ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

FERRUCCIO COLOMBINI

Un teorema di regolarità alla frontiera per soluzioni di sistemi ellittici quasi lineari

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 25, nº 1 (1971), p. 115-161

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1971_3_25_1_115_0>

UN TEOREMA DI REGOLARITÀ ALLA FRONTIERA PER SOLUZIONI DI SISTEMI ELLITTICI QUASI LINEARI

FERRUCCIO COLOMBINI

Introduzione.

Lo studio della regolarità all'interno per le soluzioni deboli di sistemi ellittici quasi lineari in dimensione arbitraria e di tipo generale è stato iniziato da Morrey [14] e da Giusti Miranda [9] e Giusti [7], i quali danno dei teoremi di regolarità quasi ovunque. Risultati di regolarità in tutto l'interno non possono essere stabiliti in generale, data l'esistenza di controesempi (vedi [6] e [10]).

In questo lavoro mi propongo di trattare il problema della regolarità delle soluzioni sulla frontiera, che sarà anche essa stabitita nella forma di regolarità quasi ovunque.

Precisamente, verranno considerati sistemi ellittici quasi lineari del secondo ordine, del seguente tipo:

$$\mathcal{A}(u, \eta) = \sum_{i,j} \sum_{h,k} \int_\Omega A_{ij}^{hk}(x, u).\, D^i u_h \, D^j \eta_k \, dx = \tag{0.1}$$

$$= \sum_j \sum_k \int_\Omega f_j^k(x).\, D^j \eta_k \, dx \qquad \forall\, \eta \in [C_0^1(\Omega)]^N \text{ (1)}$$

Pervenuto alla Redazione il 10 Aprile 1970.

I risultati di questo lavoro fanno parte della mia tesi di Laurea, discussa all'Università di Pisa il 20 ottobre 1969. Ringrazio il Prof. Ennio De Giorgi relatore della mia tesi, il Prof. Enrico Giusti e il Dott. Livio Piccinini con i quali ho discusso molti punti di questo lavoro.

Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica CNR - Anno 1970.

(1) In tutto il lavoro, a meno di avviso contrario, le somme in i o in j si intenderanno estese da 1 a n; quelle in h o in k da 1 a N.

dove Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, con frontiera di classe C^1, $u \in [H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)]^N$, i coefficienti A_{ij}^{hk} verificano le condizioni:

$$\text{(0.2)} \qquad \begin{cases} A_{ij}^{hk} \in C^0(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N) \\ | A_{ij}^{hk} | \leq L \end{cases}$$

$$\text{(0.3)} \qquad \sum_{i,j} \sum_{h,k} A_{ij}^{hk} \xi_h^i \xi_k^j \geq | \xi |^2 = \sum_i \sum_h | \xi_h^i |^2 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^{nN}.$$

Quanto al secondo membro supporremo:

$$\text{(0.4)} \qquad f_j^k \in [L^{2, n-2+\alpha}(\Omega)]^{nN} \text{ (2)} \qquad 0 < \alpha < 2.$$

Si studierà il relativo problema di Dirichlet, cioè cercheremo una u appartenente a $[H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)]^N$ soluzione di (0.1), tale che:

$$\text{(0.5)} \qquad u_{|\partial\Omega} = \varphi$$

con φ traccia di una funzione Φ abbastanza regolare, precisamente:

$$\text{(0.6)} \qquad \Phi \in [H^{1, 2, n-2+\alpha}]^N \text{ (3)}$$

In queste ipotesi dimostreremo il seguente teorema:

TEOREMA. *Per ogni soluzione* $u \in [H^1(\Omega)]^N$ *del sistema* (0.1) *con la condizione al bordo* (0.5), *nelle ipotesi* (0.2), (0.3), (0.4) e (0.6), *esiste un sottoinsieme* $\Omega_0 \subset \overline{\Omega}$, *con* Ω_0 *aperto in* $\overline{\Omega}$, *tale che:*

$$u_h \in C^{0, \alpha/2}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0) \qquad (h = 1, \dots, N).$$

Se $u \in [H^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)]^N$, $(p \geq 2)$, *allora si ha:*

$$\dim_{\mathcal{H}}(\overline{\Omega} - \Omega_0) \leq n - p \text{ (4)}.$$

Se inoltre i coefficienti A_{ij}^{hk} *sono uniformemente continui nel loro insieme di*

---

(2) Per la definizione degli spazi $L^{p,\lambda}$, $H^{1,p,\lambda}$ vedi cap. I.

(3) Per una caratterizzazione delle tracce di funzioni appartenenti ad $H^{1,p,\lambda}$, vedi [2].

(4) Indichiamo con $\mathcal{H}_\alpha$ la misura di Hausdorff α-dimensionale, con $\dim_{\mathcal{H}}$ la dimensione di Hausdorff. (Per le definizioni vedi cap I).

definizione $\Omega \times \mathbb{R}^N$ *, allora più precisamente si ottiene :*

$$\mathcal{H}_{n-p}(\bar{\Omega} - \Omega_0) = 0 .$$

Per la frontiera invece tale risultato vale sempre, anche se gli A_{ij}^{hk} *non sono uniformemente continui ; si ha cioè sempre :*

$$\mathcal{H}_{n-p}(\partial\Omega - [\partial\Omega \cap \Omega_0]) = 0.$$

Per dimostrare il teorema supporremo che la frontiera di Ω sia piana ; nel caso generale di frontiera di classe C^1 ci si riporta facilmente al caso di frontiera piana ; basta infatti osservare che la trasformazione che localmente porta la frontiera in una parte di iperpiano, essendo di classe C^1, mantiene le proprietà (0.2), (0.3) e (0.4) del sistema, e mantiene inoltre l'hölderianità della soluzione, trattandosi sempre di risultati locali.

Osserviamo poi che la regolarizzazione per il problema di Dirichlet con dato al bordo non nullo seguirà immediatamente da quella per il problema con dato al bordo nullo. Ricordiamo innanzitutto che, essendo Ω di classe C^1 , si ha l'inclusione (per il teorema 1.2):

$$H^{1,2,n-2+\alpha}(\Omega) \subset C^{0,\alpha/2}(\bar{\Omega}) . \tag{0.7}$$

Poniamo ora $w = u - \Phi$, per cui $w \in [H_0^1(\Omega)]^N$, ed è soluzione del problema di Dirichlet, con dato al bordo nullo, relativo al seguente sistema :

$$\sum_{i,j} \sum_{h,k} \int_\Omega A_{ij}^{hk}(x, w + \Phi(x)) \cdot D^i w_h \cdot D^j \eta_k \, dx =$$

$$= \sum_{i,j} \sum_{h,k} \int_\Omega \{ f_j^k(x) - A_{ij}^{hk}(x, w + \Phi(x)) \cdot D^i \Phi_h(x) \} \cdot D^j \eta_k \, dx \qquad \forall \eta \in [C_0^1(\Omega)]^N$$

Abbiamo allora che w è hölderiana di esponente $\alpha/2$ in Ω_0 , con Ω_0 aperto in $\bar{\Omega}$; inoltre per la (0 6) e (0.7) Φ è hölderiana di esponente $\alpha/2$ in tutto $\bar{\Omega}$; si ha così la regolarità anche della $u = w + \Phi$.

Dal teorema enunciato, grazie a noti risultati riguardanti i sistemi lineari (vedi ad es. [13], par 6.4) segue che se i coefficienti A_{ij}^{hk} e f_j^k hanno derivate di ordine s hölderiane, allora ogni u_h ha derivate di ordine $s + 1$ hölderiane in $\Omega_0 - \partial\Omega$. Risultato analogo si ha per la frontiera, supponendo che $\partial\Omega$ sia di classe C^{s+1}, e che il dato al bordo φ sia traccia di una Φ, la quale abbia derivate di ordine $s + 1$ hölderiane.

Se si suppone poi che gli A_{ij}^{hk} e f_j^k siano analitici, e altrettanto siano $\partial\Omega$ e Φ, allora anche le u_h sono analitiche in Ω_0. Per questi risultati di analiticità vedi ad es. [13], par. 6.7..

Notiamo che se u appartiene allo spazio $[H_{\mathrm{loc}}^{1,n}(\Omega)]^N$ ed è soluzione del nostro sistema, allora u è hölderiana in tutto $\bar{\Omega}$, purché i coefficienti A_{ij}^{hk} siano uniformemente continui. In queste ipotesi infatti, dal nostro teorema si ottiene che l'insieme dei punti singolari in $\bar{\Omega}$, ha misura di Hausdorff zero dimensionale nulla, cioè è l'insieme vuoto.

Osserviamo infine che se $u \in [H_{\mathrm{loc}}^1(\Omega)]^N$ è soluzione del sistema, allora necessariamente si ha che il gradiente di u è sommabile con potenza maggiore di 2; cioè $Du \in [L_{\mathrm{loc}}^p(\Omega)]^{N\cdot n}$ per un opportuno $p > 2$, che dipende solo dal sistema considerato. Questo fatto si dimostra facilmente adattando il ragionamento con il quale Meyers dimostra in [12] un risultato analogo nel caso delle soluzioni deboli di equazioni ellittiche del secondo ordine in forma di divergenza. Possiamo quindi dire che senz'altro l'insieme dei punti singolari ha dimensione di Hausdorff strettamente minore di $n - 2$.

CAPITOLO I. - NOTAZIONI E TEOREMI PRELIMINARI.

1) Notazioni.

Indichiamo con $\mathbb{R}^n$ lo spazio euclideo reale ad n dimensioni.

Considereremo sempre funzioni a valori reali e gli spazi di Banach considerati saranno sempre spazi reali.

Sia ora E un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$.

$C^0(E)$ è lo spazio di Banach delle funzioni continue e limitate in E, con la norma:

$$\| u \|_{C^0(E)} = \sup_E | u |.$$

$C^{0,\alpha}(E)$, $0 < \alpha \leq 1$, è lo spazio di Banach delle funzioni limitate ed uniformemente hölderiane, con la norma:

$$\| u \|_{C^{0,\alpha}(E)} = \sup_E | u | + [u]_{\alpha, E}$$

dove

$$[u]_{\alpha, E} = \sup_{x, y \in E} \frac{| u(x) - u(y) |}{| x - y |^\alpha}.$$

$C^{0,\alpha}_{\mathrm{loc}}(E)$ è lo spazio delle funzioni hölderiane su ogni compatto $K \subseteq E$, con la topologia indotta dalle seminorme $\| u \|_{C^{0,\alpha}(K)}$, al variare di K nell'insieme dei compatti contenuti in E.

Indichiamo con $B(x_0, R)$ la sfera euclidea di centro x_0 e raggio R; cioè $B(x_0, R) = \{x, x \in \mathbb{R}^n, | x - x_0 | < R\}$. Inoltre sarà $B = B(0, 1)$.

Per le derivate useremo le seguenti notazioni: sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; per $i = 1, \dots, n$ $D^i f = \partial f / \partial x_i$; inoltre Df è il vettore $(D^1 f, \dots, D^n f)$. Se invece p è un multiindice, cioè $p = (p_1, \dots, p_n)$, allora sarà:

$$| p | = p_1 + \dots + p_n \qquad D^p f = \frac{\partial^{|p|} f}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}} .$$

Sarà poi Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, $\partial \Omega$ la sua frontiera, $\overline{\Omega}$ la sua chiusura.

Diremo che Ω è di classe C^1 se per ogni $z \in \partial \Omega$ esistono un aperto B contenente z, ed una funzione $g \in C^1(B)$ tali che:

$$\Omega \cap B = \{x, x \in B, g(x) > 0\} \tag{1}$$

$$g(z) = 0, \quad | Dg(z) | \neq 0. \tag{2}$$

$C^k(\overline{\Omega})$ è lo spazio di Banach delle funzioni continue in $\overline{\Omega}$ con le derivate di ordine $\leq k$, normato con:

$$\| u \|_{C^k(\overline{\Omega})} = \sum_{|p| \leq k} \sup | D^p u | .$$

$C^k_0(\overline{\Omega})$ è lo spazio delle funzioni di $C^k(\overline{\Omega})$, con supporto contenuto in Ω.

$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha \leq 1$, è lo spazio di Banach delle funzioni che hanno le derivate k-esime hölderiane, con la norma:

$$\| u \|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} = \| u \|_{C^k(\overline{\Omega})} + \sum_{|p| \leq k} [D^p u]_{\alpha, \Omega} .$$

Indichiamo con $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, lo spazio di Banach delle funzioni di potenza p sommabile (secondo Lebesgue) su Ω, con la norma:

$$\| u \|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega | u(x) |^p \, dx \right)^{1/p} .$$

Indichiamo con $L^\infty(\Omega)$ lo spazio di Banach delle funzioni misurabili ed essenzialmente limitate in Ω, munito della norma :

$$\| u \|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{\Omega} \operatorname{ess} | u | .$$

$H^{k,p}(\Omega)$, k intero non negativo, è lo spazio ottenuto completando lo spazio $C^k(\bar{\Omega})$ relativamente alla norma:

$$\| u \|_{H^{k,p}(\Omega)} = \Big(\sum_{|i| \leq k} \| D^i u \|^p_{L^p(\Omega)} \Big)^{1/p}.$$

$H_0^{k,p}$ è il completamento dello spazio C_0^k rispetto alla norma $H^{k,p}$. In particolare sia $\Gamma \subset \partial \Omega$, e $u \in H^{1,2}(\Omega)$; diciamo che u ha traccia nulla su Γ se è limite in $H^{1,2}$ di una successione u^ν di funzioni appartenenti a $C^1(\bar{\Omega})$, nulle su Γ.

Scriveremo H^k e H_0^k per $H^{k,2}$ e $H_0^{k,2}$, rispettivamente.

2) Spazi di Morrey $L^{p,\lambda}(\Omega)$ e spazi $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$.

Diamo qui la definizione e le proprietà che ci serviranno degli spazi $L^{p,\lambda}(\Omega)$ e $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$, rinviando per le dimostrazioni a [3] e [4].

DEFINIZIONE 1.1. Indichiamo con $L^{p,\lambda}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, $\lambda \geq 0$, il sottospazio di $L^p(\Omega)$ delle funzioni u per le quali :

$$\| u \|^p_{L^{p,\lambda}(\Omega)} = \sup_{\substack{x \in \Omega \\ R > 0}} R^{-\lambda} \int_{B(x,R) \cap \Omega} | u(y) |^p \, dy < +\infty .$$

Si dimostra che $L^{p,\lambda}$ è uno spazio di Banach con la norma scritta. Si dimostra facilmente che $L^{p,0}$ è isomorfo a L^p, e $L^{p,n}$ a L^∞.

Indichiamo con $u_{x,\varrho}$ la media integrale della funzione sommabile u relativa all'insieme $B(x,\varrho) \cap \Omega$, poniamo cioè :

$$u_{x,\varrho} = \frac{1}{\operatorname{mis} [\Omega \cap B(x,\varrho)]} \int_{\Omega \cap B(x,\varrho)} u(y) \, dy. \tag{1.1}$$

DEFINIZIONE 1.2. Indichiamo con $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, $\lambda \geq 0$, il sottospazio di $L^p(\Omega)$ delle funzioni u per le quali :

$$[u]^p_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} = \sup_{\substack{R \leq \sigma \\ x \in \Omega}} R^{-\lambda} \int_{B(x,R) \cap \Omega} | u(y) - u_{x,R} |^p \, dy < +\infty \qquad (\sigma = \operatorname{diam} \Omega)$$

In altri termini $u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ se esiste una costante positiva $M(u)$ tale che per ogni $x_0 \in \Omega$ e per ogni R, con $0 < R \leq \sigma$ si abbia:

$$\int_{B(x_0, R) \cap \Omega} | u(x) - u_{x_0 R} |^p \, dx \leq M(u) \, R^\lambda$$

$\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ è uno spazio di Banach con la norma:

$$\| u \|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)} = \| u \|_{L^p(\Omega)} + [u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} .$$

DEFINIZIONE 1.3. Diciamo che un aperto Ω è di tipo (A) se esiste una costante positiva K tale che per ogni $x \in \bar{\Omega}$ e per ogni $R > 0$ (e $R \leq \operatorname{diam} \Omega$) risulti:

$$\operatorname{mis} [\Omega \cap B(x, R)] \geq K R^n .$$

Osserviamo che ogni aperto di classe C^1 è di tipo (A).

TEOREMA 1.1. *Supponiamo che Ω sia di tipo (A); allora*

i) *per $0 \leq \lambda < n$, $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ è isomorfo a $L^{p,\lambda}$.*

ii) *per $\lambda > n$, $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ è isomorfo a $C^{0,\alpha}$, con $\alpha = (\lambda - n)/p$. In particolare, se $\lambda > n + p$, allora u è costante su ogni componente connessa di Ω.*

iii) *per $\lambda = n$, si ha lo spazio limite $\varepsilon_0(\Omega)$, che non è isomorfo allo spazio $L^{p,n}(\Omega)$, $(\backsim L^\infty(\Omega))$; vale invece l'inclusione:*

$$L^\infty(\Omega) \subset \varepsilon_0(\Omega) \text{ (5)}.$$

Osserviamo che se Ω è di tipo (A), e $u \in L^{p,\lambda}(\Omega)$, (rispettivamente $u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$), posto $w(x) = u(x)$ per $x \in \Omega$, e $w(x) = 0$ per $x \in \mathbb{R}^n - \Omega$, anche $w \in L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, (rispettivamente $w \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$).

3) Spazi $H^{k,p,\lambda}(\Omega)$.

Per questi spazi vedi [4] e [15]. Noi daremo la definizione, ed un teorema che ci sarà utile nel seguito.

DEFINIZIONE 1.4. Indichiamo con $H^{k,p,\lambda}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, $\lambda \geq 0$, il sottospazio di $H^{k,p}(\Omega)$ delle funzioni u tali che:

$$D^m u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega) \quad \text{per ogni } m \text{ con } |m| = k$$

---

(5) Per una caratterizzazione di ε_0 vedi [11].

$H^{k,p,\lambda}(\Omega)$ è uno spazio di Banach con la norma :

$$\| u \|_{H^{k,p,\lambda}(\Omega)} = \| u \|_{H^{k,p}(\Omega)} + \sum_{|m|=k} [D^m u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)} .$$

Per quanto visto sugli spazi $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$, si ha :

i) $H^{k,p,0}(\Omega)$ è isomorfo a $H^{k,p}(\Omega)$.

ii) Se Ω è limitato e di tipo (A), e se $n < \lambda \leq n + p$, allora $H^{k,p,\lambda}(\Omega)$ è isomorfo a $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$, con $\alpha = (\lambda - n)/p$.

TEOREMA 1.2. *Sia Q un cubo di $\mathbb{R}^n$, $0 \leq \lambda < n$, e $p \geq 1$. Allora*

i) *se $p + \lambda < n$, $H^{1,p,\lambda} \subset L^{\tau,\lambda}$, con $p \leq \tau < p(n-\lambda)(n-\lambda-p)^{-1}$*

ii) *se $p + \lambda = n$, $H^{1,p,\lambda} \subset \mathcal{L}^{p,n}$*

iii) *se $p + \lambda > n$, $H^{1,p,\lambda} \subset C^{0,\mu}$ con $\mu = (\lambda + p - n)/p$.*

A noi servirà di questo teorema la parte iii), che vale anche per aperti Ω molto più generali, ad es. con frontiera localmente lipschitziana.

Osserviamo che se Ω è di tipo (A), e $u \in H_0^{k,p,\lambda}(\Omega)$, posto $w(x) = u(x)$ per $x \in \Omega$, e $w(x) = 0$ per $x \in \mathbb{R}^n - \Omega$, anche $w \in H^{k,p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

4) Teoremi di Poincaré, Sobolev, Rellich.

Riportiamo l'enunciato di questi tre teoremi; per la dimostrazione vedi ed es. [1].

TEOREMA 1.3. (*di Poincaré*). *Sia Q un cubo di $\mathbb{R}^n$; esiste una costante $c = c(n)$ tale che per ogni $u \in H^{1,p}(Q)$ risulta* :

$$\int_Q | u(x) - u_Q |^p \, dx \leq c(n) [\operatorname{diam} Q]^p \int_Q \sum_i | D^i u(x) |^p \, dx.$$

Anche questo teorema vale per aperti Q molto più generali, ad es. per aperti Q limitati e convessi.

Daremo ora l'enunciato del teorema di Sobolev, in una forma che non è la più generale, ma che a noi basterà.

TEOREMA 1.4. (*di Sobolev*). *Sia Ω un aperto di classe C^1, sia $u \in H^k(\Omega)$, con $k > n/2$, sia l il massimo intero minore di $m - n/2$ $(l = m - [n/2] - 1)$.*

Allora $u \in C^1(\Omega)$. *Inoltre per ogni* $|\alpha| \leq 1$, $x \in \Omega$,

$$|D^\alpha u(x)| \leq \gamma(|u|_{m,\Omega} + |u|_{0,\Omega}),$$

dove γ *è una costante che dipende solo da* Ω *e* k. *Se inoltre* Ω *è limitato allora* $u \in C^1(\bar{\Omega})$.

TEOREMA 1.5. (*di Rellich*). *Sia* Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^n$ *limitato di classe* C^1. *Allora ogni successione limitata in* $H^m(\Omega)$ *ha una sottosuccessione convergente in* $H^j(\Omega)$, *se* $j < m$.

5. Misura di Hausdorff e funzioni di $H^{1,p}$.

Diamo innanzitutto la definizione di misura di Hausdorff, e dimensione di Hausdorff, per un insieme qualunque di $\mathbb{R}^n$.

DEFINIZIONE 1.5. Sia $\alpha \geq 0$, e $X \subset \mathbb{R}^n$; definiamo la misura α-dimensionale di X, che indicheremo $\mathcal{H}_\alpha(X)$:

$$\mathcal{H}_\alpha(X) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \inf\{\sum_i (\operatorname{diam} X_i)^\alpha;\ \bigcup_i X_i \supset X,\ \operatorname{diam} X_i < \varepsilon\} \frac{\pi^{\alpha/2}}{2^\alpha (\alpha/2)\,\Gamma(\alpha/2)} \tag{1.2}$$

dove $\Gamma(x)$ è la funzione di Eulero.

DEFINIZIONE 1.6. Sia $X \subset \mathbb{R}^n$; definiamo la dimensione di Hausdorff di X, che indicheremo $\dim_{\mathcal{H}}(X)$:

$$\dim_{\mathcal{H}}(X) = \inf\{\alpha \geq 0 : \mathcal{H}_\alpha(X) = 0\}. \tag{1.3}$$

Riportiamo ora l'enunciato di due teoremi (per i quali vedi [8]), di cui avremo bisogno nel seguito.

Sia, come sempre, Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$.

TEOREMA 1.6. *Sia* f *una funzione localmente sommabile in* Ω, *e* $0 \leq \alpha < n$. *Posto*

$$E_\alpha = \left\{ x \in \Omega : \max \lim_{\varrho \to 0^+} \varrho^{-\alpha} \int_{B(x,\varrho) \cap \Omega} |f(y)|\, dy > 0 \right\}$$

si ha:

$$\mathcal{H}_\alpha(E_\alpha) = 0.$$

In particolare sia $u \in H^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ [6], $p \leq n$; *allora posto*

$$\Sigma_1 = \left\{ x \in \Omega : \max \lim_{\varrho \to 0^+} \varrho^{p-n} \int_{B(x,\varrho) \cap \Omega} | D(u(y)) |^p \, dy > 0 \right\}$$

si ha:

$$\mathcal{H}_{n-p}(\Sigma_1) = 0$$

TEOREMA 1.7. *Sia* $u \in H^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $p < n$.
Ricordando la definizione (1.1) *e posto*:

$$\Sigma_2 = \{ x \in \Omega : \text{ non esiste } \lim_{\varrho \to 0^+} u_{x,\varrho} \} \cup \{ x \in \Omega : \lim_{\varrho \to 0^+} | u_{x,\varrho} | = +\infty \}$$

si ha, per ogni $\varepsilon > 0$:

$$\mathcal{H}_{n-p+\varepsilon}(\Sigma_2) = 0.$$

Diamo infine un ultimo teorema sul comportamento della misura di Hausdorff sotto trasformazioni Lipschitziane.

TEOREMA 1.8. *Sia* $X \subset \mathbb{R}^n$, *tale che per un* $\alpha \geq 0$, *si abbia*:

$$\mathcal{H}_\alpha(X) = 0.$$

Sia Φ *un'applicazione lipschitziana di un intorno* U *di* X *in* $\mathbb{R}^n$; *allora si ha*:

$$\mathcal{H}_\alpha(\Phi(X)) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE Basterà osservare che per ogni $x_0 \in X$, e per ogni $R < \operatorname{dist}(x_0, \partial U)$, si ha:

$$\Phi(B(x_0, R)) \subset B(\Phi(x_0), \lambda R)$$

dove λ è la seminorma lipschitziana di Φ, cioè:

$$\lambda = \sup \frac{| \Phi(x_1) - \Phi(x_2) |}{| x_1 - x_2 |} \qquad \text{per } x_1 \text{ e } x_2 \in U$$

e quindi, se $X \subset \bigcup_i B(x_i, R_i)$, si ha anche $\Phi(X) \subset \bigcup_i B(\Phi(x_i), \lambda R^i)$.

---

(6) $H^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ è lo spazio delle funzioni che sono, con le loro derivate prime, di potenza p localmente sommabile in Ω.

La tesi segue allora dalla definizione di misura di Hausdorff, osservando che per dimostrare che $\mathcal{H}_\alpha(X) = 0$, (per un $\alpha \geq 0$, e per $X \subset \mathbb{R}^n$) invece di prendere gli X_i generici, possiamo prendere sfere di $\mathbb{R}^n$. Q. E. D.

Capitolo II. - REGOLARIZZAZIONE ALL'INTERNO DI Ω.

In questo capitolo considereremo il problema della regolarizzazione delle soluzioni del nostro sistema all'interno di Ω.

Trattandosi di risultati di carattere locale, non sarà restrittivo supporre Ω limitato.

Considereremo separatamente il caso dei coefficienti A_{ij}^{hk} uniformemente continui in $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n$, e quello dei coefficienti continui. Nel primo caso, oltre ad avere una maggiore semplicità di dimostrazione, si riesce a dare una stima più precisa della misura di Hausdorff dell'insieme Σ dei punti singolari; e questo, fra l'altro, è utile per soluzioni $u \in [H_{\text{loc}}^{1,n}(\Omega)]^N$, come abbiamo visto nell'introduzione.

1) Alcuni lemmi relativi ai sistemi lineari.

Ci serviranno in seguito tre lemmi relativi ai sistemi lineari. Il primo di questi è la maggiorazione di Caccioppoli.

Lemma 2.1. *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ e siano a_{ij}^{hk} funzioni misurabili in Ω, verificanti le condizioni:*

$$|a_{ij}^{hk}| \leq L \quad (i,j = 1,\dots,n;\ h,k = 1,\dots,N) \tag{2.1}$$

$$\sum_{i,j} \sum_{h,k} a_{ij}^{hk}(x)\,\xi_h^i\,\xi_k^j \geq \sum_i \sum_h |\xi_h^i|^2 = |\xi|^2 \tag{2.2}$$

quasi ovunque in Ω, e per ogni $\xi \in \mathbb{R}^{nN}$.

Siano poi f_j^k funzioni in $L^2(\Omega)$, per $j = 1,\dots,n$; $k = 1,\dots,N$.

Esiste allora una costante $Q = Q(n, N, L)$ tale che se $u \in [H_{\text{loc}}^1(\Omega)]^N$ è soluzione del sistema

$$\begin{aligned} A(u,\psi) = \sum_{i,j}\sum_{h,k}\int_\Omega a_{ij}^{hk}\cdot D^i u_h \cdot D^j \psi_k\,dx = \\ = \sum_j \sum_k \int_\Omega f_j^k \cdot D^j \psi_k\,dx \qquad \forall\, \psi \in [C_0^1(\Omega)]^N \end{aligned} \tag{2.3}$$

allora per ogni $x_0 \in \Omega$ *e per ogni* ϱ, R $(0 < \varrho < R \leq \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega))$, *si ha*:

$$(2.4) \qquad \int\limits_{B(x_0,\varrho)} |Du|^2 dx \leq Q \left\{ (R-\varrho)^{-2} \int\limits_{B(x_0,R)} |u|^2 dx + \sum_j \sum_k \int\limits_{B(x_0,R)} |f_j^k|^2 dx \right\} \text{ (7)}$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\eta \in C_0^1(B(x_0, R))$, $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta = 1$ in $B(x_0, \varrho)$ e $|D\eta| \leq 2/(R-\varrho)$.

Posto $\psi_h = \eta^2 \cdot u_h$, si ha, grazie all'ipotesi (2.2) di ellitticità:

$$\sum_i \sum_h \int\limits_{B(x_0,R)} |D^i(\eta u_h)|^2 dx \leq \sum_{i,j} \sum_{h,k} \int\limits_{B(x_0,R)} a_{ij}^{hk} \cdot D^i(\eta u_h) \cdot D^j(\eta u_k)\, dx =$$

$$= \sum_{i,j} \sum_{h,k} \int\limits_{B(x_0,R)} a_{ij}^{hk} \left\{ D^i\eta \cdot D^j\eta \cdot u_h \cdot u_k + \eta \cdot D^j\eta \cdot D^i u_h \cdot u_k + \right.$$

$$\left. + \eta \cdot D^i\eta \cdot D^j u_k \cdot u_h + \eta^2 \cdot D^i u_h \cdot D^j u_k \right\} dx =$$

$$= \sum_{i,j} \sum_{h,k} \int\limits_{B(x_0,R)} a_{ij}^{hk} \left\{ D^i\eta \cdot D^j\eta \cdot u_h \cdot u_k - \eta \cdot D^j\eta \cdot D^i u_h \cdot u_k + \right.$$

$$\left. + \eta \cdot D^i\eta \cdot D^j u_k \cdot u_h + \eta^2 \cdot D^i u_h \cdot D^j u_k + 2\eta \cdot D^j\eta \cdot D^i u_h \cdot u_k \right\} dx =$$

$$= \sum_{i,j} \sum_{h,k} \int\limits_{B(x_0,R)} a_{ij}^{hk} \left\{ D^i\eta \cdot D^j\eta \cdot u_h \cdot u_k - u_k \cdot D^j\eta \cdot D^i(\eta u_h) + \right.$$

$$\left. + u_h \cdot D^i\eta \cdot D^j(\eta u_k) \right\} dx + \sum_j \sum_k \int\limits_{B(x_0,R)} f_j^k \left\{ \eta \cdot D^j\eta \cdot u_k + \eta \cdot D^j(\eta u_k) \right\} dx.$$

Abbiamo in quest'ultimo passaggio utilizzato il fatto che u è soluzione di (2.3). Usando ora la nota maggiorazione:

$$2\,|a \cdot b| \leq \varepsilon a^2 + 1/\varepsilon\, b^2$$

---

(7) D'ora in poi con la notazione $|Du|^2$ indicheremo $\sum_i \sum_h |D^i u_h|^2$.

per ogni a, b reali, e ε reale ≥ 0 che, se a e b sono vettori di $\mathbb{R}^n$, diviene:

$$2 \sum_j | a_j \cdot b_j | \leq \varepsilon \| a \|^2 + 1/\varepsilon \| b \|^2$$

si ha:

$$\sum_i \sum_h \int_{B(x_0, R)} | D^i (\eta u_h) |^2 dx \leq \frac{Q_1}{(R-\varrho)^2} \int_{B(x_0, R)} | u |^2 dx + \frac{Q_2}{R-\varrho} \sum_j \sum_{h,k} \int_{B(x_0, R)} | u_h | \times$$

$$\times | D^j (\eta u_k) | dx + \frac{Q_3}{R-\varrho} \sum_j \sum_k \int_{B(x_0, R)} | f_j^k | \cdot | u_k | dx + \sum_j \sum_k \int_{B(x_0, R)} | f_j^k | | D^j (\eta u_k) | dx \leq$$

$$\leq \frac{Q_1}{(R-\varrho)^2} \int_{B(x_0, R)} | u |^2 dx + \frac{Q_2}{R-\varrho} \left\{ \varepsilon_1 \int_{B(x_0, R)} | u |^2 dx + \frac{1}{\varepsilon_1} \int_{B(x_0, R)} | D(\eta u) |^2 dx \right\} +$$

$$+ \frac{Q_3}{R-\varrho} \left\{ \varepsilon_2 \int_{B(x_0, R)} | u |^2 dx + \frac{1}{\varepsilon_2} \int_{B(x_0, R)} | f |^2 dx \right\} +$$

$$+ \left\{ \varepsilon_3 \int_{B(x_0, R)} | D(\eta u) |^2 dx + \frac{1}{\varepsilon_3} \int_{B(x_0, R)} | f |^2 dx \right\}.$$

Scegliamo ora $\varepsilon_1 = \frac{3 Q_2}{R-\varrho}$; $\varepsilon_2 = \frac{Q_3}{R-\varrho}$; $\varepsilon_3 = 1/3$.

Si ottiene così:

$$\text{(2.5)} \qquad \frac{1}{3} \int_{B(x_0, R)} | D(\eta u) |^2 dx \leq \frac{Q_1 + 3 Q_2^2 + Q_3^2}{(R-\varrho)^2} \left[\int_{B(x_0, R)} | u |^2 dx \right] + 4 \left[\int_{B(x_0, R)} | f |^2 dx \right]$$

dove Q_1, Q_2 e Q_3 dipendono solo da n, N, L.

Dalla (2.5) si ottiene immediatamente la (2.4), poichè $\eta = 1$ su $B(x_0, \varrho)$.

Q. E. D.

Daremo ora un lemma di convergenza del tipo del lemma 2 di [9].

LEMMA 2.2 *Sia* $a_{ij}^{hk\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ *una successione di funzioni misurabili in* $B = B(0, 1)$, *convergenti quasi ovunque in* B *a delle funzioni* a_{ij}^{hk}, *equilimitate ed equiuniformemente ellittiche, cioè*:

$$\text{(2.1')} \qquad | a_{ij}^{hk\nu} | \leq L$$

$$\text{(2.2')} \qquad \sum_{i,j} \sum_{h,k} a_{ij}^{hk\nu}(x)\, \xi_h^i \xi_k^j \geq \sum_i \sum_h | \xi_h^i |^2 = | \xi |^2.$$

Sia $f_j^{k\nu}$ una successione di funzioni appartenenti a $L^2(B)$; supponiamo che le $f_j^{k\nu}$ convergano debolmente in $[L^2(B)]^{nN}$ ad una f_j^k. Sia u^ν una successione in $[H^1_{\text{loc}}(B) \cap L^2(B)]^N$ tale che:

$$(2.6) \qquad A^\nu(u^\nu, \psi) = \sum_{i,j} \sum_{h,k} \int_B a_{ij}^{hk\nu} \cdot D^i u_h^\nu \cdot D^j \psi_k \, dx =$$

$$= \sum_j \sum_k \int_B f_j^{k\nu} \cdot D^j \psi_k \, dx \qquad \forall\ \psi \in [C_0^1(B)]^N$$

e si supponga che:

$$(2.7) \qquad u^\nu \rightharpoonup u \text{ in } [L^2(B)]^N \text{ (8)}.$$

Allora u appartiene a $[H^1_{\text{loc}}(B)]^N$, e si ha, per ogni ϱ, $0 < \varrho < 1$

$$(2.8) \qquad u^\nu \to u \text{ in } [L^2(B(0, \varrho)]^N$$

$$(2.9) \qquad D^i u^\nu \rightharpoonup D^i u \text{ in } [L^2(B(0, \varrho))]^N \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

e inoltre

$$(2.10) \qquad A(u, \psi) = \sum_{i,j} \sum_{h,k} \int_B a_{ij}^{hk} \cdot D^i u_h \cdot D^j \psi_k \, dx =$$

$$= \sum_j \sum_k \int_B f_j^k \cdot D^j \psi_k \, dx \qquad \forall\ \psi \in [C_0^1(B)]^N .$$

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema di Banach-Steinhaus le u^ν sono equilimitate in $[L^2(B)]^N$, perchè debolmente convergenti. Per lo stesso motivo le $f_i^{k\nu}$ sono equilimitate in $L^2(B)$.

Segue allora dal lemma precedente che, per ogni ϱ, $0 < \varrho < 1$, le $D^i u^\nu$ sono equilimitate, e quindi debolmente convergenti, in $[L^2(B(0, \varrho))]^N$; ne segue la (2.9), e quindi per il teorema di Rellich (teorema 1.5) la (2.8). Abbiamo così che $u \in [H^1_{\text{loc}}(B)]^N$.

Per dimostrare la (2.10) osserviamo che

$$(2.11) \qquad A^\nu(u^\nu, \psi) = \int_B f_j^{k\nu} \cdot D^j \psi_k \, dx \qquad \forall\ \nu, \text{ e } \forall\ \psi \in [C_0^1(B)]^N.$$

---

(8) Con il simbolo $\rightharpoonup$ indicheremo la convergenza debole.

Inoltre, per la convergenza debole delle $f_j^{k\nu}$ in $[L^2(B)]^N$, si ha:

$$\int_B f_j^{k\nu} \cdot D^j \psi_k \, dx \longrightarrow \int_B f_j^k \cdot D^j \psi_k \, dx. \tag{2.12}$$

Basterà perciò provare che $A^\nu(u^\nu, \psi) \longrightarrow A(u, \psi)$.

Per questo consideriamo

$$A^\nu(u^\nu, \psi) - A(u, \psi) = A(u^\nu - u, \psi) + A^\nu(u^\nu, \psi) - A(u^\nu, \psi)$$

Dalla (2.9) segue che $\lim_{\nu \to \infty} A(u^\nu - u, \psi) = 0$; inoltre

$$|A^\nu(u^\nu, \psi) - A(u^\nu, \psi)| \leq \sum_{i,j} \sum_{h,k} \int_B |a_{ij}^{hk\nu}(x) - a_{ij}^{hk}(x)| \cdot |D^i u_h| \cdot |D^j \psi_k| \, dx.$$

Sia ora $\varrho < 1$, tale che supp $\psi \subset B(0, \varrho)$; si ha:

$$|A^\nu(u^\nu, \psi) - A(u^\nu, \psi)| \leq$$
$$\leq C(\psi) \sum_{i,j} \sum_{h,k} \left\{ \int_{B(0,\varrho)} |a_{ij}^{hk\nu}(x) - a_{ij}^{hk}(x)|^2 \, dx \right\}^{1/2} \left\{ \int_{B(0,\varrho)} |Du^\nu|^2 \, dx \right\}^{1/2}.$$

Dal lemma (2.1) segue allora che $A^\nu(u^\nu, \psi) - A(u^\nu, \psi) \longrightarrow 0$, e quindi

$$\lim_{\nu \to \infty} A^\nu(u^\nu, \psi) = A(u, \psi) \qquad \text{Q. E. D.}$$

LEMMA 2.3. *Siano b_{ij}^{hk} delle costanti verificanti le condizioni:*

$$|b_{ij}^{hk}| \leq L \tag{2.13}$$

$$\sum_{i,j} \sum_{h\,k} b_{ij}^{hk} \xi_h^i \xi_k^j \geq |\xi|^2 \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^{nN}. \tag{2.14}$$

Siano poi $f_j^k \in L^2(B)$ $(j = 1, \ldots, n\,;\ k = 1, \ldots, N)$.

Esiste allora una costante $A = A(n, N, L)$ tale che se u appartiene a $[H^1_{\mathrm{loc}}(B) \cap L^2(B)]^N$ ed è soluzione del sistema

$$E(u, \psi) = \sum_{i,j} \sum_{h,k} \int_B b_{ij}^{hk} \cdot D^i u_h \cdot D^j \psi_k \, dx = \tag{2.15}$$
$$= \sum_j \sum_k \int_B f_j^k \cdot D^j \psi_k \, dx \qquad \forall\, \psi \in [C_0^1(B)]^N$$

allora per ogni ϱ, $0 < \varrho < 1$, *si ha :*

$$U(0, \varrho) \leq A/2 \{ \varrho^2 \, U(0, 1) + \varrho^{2-n} F(0, 1) \} \tag{2.16}$$

dove

$$U(x_0, R) = R^{-n} \int_{B(x_0, R)} | u(x) - u_{x_0, R} |^2 \, dx \text{(9)} \tag{2.17}$$

$$F(x_0, R) = R^{2-n} \int_{B(x_0, R)} |f|^2 \, dx \tag{2.18}$$

$$u_{x_0, R} = \omega_n^{-1} R^{-n} \int_{B(x_0, R)} u(x) \, dx \qquad (\omega_n = \text{mis}(B(0, 1))). \tag{2.19}$$

DIMOSTRAZIONE. Poniamo $u = v + w$, con $w \in [H^1_{\text{loc}}(B) \cap L^2(B)]^N$ e soluzione del sistema omogeneo :

$$E(w, \psi) = 0 \qquad \text{per ogni } \psi \in [C^1_0(B)]^N \tag{2.20}$$

e $v \in [H^1_0(B)]^N$ soluzione del problema di Dirichlet relativo al sistema

$$E(v, \psi) = \sum_j \sum_k \int_B f_j^k \cdot D^j \psi_k \cdot dx \qquad \forall \, \psi \in [C^1_0(B)]^N . \tag{2.21}$$

Stabiliamo separatamente delle maggiorazioni per v e per w.

i) Per w vale la seguente maggiorazione:

$$W(0, \varrho) \leq C(n, N, L) \cdot \varrho^2 \cdot W(0, 1) \qquad (0 < \varrho \leq 1). \tag{2.22}$$

Per la dimostrazione vedi [9], lemma 3

ii) Consideriamo ora la v. Tenuto conto del fatto che v è nulla al bordo, possiamo sostituirla nel sistema (2.21) anche al posto della ψ, ottenendo così (usiamo anche l'ellitticità dei coefficienti, e la disuguaglianza di Hölder) :

$$\int_{B(0,1)} | Dv |^2 \, dx \leq \sum_{i,j} \sum_{h,k} \int_{B(0,1)} b_{ij}^{kh} \cdot D^i v_h \cdot D^j v_k \, dx = \tag{2.23}$$

$$= \sum_j \sum_k \int_{B(0,1)} f_j^k \cdot D^j v_k \, dx \leq \left\{ \int_{B(0,1)} |f|^2 \, dx \right\}^{1/2} \left\{ \int_{B(0,1)} | Dv |^2 \, dx \right\}^{1/2}.$$

---

(9) Con $| u(x) - u_{x_0, R} |^2$ intendiamo $\sum_k | u_k(x) - (u_k)_{x_0, R} |^2$.

Da cui si ottiene

$$\int_{B(0,1)} |Dv|^2 \, dx \leq \int_{B(0,1)} |f|^2 \, dx. \tag{2.24}$$

Dalla (2.24), per la disuguaglianza di Poincaré, si ottiene, per ogni ϱ, $0 < \varrho \leq 1$:

$$\int_{B(0,\varrho)} |v(x) - v_{0,\varrho}|^2 \, dx \leq \gamma(n) \cdot \varrho^2 \int_{B(0,\varrho)} |Dv|^2 \, dx \leq \tag{2.25}$$

$$\leq \gamma(n) \cdot \varrho^2 \int_{B(0,1)} |Dv|^2 \, dx \leq \gamma(n) \cdot \varrho^2 \int_{B(0,1)} |f|^2 \, dx \, . \tag{2.26}$$

Ritorniamo ora alla u. Osserviamo innanzitutto che, per le posizioni fatte, $u_{0,\varrho} = v_{0,\varrho} + w_{0,\varrho}$, e quindi si ha:

$$|u(x) - u_{0,\varrho}|^2 \leq 2 \, |v(x) - v_{0,\varrho}|^2 + 2 \, |w(x) - w_{0,\varrho}|^2. \tag{2.27}$$

Usando questa disuguaglianza, oltre alle (2.22), (2.25) e (2.26), si ha:

$$\int_{B(0,\varrho)} |u(x) - u_{0,\varrho}|^2 \, dx \leq 2 \int_{B(0,\varrho)} |v(x) - v_{0,\varrho}|^2 \, dx + 2 \int_{B(0,\varrho)} |w(x) - w_{0,\varrho}|^2 dx \leq \tag{2.28}$$

$$\leq \gamma(n) \cdot \varrho^2 \int_{B(0,1)} |f|^2 \, dx + C \cdot \varrho^{n+2} \int_{B(0,1)} |w(x) - w_{0,1}|^2 \, dx \leq$$

$$\leq \gamma(n) \cdot \varrho^2 \int_{B(0,1)} |f|^2 \, dx + C \cdot \varrho^{n+2} \left\{ \int_{B(0,1)} |u(x) - u_{0,1}|^2 \, dx + \int_{B(0,1)} |v - v_{0,1}|^2 \, dx \right\} \leq$$

$$\leq \gamma(n) \cdot \varrho^2 \int_{B(0,1)} |f|^2 \, dx + C \cdot \varrho^{n+2} \int_{B(0,1)} |u - u_{0,1}|^2 dx + C \cdot \gamma(n) \, \varrho^{n+2} \int_{B(0,1)} |f|^2 \, dx \leq$$

$$\leq A/2 \left\{ \varrho^{n+2} \int_{B(0,1)} |u(x) - u_{0,1}|^2 \, dx + \varrho^2 \int_{B(0,1)} |f|^2 \, dx \right\}$$

dove $A = 2 \max [C(n, N, L), \gamma(n) \cdot (1 + C)]$, e quindi dipende solo da n, N, L. (nel corso della dimostrazione abbiamo conglobato eventuali costanti numeriche nelle costanti C e γ). Q. E. D.

2. Regolarizzazione delle soluzioni.

Dimostreremo innanzitutto un lemma fondamentale; grazie al lemma 2.2 di convergenza, si riesce a dare una disuguaglianza del tipo di quella valida per sistemi a coefficienti costanti, stabilita nel lemma precedente, anche per opportuni sistemi quasi lineari. La dimostrazione è fatta per assurdo, e si basa sulla considerazione di successioni di soluzioni di sistemi lineari aventi per limite soluzioni di sistemi a coefficienti costanti, e sulla applicazione dei lemmi 2.2 e 2.3.

LEMMA 2.4. *Per ogni* $\tau\,(0<\tau<1)$, *esistono due costanti* $\sigma_0=\sigma_0(\tau, \Omega, A_{ij}^{hk}, f_j^k)$, $R_0=R_0(\tau, \Omega, A_{ij}^{hk}, f_j^k)$ *tali che se* $u \in [H^1(\Omega)]^N$ *è soluzione del sistema* (0.1) *nelle ipotesi* (0.2), (0.3), (0.4), *e con l'ulteriore ipotesi che le funzioni* A_{ij}^{hk} *siano uniformemente continue nei loro argomenti, e se per* $x_0 \in \Omega$ *e per* $R \leq R_0 \wedge d(x_0, \partial\Omega)$ *si ha:*

$$U(x_0, R) < \sigma_0^2 \tag{2.29}$$

$$F(x_0, R) = R^{2-n} \int_{B(x_0, R)} |f|^2\, dx < \sigma_0^2 \tag{2.30}$$

allora:

$$U(x_0, \tau R) \leq A \,\{\tau^2\, U(x_0, R) + \tau^{2-n} F(x_0, R)\} \tag{2.31}$$

($A = A(n, N, L)$ è la costante del lemma 2.3).

DIMOSTRAZIONE. Se il lemma non fosse vero esisterebbero un τ $(0 < \tau < 1)$, una successione $x_\nu \in \Omega$, una successione $\sigma_\nu \to 0$, una successione $R_\nu \to 0$, una successione $u^\nu \in [H^1(\Omega)]^N$ di soluzioni di (0.1) tali che:

$$\max\{U^\nu(x_\nu, R_\nu), F^\nu(x_\nu, R_\nu)\} = \sigma_\nu^2 \tag{2.32}$$

$$U^\nu(x_\nu, \tau R_\nu) > A\,\{\tau^2\, U^\nu(x_\nu, R_\nu) + \tau^{2-n} F^\nu(x_\nu, R_\nu)\}. \tag{2.33}$$

Poniamo ora

$$v^\nu(y) = \sigma_\nu^{-1}\{u^\nu(x_\nu + R_\nu y) - u^\nu_{x_\nu, R_\nu}\} \tag{2.34}$$

$$d_j^{k\nu}(y) = \sigma_\nu^{-1} R_\nu f_j^k(x_\nu + R_\nu y) \tag{2.35}$$

$$\psi(y) = R_\nu^{-1} \varphi(x_\nu + R_\nu y). \tag{2.36}$$

Sostituendo nel sistema (0.1), grazie alle posizioni (2.34)-(2.36), si ottiene, mediante semplici calcoli:

$$(2.37) \qquad \sum_{i,j}\sum_{h,k}\int_{B(0,1)} A_{ij}^{hk}(x_\nu + R_\nu y, \sigma_\nu v^\nu(y) + u^\nu_{x_\nu, R_\nu})\cdot D^i v_h^\nu \cdot D^j \psi_k \, dy =$$

$$= \sum_j \sum_k \int_{B(0,1)} d_j^{k\nu}(y)\cdot D^j \psi_k \, dy \qquad \forall \psi \in [C_0^1(B)]^N .$$

Le (2.32) e (2.33) diventano:

$$(2.38) \qquad \max\{V^\nu(0,1), D^\nu(0,1)\} = 1$$

$$(2.39) \qquad V^\nu(0,\tau) > A\{\tau^2 V^\nu(0,1) + \tau^{2-n} D^\nu(0,1)\} \geq A\,\tau^2 > 0$$

dove

$$V^\nu(0,\tau) = \tau^{-n}\int_{B(0,\tau)} |v^\nu(y) - v^\nu_{0,\tau}|^2 dy \quad \text{e} \quad D^\nu(0,\tau) = \tau^{2-n}\int_{B(0,\tau)} |d_j^{k\nu}|^2 dy .$$

Infatti sostituendo nelle (2.32) e (2.33) si ha:

$$V^\nu(0,1) = \int_{B(0,1)} |v^\nu(y) - v^\nu_{0,1}|^2 dy =$$

$$= \frac{\sigma_\nu^{-2}}{R_\nu^n}\int_{B(x_\nu, R_\nu)} |u^\nu(x_\nu + R_\nu y) - u^\nu_{x_\nu, R_\nu}|^2 d(x_\nu + R_\nu y) = \sigma_\nu^{-2}\, U^\nu(x_\nu, R_\nu)$$

$$D^\nu(0,1) = \frac{R_\nu^2}{\sigma_\nu^2}\int_{B(0,1)} |f_j^k(x_\nu + R_\nu y)|^2 dy = \frac{R_\nu^{2-n}}{\sigma_\nu^2}\int_{B(x_\nu, R_\nu)} |f_j^k|^2 dx = \sigma_\nu^{-2} F^\nu(x_\nu, R_\nu).$$

Passando eventualmente a sottosuccessioni, che indicheremo ancora con v^ν, si ha:

$$(2.40) \qquad v^\nu \rightharpoonup v \qquad \text{in } [L^2(B)]^N$$

infatti le v^ν sono equilimitate in $[L^2(B)]^N$: $\int_B |v^\nu(x)|^2 dx \leq 1$

$$(2.41) \qquad \sigma^\nu v^\nu \longrightarrow 0 \qquad \text{quasi ovunque in } B$$

infatti $\{\|v^\nu\|_{L^2(B)}\}_\nu$ è limitata, quindi $\|\sigma_\nu v^\nu\| = \sigma_\nu \|v^\nu\| \longrightarrow 0$; perciò, passando a sottosuccessioni, si ha la (2.41)

(2.42) $$A_{ij}^{hk}(x_\nu, u_{x_\nu, R}^\nu) \to b_{ij}^{hk}$$ perchè le A_{ij}^{hk} sono limitate

(2.43) $$d_j^{k\nu} \rightharpoonup d_j^k \text{ in } [L^2(B)]^{nN}$$ per lo stesso motivo di (2.40).

Da (2.41) e (2.42), tenuto conto della uniforme continuità delle funzioni A_{ij}^{hk}, si ha:

(2.44) $$A_{ij}^{hk}(x_\nu + R_\nu y, \sigma_\nu v^\nu(y) + u_{x_\nu, R_\nu}^\nu) \to b_{ij}^{hk}$$ q. ov. in B.

Applicando il lemma 2.2 si ha allora:

(2.45) $$v^\nu \to v \quad \text{in } [L^2(B(0,\varrho))]^N \quad \forall \varrho, (0 < \varrho < 1)$$

(2.46) $$D^i v^\nu \rightharpoonup D^i v \quad \text{in } [L^2(B(0,\varrho))]^N \quad \forall \varrho, (0 < \varrho < 1)$$

(2.47) $$\sum_{i,j}\sum_{h,k}\int_B b_{ij}^{hk}\cdot D^i v_h \cdot D^j \psi_k \, dy = \sum_j \sum_k \int_B d_j^k(y)\cdot D^j \psi_k \, dy \quad \forall \psi \in [C_0^1(B)]^N.$$

Ma il sistema (2.47) è a coefficienti costanti, possiamo quindi applicare il lemma 2.3, ottenendo:

$$V(0,\tau) \le A/2 \,\{\tau^2 V(0,1) + \tau^{2-n} D(0,1)\}$$

mentre, passando al limite nella (2.39), si ha:

$$V(0,\tau) \ge A\,\{\tau^2 V(0,1) + \tau^{2-n} D(0,1)\}.$$

Infatti $V^\nu(0,\tau)$ converge a $V(0,\tau)$, perchè, per la (2.44), abbiamo:

$$v^\nu - v_{0,\tau}^\nu \to v - v_{0,\tau} \quad \text{in } [L^2(B(0,\tau))]^N$$

osserviamo infatti che la successione numerica $\{v_{0,\tau}^\nu\}$ converge a $v_{0,\tau}$. Inoltre, per la (2.40), passando al limite nel secondo membro della (2.39) si ha:

$$V(0,1) \le \min \lim_{\nu\to\infty} V^\nu(0,1)$$

e analogamente, per la (2.43)

$$D(0,1) \le \min \lim_{\nu\to\infty} D^\nu(0,1)$$

Si ha così l'assurdo, tenendo anche conto del fatto che:

$$V(0, \tau) \geq A\,\tau^2 > 0 \qquad \text{Q. E. D.}$$

Diamo ora un lemma corrispondente al lemma 2.4, senza però l'ipotesi di uniforme continuità delle funzioni A_{ij}^{hk}. Osserviamo che nelle ipotesi in questo caso c'è anche una condizione sulla media; e sarà questo fatto a rendere meno precisa la stima della misura dell'insieme dei punti singolari.

LEMMA 2.5. *Per ogni* $\tau\,(0 < \tau < 1)$ *e per ogni* $M > 0$ *esistono due costanti positive* $\sigma_0 = \sigma_0(\tau, M, \Omega, A_{ij}^{hk}, f_j^k)$, $R_0 = R_0(\tau, M, \Omega, A_{ij}^{hk}, f_j^k)$ *tali che se* $u \in [H^1(\Omega)]^N$ *è soluzione di* (0.1) *nelle ipotesi* (0.2), (0.3) *e* (0.4), *e se per* $x_0 \in \Omega$ *e per* $R \leq R_0 \wedge d(x_0, \partial\Omega)$ *si ha:*

$$U(x_0, R) < \sigma_0^2 \tag{2.48}$$

$$F(x_0, R) < \sigma_0^2 \tag{2.49}$$

$$|u_{x_0, R}| \leq M \tag{2.50}$$

allora:

$$U(x_0, \tau R) \leq A\,\}\tau^2\, U(x_0, R) + \tau^{2-n}\, F(x_0, R)\{ \tag{2.51}$$

(di nuovo $A = A(n, N, L)$ è la costante del lemma 2.3).

Come abbiamo già osservato, essendo il risultato di carattere locale, si può supporre Ω limitato, e le funzioni A_{ij}^{hk} definite e continue per x che varia in $\overline{\Omega}$.

DIMOSTRAZIONE. Si procede come nel lemma 2.4 fino alla (2.41). In luogo della (2.42) si può supporre:

$$x_\nu \to \overline{x} \qquad u^{\nu}_{x_\nu, R_\nu} \to \overline{u} \tag{2.52}$$

Da questa, per la continuità degli A_{ij}^{hk}, si ricava che:

$$A_{ij}^{hk}(x_\nu + R_\nu y, \sigma_\nu v^\nu(y) + u^\nu_{x_\nu, R_\nu}) \to A_{ij}^{hk}(\overline{x}, \overline{u}) = b_{ij}^{hk} \quad \text{q. ov. in } B. \tag{2.42$'$}$$

La conclusione è identica a quella del lemma 2.4. Q. E. D.

Diamo ora altri due lemmi, i quali ci dicono che se il lemma 2.4, (rispettivamente 2.5) vale per un certo punto ed un certo raggio R, allora vale in quel punto anche per $\tau^k R$, con k intero e τ abbastanza piccolo.

LEMMA 2.6. *Se u appartiene a $[H^1(\Omega)]^N$, è soluzione del sistema* (0.1) *con le condizioni* (0.2), (0.3), (0.4), *e con la ipotesi di uniforme continuità degli A_{ij}^{hk}, e in un punto $x_0 \in \Omega$ verifica le condizioni:*

$$U(x_0, R) < \sigma_0^2 = \sigma_0^2(\tau, \Omega, A_{ij}^{hk}, f_j^k) \tag{2.53}$$

$$F(x_0, R) < \sigma_0^2 = \sigma_0^2(\tau, \Omega, A_{ij}^{hk}, f_j^k) \tag{2.54}$$

dove

$$\tau \leq (2\Lambda)^{-1/(2-\alpha)} \tag{2.55}$$

$$R \leq R_1 \wedge \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega) \tag{2.56}$$

$$R_1 = R_0(\tau, \Omega, A_{ij}^{hk}, f_j^k) \wedge \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_0^2}{\mu}\right]^{1/\alpha} \wedge \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_0^2(1 - \Lambda^{2-\alpha})}{\Lambda\, \mu\, \tau^{2-n-\alpha}}\right]^{1/\alpha} \tag{2.57}$$

$$\mu = \sum_j \sum_k \| f_j^k \|^2_{L^{2, n-2+\alpha}(\Omega)} \tag{2.58}$$

allora per ogni intero $k \geq 0$ si ha:

$$U(x_0, \tau^k R) \leq \tau^{\alpha k} \sigma_0^2 . \tag{2.59}$$

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo innanzitutto che, poiché $f_j^k \in L^{2, n-2+\alpha}$ essendo per la (2.57) $R_1^\alpha < \sigma_0^2/\mu$ risulta, grazie anche alla (2.58):

$$F(x_0, \varrho) = \varrho^{2-n} \sum_j \sum_k \int_{B(x_0, \varrho)} |f_j^k|^2\, dx \leq \mu\, \varrho^\alpha < \sigma_0^2 \qquad \forall\, \varrho,\ 0 < \varrho \leq R_1 . \tag{2.60}$$

Dimostriamo ora la (2.59) per induzione su k. Per $k = 0$ la (2.59) si riduce alla (2.53). Supponiamo ora la (2.59) vera per $k - 1$: questa, insieme alla disuguaglianza (2.60), ci permette di applicare il lemma 2.4 a $U(x_0, \tau^k R)$, ottenendo così:

$$\begin{aligned} U(x_0, \tau^k R) &\leq \Lambda \{ \tau^2\, U(x_0, \tau^{k-1} R) + \tau^{2-n} F(x_0, \tau^{k-1} R) \} < \\ &< \Lambda\, \tau^{2+k\alpha-\alpha}\, \sigma_0^2 + \Lambda\, \mu\, \tau^{2-n+k\alpha-\alpha} R^\alpha . \end{aligned} \tag{2.61}$$

Dalla (2.57) segue allora immediatamente la (2.59); l'induzione è così completa. Q. E. D.

LEMMA 2.7. *Se u appartiene a $[H^1(\Omega)]^N$, è soluzione del sistema* (0.1) *con le condizioni* (0.2), (0.3), (0.4), *e in un punto $x_0 \in \Omega$ verifica le condizioni* (*valgono ancora le* (2.55) *e* (2.58)):

(2.62) $$|u_{x_0, R}| \leq M/2$$

(2.63) $$U(x_0, R) \leq \sigma_1^2$$

(2.64) $$F(x_0, R) \leq \sigma_1^2$$

dove

(2.65) $$\sigma_1 = \sigma_0(\tau, M, \Omega, A_{ij}^{hk}, f_j^k) \wedge \frac{M}{2}\left[\frac{\omega_n}{2}\right]^{1/2} \cdot \frac{1-\tau^{\alpha/2}}{1+\tau^{-n/2}}$$

(2.66) $$R \leq \bar{R}_0 \wedge \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$$

(2.67) $$\bar{R}_0 = R_0(\tau, M, \Omega, A_{ij}^{hk}, f_j^k) \wedge \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\sigma_1^2}{\mu}\right]^{1/\alpha} \wedge \left[\frac{\sigma_1^2}{2\mu\tau^{-n}}\right]^{1/\alpha}$$

(ricordiamo che ω_n è la misura della sfera unitaria in $\mathbb{R}^n$),
allora per ogni intero positivo k si ha:

(2.68) $$U(x_0, \tau^k R) \leq \tau^{\alpha k}\{1/2\; U(x_0, R) + \mu\tau^{-n} R^\alpha\}$$

(2.69) $$U(x_0, \tau^k R) \leq \tau^{\alpha k}\sigma_1^2 < \sigma_1^2 .$$

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo innanzitutto che, poiché $f_j^k \in L^{2, n-2+\alpha}$ essendo per la (2.67) $\bar{R}_0^\alpha < (1/2)(\sigma_1^2/\mu)$, risulta, grazie anche alla (2.58):

(2.70) $$F(x_0, \varrho) \leq \sigma_1^2 \quad \text{per ogni } \varrho \quad (0 < \varrho \leq \bar{R}_0).$$

Abbiamo inoltre, mediante semplici calcoli: ([10])

(2.71) $$|u_{x_0, \tau\varrho} - u_{x_0, \varrho}| \leq [(U(x_0, \tau\varrho))^{1/2} + \tau^{-n/2}(U(x_0, \varrho))^{1/2}]\left(\frac{\omega_n}{2}\right)^{-1/2}$$

([10]) Abbiamo infatti, per quasi tutti gli $x \in B(x_0, \varrho)$:

$$|u_{x_0, \varrho} - u_{x_0, \tau\varrho}|^2 \leq 2[|u_{x_0, \varrho} - u(x)|^2 + |u_{x_0, \tau\varrho} - u(x)|^2].$$

Integriamo ora sulla sfera $B(x_0, \tau\varrho)$: $(B(x_0, \tau\varrho) \subset B(x_0, \varrho))$

$$\omega_n \tau^n \varrho^n |u_{x_0, \varrho} - u_{x_0, \tau\varrho}|^2 \leq 2\left[\int_{B(x_0, \tau\varrho)} \{|u - u_{x_0, \varrho}|^2 + |u - u_{x_0, \tau\varrho}|^2\} dx\right]$$

$$|u_{x_0, \varrho} - u_{x_0, \tau\varrho}|^2 \leq 2\omega_n^{-1}[\tau^{-n} U(x_0, \varrho) + U(x_0, \tau\varrho)]$$

da cui si ha la relazione voluta $((a+b)^{1/2} \leq a^{1/2} + b^{1/2}$ per $a, b \geq 0)$.

valida per ogni $\varrho \leq \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$. Dalla (2.71) si ricava immediatamente per ogni intero positivo k:

$$(2.72) \qquad | u_{x_0, \tau^k R} | \leq | u_{x_0, R} | + (1 + \tau^{-n/2}) \left(\frac{\omega_n}{2}\right)^{-1/2} \sum_{j=0}^{k} (U(x_0, \tau^j R))^{1/2}.$$

Dimostriamo ora per induzione su k (2.68) e (2.69), insieme alle relazioni seguenti:

$$(2.73) \qquad U(x_0, \tau^k R) \leq (A \tau^2)^k U(x_0, R) + \tau^{-n} \sum_{i=1}^{k} (A \tau^2)^i F(x_0, \tau^{k-i} R)$$

$$(2.74) \qquad | u_{x_0, \tau^k R} | \leq M.$$

i) Dimostriamo queste maggiorazioni per $k = 1$.

La (2.73) si riduce a $U(x_0, \tau R) \leq A \tau^2 [U(x_0, R) + \tau^{-n} F(x_0, R)]$, che è vera per il lemma 2.5, che possiamo applicare a $U(x_0, \tau R)$ grazie alle ipotesi (2.62), (2.63) e (2.64).

Dalla (2.73) segue la (2.68), grazie alle (2.55) e (2.58): infatti

$$U(x_0, \tau R) \leq A \{\tau^2 U(x_0, R) + \tau^{2-n} F(x_0, R)\} < \tau^\alpha \{[1/2]\, U(x_0, R) + \mu\, \tau^{-n} R^\alpha\}.$$

Dalla (2.68) segue immediatamente la (2.69), per la (2.63) e (2.67).

Dimostriamo infine la (2.74). Dalla (2.72) si ottiene:

$$| u_{x_0, \tau R} | \leq | u_{x_0, R} | + (1 + \tau^{-n/2}) \left(\frac{\omega_n}{2}\right)^{-1/2} \{(U(x_0, R))^{1/2} + (U(x_0, \tau R))^{1/2}\}.$$

Applichiamo ora le (2.62), (2.63) e la (2.69) già dimostrata nel caso $k = 1$. Si ha allora:

$$| u_{x_0, \tau R} | \leq M/2 + (1 + \tau^{-n/2}) \left(\frac{\omega_n}{2}\right)^{-1/2} \{\sigma_1 + \tau^{\alpha/2} \sigma_1\}.$$

Maggioriamo ora la somma tra parentesi $\{\ \}$ con la somma della intera serie, che è convergente, ed utilizziamo la (2.65):

$$| u_{x_0, \tau R} | \leq M/2 + (1 + \tau^{-n/2}) \left(\frac{\omega_n}{2}\right)^{-1/2} \sigma_1 \frac{1}{1 - \tau^{\alpha/2}} \leq M/2 + M/2 = M.$$

ii) Supponiamo ora le (2.68), (2.69) e le (2.73), (2.74) vere per $k - 1$, e dimostriamole per k.

Per avere la (2.73) applichiamo il lemma 2.5 a $U(x_0, \tau^k R)$, il che è possibile essendone verificate le ipotesi, grazie alla (2.70) che è sempre vera, e grazie alle (2.69) e (2.74), supposte vere per $k - 1$ per l'ipotesi induttiva.

Si ottiene allora:

$$U(x_0, \tau^k R) \leq A\,\{\tau^2\, U(x_0, \tau^{k-1} R) + \tau^{2-n} F(x_0, \tau^{k-1} R)\} \leq$$

$$\leq A\left\{\tau^2\left[(A\tau^2)^{k-1}\, U(x_0, R) + \tau^{-n}\sum_{i=1}^{k-1}(A\tau^2)^i F(x_0, \tau^{k-1-i} R)\right] + \tau^{2-n} F(x_0, \tau^{k-1} R)\right\} =$$

$$= (A\tau^2)^k\, U(x_0, R) + \tau^{-n}\sum_{i=1}^{k}(A\tau^2)^i F(x_0, \tau^{k-i} R).$$

Dalla (2.73) segue la (2.68), grazie alle (2.55) e (2.58), analogamente a quanto fatto nel caso $k = 1$:

$$U(x_0, \tau^k R) \leq (A\tau^2)^k\, U(x_0, R) + \tau^{-n}\sum_{i=1}^{k}(A\tau^2)^i F(x_0, \tau^{k-i} R) \leq$$

$$\leq (1/2)^k \tau^{\alpha k}\, U(x_0, R) + \tau^{-n}\mu R^\alpha \tau^{\alpha k}\sum_{i=1}^{k}(1/2)^i \tau^{i\alpha}\tau^{-i\alpha} <$$

$$< \tau^{\alpha k}\,\{[(1/2)]\, U(x_0, R) + \mu\tau^{-n} R^\alpha\}.$$

Dalla (2.68) segue immediatamente la (2.69), per la (2.63) e (2.67).

Dimostriamo infine la (2.74). Usiamo la (2.72), le (2.62), (2.63) e la (2.69), già verificata fino a k.

$$|u_{x_0, \tau^k R}| \leq |u_{x_0, R}| + (1 + \tau^{-n/2})\left(\frac{\omega_n}{2}\right)^{-1/2}\sum_{j=1}^{k}(U(x_0, \tau^j R))^{1/2} \leq$$

$$\leq M/2 + (1 + \tau^{-n/2})\left(\frac{\omega_n}{2}\right)^{-1/2}\cdot\sigma_1\cdot\sum_{j=1}^{k}\tau^{\alpha j/2}.$$

Procedendo ora come nel caso $k = 1$, si ha:

$$|u_{x_0, \tau^k R}| \leq M/2 + (1 + \tau^{-n/2})\left(\frac{\omega_n}{2}\right)^{-1/2}\cdot\sigma_1\cdot\frac{1}{1 - \tau^{\alpha/2}} \leq M.$$

L'induzione è così completata. Q. E. D.

Possiamo ora dimostrare il teorema di regolarizzazione per l'interno. La dimostrazione è divisa in due parti: nella prima si considera il caso dei coefficienti A_{ij}^{hk} uniformemente continui, nella seconda parte gli A_{ij}^{hk} sono soltanto continui.

TEOREMA 2.1. *Per ogni soluzione* $u \in [H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)]^N$ *del sistema*:

$$\mathcal{A}(u, \psi) = \sum_{i,j} \sum_{h,k} \int_\Omega A^{hk}_{ij}(x, u) \cdot D^i u_h \cdot D^j \psi_k \, dx = \tag{0.1}$$

$$= \sum_j \sum_k \int_\Omega f^k_j(x) \cdot D^j \psi_k \, dx \qquad \forall \psi \in [C^1_0(\Omega)]^N$$

dove Ω *è un aperto limitato di* $\mathbb{R}^n$, *con frontiera di classe* C^1, *i coefficienti* A^{hk}_{ij} *verificano le condizioni*:

$$\begin{cases} A^{hk}_{ij} \in C^0(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N) \\ |A^{hk}_{ij}| \le L \end{cases} \tag{0.2}$$

$$\sum_{i,j} \sum_{h,k} A^{hk}_{ij} \xi^i_h \xi^j_k \ge |\xi|^2 = \sum_i \sum_h |\xi^i_h|^2 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^{nN} \tag{0.3}$$

ed il secondo membro appartiene allo spazio di Morrey $L^{2, n-2+\alpha}$:

$$f^k_j \in [L^{2, n-2+\alpha}(\Omega)]^N \qquad 0 < \alpha < 2 \tag{0.4}$$

esiste un aperto $\Omega_0 \subset \Omega$, *tale che*:

$$u_h \in C^{0, \alpha/2}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0) \qquad (h = 1, \dots, N).$$

DIMOSTRAZIONE. (*Caso dei coefficienti* A^{hk}_{ij} *uniformemente continui*). Fissiamo innanzitutto τ:

$$\tau = (2 A)^{-1/(2-\alpha)}. \tag{2.75}$$

In corrispondenza di τ troviamo σ_0 ed R_0, come risultano dal lemma 2.4, e quindi anche R_1 dato dal lemma 2.6.

Sia ora x_0 un punto di Ω per il quale esiste un R positivo, con la condizione $R < R_1 \wedge \mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega)$, tale che:

$$U(x_0, R) < \sigma_0^2. \tag{2.76}$$

Esiste allora un δ $(0 < \delta < R)$ tale che:

$$U(x, R_x) < \sigma_0^2 \quad \forall x, \ |x - x_0| < \delta \qquad (R_x = R - |x - x_0|). \tag{2.77}$$

Inoltre, grazie alla scelta di R_1, si ha:

$$F(x, R_x) < \sigma_0^2 \qquad \forall\, x, \ |x - x_0| < \delta.$$

Possiamo così applicare il lemma 2.6 a $U(x, R_x)$ ottenendo che per ogni $x \in B(x_0, \delta)$ e per ogni intero $k \geq 0$ si ha:

$$U(x, \tau^k R_x) < \sigma_0^2 \tau^{\alpha k}. \tag{2.78}$$

Vogliamo ora dimostrare che una relazione corrispondente vale anche per ogni ϱ, comunque scelto, purché abbastanza piccolo. Preso dunque un ϱ, con la condizione:

$$0 < \varrho < R - \delta \leq R_x$$

indichiamo con k l'intero per cui

$$\tau^{k+1} R_x < \varrho \leq \tau^k R_x. \tag{2.79}$$

Si ha allora, tenendo presente la definizione di $U(x, \varrho)$, e le relazioni (2.78) e (2.79):

$$\tau^n\, U(x, \varrho) \leq \left[\frac{\varrho}{\tau^k R_x}\right]^n \cdot U(x, \varrho) \leq U(x, \tau^k R_x) \leq \sigma_0^2 \tau^{\alpha k} < \sigma_0^2 \left[\frac{\tau^{-1}}{R_x}\right]^\alpha \varrho^\alpha$$

e quindi, per ogni $x \in B(x_0, \delta)$, e per ogni ϱ, $0 < \varrho < R - \delta$, si ha:

$$U(x, \varrho) < \frac{\sigma_0^2 \tau^{-n-\alpha}}{(R - \delta)^\alpha} \varrho^\alpha. \tag{2.80}$$

Dalla (2.80), per il teorema 1.1, che, come abbiamo visto nel capitolo I, dà una caratterizzazione degli spazi delle funzioni hölderiane in base a disuguaglianze integrali quali la relazione (2.80) appena dimostrata, segue che u è hölderiana con esponente $\alpha/2$ nella sfera $B(x_0, \delta)$.

Perciò u è hölderiana, con esponente $\alpha/2$, in un aperto $\Omega_0 \subset \Omega$.

Q. E. D.

DIMOSTRAZIONE (*Caso dei coefficienti A_{ij}^{hk} continui*).

Fissiamo innanzitutto τ:

$$\tau = (2\Lambda)^{-1/(2-\alpha)}. \tag{2.81}$$

Sia poi x_0 un punto di Ω per il quale si abbia:

$$\lim_{\varrho \to 0^+} U(x_0, \varrho) = 0 \tag{2.82}$$

ed inoltre

(2.83) $$\lim_{\varrho \to 0^+} u_{x_0, \varrho} \text{ esiste finito.}$$

Dalla (2.83) segue che esistono un M ed un R' tali che

$$|u_{x_0 R}| \leq M/4 \qquad \forall R,\ 0 < R \leq R'.$$

In corrispondenza di τ e di M troviamo σ_0 ed R_0 dati dal lemma 2.5, e quindi anche σ_1 ed $\overline{R}_0$ (con lo stesso significato che nel lemma 2.7). Possiamo inoltre supporre $\overline{R}_0 \leq R'$. Esisterà infine per la (2.82) un opportuno R, $R \leq \overline{R}_0 \wedge \operatorname{dist}(x_0, \partial \Omega)$ tale che $U(x_0, R) \leq 1/2\, \sigma_1^2$.

Posto allora $R_x = R - |x - x_0|$, si può determinare un δ, con $0 < \delta < R$, in modo che se $x \in B(x_0, \delta)$, si abbia:

$$|u_{x, R_x}| \leq M/2 \qquad U(x, R_x) < \sigma_1^2.$$

Inoltre, essendo $R_x \leq R \leq \overline{R}_0$, si avrà anche:

$$F(x, R_x) < \sigma_1^2$$

e quindi, per il lemma 2.7:

(2.84) $$U(x, \tau^k R_x) \leq \sigma_1^2 \tau^{ak} \qquad \forall x \in B(x_0, \delta), \text{ e } \forall k \text{ intero.}$$

La tesi segue come nel caso dei coefficienti uniformemente continui, a partire dalla formula (2.84), che coincide con la formula (2.78). Q. E. D.

4. Dimensione di Hausdorff dell'insieme dei punti singolari.

Considereremo infine il problema di valutare la dimensione dell'insieme Σ dei punti singolari: qui sorgerà la differenza tra coefficienti continui, ed uniformemente continui.

TEOREMA 2.2. (*Caso dei coefficienti A_{ij}^{hk} uniformemente continui*). *Sia $u \in [H^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)]^N$ $(p \geq 2)$ soluzione del sistema* (0.1); *supponiamo che gli A_{ij}^{hk} siano uniformemente continui in $\Omega \times \mathbb{R}^N$; allora si ha:*

(2.85) $$\mathcal{H}_{n-p}(\Omega - \Omega_0) = 0$$

da cui in particolare segue :

$$\dim_{\mathcal{H}} (\Omega - \Omega_0) \leq n - p \tag{2.86}$$

(Ω_0 è, come nel teorema precedente, l'insieme dei punti regolari).

DIMOSTRAZIONE. Per quanto visto nel teorema 2.1 si ha che l'insieme dei punti singolari è contenuto in Σ_1, dove

$$\Sigma_1 = \left\{ x_0 \in \Omega : \max \lim_{\varrho \to 0^+} \varrho^{-n} \int_{B(x_0, \varrho)} | u(x) - u_{x_0, \varrho} |^2 \, dx > 0 \right\}.$$

Applicando la disuguaglianza di Poincaré, e poi di Hölder, si ottiene:

$$\varrho^{-n} \int_{B(x_0, \varrho)} | u(x) - u_{x_0, \varrho} |^2 \, dx \leq \gamma(n) \, \varrho^{2-n} \int_{B(x_0, \varrho)} | Du(x) |^2 \, dx \leq$$

$$\leq \gamma(n) \, \varrho^{2-n} \left\{ \int_{B(x_0, \varrho)} | Du |^p \, dx \right\}^{2/p} \left\{ \int_{B(x_0, \varrho)} dx \right\}^{1-2/p} =$$

$$= \gamma(n) \, \varrho^{2-n} \, \omega_n^{1-2/p} (\varrho^n)^{1-2/p} \left\{ \int_{B(x_0, \varrho)} | Du |^p \, dx \right\}^{2/p} = \gamma'(n) \left[\varrho^{p-n} \int_{B(x_0, \varrho)} | Du |^p \, dx \right]^{\frac{2}{p}}.$$

Possiamo così applicare il teorema 1.6, ottenendo

$$\mathcal{H}_{n-p} (\Sigma_1) = 0$$

e quindi la tesi. Q. E. D.

TEOREMA 2.2'. (*Caso dei coefficienti A_{ij}^{hk} continui*). *Sia $u \in [H_{\mathrm{loc}}^{1,p}(\Omega)]^N$ ($p \geq 2$) soluzione del sistema* (0.1); *supponiamo ora che i coefficienti A_{ij}^{hk} siano solo continui nelle variabili x ed u; allora si ha, per ogni $\varepsilon > 0$:*

$$\mathcal{H}_{n-p+\varepsilon} (\Omega - \Omega_0) = 0$$

e quindi, anche in questo caso, si ha :

$$\dim_{\mathcal{H}} (\Omega - \Omega_0) \leq n - p.$$

DIMOSTRAZIONE. Per quanto visto nella dimostrazione del teorema 2.1 si ha che l'insieme dei punti singolari è contenuto nell'unione di Σ_1 e Σ_2, dove :

$$\Sigma_1 = \left\{ x_0 \in \Omega : \max \lim_{\varrho \to 0^+} \varrho^{-n} \int_{B(x_0, \varrho)} | u(x) - u_{x_0, \varrho} |^2 \, dx > 0 \right\}$$

$$\Sigma_2 = \{ x_0 \in \Omega : \text{ non esiste } \lim_{\varrho \to 0^+} u_{x_0, \varrho} \} \cup \{ x_0 \in \Omega : \lim_{\varrho \to 0^+} | u_{x_0, \varrho} | = + \infty \} .$$

Come nel teorema precedente abbiamo, per il teorema 1.6 :

$$\mathcal{H}_{n-p} (\Sigma_1) = 0 .$$

D'altra parte dal teorema 1.7 si ha :

$$\mathcal{H}_{n-p+\varepsilon} (\Sigma_2) = 0 \qquad \forall \, \varepsilon > 0.$$

In conclusione :

$$\mathcal{H}_{n-p+\varepsilon} (\Sigma_1 \cup \Sigma_2) = 0 \qquad \forall \, \varepsilon > 0$$

e quindi la tesi. Q. E. D.

CAPITOLO III. - REGOLARIZZAZIONE AL BORDO: PROBLEMA DI DIRICHLET CON DATO AL BORDO NULLO.

In questo capitolo vogliamo dare un teorema di regolarizzazione al bordo, corrispondente a quello per l'interno dato nel capitolo precedente. Nella dimostrazione di alcuni lemmi daremo soltanto un accenno a quanto vi è di analogo ai corrispondenti lemmi per l'interno.

Come abbiamo già osservato nell'introduzione, supporremo che la frontiera di Ω sia piana.

In questo capitolo indicheremo con Ω la semisfera $B(X_0, r) \cap \{x_n \geq 0\}$, e con Γ la parte piana della sua frontiera, cioè $\Gamma = B(X_0, r) \cap \{x_n = 0\}$ (X_0 ovviamente è un punto dell'iperpiano $\{x_n = 0\}$).

Sarà poi per $x \in \{x_n = 0\}$, $B^*(x, r) = B(x, r) \cap \{x_n \geq 0\}$.

1. Alcuni lemmi relativi ai sistemi lineari.

Daremo qui tre lemmi, corrispondenti ai lemmi cap. I, par. 1).

LEMMA 3.1. *Siano a_{ij}^{hk} funzioni misurabili in Ω, verificanti le condizioni* (2.1) *e* (2.2) (*rispettivamente limitatezza ed ellitticità*).

Siano poi f_j^k funzioni in $L^2(\Omega)$, per $j = 1, \dots, n$; $k = 1, \dots, N$.

Esiste allora una costante $Q = Q(n, N, L)$ tale che se $u \in [H^1_{\text{loc}}(\Omega)]^N$ è soluzione del sistema (2.3) *ed inoltre u ha traccia nulla su Γ, allora per ogni $x_0 \in \Gamma$ e per ogni ϱ, R ($0 < \varrho < R$; ed R tale che $B^*(x_0, R) \subset \Omega$), si ha:*

$$(3.1) \qquad \int_{B^*(x_0,\varrho)} |Du|^2 \, dx \leq Q \left\{ (R-\varrho)^{-2} \int_{B^*(x_0,R)} |u|^2 \, dx + \sum_j \sum_k \int_{B^*(x_0,R)} |f_j^k|^2 \, dx \right\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\eta \in C_0^1(B(x_0, R))$, $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta = 1$ su $B(x_0, \varrho)$ e $|D\eta| \leq 2/(R-\varrho)$. Sia $\bar\eta$ la sua restrizione a $B^*(x_0, R)$. Posto $\psi_h = \bar\eta^2 \cdot u_h$, si ha che ψ appartiene a $[H_0^1(B^*(x_0, R))]^N$.

Si ha perciò, con calcoli analoghi a quelli del lemma 2.1:

$$\sum_i \sum_h \int_{B^*(x_0,R)} |D^i(\eta u_h)|^2 \, dx \leq \frac{Q_1}{(R-\varrho)} \int_{B^*(x_0,R)} |u|^2 \, dx +$$

$$+ \frac{Q_2}{R-\varrho} \left\{ \varepsilon_1 \int_{B^*(x_0,R)} |u|^2 \, dx + \frac{1}{\varepsilon_1} \int_{B^*(x_0,R)} |D(\eta u)|^2 \, dx \right\} +$$

$$+ \frac{Q_3}{R-\varrho} \left\{ \varepsilon_2 \int_{B^*(x_0,R)} |u|^2 \, dx + \frac{1}{\varepsilon_2} \int_{B^*(x_0,R)} |f|^2 \, dx \right\} +$$

$$+ \left\{ \varepsilon_3 \int_{B^*(x_0,R)} |D(\eta u)|^2 \, dx + \frac{1}{\varepsilon_3} \int_{B^*(x_0,R)} |f|^2 \, dx \right\}.$$

Scegliamo ora $\varepsilon_1 = \dfrac{3Q_2}{R-\varrho}$; $\varepsilon_2 = \dfrac{Q_3}{R-\varrho}$; $\varepsilon_3 = 1/3$. Si ottiene così:

$$(3.2) \qquad \frac{1}{3} \int_{B^*(x_0,R)} |D(\eta u)|^2 \, dx \leq \frac{Q_1 + 3Q_2^2 + Q_3^2}{(R-\varrho)^2} \int_{B^*(x_0,R)} |u|^2 \, dx + 4 \left[\int_{B^*(x_0,R)} |f|^2 \, dx \right]$$

dove Q_1, Q_2 e Q_3 dipendono solo da n, N, L.

Dalla (3.2) si ottiene immediatamente la (3.1), poiché $\eta = 1$ su $B^*(x_0, \varrho)$.

Q. E. D.

Daremo ora un lemma di convergenza.

LEMMA 3.2. *Sia* $a_{ij}^{hk\nu}$ $(\nu = 1, 2, \dots)$ *una successione di funzioni misurabili in* $B^* = B^*(0,1) = B(0,1) \cap \{x_n \geq 0\}$, *convergenti quasi ovunque in* B^* *a delle funzioni* a_{ij}^{hk}, *equilimitate ed equiuniformemente ellittiche, (cioè verificano le* (2.1′) *e* (2.2′), *con* L *indipendente da* ν).

Sia $f_j^{k\nu}$ *una successione di funzioni appartenenti a* $L^2(B^*)$; *supponiamo che le* $f_j^{k\nu}$ *convergano debolmente ad una* f_j^k *in* $[L^2(B^*)]^{nN}$. *Sia* u^ν *una successione in* $[H^1_{\mathrm{loc}}(B^*) \cap L^2(B^*)]^N$ *tale che:*

$$A^\nu(u^\nu, \psi) = \sum_{i,j} \sum_{h,k} \int_{B^*} a_{ij}^{hk\nu} \cdot D^i u_h^\nu \cdot D^j \psi_k \, dx = \tag{3.3}$$

$$= \sum_j \sum_k \int_{B^*} f_j^{k\nu} \cdot D^j \psi_k \, dx \qquad \forall \psi \in [C_0^1(B^*)]^N$$

ed inoltre

$$u^\nu \text{ ha traccia nulla su } \Gamma \text{ per ogni } \nu. \tag{3.4}$$

Si supponga che:

$$u^\nu \rightharpoonup u \qquad \text{in } [L^2(B^*)]^N. \tag{3.5}$$

Allora u *appartiene a* $[H^1_{\mathrm{loc}}(B^*)]^N$, *e si ha, per ogni* ϱ, $0 < \varrho < 1$

$$u^\nu \to u \qquad \text{in } [L^2(B^*(0,\varrho))]^N \tag{3.6}$$

$$D^i u^\nu \rightharpoonup D^i u \qquad \text{in } [L^2(B^*(0,\varrho))]^N \qquad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{3.7}$$

ed inoltre

$$A(u, \psi) = \sum_{i,j} \sum_{h,k} \int_{B^*} a_{ij}^{hk} \cdot D^i u_h \cdot D^j \psi_k \, dx = \tag{3.8}$$

$$= \sum_j \sum_k \int_{B^*} f_j^k \cdot D^j \psi_k \, dx \qquad \forall \psi \in [C_0^1(B^*)]^N.$$

Infine si ha:

$$u \text{ ha traccia nulla su } \Gamma. \tag{3.9}$$

DIMOSTRAZIONE. Le (3.6)-(3.8) si dimostrano nello stesso modo con il quale nel lemma 2.2 si dimostrano le corrispondenti (2.8)-(2.10).

Dimostriamo dunque la (3.9). Per le (3.6) e (3.7) si ha che u^ν converge ad u debolmente in $[H^1(B^*(0,\varrho))]^N$.

Dalla (3.4) segue che per ogni intero positivo ν troviamo una funzione $v^\nu \in [C^1(B^*)]^N$, con supporto contenuto nel semispazio $\{x_n > 0\}$, e tale che:

$$\| v^\nu - u^\nu \|_{H^1(B^*)} < 1/\nu. \tag{3.10}$$

Verifichiamo che la successione v^ν converge debolmente ad u nello spazio $[H^1(B^*(0,\varrho))]^N$; infatti per ogni $\mu \in [H^1(B^*(0,\varrho))]^N$ si ha:

$$(3.11) \qquad |\langle v^\nu - u, \mu \rangle_{H^1}| \leq |\langle v^\nu - u^\nu, \mu \rangle_{H^1}| +$$

$$+ |\langle u^\nu - u, \mu \rangle_{H^1}| \leq 1/\nu \, \| \mu \|_{H^1} + |\langle u^\nu - u, \mu \rangle_{H^1}|$$

e questa somma tende a zero quando ν tende all'infinito.

Ma allora per il teorema di Banach-Sachs esiste una combinazione convessa delle v^ν che converge ad u fortemente in $[H^1(B^*(0,\varrho))]^N$; e questo è quanto ci serve, in quanto una combinazione convessa di funzioni di $[C^1(B^*)]^N$, con supporto contenuto in $\{x_n > 0\}$, gode ancora di queste proprietà. Q. E. D.

Diamo ora il lemma per i sistemi lineari a coefficienti costanti.

LEMMA 3.3. *Siano* b_{ij}^{hk} *delle costanti verificanti le condizioni date dalle* (2.13) *e* (2.14).

Siano poi $f_j^k \in L^2(B^*)$ $(j = 1, \dots, n;\ k = 1, \dots, N)$.

Esiste allora una costante $A' = A'(n, N, L)$ *tale che se* u *appartiene a* $[H^1_{\mathrm{loc}}(B^*) \cap L^2(B^*)]^N$ *ed è soluzione di:*

$$(3.12) \qquad E(u,\psi) = \sum_{i,j} \sum_{h,k} \int_{B^*} b_{ij}^{hk} \cdot D^i u_h \cdot D^j \psi_k \, dx =$$

$$= \sum_j \sum_k \int_{B^*} f_j^k \cdot D^j \psi_k \, dx \qquad \forall\ \psi \in [C_0^1(B^*)]^N$$

ed inoltre

$$(3.13) \qquad u \text{ ha traccia nulla su } \Gamma$$

allora per ogni ϱ, $0 < \varrho < 1$, *si ha:*

$$(3.14) \qquad U^*(0,\varrho) \leq A'/2 \, \{\varrho^2 \, U^*(0,1) + \varrho^{2-n} F^*(0,1)\}$$

dove

$$(3.15) \qquad U^*(x_0, R) = R^{-n} \int_{B^*(x_0,R)} |u|^2 \, dx \qquad (x_0 \in \{x_n = 0\})$$

$$(3.16) \qquad F^*(x_0, R) = R^{2-n} \int_{B^*(x_0,R)} |f|^2 \, dx \qquad (x_0 \in \{x_n = 0\}).$$

DIMOSTRAZIONE. Poniamo $u = v + w$, con $w \in [H^1_{\mathrm{loc}}(B^*) \cap L^2(B^*)]^N$ e soluzione del sistema omogeneo :

$$(3.17) \qquad E(w, \psi) = 0 \quad \forall\, \psi \in [C^1_0(B^*)]^N, \qquad \text{e } w \text{ ha traccia nulla su } \Gamma$$

e $v \in [H^1_0(B^*)]^N$ è soluzione del problema di Dirichlet relativo al sistema

$$(3.18) \qquad E(v, \psi) = \sum_j \sum_k \int_{B^*} f^k_j \cdot D^j \psi_k \, dx \qquad \forall\, \psi \in [C^1_0(B^*)]^N .$$

Stabiliamo separatamente delle maggiorazioni per v e per w.

i) Per w dimostreremo che:

$$(3.19) \qquad W^*(0, \varrho) \leq C'(n, N, L) \cdot \varrho^2 \cdot W^*(0, 1) \qquad (0 < \varrho \leq 1).$$

Dal lemma 3.1, ove si ponga $f^k_j = 0$, segue che per ogni ϱ, $0 < \varrho < 1$, vale la seguente maggiorazione:

$$(3.20) \qquad \sum_h \int_{B^*(0,\varrho)} |Dw_h|^2 \, dx \leq Q \cdot (1 - \varrho)^{-2} \sum_h \int_{B^*(0,1)} |w_h|^2 \, dx .$$

Questa maggiorazione continua a valere se al posto di w sostituiamo una qualunque derivata tangenziale della w, cioè una qualunque derivata fatta rispetto alle variabili $x_1, \dots, x_{n-1}$, perché se $D^m w$ è una derivata tangenziale si ha ancora:

$$(3.21) \qquad E(D^m w, \psi) = 0 \quad \forall\, \psi \in [C^1_0(B^*)]^N, \qquad \text{e} \quad D^m w = 0 \text{ su } \Gamma.$$

Lo stesso discorso invece non vale per le derivate in cui figurino derivazioni anche rispetto alla variabile x_n, perché queste derivate non si annullano su Γ.

Si supera questa difficoltà con un artificio ben noto.

Si voglia per esempio maggiorare l'integrale delle derivate normali $(\partial^2 w_h / \partial x_n^2)$. Dalla maggiorazione (3.20) scritta per qualunque derivata tangenziale $D^i w_h$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, si ottiene:

$$(3.22) \qquad \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=1}^{N} \int_{B^*(0,2/3)} |D^j D^i w_h|^2 \, dx \leq$$

$$\leq C_1(n, N, L) \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{h=1}^{N} \int_{B^*(0,3/4)} |D^j w_h|^2 \, dx \leq C_2(n, N, L) \sum_{h=1}^{N} \int_{B^*(0,1)} |w_h|^2 \, dx .$$

Osserviamo ora che la (3.12) corrisponde, formalmente, al sistema scritto in forma differenziale:

$$(3.23) \qquad \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{h=1}^{N} b_{ij}^{hk} \frac{\partial^2 u_h}{\partial x_i \, \partial x_j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j^k}{\partial x_j} \qquad k = 1, \dots, N.$$

Ora dalla (3.23), scritta per w, e quindi con $f_j^k = 0$, ci ricaviamo le $D_{n,n}^2 w_h$ in funzione delle $D_{ij}^2 w_h$, con i e j non contemporaneamente uguali ad n.

Infatti dalle (3.23) si ha che le $D_{nn}^2 w_h$, $h = 1, \dots, N$, soddisfano un sistema di N equazioni lineari, in cui la matrice dei coefficienti è non degenere grazie all'ipotesi di ellitticità.

Da questa osservazione e dalla (3.22) segue allora che:

$$(3.24) \qquad \sum_{h=1}^{N} \int_{B^*(0,\,2/3)} | D_{nn}^2 w_h |^2 \, dx \leq$$

$$\leq C_3 \sum_{h=1}^{N} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n} \int_{B^*(0,\,2/3)} \left| \frac{\partial^2 w_h}{\partial x_i \, \partial x_j} \right|^2 dx \leq C_4 \sum_{h=1}^{N} \int_{B^*(0,\,1)} | w_h |^2 \, dx.$$

In questo modo si riesce a maggiorare la norma nello spazio $[L^2(B^*(0, 2/3))]^N$ di tutte le derivate seconde della w con la norma in $[L^2(B^*(0,1))]^N$ della w:

$$(3.25) \qquad \sum_{h=1}^{N} \sum_{|\alpha|=2} \int_{B^*(0,\,2/3)} | D^\alpha w_h |^2 \, dx \leq C_5 \sum_{h=1}^{N} \int_{B^*(0,\,1)} | w_h |^2 \, dx$$

(le costanti C_3, C_4 e C_5 dipendono solo da n, N, L).

Partendo da questa maggiorazione, e con uguale tecnica, si maggiora la norma in $[L^2(B^*(0, 2/3))]^N$ delle derivate terze, e così via. In generale indicato con k un qualunque intero maggiore o uguale a 1, si dimostra la seguente maggiorazione:

$$(3.26) \qquad \| w \|^2_{[H^k(B^*(0,\,2/3))]^N} \leq C_6(n, N, L, k) \sum_{h=1}^{N} \int_{B^*(0,\,1)} | w_h |^2 \, dx.$$

Se $k > n/2$, dal teorema di Sobolev (teorema 1.4) e dalla relazione (3.26), segue:

$$(3.27) \qquad \sup_{x \in B^*(0,1/2)} | Dw(x) |^2 \leq C_7(n, N, L) \int_{B^*(0,1)} | w |^2 \, dx$$

e quindi, usando il teorema di Poincaré (teorema 1.3), tenuto conto del fatto che w ha traccia nulla su Γ, si ha, per ogni ϱ, $0 < \varrho \leq 1/2$:

$$\sum_{h=1}^{N} \int_{B^*(0,\varrho)} |w_h|^2\,dx \leq C_8(n,N)\,\varrho^2 \sum_{h=1}^{N} \int_{B^*(0,\varrho)} |Dw_h|^2\,dx \leq \tag{3.28}$$

$$\leq C_9(n,N,L)\,\varrho^{n+2} \sum_{h=1}^{N} \int_{B^*(0,1)} |w_h|^2\,dx.$$

Dalla (3.28) segue la (3.19) per ogni ϱ, $0 < \varrho \leq 1$, con la costante $C'(n,N,L)$ data da $\max(C_9, 2^{n+2})$.

ii) Consideriamo ora la v. In modo perfettamente analogo a quanto fatto per l'interno, si ottiene:

$$\int_{B^*(0,1)} |Dv|^2\,dx \leq \left\{ \int_{B^*(0,1)} |f|^2\,dx \right\}^{1/2} \left\{ \int_{B^*(0,1)} |Dv|^2\,dx \right\}^{1/2}$$

da cui si ha:

$$\int_{B^*(0,1)} |Dv|^2\,dx \leq \int_{B^*(0,1)} |f|^2\,dx. \tag{3.29}$$

Dalla (3.29) per la disuguaglianza di Poincaré, tenuto conto del fatto che $v \in [H_0^1(B^*)]^N$, si ottiene per ogni ϱ, $0 < \varrho \leq 1$:

$$\int_{B^*(0,\varrho)} |v|^2\,dx \leq \gamma(n)\,\varrho^2 \int_{B^*(0,\varrho)} |Dv|^2\,dx \leq \tag{3.30}$$

$$\leq \gamma(n)\,\varrho^2 \int_{B^*(0,1)} |Dv|^2\,dx \leq \gamma(n)\,\varrho^2 \int_{B^*(0,1)} |f|^2\,dx.$$

Ritorniamo ora alla u. Ricordando che $u = v + w$, si ha:

$$\int_{B^*(0,\varrho)} |u|^2\,dx \leq 2\left[\int_{B^*(0,\varrho)} |v|^2\,dx + \int_{B^*(0,\varrho)} |w|^2\,dx \right] \leq \gamma(n)\,\varrho^2 \int_{B^*(0,1)} |f|^2\,dx +$$

$$+\, C'\,\varrho^{n+2} \int_{B^*(0,1)} |w|^2\,dx \leq \gamma(n)\,\varrho^2 \int_{B^*(0,1)} |f|^2\,dx +$$

$$+ C' \varrho^{n+2} \left\{ \int_{B^*(0,1)} |u|^2 dx + \int_{B^*(0,1)} |v|^2 dx \right\} \leq$$

$$\leq \gamma(n) \varrho^2 \int_{B^*(0,1)} |f|^2 dx + C' \varrho^{n+2} \int_{B^*(0,1)} |u|^2 dx + C' \cdot \varrho^{n+2} \gamma(n) \int_{B^*(0,1)} |f|^2 dx \leq$$

$$\leq A'/2 \left\{ \varrho^{n+2} \int_{B^*(0,1)} |u|^2 dx + \varrho^2 \int_{B^*(0,1)} |f|^2 dx \right\}$$

dove $A' = 2 \max [C'(n, N, L), \gamma(n) \cdot (1 + C')]$, e quindi dipende solo da n, N, L. Q. E. D.

2. Regolarizzazione delle soluzioni.

Diamo innanzitutto un lemma corrispondente al lemma 2.4. La dimostrazione è simile, notiamo però che in questo caso, cioè sulla frontiera, anche per coefficienti A_{ij}^{hk} non uniformemente continui, non si hanno ipotesi sulla media, a differenza di quanto avveniva all'interno. In conseguenza sulla frontiera la misura di Hausdorff $n - p$ dimensionale dell'insieme dei punti singolari è nulla per soluzioni in $H^{1,p}$, tanto con coefficienti uniformemente continui, quanto soltanto continui.

LEMMA 3.4. *Per ogni* $\tau\,(0 < \tau < 1)$, *esistono due costanti positive* $\sigma_0 = \sigma_0(\tau, \Omega, A_{ij}^{hk}, f_j^k)$, $R_0 = R_0(\tau, \Omega, A_{ij}^{hk}, f_j^k)$ *tali che se* $u \in [H^1(\Omega)]^N$ *è soluzione di* (0.1) *con le ipotesi* (0.2), (0.3), (0.4), *ed* u *ha traccia nulla su* Γ *e se per* $x_0 \in \Gamma$ *e per* $R \leq R_0 \wedge d(x_0, \partial\Omega - \Gamma)$ *si ha:*

$$U^*(x_0, R) < \sigma_0^2 \tag{3.31}$$

$$F^*(x_0, R) < \sigma_0^2 \tag{3.32}$$

allora:

$$U^*(x_0, \tau R) \leq A' \{\tau^2 U^*(x_0, R) + \tau^{2-n} F^*(x_0, R)\} \tag{3.33}$$

($A' = A'(n, N, L)$ è la costante del lemma 3.3).

DIMOSTRAZIONE. Se il lemma non fosse vero esisterebbero un $\tau(0 < \tau < 1)$, una successione $x_\nu \in \Gamma$, una successione $\sigma_\nu \to 0$, una successione $R_\nu \to 0$, una successione $u^\nu \in [H^1(\Omega)]^N$ di soluzioni del sistema (0.1), con la condizione al bordo $u^\nu = 0$ su Γ, tali che :

$$\max\,[U^{*\nu}(x_\nu, R_\nu), F^{*\nu}(x_\nu, R_\nu)] = \sigma_\nu^2 \tag{3.34}$$

$$U^{*\nu}(x_\nu, \tau R_\nu) > A'\{\tau^2\, U^{*\nu}(x_\nu, R_\nu) + \tau^{2-n}\, F^{*\nu}(x_\nu, R_\nu)\} \tag{3.35}$$

Poniamo ora :

$$v^\nu(y) = \sigma^{-1}[u^\nu(x_\nu + R_\nu\, y)] \tag{3.36}$$

$$d_j^{k\nu}(y) = \sigma^{-1} R_\nu\,[f_j^k(x_\nu + R_\nu\, y)] \tag{3.37}$$

$$\psi(y) = R_\nu^{-1}\,\varphi(x_\nu + R_\nu\, y). \tag{3.38}$$

Le v^ν risultano nulle su Γ; inoltre sostituendo le posizioni (3.36) (3.38) nel sistema (0.1), si ottiene, mediante semplici calcoli, che le v^ν soddisfano il sistema :

$$\sum_{i,j}\sum_{h,k}\int_{B^*(0,1)} A_{ij}^{hk}(x_\nu + R_\nu\, y, \sigma_\nu\, v^\nu(y))\cdot D^i v_h^\nu \cdot D^j \psi_k\, dy = \tag{3.39}$$

$$= \sum_j \sum_k \int_{B^*(0,1)} d_j^{k\nu}(y)\cdot D^j \psi_k\, dy \qquad \forall\, \psi \in [C_0^1(B^*)]^N .$$

Le (3.34) e (3.35) diventano rispettivamente (i calcoli sono esattamente gli stessi che nel lemma 2.4) :

$$\max\,[V^{*\nu}(0,1), D^{*\nu}(0,1)] = 1 \tag{3.40}$$

$$V^{*\nu}(0,\tau) > A'\{\tau^2\, V^{*\nu}(0,1) + \tau^{2-n}\, D^{*\nu}(0,1)\} > A'\,\tau^2 > 0 \tag{3.41}$$

dove

$$V^{*\nu}(0,\tau) = \tau^{-n}\int_{B^*(0,\tau)} |\, v^\nu(y)\,|^2\, dy \quad \text{e} \quad D^{*\nu}(0,\tau) = \tau^{2-n}\int_{B^*(0,\tau)} |\, d_j^{k\nu}\,|^2\, dy.$$

Passando eventualmente a sottosuccessioni, che indicheremo ancora con v^ν, si ha :

$$x_\nu \to x_0 \in \overline{\Gamma} \tag{3.42}$$

$$v^\nu \rightharpoonup v \qquad \text{in } [L^2(B^*)]^N \tag{3.43}$$

infatti le v^ν sono equilimitate in $[L^2(B^*)]^N$:

$$\int_{B^*} |v^\nu(y)|^2\, dy \leq 1$$

(3.44) $$\sigma_\nu v^\nu \to 0 \qquad \text{q. ov. in } B^*$$

infatti $\{\| v^\nu \|_{L^2(B^*)}\}_\nu$ è limitata, quindi $\| \sigma_\nu v^\nu \| = \sigma_\nu \| v^\nu \| \to 0$; perciò, passando a sottosuccessioni, si ha la (3.44).

(3.45) $$A_{ij}^{hk}(x_\nu + R_\nu y, \sigma_\nu v^\nu(y)) \to A_{ij}^{hk}(x_0, 0) \qquad \text{q. ov. in } B^*$$

grazie alla continuità delle A_{ij}^{hk} in $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N$, e per la (3.44).

(3.46) $d_j^{k\nu} \rightharpoonup d_j^k$ in $[L^2(B^*)]^{nN}$ per lo stesso motivo di (3.43).

Applicando il lemma 3.2 si ha allora:

(3.47) $$v^\nu \to v \quad \text{in } [L^2(B^*(0, \varrho))]^N \qquad \forall \varrho, \ (0 < \varrho < 1)$$

(3.48) $$D^i v \rightharpoonup D^i v \quad \text{in } [L^2(B^*(0, \varrho))]^N \qquad \forall \varrho, \ (0 < \varrho < 1).$$

Infine, sempre per il lemma 3.2, v è soluzione del sistema:

(3.49) $$\sum_{i,j} \sum_{h,k} \int_{B^*(0,1)} A_{ij}^{hk}(x_0, 0) \cdot D^i v_h \cdot D^j \psi_k \, dy =$$

$$= \sum_j \sum_k \int_{B^*(0,1)} d_j^k(y) \cdot D^j \psi_k \, dy \qquad \forall \psi \in [C_0^1(B^*)]^N$$

ed inoltre $v = 0$ su Γ.

Ma il sistema (3.49) è a coefficienti costanti, possiamo quindi applicare il lemma 3.3, ottenendo:

$$V^*(0, \tau) \leq A'/2 \, \{\tau^2 \, V^*(0, 1) + \tau^{2-n} D^*(0, 1)\}$$

mentre, passando al limite nella (3.41), si ha:

$$V^*(0, \tau) \geq A' \, \{\tau^2 \, V^*(0, 1) + \tau^{2-n} D^*(0, 1)\}.$$

Infatti $V^{*\nu}(0, \tau)$ converge a $V^*(0, \tau)$ per la (3.47), essendo $\tau < 1$. Inoltre, per la (3.43), passando al limite nel secondo membro della (3.41) si ha:

$$V^*(0, 1) \leq \min \lim_{\nu \to \infty} V^{*\nu}(0, 1)$$

e analogamente, per la (3.46):

$$D^*(0, 1) \leq \min \lim_{\nu \to \infty} D^{*\nu}(0, 1).$$

Si ha così l'assurdo, tenendo anche conto del fatto che:

$$V^*(0, \tau) \geq A' \tau^2 > 0 \qquad \text{Q. E. D.}$$

Grazie a questo lemma, nonchè agli analoghi risultati ottenuti per l'interno, possiamo ora dimostrare il teorema di regolarizzazione fin sulla frontiera.

TEOREMA 3.1. *Sia* $u \in [H^1_{\text{loc}}(\Omega)]^N$ *soluzione del sistema* (0.1), *con le ipotesi* (0.2), (0.3), (0.4), *ed inoltre* u *abbia traccia nulla su* Γ.

Sia $\bar{x}$ *un punto di* Γ *tale che*:

$$\lim_{\varrho \to 0^+} \varrho^{-n} \int_{B^*(\bar{x}, \varrho)} |u(x)|^2 \, dx = 0. \tag{3.50}$$

Allora esiste un $\delta > 0$ *tale che* u *è hölderiana di esponente* $\alpha/2$ *nella semisfera* $B^*(\bar{x}, \delta)$.

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo $\tau = (2A)^{-1/(2-\alpha)}$ (11), ed M reale positivo arbitrario.

In corrispondenza di τ ed M troviamo R_0 e σ_0 (dove con R_0 indichiamo il minimo tra l'R_0 risultante dal lemma 2.5 per l'interno, e quello risultante dal lemma 3.4 per la frontiera. Analogo per σ_0).

Poniamo poi:

$$\sigma_1 = \sigma_0 \wedge M/2 \cdot (\omega_n/2)^{1/2} \cdot (1 - \tau^{\alpha/2}) \cdot (1 + \tau^{-n/2})^{-1} \tag{3.51}$$

$$\sigma_2 = \sigma_1 \cdot \tau^{(n+\alpha)/2} \cdot 2^{-(n+\alpha)/2} \tag{3.52}$$

$$\bar{R} = R_0 \wedge \left[\frac{1}{2} \frac{\sigma_2^2}{\mu}\right]^{1/\alpha} \wedge \left[\frac{1}{2} \frac{\sigma_2^2 \cdot (1 - A\tau^{2-\alpha})}{A \mu \tau^{2-n-\alpha}}\right]^{1/\alpha}. \tag{3.53}$$

(11) Con A intendiamo qui il massimo fra la costante che compare nel lemma 2.8 per l'interno, e quella del lemma 3.3, per la frontiera. Ricordiamo che A, in ogni caso, dipendeva solo da n, N, L.

Grazie all'ipotesi (3.50) esiste $R < \bar{R} \wedge \operatorname{dist}(\bar{x}, \partial\Omega - \Gamma)$, tale che:

$$U^*(\bar{x}, R) = R^{-n} \int_{B^*(\bar{x}, R)} |u|^2 \, dx < \sigma_2^2 . \tag{3.54}$$

Esiste allora un δ $(0 < \delta < R)$ tale che per ogni $x_0 \in B^*(\bar{x}, \delta)$, posto $R_{x_0} = R - |x_0 - \bar{x}|$, si abbia:

$$R_{x_0}^{-n} \int_{B(x_0, R_{x_0}) \cap \Omega} |u|^2 \, dx < \sigma_2^2 . \tag{3.55}$$

Possiamo inoltre supporre $\delta < R/4$.

La tesi seguirà se dimostreremo che esiste una costante H tale che per ogni $x_0 \in B^*(\bar{x}, \delta)$ e per ogni $\varrho \leq (R - \delta)/2$ si abbia:

$$\varrho^{-n} \int_{B(x_0, \varrho) \cap \Omega} |u(x) - u_{x_0, \varrho}|^2 \, dx \leq H \cdot \varrho^{\alpha} \text{ [12]}. \tag{3.56}$$

Osserviamo intanto che per ogni $x_0 \in B^*(\bar{x}, R)$ e per ogni $\varrho \leq R$ si ha:

$$\sum_j \sum_k \varrho^{2-n} \int_{B(x_0, \varrho) \cap \Omega} |f_j^k|^2 \, dx \leq \varrho^{\alpha} \cdot \|f\|^2_{[L^{2, n-2+\alpha}]^{nN}} = \mu \varrho^{\alpha} < \sigma_2^2 \tag{3.57}$$

essendo $\varrho^{\alpha} \leq R^{\alpha} < \bar{R}^{\alpha} \leq \sigma_2^2/2\mu$, grazie alla (3.53).

Indichiamo poi, per ogni $x_0 \in B^*(\bar{x}, R)$, con x_1 la proiezione di x_0 su Γ, cioè sull'iperpiano $\{x_n = 0\}$, e con d_{x_0} la distanza di x_0 da x_1, cioè $d_{x_0} = \operatorname{dist}(x_0, \Gamma)$.

Distingueremo due casi: i) $x_0 \in \Gamma$; ii) $x_0 \in \mathring{\Omega}$.

i) Abbiamo, grazie rispettivamente alla (3.55) e alla (3.57),

$$U^*(x_0, R_{x_0}) < \sigma_2^2 \quad \text{e} \quad F^*(x_0, R_{x_0}) < \sigma_2^2 . \tag{3.58}$$

Applicando il lemma 3.4 dimostriamo per induzione su k che per ogni intero positivo o nullo k si ha:

$$U^*(x_0, \tau^k R_{x_0}) < \tau^{\alpha k} \sigma_2^2 . \tag{3.59}$$

---

[12] Con $u_{x_0, \varrho}$ indichiamo $[\operatorname{mis}(B(x_0, \varrho) \cap \Omega)]^{-1} \int_{B(x_0, \varrho) \cap \Omega} u(x) \, dx$.

La (3.59) per $k = 0$ si riduce alla (3 58), ed è quindi vera. Dimostriamola per k, supponendola vera per $k - 1$ Osserviamo innanzitutto che grazie alla (3.57), per ogni intero non negativo k si ha:

$$F^* (x_0 , \tau^k R_{x_0}) < \sigma_2^2 . \tag{3.60}$$

La (3.60) e la (3.59), supposta vera per $k - 1$, ci permettono di applicare il lemma 3.4 a $U^* (x_0 , \tau^k R_{x_0})$, ottenendo così:

$$U^* (x_0 , \tau^k R_{x_0}) \leq A \{\tau^2 U^* (x_0 , \tau^{k-1} R_{x_0}) + \tau^{2-n} F^* (x_0 , \tau^{k-1} R_{x_0})\} <$$

$$< A \tau^{2+k\alpha-\alpha} \sigma_2^2 + A \tau^{2-n} \mu \tau^{k\alpha-\alpha} R_{x_0}^\alpha .$$

Perciò per ottenere la (3.59) basterà avere:

$$A \tau^{2-\alpha} \sigma_2^2 + A \mu R_{x_0}^\alpha \tau^{2-n-\alpha} \leq \sigma_2^2$$

e quindi basterà che sia:

$$R_{x_0}^\alpha \leq \frac{\sigma_2^2 (1 - A \tau^{2-\alpha})}{A \mu \tau^{2-n-\alpha}}$$

e questa condizione è verificata, grazie alla (3.53), essendo, per le posizioni fatte, $R_{x_0} \leq R < \bar{R}$.

Sia ora ϱ, $0 < \varrho \leq R_{x_0}$; indichiamo con k l'intero per cui

$$\tau^{k+1} R_{x_0} < \varrho \leq \tau^k R_{x_0}$$

da cui si ricava, mediante semplici passaggi:

$$\tau^n U^* (x_0 , \varrho) \leq (\varrho/\tau^k R_{x_0})^n \cdot U^* (x_0 , \varrho) \leq U^* (x_0 , \tau^k R_{x_0}) \leq$$

$$\leq \sigma_2^2 \tau^{\alpha k} < \sigma_2^2 \cdot (\tau R_{x_0})^{-\alpha} \cdot \varrho^\alpha$$

e quindi, in definitiva:

$$U^* (x_0 , \varrho) < \sigma_2^2 \cdot (R - \delta)^{-\alpha} \cdot \tau^{-n-\alpha} \cdot \varrho^\alpha \tag{3.61}$$

da cui infine si ottiene:

$$\varrho^{-n} \int_{B^* (x_0 , \varrho)} | u (x) - u_{x_0 , \varrho} |^2 dx \leq \varrho^{-n} \int_{B^* (x_0 , \varrho)} | u |^2 dx = \tag{3.62}$$

$$= U^* (x_0 , \varrho) < \sigma_2^2 \cdot (R - \delta)^{-\alpha} \cdot \tau^{-n-\alpha} \cdot \varrho^\alpha .$$

Abbiamo così dimostrato la (3.56) nel caso i).

ii) In questo caso $x_0 \in \overset{\circ}{\Omega}$, e $R_{x_0}/2 \geq d_{x_0}$; infatti si ha:

$$R_{x_0} > R - \delta > 2\delta > 2d_{x_0} .$$

Sia ϱ, $d_{x_0} \leq \varrho \leq R_{x_0} / 2$, per cui $2\varrho \leq R_{x_0} < R_{x_1}$. Segue che $B(x_0 , \varrho) \cap \Omega \subset B^* (x_1 , 2\varrho)$. Abbiamo allora:

$$(3.63) \qquad \varrho^{-n} \int_{B(x_0, \varrho) \cap \Omega} | u(x) - u_{x_0, \varrho} |^2 \, dx \leq \varrho^{-n} \int_{B(x_0, \varrho) \cap \Omega} | u(x) |^2 \, dx \leq$$

$$\leq \varrho^{-n} \int_{B^*(x_1, 2\varrho)} | u(x) |^2 \, dx = 2^n \cdot U^* (x_1 , 2\varrho).$$

Usiamo ora la (3.61), ricavata nel caso i), valida per $U^*(x_1 , 2\varrho)$, essendo $2\varrho < R_{x_1}$, e otteniamo:

$$(3.63') \qquad \varrho^{-n} \int_{B(x_0, \varrho) \cap \Omega} | u(x) - u_{x_0, \varrho} |^2 \, dx \leq 2^n \sigma_2^2 \tau^{-n-\alpha} (R - \delta)^{-\alpha} 2^\alpha \cdot \varrho^\alpha .$$

Vogliamo ora dimostrare che la (3.56) vale anche per $\varrho < d_{x_0}$. Applicheremo il lemma 2.7; dobbiamo perciò verificarne le ipotesi, cioè:

$$(3.64) \qquad | u_{x_0}, d_{x_0} | \leq M/2$$

$$(3.65) \qquad U(x_0 , d_{x_0}) \leq \sigma_1^2$$

$$(3.66) \qquad F(x_0 , d_{x_0}) \leq \sigma_1^2 .$$

La (3.66) è ovvia, grazie alla (3.57).

Dimostriamo ora la (3.65). Useremo successivamente le (3.63); il fatto che $d_{x_0} = d(x_0 , x_1) \leq d(x_0 , \bar{x}) < \delta$; il fatto che $\delta < R/4$; ed infine la (3 52):

$$(3.67) \qquad U(x_0 , d_{x_0}) \leq 2^{n+\alpha} \tau^{-n-\alpha} \sigma_2^2 (R - \delta)^{-\alpha} d_{x_0}^\alpha <$$

$$< 2^{n+\alpha} \tau^{-n-\alpha} \sigma_2^2 [\delta/(R - \delta)]^\alpha < 2^{n+\alpha} \tau^{-n-\alpha} \sigma_2^2 = \sigma_1^2 .$$

Veniamo infine alla (3.64); dalle (3.63), valide anche per $\varrho = d_{x_0}$, abbiamo:

$$(3.68) \qquad d_{x_0}^{-n} \int_{B(x_0, d_{x_0})} | u |^2 \, dx \leq \frac{2^{n+\alpha} \sigma_2^2}{(R - \delta)^\alpha \tau^{n+\alpha}} \cdot d_{x_0}^\alpha < \sigma_1^2 .$$

Applicando ora successivamente la disuguaglianza di Hölder, la relazione (3.68), e la (3.51), otteniamo:

$$|u_{x_0}, d_{x_0}| = d_{x_0}^{-n} \omega_n^{-1} \left| \int_{B(x_0, d_{x_0})} u(x)\, dx \right| \leq \omega_n^{-1/2} \left[d_{x_0}^{-n} \int_{B(x_0, d_{x_0})} |u|^2 dx \right]^{1/2} <$$

$$< \sigma_1 \omega_n^{-1/2} \leq M/2 \cdot (1 - \tau^{\alpha/2}) \cdot (1 + \tau^{-n/2})^{-1} < M/2.$$

Possiamo allora applicare il lemma 2.7; otteniamo così, per ogni intero non negativo k:

$$U(x_0, \tau^k d_{x_0}) \leq \tau^{\alpha k} \{1/2\ U(x_0, d_{x_0}) + \mu \tau^{-n} d_{x_0}^{\alpha}\}. \tag{3.69}$$

Sia ora ϱ, $0 < \varrho \leq d_{x_0}$; indichiamo con k l'intero per cui:

$$\tau^{k+1} d_{x_0} < \varrho \leq \tau^k d_{x_0}.$$

Si ha così, analogamente a quanto già fatto nel caso i):

$$\tau^n U(x_0, \varrho) < (\varrho/\tau^k d_{x_0})^n \cdot U(x_0, \varrho) \leq U(x_0, \tau^k d_{x_0}) \leq$$

$$\leq \tau^{\alpha k} \{1/2\ U(x_0, d_{x_0}) + \mu \tau^{-n} d_{x_0}^{\alpha}\} \leq \tau^{-\alpha} \{1/2\ U(x_0, d_{x_0}) d_{x_0}^{-\alpha} + \mu \tau^{-n}\} \cdot \varrho^{\alpha}$$

da cui, tenendo presente la prima disuguaglianza della (3.67), si ottiene:

$$U(x_0, \varrho) < \tau^{-n-\alpha} \{1/2 \cdot 2^{n+\alpha} \cdot \tau^{-n-\alpha} \cdot \sigma_2^2 (R - \delta)^{-\alpha} + \mu \tau^{-n}\} \varrho^{\alpha}.$$

Abbiamo così dimostrato che, per ogni $x_0 \in B^*(\bar{x}, \delta)$, e per ogni ϱ, $0 < \varrho \leq (R - \delta)/2$, si ha:

$$\varrho^{-n} \int_{B(x_0, \varrho) \cap \Omega} |u(x) - u_{x_0, \varrho}|^2 dx \leq H \cdot \varrho^{\alpha} \tag{3.70}$$

dove

$$H = \max \left[\frac{\sigma_2^2 \tau^{-n-\alpha}}{(R-\delta)^{\alpha}}, \frac{\sigma_2^2 \tau^{-n-\alpha} 2^{n+\alpha}}{(R-\delta)^{\alpha}}, \tau^{-2n-\alpha} \left(\frac{2^{n+\alpha-1} \tau^{-\alpha} \sigma_2^2}{(R-\delta)^{\alpha}} + \mu \right) \right]$$

e quindi H dipende solo dal sistema e dal punto $\bar{x}$.

Dalla (3.70), per il teorema 1.1, segue che u è hölderiana di esponente $\alpha/2$ nella semisfera $B^*(\bar{x}, \delta)$. Q. E. D.

3. Dimensione di Hausdorff dell'insieme dei punti singolari.

Consideriamo ora il problema di valutare la dimensione dell'insieme Σ dei punti singolari. Come abbiamo già osservato, per la frontiera non ci sarà differenza tra il caso dei coefficienti continui e quello degli uniformemente continui.

Ricordiamo che con Ω intendiamo la semisfera $B^*(X_0, R) = B(X_0, R) \cap \cap \{x_n \geq 0\}$ $(X_0 \in \{x_n = 0\})$, e con Γ la parte piana della sua frontiera.

TEOREMA 3.2. *Se* $u \in [H^{1,p}(\Omega)]^N$ $(p \geq 2)$ *è soluzione del sistema* (0, 1), *ed inoltre* $u = 0$ *su* Γ, *allora* u *è hölderiana di esponente* $\alpha/2$ *in* Γ_0; *dove* Γ_0 *è aperto in* Γ, *e*:

$$\mathcal{H}_{n-p}(\Gamma - \Gamma_0) = 0. \tag{3.71}$$

DIMOSTRAZIONE. Per quanto visto nel teorema precedente 3.1, si ha subito che Γ_0 è aperto in Γ; inoltre si ha che l'insieme Σ è contenuto in Σ_1, dove:

$$\Sigma_1 = \left\{\bar{x} \in \Gamma : \max\lim_{\varrho \to 0+} \varrho^{-n} \int_{B^*(\bar{x}, \varrho)} |u|^2 dx > 0\right\}. \tag{3.72}$$

Applicando la disuguaglianza di Poincaré, e poi di Hölder, si ottiene:

$$\varrho^{-n} \int_{B^*(\bar{x}, \varrho)} |u|^2 dx \leq \gamma(n) \varrho^{2-n} \int_{B(\bar{x}, \varrho)} |Du|^2 dx \, ({}^{13}) \leq \gamma'(n) \left[\varrho^{p-n} \int_{B(\bar{x}, \varrho)} |Du|^p dx\right]^{\frac{2}{p}}$$

(i calcoli sono analoghi a quelli del teorema 2.2).

Possiamo così applicare il teorema 1.6, ottenendo:

$$\mathcal{H}_{n-p}(\Sigma_1) = 0 \tag{3.73}$$

e quindi la tesi. Q. E. D.

Enunciamo ora un teorema in cui riuniamo i risultati ottenuti separatamente per l'interno e per la frontiera. La dimostrazione segue immediatamente dal teorema 2.2 per l'interno, e dal teorema 3.2 per la frontiera.

---

(13) Abbiamo prolungato la u anche sull'altra metà della sfera $B(\bar{x}, \varrho)$, ponendo $u(x) = 0$ per $x_n < 0$. Allora $u \in [H^{1,p}(B(\bar{x}, \varrho))]^N$

TEOREMA 3.3. *Sia ancora* Ω *la semisfera. Sia* $u \in [H^{1,p}(\Omega)]^N$ *soluzione del sistema* (0, 1) *con le ipotesi* (0. 2), (0. 3), (0. 4), *ed* u *abbia traccia nulla su* Γ. *Esiste allora* $\Omega_0 \subset \Omega$, *con* Ω_0 *aperto in* Ω, (ricordiamo che per come l'abbiamo definito Ω contiene la sua parte di frontiera piana Γ) *tale che* $u \in C^{0,\alpha/2}(\Omega_0)$, *ed inoltre* :

$$\dim_{\mathcal{H}}(\Omega - \Omega_0) \leq n - p.$$

Per quanto riguarda la parte di frontiera Γ, *più precisamente si ha* :

$$\mathcal{H}_{n-p}[\Gamma - (\Gamma \cap \Omega_0)] = 0.$$

Università di Pisa

BIBLIOGRAFIA

[1] AGMON S., « *Lectures on elliptic boundary value problems* », Van Nostrand (1965).

[2] CAMPANATO S., « *Caratterizzazione delle tracce di funzioni appartenenti ad una classe di Morrey insieme con le loro derivate prime* », Ann. Scuola Norm. Sup Pisa, vol. XV (1961), 263-281.

[3] CAMPANATO S., « *Proprietà di hölderianità di alcune classi di funzioni* », Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, vol. XVII (1963), 175-188.

[4] CAMPANATO S., « *Proprietà di inclusione per spazi di Morrey* », Ricerche di Matematica, vol. XII (1963), 67-86.

[5] DE GIORGI E., « *Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari* », Mem. Acc. Sci. Torino (1957), 25-43.

[6] DE GIORGI E., « *Un esempio di estremali discontinue per un problema variazionale di tipo ellittico* », Boll. U. M. I. (4), vol. I (1968), 135-137.

[7] GIUSTI E., « *Regolarità parziale delle soluzioni di sistemi ellittici quasi lineari di ordine arbitrario* », Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, vol. XXIII (1969), 115-141.

[8] GIUSTI E., « *Precisazione delle funzioni di $H^{1,p}$ e singolarità delle soluzioni deboli di sistemi ellittici non lineari* », Boll. U. M. I. (4), vol. II (1969), 71-76.

[9] GIUSTI E. e MIRANDA M., « *Sulla regolarità delle soluzioni di una classe di sistemi ellittici quasi lineari* », Archive for Rational Mechanics and Analysis, vol. XXXI, n^0 3 (1968), 173-184.

[10] GIUSTI E. e MIRANDA M., « *Un esempio di soluzioni discontinue per un problema di minimo relativo ad un integrale regolare del calcolo delle variazioni* », Boll. U. M. I. (4) vol. II (1968), 1-8.

[11] JOHN F. e NIRENBERG L., « *On functions of bounded mean oscillation* », Comm. Pure Applied Math. 14 (1961), 415-426.

[12] MEYERS N. G., « *An L^p-estimate for the gradient of solutions of second order elliptic divergence equations* », Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, vol. XVII (1963), 189-206.

[13] MORREY C. B. JR., « *Multiple integrals in the calculus of variations* ». Springer-Verlag (1966).

[14] MORREY C. B. JR., « *Partial regularity results for nonlinear elliptic systems* », J. Math. Mech., 17 (1968), 649-670.

[15] STAMPACCHIA G., « *The spaces $\mathcal{L}^{p,\lambda}$, $N^{p,\lambda}$ and interpolation* », Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, vol. XIX (1965), 443-462.