-\tau_0 = \inf_{t \in [0, t_0[} (t - w(t))$$

$$g(t, x) \in L^1(-\tau_0, o\, ; L^2(\Omega)).$$

Poniamo

$$Mu(t, x) = \begin{cases} = b(t, x)\, u(t - w(t), x) & \text{q. o. in } [t_0, T] \times \Omega \\ = o & \text{q. o. in } [o, t_0[\times \Omega \end{cases}$$

$$f_1(t, x) = \begin{cases} = b(t, x)\, g(t - w(t), x) & \text{q. o. in } [o, t_0[\times \Omega \\ = o & \text{q. o. in } [t_0, T] \times \Omega. \end{cases}$$

Osserviamo che, [1], $M \in L(C(0, T\, ; L^2(\Omega))\, ; L^\infty(0, T\, ; L^2(\Omega))$ è di tipo locale e $f_1(t, x) \in L^1(0, T\, ; L^2(\Omega))$.

Sia infine

$$f_2(t, x) \in L^1(0, T\, ; L^2(\Omega)) + L^2(0, T\, ; (H^1(\Omega))^*)$$

$$f(t, x) = f_1(t, x) + f_2(t, x).$$

In questo caso particolare tutte le ipotesi del Th. II sono valide e quindi possiamp asserire che (1, 12) ammette una ed una sola soluzione

$$u(t, x) \in C(o, t\, ; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T\, ; H^1(\Omega)).$$

Poniamo ora, supposto $v(x)$ sufficientemente regolare

$$\frac{\partial v}{\partial \nu_A} = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(\nu, x_j).$$

Allora (1, 12) è formalmente equivalente al problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2 \sum_{ij=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + b(t,x)\,u(t-w(t),x) = f(t,x)$$

$$2\left|\frac{\partial u}{\partial \nu_A}\right| \leq g,\ 2u\frac{\partial u}{\partial \nu_A} \leq 0,\ u\left(2\left|\frac{\partial u}{\partial \nu_A}\right| - g\right) = 0 \qquad \text{q. o. su } \Gamma \times [0, T]$$

$$u(o, x) = u_0(x) \in H^1(\Omega)$$

$$u(t, x) = g(t, x) \text{ in } [-\tau_0, o[\times \Omega.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] M. ARTOLÀ. *Snr les perturbations des équatione d'évolution*. (Ann. Ec. Nor. Sup. 1969).

[2] M. BIROLI. *Solutions presque périodiques des inéquations d'évolution paraboliques* (« Annali di Matematica ») Serie IV, vol. 88 (1971).

[3] M. BIROLI. *Solutions presque périodiques des inéquations d'évolution avec des fonctionnelles non différentiables* (« Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova ») vol. 44, 1970.

[4] J. L. LIONS. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires* (Dunod — Gauthier Villars — Coll. études mathématiques 1969).