FLAVIO PREVIALE

Rappresentabilità ed equipollenza di teorie assiomatiche (II). Un'applicazione alla geometria « senza punti »

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 24, nº 2 (1970), p. 165-200

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1970_3_24_2_165_0>

RAPPRESENTABILITÀ ED EQUIPOLLENZA DI TEORIE ASSIOMATICHE (II) (*) UN'APPLICAZIONE ALLA GEOMETRIA «SENZA PUNTI»

FLAVIO PREVIALE

RIASSUNTO. Questo lavoro costituisce la II Parte di una ricerca sulla *rappresentabilità* ed *equipollenza* di teorie assiomatiche. Esso è dedicato ad alcune applicazioni di carattere geometrico dei concetti e dei metodi generali della I Parte. Vengono analizzate e confrontate fra loro, mediante questi, varie assiomatizzazioni della geometria metrica ordinaria e di quella «senza punti», basate su differenti gruppi di nozioni primitive. In particolare viene affrontato il problema della *rappresentazione* della geometria «senza punti» in quella ordinaria. Alcuni dei risultati ottenuti sono infine generalizzati al caso di una geometria metrica con *distanza* a valori in un sistema numerico parzialmente ordinato.

Introduzione.

In questo lavoro vengono applicati alla geometria i concetti e i metodi metamatematici sviluppati in [5]. Si presuppone pertanto da parte del lettore la conoscenza di tale articolo, che verrà in seguito costantemente citato come *I Parte* del nostro lavoro.

Prescindendo dalla particolare impostazione metamatematica, il contenuto dell'attuale lavoro si può così riassumere. Procederemo in primo luogo alla ricerca di nozioni primitive *idonee* all'assiomatizzazione della geometria metrica ordinaria, rivolgendo una particolare attenzione a quelle nozioni che non concernono direttamente i *punti*, bensì gli *insiemi di punti*. Il motivo della preferenza accordata a queste ultime sta nel fatto che le corrispon-

---

Pervenuto alla Redazione il 22 Maggio 1969.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca del Comitato per la matematica del C. N. R..

denti assiomatizzazioni possono venir adattate con facilità al caso di una geometria « senza punti », vale a dire di una geometria avente per oggetto, anzichè un sistema di *punti* e di insiemi formati con tali *punti*, un sistema di *solidi* (non necessariamente composti di elementi irriducibili) dotato di una struttura algebrica di un certo tipo, ad esempio di una struttura di *reticolo* o di *algebra di Boole.* Ovviamente l'*adattamento* consiste semplicemente nel sostituire nei singoli assiomi il termine « insieme di punti » con il termine « solido ».

Ci si pone a questo punto il problema di stabilire se i vari insiemi di assiomi considerati costituiscano assiomatizzazioni diverse di una *medesima* teoria, anche dopo essere stati adattati al caso « senza punti ». La risposta a tale problema non è di per sè positiva, a meno che non ci si limiti a prendere in considerazione assiomatizzazioni particolarmente restrittive, che permettano, in pratica, di *ricuperare* i punti eliminati mediante una definizione per astrazione. Il *ricupero* dei punti non costituirà però il nostro principale obbiettivo. Ci interesseremo anche di geometrie « senza punti » che non consentono tale *ricupero.* Per queste geometrie è naturalmente più difficile, e può essere impossibile, trovare delle assiomatizzazioni equivalenti in ciascuno dei vari gruppi di nozioni primitive presi in esame. Come vedremo tuttavia, entro certi limiti la ricerca di assiomatizzazioni equivalenti ha successo anche in questo caso più generale.

Il programma di ricerca abbozzato verrà sostanzialmente svolto con riferimento alla geometria metrica. In modo analogo si sarebbe tuttavia potuto prendere le mosse da altri tipi di geometria « dei punti », ad es. dalla geometria degli *spazi uniformi* o da quella di particolari classi di spazi topologici, per passare poi alle corrispondenti geometrie « senza punti ». Vi è del resto una notevole affinità tra la generalizzazione della geometria metrica da noi considerata nel § 5 e la geometria degli spazi uniformi.

L'idea di una geometria « senza punti » si può far risalire a Whitehead ([9]). Un'ampia rassegna dei risultati ottenuti fino al 1940 è contenuta in Menger [2]. A Nobeling ([3]) si deve la prima sistematica trattazione della topologia e della geometria metrica e uniforme « senza punti ».

Alcune note assiomatizzazioni di teorie topologiche si estendono al caso « senza punti » in modo del tutto naturale, in quanto non trattano direttamente dei punti, ma soltanto di insiemi di punti. In questi casi la generalizzazione si ottiene semplicemente, come già si è detto, sostituendo agli insiemi di punti gli elementi di una qualche struttura parzialmente ordinata. Tra queste particolari teorie assiomatiche ricordiamo quella degli *spazi di prossimità*, che è una riformulazione della teoria degli spazi topologici *completamente regolari*, avente come unica nozione geometrica primitiva quella di *contiguità* tra insiemi di punti (1). L'intero corpo delle teorie topologiche può del resto venir riformulato in modo da costituire un naturale punto di partenza per la generalizzazione al caso « senza punti » (2).

Non va infine dimenticato che la topologia « senza punti » si è sviluppata in parte per esigenze estranee alla geometria. Ad esempio, la teoria delle strutture algebriche dotate di un *operatore di chiusura* (*algebre di chiusura*) ha le sue più notevoli applicazioni nel campo della logica modale e intuizionistica (3).

1. Sia L il linguaggio formalizzato con più *specie di variabili* e *gerarchie di tipi* considerato nella *I Parte*, e siano $\mathcal{G}_0$, $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ tre distinte gerarchie di tipi di L. Con $\alpha^{(i)}$, $\beta^{(i)}$, $\gamma^{(i)}$, rispettiv. $p^{(i)}$, $q^{(i)}$, $r^{(i)}$, rispettiv. $x^{(i)}$, $y^{(i)}$, $z^{(i)}$, con l'eventuale aggiunta di indici, indicheremo d'ora in avanti variabili di tipo i della gerarchia $\mathcal{G}_0$, o $\mathcal{G}_1$, o $\mathcal{G}_2$. Se $i > 0$, le variabili $p^{(i)}$, $q^{(i)}$, $r^{(i)}$ di $\mathcal{G}_1$ verranno tuttavia anche indicate con $X^{(i-1)}$, $Y^{(i-1)}$, $Z^{(i-1)}$. L'apice (0) verrà poi di regola omesso, cosicchè ad es. si potrà scrivere $p \in X$ anzichè $p^{(0)} \in p^{(1)}$.

Adotteremo pure le seguenti altre notazioni. La specie dell'i-esimo tipo della gerarchia $\mathcal{G}_k$ $(k = 0, 1, 2)$ verrà contrassegnata con il doppio indice i_k. Conformemente verrà pure modificato (rispetto alla *I Parte*) il contrassegno per la *classe* di un simbolo relazionale e funzionale.

Facciamo ora alcune posizioni.

Siano $\subseteq$ un simbolo relazionale di classe (i_k, i_k) con $i \geqq 1$ e $k \geqq 0$ arbitrari, $\cap$, $\cup$ due simboli funzionali di classe (i_k, i_k, i_k) con $i \geqq 1$ e $k \geqq 0$ arbitrari, $\complement$ un simbolo funzionale di classe (i_k, i_k) con $i \geqq 1$ e $k \geqq 0$ arbitrari, e infine $\bigcap$, $\bigcup$ due simboli funzionali di classe $(i_k, (i+1)_k)$ con $i \geqq 1$ e $k \geqq 0$ arbitrari. Con Ins_0 viene indicato l'insieme di enunciati comprendente, per ogni $i \geqq 1$, la *chiusura universale* delle seguenti formule (4):

$$\alpha^{(i)} \subseteq \beta^{(i)} \Longleftrightarrow \forall\, \gamma^{(i-1)} (\gamma^{(i-1)} \in \alpha^{(i)} \longrightarrow \gamma^{(i-1)} \in \beta^{(i)})$$

---

(1) Cfr. ad es. [7]. Il caso « senza punti » della geometria di prossimità è studiato in [8].

(2) Cfr. [1], in particolare l'*Introduzione*.

(3) Per una dettagliata bibliografia sulle algebre di chiusura e sulle loro applicazioni, si veda [6], p. 198-200.

(4) Ricordiamo che la *chiusura universale* di una formula è l'enunciato che si ottiene anteponendo alla formula stessa quantificatori universali che ne vincolino tutte le variabili libere.

Spesso in seguito, volendo formulare un enunciato, scriveremo una formula la cui chiusura universale è quell'enunciato. Il contesto chiarirà in ogni caso se una data formula viene considerata per se stessa o come abbreviazione di un enunciato.

$$\alpha^{(i)} \cap \beta^{(i)} = \{\gamma^{(i-1)} \mid \gamma^{(i-1)} \in \alpha^{(i)} \wedge \gamma^{(i-1)} \in \beta^{(i)}\}$$

$$\alpha^{(i)} \cup \beta^{(i)} = \{\gamma^{(i-1)} \mid \gamma^{(i-1)} \in \alpha^{(i)} \vee \gamma^{(i-1)} \in \beta^{(i)}\}$$

$$\complement\, \alpha^{(i)} = \{\gamma^{(i-1)} \mid \gamma^{(i-1)} \notin \alpha^{(i)}\}$$

$$\bigcap \alpha^{(i+1)} = \{\gamma^{(i-1)} \mid \forall\, \beta^{(i)} (\beta^{(i)} \in \alpha^{(i+1)} \longrightarrow \gamma^{(i-1)} \in \beta^{(i)})\}$$

$$\bigcup \alpha^{(i+1)} = \{\gamma^{(i-1)} \mid \exists\, \beta^{(i)} (\beta^{(i)} \in \alpha^{(i+1)} \wedge \gamma^{(i-1)} \in \beta^{(i)})\}.$$

Con Ins_0^z viene invece indicata la riunione di Ins_0 e di tutti gli enunciati della forma:

$$\forall\, \beta^{(i+1)} [\beta^{(i+1)} \neq \varnothing,\ \beta^{(i+1)} \subseteq \alpha^{(i+1)},\ \forall\, \gamma_1^{(i)}\ \forall\, \gamma_2^{(i)} (\gamma_1^{(i)} \in \beta^{(i+1)},\ \gamma_2^{(i)} \in \beta^{(i+1)} \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \gamma_1^{(i)} \subseteq \gamma_2^{(i)} \vee \gamma_2^{(i)} \subseteq \gamma_1^{(i)}) \longrightarrow \bigcup \beta^{(i+1)} \in \alpha^{(i+1)}] \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \exists\, \beta^{(i)} [\beta^{(i)} \in \alpha^{(i+1)},\ \forall\, \gamma^{(i)} (\gamma^{(i)} \in \alpha^{(i+1)},\ \beta^{(i)} \subseteq \gamma^{(i)} \longrightarrow \beta^{(i)} = \gamma^{(i)})]$$

con $i \geqq 1$ (*Lemma di Zorn* per i vari livelli della gerarchia $\mathcal{G}_0$).

In modo analogo si definiscono Ins_k e Ins_k^z per $k = 1, 2$.

Siano poi $\leqq$ un simbolo relazionale di classe $(0_0, 0_0)$, $+$ un simbolo funzionale di classe $(0_0, 0_0, 0_0)$, *inf* e *sup* due simboli funzionali di classe $(0_0, 1_0)$, 0 e $+\infty$ due costanti individuali di specie 0_0, K_0 la riunione di Ins_0 e dei seguenti enunciati:

R.1 $\quad (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

R.2 $\quad \alpha + \beta = \beta + \alpha$

R.3 $\quad (\alpha + \beta = 0 \longrightarrow \alpha = 0,\ \beta = 0) \wedge (\gamma + \gamma = +\infty \longrightarrow \gamma = +\infty)$

R.4 $\quad \alpha + \beta = \alpha \longleftrightarrow \beta = 0 \vee \alpha = +\infty$

R.5 $\quad \exists\, \beta\, (\beta + \beta = \alpha),\quad \exists\, \beta\, (\beta \neq 0,\ \beta \neq +\infty)$

R 6 $\quad \exists\, \gamma\, (\alpha + \gamma = \beta) \vee \exists\, \gamma\, (\beta + \gamma = \alpha)$

R 7 $\quad \alpha \leqq \beta \longleftrightarrow \exists\, \gamma\, (\alpha + \gamma = \beta)$

R.8 $\quad \alpha \in \alpha^{(1)} \longrightarrow inf\ \alpha^{(1)} \leqq \alpha,\ \alpha \leqq sup\ \alpha^{(1)}$

R.9 $\quad \forall\, \alpha\, (\alpha \in \alpha^{(1)} \longrightarrow \alpha \leqq \beta) \longrightarrow sup\ \alpha^{(1)} \leqq \beta$

R.10 $\quad \forall\, \alpha\, (\alpha \in \alpha^{(1)} \longrightarrow \beta \leqq \alpha) \longrightarrow \beta \leqq inf\ \alpha^{(1)}$

K_0 assiomatizza ovviamente un frammento della teoria dei numeri reali non negativi [5]. Poniamo $K = K_0 \cup Ins_1$, $\mathcal{L}_0 = L(K_0)$, $\mathcal{L} = L(K)$.

Sia infine d un simbolo funzionale di classe $(0_0, 0_1, 0_1)$ e Γ_d il seguente insieme di enunciati:

d.1 : $d(p, p) = 0$

d.2 : $d(p, q) = d(q, p)$

d.3 : $d(p, r) \leqq d(p, q) + d(q, r)$.

Congiuntamente a K, Γ_d costituisce un'assiomatizzazione del concetto di *spazio (pseudo) metrico* nella nozione primitiva di *distanza tra punti.*

Poniamo $\mathcal{L}_d = L(K \cup \Gamma_d)$. $\mathcal{L}_d$ è dunque il minimo sottolinguaggio di L contenente $\mathcal{L}$ e d.

Diamo ora inizio alla ricerca di altre assiomatizzazioni del concetto di spazio metrico. Sia V un simbolo funzionale di classe $(1_1, 0_1, 0_0)$, $\mathcal{L}_V$ il minimo sottolinguaggio di L contenente $\mathcal{L}$ e V. Il singolo enunciato:

$$V(p, \alpha) = \{q \mid (d(p, q) \leqq \alpha\}$$

costituisce ovviamente una definizione $\Delta(V, d)$ di $\mathcal{L}_V$ in $\mathcal{L}_d$, ammissibile per $K \cup \Gamma_d$. La nozione da essa definita, detta di *intorno sferico chiuso*, può venir assunta come nozione primitiva in luogo di d per l'assiomatizzazione del concetto di spazio metrico. Infatti la definizione di $\mathcal{L}_d$ in $\mathcal{L}_V$

$$\Delta(d, V) : d(p, q) = inf\{\alpha \mid q \in V(p, \alpha)\}$$

è *reciproca* di $\Delta(V, d)$ rispetto a $K \cup \Gamma_d$.

La verifica di ciò è immediata. Ammesso infatti $K \cup \Gamma_d \cup \Delta(V, d)$, se ne deriva: $d(p, q) \leqq \alpha \longleftrightarrow q \in V(p, \alpha)$, e perciò, tenuto presente che K_0 implica $\beta = inf\{\alpha \mid \beta \leqq \alpha\}$, pure $\Delta(d, V)$.

Per il *Teorema* 5 della *I Parte*, esiste pertanto un insieme di enunciati di $\mathcal{L}_V$ K-equipollente [6] a Γ_d rispetto alla coppia $\Delta(V, d)$, $\Delta(d, V)$.

---

(5) Si osservi in particolare che da R.1-5, R.7 discende che $\leqq$ è una relazione di *ordine parziale denso,* rispetto alla quale 0 e $+\infty$ costituiscono il *minimo* e il *massimo.* L'assioma R.6 (che verrà lasciato cadere nel § 5) esprime la *linearità* dell'ordine. R.8-10 esprimono (però solo per i *modelli principali* di $\mathcal{L}_0$) la *completezza* dell'ordine.

(6) Si tenga presente che $\mathcal{L}_d \cap \mathcal{L}_V = \mathcal{L} = L(K)$.

Verificheremo che l'insieme Γ_V formato da:

V.1: $p \in V(p, \alpha)$

V.2: $q \in V(p, \alpha) \rightarrow p \in V(q, \alpha)$

V.3: $q \in V(p, \alpha), \quad r \in V(q, \beta) \rightarrow r \in V(p, \alpha + \beta)$

V.4: $\bigcap \{V(p, \alpha) \mid_{\alpha} \alpha \in \alpha^{(1)}\} = V(p, \mathit{inf}\, \alpha^{(1)})$ (7)

gode di tale proprietà.

Occorre provare le due relazioni:

$$K \cup \Gamma_d \cup \Delta(V, d) \vdash \Gamma_V$$
$$K \cup \Gamma_V \cup \Delta(d, V) \vdash \Gamma_d \cup \Delta(V, d).$$

La prima relazione è pressochè evidente. Per dimostrare la seconda implicazione, ammettiamone le premesse. Applicando V.4 e $\Delta(d, V)$ si ricava:

$$\bigcap \{V(p, \alpha) \mid_{\alpha} q \in V(p, \alpha)\} = V(p, d(p, q)),$$

dunque $q \in V(p, d(p, q))$ e infine $q \in V(p, \alpha) \longleftrightarrow d(p, q) \leqq \alpha$. Applicando questa equivalenza e V.1-V.3 si deducono facilmente $\Delta(V, d)$ e d.1-d.3.

Sia ora U un secondo simbolo funzionale di classe $(1_1, 0_1, 0_0)$, $\mathcal{L}_U$ il minimo sottolinguaggio di L contenente $\mathcal{L}$ e U. La definizione di $\mathcal{L}_U$ in $\mathcal{L}_d$

$$\Delta(U, d): \ U(p, \alpha) = \{q \mid d(p, q) < \alpha\} \text{ (8)}$$

è ammissibile per $K \cup \Gamma_d$; inoltre, poichè

$$K_0 \vdash \beta = \mathit{inf}\{\alpha \mid \beta < \alpha\},$$

essa ammette

$$\Delta(d, U): \ d(p, q) = \mathit{inf}\{\alpha \mid q \in U(p, \alpha)\}$$

come definizione reciproca rispetto a $K \cup \Gamma_d$.

---

(7) $\{V(p, \alpha) \mid_{\alpha} \alpha \in \alpha^{(1)}\}$ è una abbreviazione di $\{X \mid \exists \alpha (X = V(p, \alpha), \alpha \in \alpha^{(1)})\}$. In generale, se τ è un termine di tipo i di una gerarchia $\{T^{(i)} \mid i < \omega\}$, considereremo $\{\tau \mid_{v_1 \dots v_n} \varphi\}$ come un'abbreviazione di un termine della forma $\{t^{(i)} \mid \exists v_1 \dots \exists v_n (t^{(i)} = \tau, \varphi)\}$, $t^{(i)}$ essendo una variabile di $T^{(i)}$ non libera nè in τ nè in φ.

(8) $\beta < \alpha$ deve intendersi come un'abbreviazione di $\beta \leqq \alpha$, $\beta \neq \alpha$. Si useranno pure, con evidente significato, le abbreviazioni $\alpha > \beta$, $\alpha \geqq \beta$.

La nozione di *intorno sferico aperto,* definita da $\Delta(U, d)$ è quindi idonea all'assiomatizzazione del concetto di spazio metrico. Un insieme di assiomi in tale nozione, cioè un insieme di enunciati di $\mathcal{L}_U$ K-equipollente a Γ_d rispetto alla coppia $\Delta(U, d)$, $\Delta(d, U)$, è il seguente insieme Γ_U:

U.1 : $\alpha > 0 \longrightarrow p \in U(p, \alpha)$

U.2 : $q \in U(p, \alpha) \longrightarrow p \in U(q, \alpha)$

U.3 : $q \in U(p, \alpha),\ r \in U(q, \beta) \longrightarrow r \in U(p, \alpha + \beta)$

U.4 : $\bigcup \{U(p, \alpha) \mid \alpha \in \alpha^{(1)}\} = U(p, sup\ \alpha^{(1)})$.

Ci limiteremo a verificare la relazione

$$K \cup \Gamma_U \cup \Delta(d, U) \vdash \Delta(U, d).$$

Dalle premesse di questa implicazione si deduce, per U.4:

$$q \in U(p, \alpha) \Longleftrightarrow \exists \beta (\beta < \alpha,\ q \in U(p, \beta))$$

e per $\Delta(d, U)$ e la *linearità* dell'ordine $\leqq$:

$$d(p, q) < \alpha \Longleftrightarrow \exists \beta (\beta < \alpha,\ q \in U(p, \beta)).$$

Si ha pertanto

$$q \in U(p, \alpha) \Longleftrightarrow d(p, q) < \alpha, \quad \text{e perciò} \quad \Delta(U, d).$$

Γ_U e Γ_V sono naturalmente K-equipollenti tra di loro. Si verifica facilmente che lo sono rispetto alla coppia di definizioni:

$$\Delta(V, U): \quad V(p, \alpha) = \bigcap_\beta \{U(p, \beta) \mid \beta > \alpha\}$$

$$\Delta(U, V): \quad U(p, \alpha) = \bigcup_\beta \{V(p, \beta) \mid \beta < \alpha\}.$$

Sia infine Γ_V^- l'insieme $\Gamma_V - \{V.4\}$. Valgono le relazioni

$$K \cup \Gamma_d \cup \Delta(V, d) \vdash \Gamma_V^- \cup \Delta(d, V)$$

$$K \cup \Gamma_V^- \cup \Delta(d, V) \vdash \Gamma_d$$

ma $\Delta(V, d)$ non è conseguenza di $K \cup \Gamma_V^- \cup \Delta(d, V)$. Γ_d risulta pertanto K-rappresentabile in Γ_V^- mediante la coppia di definizioni $\Delta(d, V)$, $\Delta(V, d)$, senza essere K-equipollente a Γ_V^- rispetto a tale coppia.

$\Gamma_{\overline{V}}$ può venir considerato come un insieme di assiomi per il concetto di spazio metrico in una nozione non *definibile* a partire da quella di distanza tra punti, e il precedente risultato può venir interpretato come una precisazione metamatematica di questa osservazione. Più in generale, la distinzione tra i concetti di equipollenza e rappresentabilità (forte o debole) permette di precisare metamatematicamente il rapporto che intercede tra due diversi possibili modi di riformulare assiomaticamente una data teoria assiomatica, l'uno basato sulla scelta di nozioni primitive *definibili* nell'ambito della data teoria, l'altro basato invece sulla scelta di nozioni primitive non necessariamente soddisfacenti a questo requisito.

2. Il concetto di spazio metrico può venir assiomatizzato anche assumendo come nozioni metriche primitive nozioni non facenti diretto riferimento ai *punti*, ossia agli oggetti denotati dalle variabili di specie 0_1.

Siano u, v simboli funzionali di classe $(1_1, 1_1, 0_0)$, ∂, ϱ, ε simboli funzionali di classe $(0_0, 1_1, 1_1)$ δ un simbolo funzionale di classe $(0_0, 1_1)$. Siano $\mathcal{L}_u$, $\mathcal{L}_v$, $\mathcal{L}_\partial$, $\mathcal{L}_\varrho$, $\mathcal{L}_\varepsilon$, $\mathcal{L}_\delta$ i linguaggi che si ottengono da $\mathcal{L}_d$ sostituendo d con u, v, ∂, ϱ, ε, δ rispettivamente.

Poniamo:

$$\Delta(u, d): \quad u(X, \alpha) = \{q \mid \exists\, p\, (p \in X,\ d(p, q) < \alpha\}$$

$$\Delta(v, d): \quad v(X, \alpha) = \{q \mid \forall\, \beta\, [\beta > \alpha \rightarrow \exists\, p\, (p \in X,\ d(p, q) \leqq \beta)]\}$$

$$\Delta(\partial, d): \quad \partial(X, Y) = \inf\{d(p, q) \mathop{|}_{p,q} p \in X,\ q \in Y\}$$

$$\Delta(\varrho, d): \quad \varrho(X, Y) = \inf\{\alpha \mid \forall\, q\, [q \in Y \rightarrow \exists\, p\, (p \in X,\ d(p, q) \leqq \alpha)],$$
$$\forall\, p\, [p \in X \rightarrow \exists\, q\, (q \in Y,\ d(p, q) \leqq \alpha)]\}$$

$$\Delta(\varepsilon, d): \quad \varepsilon(X, Y) = \sup\{d(p, q) \mathop{|}_{p,q} p \in X,\ q \in Y\}$$

$$\Delta(\delta, d): \quad \delta(X) = \sup\{d(p, q) \mathop{|}_{p,q} p \in X,\ q \in X\}.$$

I precedenti enunciati costituiscono definizioni di $\mathcal{L}_u$ in $\mathcal{L}_d$, di $\mathcal{L}_v$ in $\mathcal{L}_d$, ecc. tutte ammissibili per $K \cap \Gamma_d$. Definiscono rispettivamente le nozioni di *intorno aperto, intorno chiuso, distanza interna, distanza media, distanza esterna, diametro.* Ciascuna di tali nozioni è idonea all'assiomatizzazione del concetto di spazio metrico. Non è infatti difficile verificare che le precedenti definizioni ammettono nell'ordine le seguenti definizioni reciproche rispetto a $K \cup \Gamma_d$:

$$\Delta(d, u): \quad d(p, q) = inf\{\alpha \mid q \in u(\{p\}, \alpha)\}$$ [9]

$$\Delta(d, v): \quad d(p, q) = inf\{\alpha \mid q \in v(\{p\}, \alpha)\}$$

$$\Delta(d, \partial): \quad d(p, q) = \partial(\{p\}, \{q\})$$

$$\Delta(d, \varrho): \quad d(p, q) = \varrho(\{p\}, \{q\})$$

$$\Delta(d, \varepsilon): \quad d(p, q) = \varepsilon(\{p\}, \{q\})$$

$$\Delta(d, \delta): \quad d(p, q) = \delta(\{p, q\}).$$

Insiemi di assiomi per il concetto di spazio metrico in ciascuna delle nozioni considerate, vale a dire insiemi di enunciati di $\mathcal{L}_u$, $\mathcal{L}_v$, ecc. K-equipollenti a Γ_d rispetto alle coppie $\Delta(u, d)$ e $\Delta(d, u)$, $\Delta(v, d)$ e $\Delta(d, v)$, ecc., sono, come vedremo i seguenti insiemi Γ_u, Γ_v, ecc.

Γ_u è costituito da

u.1 $\quad \alpha > 0 \rightarrow X \subseteq u(X, \alpha)$

u.2 $\quad u(X, \alpha) \cap Y = \varnothing \rightarrow X \cap u(Y, \alpha) = \varnothing$

u.3 $\quad u(u(X, \alpha), \beta) \subseteq u(X, \alpha + \beta)$

u.4 $\quad \bigcup_{\alpha} \{u(X, \alpha) \mid \alpha \in \alpha^{(1)}\} = u(X, sup\, \alpha^{(1)})$

Γ_v è costituito da

v.1 $\quad X \subseteq v(X, \alpha)$

v.2 $\quad \forall \beta[\beta < \alpha \rightarrow v(X, \beta) \cap Y = \varnothing] \rightarrow \forall \beta[\beta < \alpha \rightarrow X \cap v(Y, \beta) = \varnothing]$

v.3 $\quad v(v(X, \alpha), \beta) \subseteq v(X, \alpha + \beta)$

v.4 $\quad \bigcap_{\alpha} \{v(X, \alpha) \mid \alpha \in \alpha^{(1)}\} = v(X, inf\, \alpha^{(1)})$

---

(9) $\{p\}$ deve intendersi come un'abbreviazione di $\{q \mid q = p\}$. Analogamente $\{p, q\}$ sta per $\{r \mid r = p \vee r = q\}$, e così via.

Γ_∂ è costituito da

$\partial.1$: $X \neq \varnothing \to \partial(X, X) = 0$

$\partial.2$: $\partial(X, Y) = \partial(Y, X)$

$\partial.3$: $\partial(X, Z) \leqq \partial(X, Y) + sup\,\{\partial(Y_1, Z) \mid_{Y_1} \varnothing \subset Y_1 \subseteq Y\}$ [10]

$\partial.4$: $X_1 \subseteq X \to \partial(X, Y) \leqq \partial(X_1, Y)$

$\partial.5$: $\partial(X, Y) < \alpha \to \exists Y_1 [\varnothing \subset Y_1 \subseteq Y, \forall Y_2 (\varnothing \subset Y_2 \subseteq Y_1 \to \partial(X, Y_2) < \alpha)]$

Γ_ϱ è costituito da

$\varrho.1$: $\varrho(X, X) = 0$

$\varrho.2$: $\varrho(X, Y) = \varrho(Y, X)$

$\varrho.3$: $\varrho(X, Z) \leqq \varrho(X, Y) + \varrho(Y, Z)$

$\varrho.4$: $\forall X \forall Y [(X, Y) \in Z^{(3)} \to \varrho(X, Y) \leqq \alpha] \to \varrho(\bigcup DZ^{(3)}, \bigcup \check{D}Z^{(3)}) \leqq \alpha$ [11]

$\varrho.5$: $\varrho(X, Y) < \alpha \to \forall X_1 [X_1 \subseteq X \to \exists Y_1 (Y_1 \subseteq Y, \varrho(X_1, Y_1) < \alpha)]$

Γ_ε è costituito da

$\varepsilon.1$: $At(X) \to \varepsilon(X, X) = 0$ [12]

$\varepsilon.2$: $\varepsilon(X, Y) = \varepsilon(Y, X)$

$\varepsilon.3$: $\varepsilon(X, Z) \leqq \varepsilon(X, Y) + \varepsilon(Y, Z)$

$\varepsilon.4$: $X \subseteq X_1 \to \varepsilon(X, Y) \leqq \varepsilon(X_1, Y)$

$\varepsilon.5$: $\varepsilon(X, Y) > \alpha \to \exists Y_1 [\varnothing \subset Y_1 \subseteq Y, \forall Y_2 (\varnothing \subset Y_2 \subseteq Y_1 \to \varepsilon(X, Y_2) > \alpha)]$

---

(10) $\varnothing \subset Y_1 \subseteq Y$ è naturalmente un'abbreviazione per $\varnothing \subset Y_1$, $Y_1 \subseteq Y_1$. I simboli $\subset$, $\supset$, $\supseteq$ hanno il solito significato.

(11) (X, Y) è un'abbreviazione per $\{\{X\}, \{X, Y\}\}$; indica la *coppia ordinata formata da X e Y*. $DZ^{(3)}$ (*dominio di* $Z^{(3)}$) e $\check{D}Z^{(3)}$ (*codominio di* $Z^{(3)}$) stanno invece per

$$\{X \mid \exists Y [(X, Y) \in Z^{(3)}]\} \text{ e rispettiv. per } \{Y \mid \exists X [(X, Y) \in Z^{(3)}]\}.$$

(12) $At(X)$ (*X è un atomo*) sta per $X \neq \varnothing$, $\forall Y (\varnothing \subset Y \subseteq X \to Y = X)$. Si osservi che $At(X)$ è K-equivalente a $\exists p (X = \{p\})$.

Γ_δ è costituito da

δ.1 : $At(X) \rightarrow \delta(X) = 0$

δ.2 : $X \cap Y \neq \emptyset \rightarrow \delta(X \cup Y) \leqq \delta(X) + \delta(Y)$

δ.3 : $X \subseteq Y \rightarrow \delta(X) \leqq \delta(Y)$

δ.4 : $\delta(X) > \alpha \rightarrow \exists Y \exists Z [\emptyset \subset Y \subseteq X, \emptyset \subset Z \subseteq X,$
$\forall Y_1 \forall Z_1 (\emptyset \subset Y_1 \subseteq Y, \emptyset \subset Z_1 \subseteq Z \rightarrow \delta(Y_1 \cup Z_1) > \alpha)]$ (13)

2.1 *Γ_d e Γ_u sono K-equipollenti rispetto alla coppia $\Delta(u, d)$, $\Delta(d, u)$.*

Dim. Occorre provare le due relazioni:

$$K \cup \Gamma_d \cup \Delta(u, d) \vdash \Gamma_u$$

$$K \cup \Gamma_u \cup \Delta(d, u) \vdash \Gamma_d \cup \Delta(u, d).$$

La prima di queste è pressochè evidente. Per quanto concerne la seconda, cominciamo con l'osservare che tra le conseguenze di $K \cup \Gamma_u$ abbiamo:

u.5 $\alpha \leqq \beta \rightarrow u(X, \alpha) \subseteq u(X, \beta)$

u.6 $X \subseteq Y \rightarrow u(X, \alpha) \subseteq u(Y, \alpha)$

u.7 $u(\bigcup X^{(1)}, \alpha) = \bigcup \{u(X, \alpha) \underset{X}{|} X \in X^{(1)}\}$

u.5 si dimostra facilmente applicando u.4. u.6 si dimostra invece applicando u.7, la quale a sua volta può venir dedotta attraverso la seguente catena di equivalenze:

$$\begin{aligned} Y \cap u(\bigcup X^{(1)}, \alpha) = \emptyset &\longleftrightarrow \bigcup X^{(1)} \cap u(Y, \alpha) = \emptyset && \text{(per u.2)} \\ &\longleftrightarrow \forall X (X \in X^{(1)} \rightarrow X \cap u(Y, \alpha) = \emptyset) \\ &\longleftrightarrow \forall X (X \in X^{(1)} \rightarrow Y \cap u(X, \alpha) = \emptyset) && \text{(per u.2)} \\ &\longleftrightarrow Y \cap \bigcup \{u(X, \alpha) \underset{X}{|} X \in X^{(1)}\} = \emptyset. \end{aligned}$$

(13) Si osservi che dai vari gruppi di assiomi segue:

$u(\emptyset, \alpha) = v(\emptyset, \alpha) = \emptyset$, $u(X, 0) = \emptyset$, $v(X, +\infty) = \{p \mid p = p\}$,
$\partial(\emptyset, X) = +\infty$, $\varrho(\emptyset, \emptyset) = 0$, $[X \neq \emptyset \rightarrow \varrho(\emptyset, X) = +\infty]$,
$\varepsilon(\emptyset, X) = 0$, $\delta(\emptyset) = 0$.

Tenendo conto di ciò, dalle premesse $K \cup \Gamma_u \cup \Delta(d, u)$, si deduce facilmente:

$$d(p, q) < \alpha \longleftrightarrow q \in u(\{p\}, \alpha) \text{ e quindi } \Delta(u, d).$$

Anche d.1 e d.2 si deducono facilmente da tali premesse. Quanto a d.3, si osservi che dalle medesime premesse segue

$$r \in u(u(\{p\}, \alpha), \beta) \rightarrow r \in u(\{p\}, \alpha + \beta)$$

dunqne applicando u.6:

$$q \in u(\{p\}, \alpha), \quad r \in u(\{q\}, \beta) \rightarrow r \in u(\{p\}, \alpha + \beta)$$

e perciò

$$d(p, q) < \alpha, \quad d(q, r) < \beta \rightarrow d(p, r) < \alpha + \beta.$$

2.2. *Γ_d è K-equipollente a Γ_∂ rispetto alla coppia di definizioni $\Delta(\partial, d)$, $\Delta(d, \partial)$, a Γ_ε rispetto alla coppia $\Delta(\varepsilon, d)$, $\Delta(d, \varepsilon)$, a Γ_δ rispetto alla coppia $\Delta(\delta, d)$, $\Delta(d, \delta)$.*

DIM. L'unica difficoltà di qualche rilievo che si incontra nella dimostrazione riguarda le tre seguenti implicazioni:

(1) $$K \cup \Gamma_\partial \cup \Delta(d, \partial) \vdash \Delta(\partial, d)$$

(2) $$K \cap \Gamma_\varepsilon \cup \Delta(d, \varepsilon) \vdash \Delta(\varepsilon, d)$$

(3) $$K \cup \Gamma_\delta \cup \Delta(d, \delta) \vdash \Delta(\delta, d).$$

Ora, per quanto concerne la (1), si può osservare che da $K \cup \Gamma_\partial$ si deduce, applicando due volte ∂.5:

$$\partial(X, Y) < \alpha \rightarrow \exists q\, [q \in Y, \partial(X, \{q\}) < \alpha]$$

$$\partial(X, Y) < \alpha \rightarrow \exists p\, \exists q\, [p \in X, q \in Y, \partial(\{p\}, \{q\}) < \alpha].$$

Dalle stesse premesse, applicando ∂.4, si deduce d'altra parte:

$$\exists p\, \exists q\, [p \in X, q \in Y, \partial(\{p\}, \{q\}) < \alpha] \rightarrow \partial(X, Y) < \alpha.$$

Dunque:

$$K \cup \Gamma_\partial \vdash \partial(X, Y) < \alpha \longleftrightarrow \exists p\, \exists q\, [p \in X, q \in Y, \partial(\{p\}, \{q\}) < \alpha]$$

e perciò la (1).

In modo perfettamente analogo si prova che

$$K \cup \Gamma_\varepsilon \vdash \varepsilon(X, Y) > \alpha \longleftrightarrow \exists p \, \exists q \, [p \in X, q \in Y, \varepsilon(\{p\}, \{q\}) > \alpha]$$

$$K \cup \Gamma_\delta \vdash \delta(X) > \alpha \longleftrightarrow \exists p \, \exists q \, [p \in X, q \in X, \delta(\{p, q\}) > \alpha]$$

quindi la (2) e la (3).

2.3. *Γ_d è K-equipollente a Γ_v rispetto alla coppia $\Delta(v, d)$, $\Delta(d, v)$, e a Γ_ϱ rispetto alla coppia $\Delta(\varrho, d)$, $\Delta(d, \varrho)$.*

DIM. Per provare l'asserto ci varremo del *Teorema* 6 della *I Parte*. In virtù di tale teorema, sarà sufficiente provare che esistono definizioni $\Delta(v, u)$ $\Delta(u, v)$ di $\mathcal{L}_v$ in $\mathcal{L}_u$ e viceversa, tali che

(*a*) Γ_u e Γ_v sono K-equipollenti rispetto a tale coppia

(*b*) $$K \cup \Gamma_d \cup \Gamma_v \cup \Delta(u, d) \cup \Delta(v, u) \cup \Delta(d, u) \cup \Delta(u, v) \vdash \\ \vdash \Delta(v, d) \cup \Delta(d, v)$$

ed esistono definizioni $\Delta(\varrho, v)$, $\Delta(v, \varrho)$ di $\mathcal{L}_\varrho$ in $\mathcal{L}_v$ e viceversa, tali che

(*a'*) Γ_v e Γ_ϱ sono K-equipollenti rispetto a tale coppia

(*b'*) $$K \cup \Gamma_d \cup \Gamma_\varrho \cup \Delta(v, d) \cup \Delta(\varrho, v) \cup \Delta(d, v) \cup \Delta(v, \varrho) \vdash \\ \vdash \Delta(\varrho, d) \cup \Delta(d, \varrho).$$

Allo scopo, scegliamo:

$\Delta(v, u)$: $\quad v(X, \alpha) = \bigcap_\beta \{u(X, \beta) \mid \beta > \alpha\}$

$\Delta(u, v)$: $\quad u(X, \alpha) = \bigcup_\beta \{v(X, \beta) \mid \beta < \alpha\}$

$\Delta(\varrho, v)$: $\quad \varrho(X, Y) = inf\,\{\alpha \mid Y \subseteq v(X, \alpha),\ X \subseteq v(Y, \alpha)\}$

$\Delta(v, \varrho)$: $\quad v(X, \alpha) = \bigcup \{Y \mid \forall \beta \, [\beta > \alpha \rightarrow \exists Z \, (Z \subseteq X, \varrho(Z, Y) \leqq \beta)]\}$

(*b*) e (*b'*) sono pressochè immediate conseguenze di queste posizioni. (*a*) e (*a'*) sono invece oggetto dei due seguenti teoremi 2.4 e 2.5.

2.4. Γ_u e Γ_v *sono K-equipollenti rispetto alla coppia* $\Delta(v, u)$, $\Delta(u, v)$.

Dim. (i) Ammettiamo $K \cup \Gamma_u \cup \Delta(v, u)$, e perciò pure u.5, u.6, u.7. Da tali premesse si deduce:

$$\beta < \alpha \longrightarrow v(X, \beta) \subseteq u(X, \alpha),$$

dunque

$$\bigcup \{v(X, \beta) \mid \beta < \alpha\} \subseteq u(X, \alpha).$$

D'altra parte si ha $u(X, \beta) \subseteq \bigcap \{u(X, \alpha) \mid_{\alpha} \alpha > \beta\} = v(X, \beta)$ dunque, poichè $K_0 \vdash \alpha = sup\, \{\beta \mid \beta < \alpha\}$:

$$u(X, \alpha) = \bigcup \{u(X, \beta) \mid_{\beta} \beta < \alpha\} \subseteq \bigcup \{v(X, \beta) \mid_{\beta} \beta < \alpha\}.$$

Se ne ricava $\Delta(u, v)$.

Seguono poi facilmente pure v·1 e

$$\bigcup \{v(X, \beta) \mid_{\beta} \beta < \alpha\} \cap Y = \emptyset \longrightarrow X \cap \bigcup \{v(Y, \beta) \mid_{\beta} \beta < \alpha\} = \emptyset$$

$$\bigcap \{v(X, \alpha) \mid_{\alpha} \alpha \in \alpha^{(1)}\} = \bigcap \{u(X, \beta) \mid_{\alpha, \beta} \beta > \alpha, \alpha \in \alpha^{(1)}\} =$$

$$= \bigcap \{u(X, \beta) \mid_{\beta} \beta > inf\, \alpha^{(1)}\} = v(X, inf\, \alpha^{(1)}), \text{(14)}$$

cioè v.2 e v.4.

Infine, applicando u.3, si ottiene:

$$\lambda < \alpha, \mu < \beta \longrightarrow v(v(X, \lambda), \mu) \subseteq u(v(X, \lambda), \beta) \subseteq u(u(X, \alpha), \beta) \subseteq$$

$$\subseteq u(X, \alpha + \beta) \subseteq v(X, \alpha + \beta),$$

e perciò, poichè $K_0 \vdash \gamma > \lambda + \mu \longleftrightarrow \exists \alpha \exists \beta (\alpha + \beta = \gamma, \alpha > \lambda, \beta > \mu)$

$$v(v(X, \lambda), \mu) \subseteq \bigcap \{v(X, \alpha + \beta) \mid_{\alpha, \beta} \alpha > \lambda, \beta > \mu\} =$$

$$= \bigcap \{v(X, \gamma) \mid_{\gamma} \gamma > \lambda + \mu\} = v(X, \lambda + \mu), \quad \text{quindi v.3.}$$

Si ha pertanto $K \cup \Gamma_u \cup \Delta(v, u) \vdash \Gamma_v \cup \Delta(u, v)$.

---

(14) Si ricordi che, per la *linearità* dell'ordine $\leqq$,

$$K_0 \vdash \beta > inf\, \alpha^{(1)} \longleftrightarrow \exists \alpha (\beta > \alpha, \alpha \in \alpha^{(1)}).$$

(ii) Ammettiamo ora $K \cup \Gamma_v \cup \Delta(u, v)$. Da tali premesse seguono facilmente u.1, u.2, u.4, e perciò pure u.5, u.6, u.7. Si ha poi

$$\alpha < \beta \rightarrow v(X, \alpha) \subseteq u(X, \beta)$$

e perciò

$$v(X, \alpha) \subseteq \bigcap_\beta \{u(X, \beta) \mid \beta > \alpha\}$$

D'altra parte: $u(X, \beta) \subseteq v(X, \beta)$, dunque

$$\bigcap_\beta \{u(X, \beta) \mid \beta > \alpha\} \subseteq \bigcap_\beta \{v(X, \beta) \mid \beta > \alpha\} = v(X, \alpha).$$

Se ne ricava $\Delta(v, u)$.

Infine si ha: $\alpha < +\infty$, $\mu < \beta \rightarrow \alpha + \mu < \alpha + \beta$, quindi

$$\alpha < +\infty,\ \mu < \beta \rightarrow u(u(X, \alpha), \mu) \subseteq v(v(X, \alpha), \mu) \subseteq v(X, \alpha + \mu) \subseteq u(X, \alpha + \beta).$$

Perciò, eliminata, mediante u.4 e u.7, la premessa $\alpha < +\infty$:

$$u(u(X, \alpha), \beta) = \bigcup \{u(u(X, \alpha), \mu) \mid \mu < \beta\} \subseteq u(X, \alpha + \beta), \qquad \text{cioè u.3.}$$

È così provato che $K \cup \Gamma_v \cup \Delta(u, v) \vdash \Gamma_u \cup \Delta(v, u)$, e con ciò, dal momento che le condizioni di ammissibilità di $\Delta(v, u)$ per $K \cup \Gamma_u$ e di $\Delta(u, v)$ per $K \cup \Gamma_v$ sono ovviamente soddisfatte, il teorema.

Osservazione. Tra le conseguenze di $K \cup \Gamma_v$ abbiamo:

v.5 $\quad \alpha \leqq \beta \rightarrow v(X, \alpha) \subseteq v(X, \beta)$

v.6 $\quad X \subseteq Y \rightarrow v(X, \alpha) \subseteq v(Y, \alpha)$

v.7 $\quad \alpha \leqq \beta \rightarrow \bigcup_X \{v(X, \alpha) \mid X \in X^{(1)}\} \subseteq v(\bigcup X^{(1)}, \alpha) \subseteq \bigcup_X \{v(X, \beta) \mid X \in X^{(1)}\}.$

Nessuna di queste relazioni è stata utilizzata nella dimostrazione del teorema 2.4, perciò possiamo servirci di questo stesso teorema per dimostrarle. Basterà occuparsi di v.7.

Osserviamo che v.7 è conseguenza di $K \cup \Gamma_v$ se e solo se è conseguenza di $K \cup \Gamma_u \cup \Delta(v, u)$. Ora da $K \cup \Gamma_u \cup \Delta(v, u)$ si deduce:

$$\alpha < \beta \rightarrow \bigcup_X \{v(X, \alpha) \mid X \in X^{(1)}\} \subseteq \bigcup_X \{u(X, \beta) \mid X \in X^{(1)}\} = u(\bigcup X^{(1)}, \beta)$$

dunque

$$\bigcup_X \{v(X, \alpha) \mid X \in X^{(1)}\} \subseteq \bigcap_\beta \{u(\bigcup X^{(1)}, \beta) \mid \beta > \alpha\} = v(\bigcup X^{(1)}, \alpha);$$

e d'altra parte si deduce :

$$\alpha < \beta \rightarrow v\,(\bigcup X^{(1)}, \alpha) \subseteq u\,(\bigcup X^{(1)}, \beta) = \bigcup\{u\,(X, \beta) \mid_X X \in X^{(1)}\} \subseteq$$

$$\subseteq \bigcup\{v\,(X, \beta) \mid_X X \in X^{(1)}\}.$$

2.5. *Γ_v e Γ_ϱ sono K-equipollenti rispetto alla coppia $\Delta(\varrho, v)$, $\Delta(v, \varrho)$.*

Dim. Ammettiamo $K \cup \Gamma_v \cup \Delta(\varrho, v)$ e deduciamone $\Gamma_\varrho \cup \Delta(v, \varrho)$.
Cominciamo col dedurre le due seguenti equivalenze:

(A) $\qquad \varrho\,(X, Y) \leqq \alpha \Longleftrightarrow Y \subseteq v\,(X, \alpha),\ X \subseteq v\,(Y, \alpha)$

(B) $\qquad Y \subseteq v\,(X, \alpha) \Longleftrightarrow \forall \beta\,[\beta > \alpha \rightarrow \exists Z\,(Z \subseteq X, \varrho\,(Z, Y) \leqq \beta)]$.

Per quanto concerne la (A), l'implicazione da sinistra a destra si deduce osservando che, per v.4 e $\Delta(\varrho, v)$, si ha $Y \subseteq v\,(X, \varrho\,(X, Y))$, $X \subseteq v\,(Y, \varrho\,(X, Y))$. L'implicazione inversa è ovvia.

Passando alla (B), procuriamoci dapprima l'implicazione diretta.

Supposto $Y \subseteq v\,(X, \alpha)$, $\beta > \gamma > \alpha$ e posto $Z = X \cap v\,(Y, \beta)$, si ottiene sia $(X \cap \complement Z) \cap v\,(Y, \beta) = \emptyset$ e quindi $Y \cap v\,(X \cap \complement Z, \gamma) = \emptyset$, sia $X = Z \cup (X \cap \complement Z)$ e quindi per v.7 $Y \subseteq v\,(X, \alpha) \subseteq v\,(Z, \gamma) \cup v\,(X \cap \complement Z, \gamma)$. Ne risulta $Y \subseteq v\,(Z, \gamma) \subseteq v\,(Z, \beta)$. Tenuto conto del fatto che da K_0 segue $\beta > \alpha \rightarrow \exists \gamma\,(\beta > \gamma > \alpha)$, si conclude, sotto le sole premesse iniziali:

v.8 $\quad Y \subseteq v\,(X, \alpha) \rightarrow \forall \beta\,[\beta > \alpha \rightarrow \exists Z\,(Z \subseteq X, Z \subseteq v\,(Y, \beta), Y \subseteq v\,(Z, \beta))]$ [15]

Dalla (A) e dalla v.8 si ricava subito la prima metà di (B).
L'implicazione inversa è pressochè immediata. Infatti si ha :

$$\forall \beta\,[\beta > \alpha \rightarrow \exists Z\,(Z \subseteq X,\ \ Y \subseteq v\,(Z, \beta))] \rightarrow Y \subseteq \bigcap\{v\,(X, \beta) \mid_\beta \beta > \alpha\} = v\,(X, \alpha).$$

La (B) permette di ricavare subito $\Delta(v, \varrho)$:

$$v\,(X, \alpha) = \bigcup\{Y \mid Y \subseteq v\,(X, \alpha)\} =$$

$$= \bigcup\{Y \mid \forall \beta\,[\beta > \alpha \rightarrow \exists Z\,(Z \subseteq X, \varrho\,(Z, Y) \leqq \beta)]\}.$$

---

[15] Si ha anzi $K \cup \Gamma_v \vdash$ v.8. In modo più semplice si dimostra $K \cup \Gamma_u \vdash$ u.8, u.8 essendo: $Y \subseteq u\,(X, \alpha) \rightarrow \exists Z\,(Z \subseteq X,\ Z \subseteq u\,(Y, \alpha),\ Y \subseteq u\,(Z, \alpha))$. In effetti sarebbe stato un po' più facile dimostrare direttamente la K-equipollenza di Γ_u e Γ_ϱ che non il teorema 2.5. I motivi della scelta fatta risulteranno chiari in seguito.

Deduciamo ora ϱ 1-5.

ϱ.1 e ϱ.2 non danno luogo a difficoltà. Si ha poi

$$\varrho(X, Y) \leqq \alpha, \varrho(Y, Z) \leqq \beta \rightarrow$$

$$\rightarrow Y \subseteq v(X, \alpha), Z \subseteq v(Y, \beta), X \subseteq v(Y, \alpha), Y \subseteq v(Z, \beta)$$

$$\rightarrow Z \subseteq v(X, \alpha + \beta), X \subseteq v(Z, \alpha + \beta)$$

$$\rightarrow \varrho(X, Z) \leqq \alpha + \beta, \text{ quindi } \varrho \cdot 3.$$

Per quanto concerne $\varrho \cdot 4$, basta osservare che ammesso:

$$\forall X \forall Y [(X, Y) \in Z^{(3)} \rightarrow \varrho(X, Y) \leqq \alpha],$$

si ha:

$$\forall Y [Y \in \check{D}Z^{(3)} \rightarrow Y \subseteq v(\bigcup DZ^{(3)}, \alpha)], \forall X [X \in DZ^{(3)} \rightarrow X \subseteq v(\bigcup \check{D}Z^{(3)}, \alpha)]$$

dunque:

$$\bigcup \check{D}Z^{(3)} \subseteq v(\bigcup DZ^{(3)}, \alpha), \bigcup DZ^{(3)} \subseteq v(\bigcup \check{D}Z^{(3)}, \alpha)$$

e perciò:

$$\varrho(\bigcup DZ^{(3)}, \bigcup \check{D}Z^{(3)}) \leqq \alpha.$$

Infine $\varrho \cdot 5$ si deduce applicando (B) alla ovvia relazione

$$X_1 \subseteq X \rightarrow X_1 \subseteq v(Y, \varrho(X, Y)).$$

(ii) Ammettiamo ora $K \cup \Gamma_\varrho \cup \Delta(v, \varrho)$ e deduciamone $\Gamma_v \cup \Delta(\varrho, v)$.

Deriviamo anzitutto (B). L'implicazione da destra a sinistra è ovvia. D'altra parte, posto $Y^{(1)} = \{Y \mid \forall \beta [\beta > \alpha \rightarrow \exists Z (Z \subseteq X, \varrho(Z, Y) \leqq \beta)]\}$, si ha $v(X, \alpha) = \bigcup Y^{(1)}$, quindi $Y \subseteq v(X, \alpha) \rightarrow Y = Y \cap \bigcup Y^{(1)}$. Di qui, poichè per $\varrho \cdot 4$ e $\varrho \cdot 5$ si ha $\bigcup Y^{(1)} \in Y^{(1)}$ e $Y_1 \in Y^{(1)} \rightarrow Y \cap Y_1 \in Y^{(1)}$, si deriva $Y \subseteq v(X, \alpha) \rightarrow Y \in Y^{(1)}$. Si è così dedotta anche l'implicazione da sinistra a destra.

Passiamo ora alla (A). Supposto $Y \subseteq v(X, \alpha)$, $X \subseteq v(Y, \alpha)$, si ha, per (B):

$$\forall \beta [\beta > \alpha \rightarrow \exists X_1 (X_1 \subseteq X, \varrho(X_1, Y) \leqq \beta), \exists Y_1 (Y_1 \subseteq Y, \varrho(X, Y_1) \leqq \beta)],$$

dunque, per $\varrho \cdot 4$, $\forall \beta [\beta > \alpha \rightarrow \varrho(X, Y) \leqq \beta]$, e perciò $\varrho(X, Y) \leqq \alpha$.

Viceversa, supposto $\varrho(X, Y) \leqq \alpha$, si ha ovviamente

$$\forall \beta [\beta > \alpha \rightarrow \exists X_1 (X_1 \subseteq X, \varrho(X_1, Y) \leqq \beta), \exists Y_1 (Y_1 \subseteq Y, \varrho(X, Y_1) \leqq \beta)]$$

dunque, per (B), $Y \subseteq v(X, \alpha)$, $X \subseteq v(Y, \alpha)$. La (A) è così provata.

Con l'ausilio della (A) si ricava subito $\Delta(\varrho, v)$. Anche v.1 e v.4 si ottengono senza difficoltà. Per quanto concerne v.2, abbiamo

$$\beta < \beta_1, \exists X_1 [\varnothing \subset X_1 \subseteq X, \forall \gamma [\gamma > \beta \rightarrow \exists Y_1 (Y_1 \subseteq Y, \varrho(X_1, Y_1) \leqq \gamma)]] \rightarrow$$

$$\rightarrow \exists Y_1 [\varnothing \subset Y_1 \subseteq Y, \forall \gamma [\gamma > \beta_1 \rightarrow \exists X_1 (X_1 \subseteq X, \varrho(X_1, Y_1) \leqq \gamma)]].$$

Se ne deriva:

$$\beta < \beta_1, \ X \cap v(Y, \beta) \neq \varnothing \rightarrow Y \cap v(X, \beta_1) \neq \varnothing$$

e quindi

$$\exists \beta (\beta < \alpha, \ X \cap v(Y, \beta) \neq \varnothing) \rightarrow \exists \beta (\beta < \alpha, \ Y \cap v(X, \beta) \neq \varnothing),$$

cioè la contrapposizione di v.2.

Infine abbiamo

$$\varrho(X, v(X, \alpha)) \leqq \alpha, \ \ \varrho(v(X, \alpha), \ v(v(X, \alpha), \beta)) \leqq \beta.$$

Se ne deduce $\varrho(X, v(v(X, \alpha), \beta)) \leqq \alpha + \beta$, e quindi v.3.

3. $\Gamma_u, \Gamma_v, \Gamma_\partial, \Gamma_\varrho, \Gamma_\varepsilon, \Gamma_\delta$ sono a due a due K-equipollenti, poichè ciascuno di essi è K-equipollente a Γ_d. Si è visto rispetto a quali coppie di definizioni lo sono Γ_u e Γ_v, e Γ_v e Γ_ϱ. Dimostreremo in questo paragrafo che

1) Γ_u e Γ_ϱ sono K-equipollenti rispetto alla coppia di definizioni:

$$\Delta(\varrho, u): \qquad \varrho(X, Y) = inf \{\alpha \mid Y \subseteq u(X, \alpha), X \subseteq u(Y, \alpha)\}$$

$$\Delta(u, \varrho): \qquad u(X, \alpha) = \bigcup \{Y \mid \exists Z (Z \subseteq X, \varrho(Z, Y) < \alpha)\}$$

2) Γ_u e Γ_∂ sono K-equipollenti rispetto alla coppia:

$$\Delta(\partial, u): \qquad \partial(X, Y) = sup \{\alpha \mid Y \cap u(X, \alpha) = \varnothing\}$$

$$\Delta(u, \partial): \qquad u(X, \alpha) = \bigcup \{Y \mid \forall Z (\varnothing \subset Z \subseteq Y \rightarrow \partial(X, Z) < \alpha)\}$$

3) Γ_v e Γ_∂ sono K-equipollenti rispetto alla coppia:

$$\Delta(\partial, v): \qquad \partial(X, Y) = sup \{\alpha \mid Y \cap v(X, \alpha) = \varnothing\}$$

$$\Delta(v, \partial): \qquad v(X, \alpha) = \bigcup \{Y \mid \forall Z (\varnothing \subset Z \subseteq Y \rightarrow \partial(X, Z) \leqq \alpha)\}$$

4) Γ_∂ e Γ_ε sono K-equipollenti rispetto alla coppia:

$$\Delta(\varepsilon, \partial): \qquad \varepsilon(X, Y) = \sup_{X_1 Y_1} \{\partial(X_1, Y_1) \mid \emptyset \subset X_1 \subseteq X, \ \emptyset \subset Y_1 \subseteq Y\}$$

$$\Delta(\partial, \varepsilon): \qquad \partial(X, Y) = \inf_{X_1 Y_1} \{\varepsilon(X_1, Y_1) \mid \emptyset \subset X_1 \subseteq X, \ \emptyset \subset Y_1 \subseteq Y\}$$

5) Γ_∂ e Γ_δ sono K-equipollenti rispetto alla coppia:

$$\Delta(\delta, \partial): \qquad \delta(X) = \sup_{Y, Z} \{\partial(Y, Z) \mid \emptyset \subset Y \subseteq X, \ \emptyset \subset Z \subseteq X\}$$

$$\Delta(\partial, \delta): \qquad \partial(X, Y) = \inf_{Z} \{\delta(Z) \mid X \cap Z \neq \emptyset, \ Y \cap Z \neq \emptyset\}.$$

Come già si è fatto per i teoremi 2.4 e 2.5, anche nel dimostrare le precedenti proposizioni, eviteremo di passare attraverso Γ_d. L'utilità di ciò apparirà nel paragrafo successivo, allorchè $\Gamma_u, \Gamma_v, \ldots$ verranno riformulati utilizzando le variabili di tipo 0 della gerarchia $\mathcal{G}_2$, anzichè le variabili di tipo 1 della gerarchia $\mathcal{G}_1$, cioè si affronterà il problema della geometria « senza punti ». In tale contesto nessuna formulazione è ovviamente possibile per Γ_d, e pertanto non vi è alcuna possibilità di provare l'equivalenza concettuale delle diverse formulazioni servendosi di Γ_d. L'unica via per giungere allo scopo è quella indicata in questo paragrafo. Si tratterà poi di vedere fino a che punto il metodo *diretto* qui adottato continui a funzionare nel caso della geometria « senza punti » in quanto non vi è a priori alcuna garanzia che le varie formulazioni assiomatiche considerate continuino ad essere equivalenti in quel contesto più generale.

3.1. *Γ_u e Γ_ϱ sono K-equipollenti rispetto alla coppia $\Delta(\varrho, u)$, $\Delta(u, \varrho)$.*

Dim. In virtù dei teoremi 2.4 e 2.5 e del *Teorema* 6 della *I Parte*, è sufficiente provare che

$$K \cup \Gamma_u \cup \Delta(v, u) \cup \Delta(\varrho, v) \vdash \Delta(\varrho, u) \cup \Delta(u, \varrho).$$

Dalle premesse, tenendo ancora conto dei teoremi 2.4 e 2.5, si ricava $\Delta(u, v)$ e le equivalenze (A) e (B), e perciò pure:

(C) $\qquad \varrho(X, Y) \leqq \alpha \Longleftrightarrow \forall \beta\, [\beta > \alpha \rightarrow Y \subseteq u(X, \beta), X \subseteq u(Y, \beta)]$

(D) $\qquad \forall \beta [\beta > \alpha \rightarrow Y \subseteq u(X, \beta)] \Longleftrightarrow \forall \beta [\beta > \alpha \rightarrow \exists Z (Z \subseteq X, \varrho(Z, Y) \leqq \beta]$

(C′) $\qquad \varrho(X, Y) < \alpha \Longleftrightarrow \exists \beta [\beta < \alpha, Y \subseteq u(X, \beta), X \subseteq u(Y, \beta)]$

(D′) $\qquad \exists \beta\, [\beta < \alpha, Y \subseteq u(X, \beta)] \Longleftrightarrow \exists Z [Z \subseteq X, \varrho(Z, Y) < \alpha].$

Utilizzando (C′) si ha subito $\Delta(\varrho, u)$. Utilizzando (D′) si ha invece:

$$u(X, \alpha) = \bigcup_\beta \{u(X, \beta) \mid \beta < \alpha\} =$$

$$= \bigcup \{Y \mid \exists \beta [\beta < \alpha,\ Y \subseteq u(X, \beta)]\}$$

$$= \bigcup \{Y \mid \exists Z [Z \subseteq X,\ \varrho(Z, Y) < \alpha]\}, \qquad \text{cioè } \Delta(u, \varrho).$$

3.2 *Γ_u e Γ_∂ sono K-equipollenti rispetto alla coppia $\Delta(\partial, u)$, $\Delta(u, \partial)$.*

DIM (i) Ammettiamo $K \cup \Gamma_u \cup \Delta(\partial, u)$ e deduciamone $\Gamma_\partial \cup \Delta(u, \partial)$. Dalle premesse si deduce subito:

$$Y \cap u(X, \partial(X, Y)) = \varnothing,$$

dunque

(E) $$\partial(X, Y) \geqq \alpha \longleftrightarrow Y \cap u(X, \alpha) = \varnothing$$

(E′) $$\partial(X, Y) < \alpha \longleftrightarrow Y \cap u(X, \alpha) \neq \varnothing$$

Di qui, poichè

$$Y \subseteq u(X, \alpha) \longleftrightarrow \forall Z [\varnothing \subset Z \subseteq Y \rightarrow Z \cap u(X, \alpha) \neq \varnothing],$$

si ottiene pure:

(F) $$Y \subseteq u(X, \alpha) \longleftrightarrow \forall Z [\varnothing \subset Z \subseteq Y \rightarrow \partial(X, Z) < \alpha].$$

Se ne deduce immediatamente $\Delta(u, \partial)$. Per quanto concerne ∂.1-5, l'unica difficoltà riguarda ∂.3. Si ha tuttavia:

$$\partial(X, Y) < \alpha,\ \forall Y_1 [\varnothing \subset Y_1 \subseteq Y \rightarrow \partial(Y_1, Z) < \beta] \rightarrow$$

$$\rightarrow Y \cap u(X, \alpha) \neq \varnothing,\ Y \subseteq u(Z, \beta)$$

$$\rightarrow u(X, \alpha) \cap u(Z, \beta) \neq \varnothing$$

$$\rightarrow u(u(X, \alpha), \beta) \cap Z \neq \varnothing$$

$$\rightarrow u(X, \alpha + \beta) \cap Z \neq \varnothing$$

$$\rightarrow \partial(X, Z) < \alpha + \beta \qquad \text{e quindi } \partial.3.$$

(ii) Ammettiamo ora $K \cup \Gamma_\partial \cup \Delta(u, \partial)$ e deduciamone $\Gamma_u \cup \Delta(\partial, u)$.

Applicando $\Delta\ (u, \partial)$, $\partial.4$, si ottiene facilmente (F). Successivamente per $\partial.4$, $\partial.5$, si ricava:

$$Y \cap u(X, \alpha) \neq \varnothing \longleftrightarrow \exists\, Y_1 [\varnothing \subset Y_1 \subseteq Y,\ Y_1 \subseteq u(X, \alpha)]$$

$$\longleftrightarrow \exists\, Y_1 [\varnothing \subset Y_1 \subseteq Y,\ \forall Z (\varnothing \subset Z \subseteq Y_1 \rightarrow \partial(X, Z) < \alpha)]$$

$$\longleftrightarrow \partial(X, Y) < \alpha, \qquad \text{quindi (E}'\text{), (E), } \Delta(\partial, u).$$

Per il resto, ci limiteremo a dedurre u.3. Si ottiene:

$$Z \cap u(u(X, \alpha), \beta) \neq \varnothing \rightarrow$$

$$\rightarrow \partial(u(X, \alpha), Z) < \beta,\ \forall Y (\varnothing \subset Y \subseteq u(X, \alpha) \rightarrow \partial(X, Y) < \alpha)$$

$$\rightarrow \partial(X, Z) < \alpha + \beta$$

$$\rightarrow Z \cap u(X, \alpha + \beta) \neq \varnothing, \qquad \text{e di qui u.3.}$$

3.3. *Γ_v e Γ_∂ sono K-equipollenti rispetto alla coppia $\Delta(\partial, v)$, $\Delta(v, \partial)$*

Dim. In virtù di 2.4, 3.2 e del *Teorema* 6 della *I Parte*, potremo limitarci a provare che

$$K \cup \Gamma_v \cup \Delta(u, v) \cup \Delta(\partial, u) \vdash \Delta(\partial, v) \cup \Delta(v, \partial).$$

Sempre in virtù di 2.4 e 3.2, le premesse implicano $\Delta(v, u)$, (E), (F). Non è difficile pertanto dedurne anche:

(G) $$\partial(X, Y) \geqq \alpha \longleftrightarrow \forall \beta (\beta < \alpha \rightarrow Y \cap v(X, \beta) = \varnothing)$$

(H) $$Y \subseteq v(X, \alpha) \longleftrightarrow \forall Z [\varnothing \subset Z \subseteq Y \rightarrow \partial(X, Z) \leqq \alpha)$$

e di qui $\Delta(\partial, v)$ e $\Delta(v, \partial)$.

3.4. *Γ_∂ e Γ_ε sono K-equipollenti rispetto alla coppia $\Delta(\varepsilon, \partial)$, $\Delta(\partial, \varepsilon)$.*

Dim. (i) Ammettiamo $K \cup \Gamma_\partial \cup \Delta(\varepsilon, \partial)$ e deriviamone $\Gamma_\varepsilon \cup \Delta(\partial, \varepsilon)$. Si ha subito $\varepsilon.1$, $\varepsilon.2$, $\varepsilon.4$ e $\varepsilon(X, Y) \geqq \partial(X, Y)$. Per $\partial.3$:

$$\varepsilon(X, Y) \leqq \alpha,\ \varepsilon(Y, Z) \leqq \beta,\ \varnothing \subset X_1 \subseteq X,\ \varnothing \subset Z_1 \subseteq Z \rightarrow$$

$$\rightarrow \varepsilon(X_1, Y) \leqq \alpha,\ \forall\, Y_1 [\varnothing \subset Y_1 \subseteq Y \rightarrow \varepsilon(Y_1, Z_1) \leqq \beta]$$

$$\to \partial(X_1, Y) \leqq \alpha, \forall\, Y_1[\emptyset \subset Y_1 \subseteq Y \to \partial(Y_1, Z_1) \leqq \beta]$$

$$\to \partial(X_1, Z_1) \leqq \alpha + \beta$$

Se ne ricava:

$$\varepsilon(X, Y) \leqq \alpha, \varepsilon(Y, Z) \leqq \beta \to$$

$$\to \forall X_1 \forall Z_1[\emptyset \subset X_1 \subseteq X, \emptyset \subset Z_1 \subseteq Z \to \partial(X_1, Z_1) \leqq \alpha + \beta]$$

$$\to \varepsilon(X, Z) \leqq \alpha + \beta, \qquad \text{e perciò } \varepsilon.3.$$

Si ottiene poi, per $\Delta(\varepsilon, \partial)$ e $\partial.4$:

$$\varepsilon(X, Y) > \alpha \to \exists X_1 \exists Y_1[\emptyset \subset X_1 \subseteq X, \emptyset \subset Y_1 \subseteq Y, \partial(X_1, Y_1) > \alpha]$$

$$\to \exists X_1 \exists Y_1[\emptyset \subset X_1 \subseteq X, \emptyset \subset Y_1 \subseteq Y, \forall Y_2(\emptyset \subset Y_2 \subseteq Y_1 \to \partial(X_1 Y_2) > \alpha)]$$

$$\to \exists X_1 \exists Y_1[\emptyset \subset X_1 \subseteq X, \emptyset \subset Y_1 \subseteq Y, \forall Y_2(\emptyset \subset Y_2 \subseteq Y_1 \to \varepsilon(X_1, Y_2) > \alpha)]$$

$$\to \exists\, Y_1[\emptyset \subset Y_1 \subseteq Y, \forall\, Y_2(\emptyset \subset Y_2 \subseteq Y_1 \to \varepsilon(X, Y_2) > \alpha)],$$

cioè $\varepsilon.5$, e infine, per $\partial.5$ e $\partial.4$:

$$\partial(X, Y) < \alpha \longleftrightarrow \exists\, q\,[q \in Y, \partial(X, \{q\}) < \alpha]$$

$$\longleftrightarrow \exists p\, \exists q\,[p \in X, q \in Y, \partial(\{p\}, \{q\}) < \alpha]$$

$$\longleftrightarrow \exists\, p\, \exists q\,[p \in X, q \in Y, \varepsilon(\{p\}, \{q\}) < \alpha]$$

$$\longleftrightarrow \exists X_1 \exists Y_1[\emptyset \subset X_1 \subseteq X, \emptyset \subset Y_1 \subseteq Y, \varepsilon(X_1, Y_1) < \alpha)$$

cioè sostanzialmente $\Delta(\partial, \varepsilon)$.

(ii) Ammettiamo ora $K \cup \Gamma_\varepsilon \cup \Delta(\partial, \varepsilon)$ e deriviamone $\Gamma_\partial \cup \Delta(\varepsilon, \partial)$.

La deduzione di $\partial.2$, $\partial.4$, $\partial(X, Y) \leqq \varepsilon(X, Y)$ non presenta difficoltà. Si ha poi

$$\partial(X, X) = \inf_{Y, Z} \{\varepsilon(Y, Z) \mid \emptyset \subset Y \subseteq X, \emptyset \subset Z \subseteq X\} =$$

$$= \inf_{p, q} \{\varepsilon(\{p\}, \{q\}) \mid p \in X, q \in X\} = 0,$$

quindi $\partial.1$, e inoltre:

$$\partial(X, Y) < \alpha, \forall Y_1 [\varnothing \subset Y_1 \subseteq Y \rightarrow \partial(Y_1, Z) < \beta] \rightarrow$$

$$\rightarrow \exists X_1 \exists Y_1 [\varnothing \subset X_1 \subseteq X, \varnothing \subset Y_1 \subseteq Y, \varepsilon(X_1, Y_1) < \alpha] \wedge$$

$$\wedge \forall Y_1 [\varnothing \subset Y_1 \subseteq Y \rightarrow \exists Y_2 \exists Z_1 (\varnothing \subset Y_2 \subseteq Y_1, \varnothing \subset Z_1 \subseteq Z, \varepsilon(Y_2, Z_1) < \beta)]$$

$$\rightarrow \exists X_1 \exists Y_2 \exists Z_1 [\varnothing \subset X_1 \subseteq X, \varnothing \subset Y_2 \subseteq Y, \varnothing \subset Z_1 \subseteq Z, \varepsilon(X_1, Y_2) < \alpha, \varepsilon(Y_2, Z_1) < \beta]$$

$$\rightarrow \exists X_1 \exists Z_1 [\varnothing \subset X_1 \subseteq X, \varnothing \subset Z_1 \subseteq Z, \varepsilon(X_1, Z_1) < \alpha + \beta]$$

$$\rightarrow \partial(X, Z) < \alpha + \beta,$$

quindi $\partial.3$;

$$\partial(X, Y) < \alpha \rightarrow \exists X_1 \exists Y_1 [\varnothing \subset X_1 \subseteq X, \varnothing \subseteq Y_1 \subseteq Y, \varepsilon(X_1, Y_1) < \alpha]$$

$$\rightarrow \exists X_1 \exists Y_1 [\varnothing \subset X_1 \subseteq X, \varnothing \subset Y_1 \subseteq Y, \forall X_2 \forall Y_2 (\varnothing \subset X_2 \subseteq X_1, \varnothing \subset Y_2 \subseteq Y_1 \rightarrow \varepsilon(X_2, Y_2) < \alpha)]$$

$$\rightarrow \exists X_1 \exists Y_1 [\varnothing \subset X_1 \subseteq X, \varnothing \subset Y_1 \subseteq Y, \forall X_2 \forall Y_2 (\varnothing \subset X_2 \subseteq X_1, \varnothing \subset Y_2 \subseteq Y_1 \rightarrow \partial(X_2, Y_2) < \alpha)]$$

$$\rightarrow \exists Y_1 [\varnothing \subset Y_1 \subseteq Y, \forall Y_2 (\varnothing \subset Y_2 \subseteq Y_1 \rightarrow \partial(X, Y_2) < \alpha)],$$

cioè $\partial.5$;

$$\varepsilon(X, Y) > \alpha \longleftrightarrow \exists p \exists q [p \in X, q \in Y, \varepsilon(\{p\}, \{q\}) > \alpha]$$

$$\longleftrightarrow \exists p \exists q [p \in X, q \in Y, \partial(\{p\}, \{q\}) > \alpha]$$

$$\longleftrightarrow \exists X_1 \exists Y_1 [\varnothing \subset X_1 \subseteq X, \varnothing \subset Y_1 \subseteq Y, \partial(X_1, Y_1) > \alpha],$$

quindi $\Delta(\varepsilon, \partial)$.

3.5. *Γ_∂ e Γ_δ sono K-equipollenti rispetto alla coppia $\Delta(\delta, \partial)$, $\Delta(\partial, \delta)$.*

Dim. (i) Ammettiamo $K \cup \Gamma_\partial \cup \Delta(\delta, \partial)$ e deduciamone $\Gamma_\delta \cup \Delta(\partial, \delta)$.

Si ha subito $\delta.1$, $\delta.3$ e $\delta(X \cup Y) \geqq \partial(X, Y)$. Segue poi

$$X \cap Y \neq \varnothing, X_1 \cap X \neq \varnothing, Y_1 \cap Y \neq \varnothing \rightarrow$$

$$\rightarrow \partial(X_1, X \cap Y) \leqq \delta(X), \quad \forall Z [\varnothing \subset Z \subseteq X \cap Y \rightarrow \partial(Z, Y_1) \leqq \delta(Y)]$$

$$\rightarrow \partial(X_1, Y_1) \leqq \delta(X) + \delta(Y), \qquad \text{e perciò } \delta.2.$$

Si ha infine:

$$\delta(X) > \alpha \rightarrow \exists Y \exists Z [\emptyset \subset Y \subseteq X,\ \emptyset \subset Z \subseteq X,\ \partial(Y, Z) > \alpha]$$

$$\rightarrow \exists Y \exists Z [\emptyset \subset Y \subseteq X,\ \emptyset \subset Z \subseteq X,$$

$$\forall Y_1 \forall Z_1 (\emptyset \subset Y_1 \subseteq Y,\ \emptyset \subset Z_1 \subseteq Z \rightarrow \partial(Y_1, Z_1) > \alpha)]$$

$$\rightarrow \exists Y \exists Z [\emptyset \subset Y \subseteq X,\ \emptyset \subset Z \subseteq X,$$

$$\forall Y_1 \forall Z_1 (\emptyset \subset Y_1 \subseteq Y,\ \emptyset \subset Z_1 \subseteq Z \rightarrow \delta(Y_1 \cup Z_1) > \alpha)]$$

$$\partial(X, Y) < \alpha \longleftrightarrow \exists p \exists q [p \in X,\ q \in Y,\ \partial(\{p\}, \{q\}) < \alpha]$$

$$\longleftrightarrow \exists p \exists q [p \in X,\ q \in Y,\ \delta(\{p, q\}) < \alpha]$$

$$\longleftrightarrow \exists Z [Z \cap X \neq \emptyset,\ Z \cap Y \neq \emptyset,\ \delta(Z) < \alpha]$$

e con ciò $\delta.4$ e $\Delta(\partial, \delta)$.

(ii) Ammesso $K \cup \Gamma'_\delta \cup \Delta(\partial, \delta)$, deduciamone $\Gamma'_\partial \cup \Delta(\delta, \partial)$.

La derivazione di $\partial.1$-$\partial.5$ è del tutto simile a quella già ottenuta in 3.4 (ii). Si ha poi

$$\delta(X) > \alpha \longleftrightarrow \exists \beta \exists Y \exists Z [\beta > \alpha,\ \emptyset \subset Y \subseteq X,\ \emptyset \subset Z \subseteq X,$$

$$\forall Y_1 \forall Z_1 (\emptyset \subset Y_1 \subseteq Y,\ \emptyset \subset Z_1 \subseteq Z,\ \delta(Y_1, Z_1) > \beta)]$$

$$\longleftrightarrow \exists \beta \exists Y \exists Z [\beta > \alpha,\ \emptyset \subset Y \subseteq X,\ \emptyset \subset Z \subseteq X,\ \partial(Y, Z) \geqq \beta]$$

$$\longleftrightarrow \exists Y \exists Z [\emptyset \subset Y \subseteq X,\ \emptyset \subset Z \subseteq X,\ \partial(Y, Z) > \alpha],$$

quindi $\Delta(\delta, \partial)$.

4. Sia B un qualunque insieme di assiomi per il concetto di *algebra completa di Boole*, formulato utilizzando le variabili di tipo 0 della gerarchia $\mathcal{G}_2$ per indicare generici elementi dell'algebra, e i simboli $\subseteq$, $\cap$, $\cup$, $\complement$, *inf*, *sup*, *o*, 1, come simboli di *inclusione, intersezione, riunione, complemento, infimo, supremo, zero, uno,* nel senso delle algebre di Boole. Per disporre di tale formulazione nel linguaggio L, ammetteremo che il simbolo relazionale $\subseteq$ sia (anche) di classe $(0_2, 0_2)$, i simboli funzionali $\cap$, $\cup$, $\complement$ siano rispettivamente di classe $(0_2, 0_2, 0_2)$, $(0_2, 0_2, 0_2)$, $(0_2, 0_2)$ e i simboli funzionali *inf* e *sup* siano di classe $(0_2, 1_2)$. Le costanti individuali *o* e 1 dovranno poi naturalmente essere di specie 0_2. Poniamo $K_2 = K_0 \cup B \cup Ins_2$.

Supporremo pure, a questo punto, che i simboli funzionali u, v, ∂, ϱ, ε, δ siano idonei a rappresentare le nozioni della geometria «senza punti» corrispondenti alle nozioni della geometria «dei punti» considerate nei §§ 2, 3; e cioè siano (anche) di classe $(0_2, 0_2, 0_0)$ i primi due, di classe $(0_0, 0_2, 0_2)$ i tre seguenti, e infine di classe $(0_0, 0_2)$ l'ultimo. Indicheremo con Γ_{2u}, Γ_{2v}, $\Gamma_{2\partial}$, ... gli insiemi di enunciati che si ottengono da Γ_u, Γ_v, Γ_∂, ... cambiando ogni variabile $X, Y, Z, \ldots$ in $x, y, z, \ldots$, $\cap$, $\cup$ in *inf* e *sup*, e infine $\emptyset$ in o. Analogo significato avranno $\mathcal{L}_{2u}$, $\mathcal{L}_{2v}$, $\mathcal{L}_{2\partial}$, ..., $\Delta_2(v, u)$, $\Delta_2(u, v)$, $\Delta_2(u, \partial)$, ...

Gli insiemi $K_2 \cup \Gamma_{2u}$, $K_2 \cup \Gamma_{2v}$, $K_2 \cup \Gamma_{2\partial}$, ecc., possono venir considerati, nella maniera più naturale, come insiemi di assiomi per una geometria metrica «senza punti». Si tratta ora di vedere se le relazioni di K-equipollenza trovate nei due paragrafi precedenti tra Γ_u, Γ_v, Γ_∂, ... si traducano in relazioni di K_2 equipollenza per i corrispondenti insiemi $\Gamma_{2u}, \Gamma_{2v}, \Gamma_{2\partial}, \ldots$ Non è difficile rendersi conto del fatto che, ove si sostituiscano ovunque X, Y, Z con x, y, z, $\cap$ e $\cup$ con *inf* e *sup*, e $\emptyset$ con o, nelle dimostrazioni dei teoremi 2.4, 2.5, 3.1, 3.2, 3.3, si ottengono dimostrazioni dei seguenti altri teoremi:

4.1. *Γ_{2u} e Γ_{2v} sono K_2-equipollenti rispetto alla coppia* $\Delta_2(v, u)$, $\Delta_2(u, v)$

4.2. *Γ_{2v} e $\Gamma_{2\varrho}$ sono K_2-equipollenti rispetto alla coppia* $\Delta_2(\varrho, v)$, $\Delta_2(v, \varrho)$

4.3. *Γ_{2u} e $\Gamma_{2\varrho}$ sono K_2-equipollenti rispetto alla coppia* $\Delta_2(\varrho, u)$, $\Delta_2(u, \varrho)$

4.4. *Γ_{2u} e $\Gamma_{2\partial}$ sono K_2-equipollenti rispetto alla coppia* $\Delta_2(\partial, u)$, $\Delta_2(u, \partial)$

4.5. *Γ_{2v} e $\Gamma_{2\partial}$ sono K_2-equipollenti rispetto alla coppia* $\Delta_2(\partial, v)$, $\Delta_2(v, \partial)$.

Le dimostrazioni dei teoremi 3.4 e 3.5 non possono invece venir trasferite nell'attuale contesto, poichè fanno intervenire *variabili di punto* (cioè variabili di specie 0_1). In realtà le relazioni di K-equipollenza tra Γ_∂, Γ_ε, Γ_δ colà dimostrate non si traducono in corrispondenti relazioni di K_2-equipollenza per $\Gamma_{2\partial}$, $\Gamma_{2\varepsilon}$, $\Gamma_{2\delta}$. Supposto infatti, per assurdo, $\Gamma_{2\partial}$ e $\Gamma_{2\varepsilon}$ K_2-equipollenti rispetto alla coppia $\Delta_2(\varepsilon, \partial)$, $\Delta_2(\partial, \varepsilon)$, si avrebbe

$$K_2 \cup \Gamma_{2\varepsilon} \vdash \partial.1 * \Delta_2(\partial, \varepsilon)$$

avendo indicato, per semplicità, ancora con $\partial.1$ il primo enunciato di $\Gamma_{2\partial}$, e perciò $K \cup \Gamma_{2\varepsilon} \vdash \forall x\, [x \neq o \rightarrow inf\{\varepsilon(y, z) \mid_{y,z} o \subset y \subseteq x,\ o \subset z \subseteq x\} = 0]$ il che è certamente falso.

Analogamente, supposto $\Gamma_{2\partial}$ e $\Gamma_{2\delta}$ K_2-equipollenti rispetto a $\Delta_2(\delta, \partial)$, $\Delta_2(\partial, \delta)$, si avrebbe

$$K \cup \Gamma_{2\delta} \vdash \forall x\, [x \neq o \rightarrow inf\, \{\delta(z) \mid_z x \cap z \neq o\} = 0], \quad \text{il che è falso.}$$

Si ha tuttavia, come è facile verificare, ripercorrendo le dimostrazioni dei teoremi 3.4 e 3.5

$$\begin{cases} K_2 \cup \Gamma_{2\partial} \cup \Delta_2(\varepsilon, \partial) \vdash \Gamma_{2\varepsilon} \\ K_2 \cup \Gamma_{2\varepsilon} \cup \Delta_2(\partial, \varepsilon) \vdash \Gamma_{2\partial} - \{\partial.1\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_2 \cup \Gamma_{2\partial} \cup \Delta_2(\delta, \partial) \vdash \Gamma_{2\delta} \\ K_2 \cup \Gamma_{2\delta} \cup \Delta_2(\partial, \delta) \vdash (\Gamma_{2\partial} - \{\partial.1\}) \cup \Delta_2(\delta, \partial). \end{cases}$$

Sia ora $\Gamma'_{2\delta}$ l'insieme di enunciati che si ottiene da $\Gamma_{2\delta}$ aggiungendogli:

$\delta.5$: $$\alpha > 0,\ x \neq o \rightarrow \exists z\, (o \subset z \subseteq x,\ \delta(z) < \alpha).$$

Ovviamente

$$K_2 \cup \Gamma_{2\delta} \vdash \delta.5 \longleftrightarrow \partial.1 * \Delta_2(\partial, \delta)$$

quindi

$$K_2 \cup \Gamma'_{2\delta} \cup \Delta_2(\partial, \delta) \vdash \Gamma_{2\partial} \cup \Delta_2(\delta, \partial).$$

Esiste dunque, per il *Teorema* 5 della *I Parte*, un ampliamento di $\Gamma_{2\partial}$ in $\Sigma(\mathcal{L}_{2\partial})$, K_2-equipollente a $\Gamma'_{2\delta}$ rispetto alla coppia $\Delta_2(\partial, \delta)$, $\Delta_2(\delta, \partial)$. Faremo vedere che un siffatto ampliamento è l'insieme $\Gamma'_{2\partial}$ che si ottiene aggiungendo a $\Gamma_{2\partial}$ l'enunciato

$\partial.6$: $$\alpha > 0,\ x \neq o \rightarrow \exists x_1\, [o \subset x_1 \subseteq x,\ \forall y\ \forall z\, (o \subset y \subseteq x_1, \\ o \subset z \subseteq x_1 \rightarrow \partial(y, z) < \alpha)].$$

Evidentemente:

$$K_2 \cup \Gamma_{2\partial} \vdash \partial.6 \longleftrightarrow \delta.5 * \Delta_2(\delta, \partial)$$

quindi

$$\begin{cases} K_2 \cup \Gamma'_{2\partial} \cup \Delta_2(\delta, \partial) \vdash \Gamma'_{2\delta} \\ K_2 \cup \Gamma'_{2\delta} \cup \Delta_2(\partial, \delta) \vdash \Gamma'_{2\partial} \cup \Delta_2(\delta, \partial). \end{cases}$$

Per provare la K_2-equipollenza di $\Gamma'_{2\partial}$ e $\Gamma'_{2\delta}$ non resta che provare la relazione

$$K_2 \cup \Gamma'_{2\partial} \cup \Delta_2(\delta, \partial) \vdash \Delta_2(\partial, \delta).$$

Dalle premesse (e anche solo da $K_2 \cup \Gamma'_{2\partial}$) segue

$$\partial.7: \quad \partial(x, y) < \alpha \rightarrow \exists x_1 \exists y_1 [o \subset x_1 \subseteq x,\ o \subset y_1 \subseteq y,$$
$$\forall x_2 \forall y_2 (o \subset x_2 \subseteq x_1,\ o \subset y_2 \subseteq y_1 \rightarrow \partial(x_2, y_2) < \alpha)]$$

Si ha infatti, per $\partial.5$, $\partial.6$, $\partial.3$:

$$\partial(x, y) < \beta,\ \gamma > 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow \exists y_1 [o \subset y_1 \subseteq y,\ \partial(x, y_1) < \beta,$$
$$\forall y_2 \forall y_3 (o \subset y_2 \subseteq y_1,\ o \subset y_3 \subseteq y_1 \rightarrow \partial(y_2, y_3) < \gamma)]$$
$$\rightarrow \exists x_1 \exists y_1 [o \subset x_1 \subseteq x,\ o \subset y_1 \subseteq y,\ \forall x_2 (o \subset x_2 \subseteq x_1 \rightarrow \partial(x_2, y_1) < \beta),$$
$$\forall y_2 \forall y_3 (o \subset y_2 \subseteq y_1,\ o \subset y_3 \subseteq y_1 \rightarrow \partial(y_2, y_3) < \gamma)]$$
$$\rightarrow \exists x_1 \exists y_1 [o \subset x_1 \subseteq x,\ o \subset y_1 \subseteq y,\ \forall x_2 \forall y_2 [o \subset x_2 \subseteq x_1,\ o \subset y_2 \subset y_1 \rightarrow$$
$$\rightarrow \partial(x_2, y_1) < \beta,\ \forall y_3 (o \subset y_3 \subseteq y_1 \rightarrow \partial(y_2, y_3) < \gamma)]]$$
$$\rightarrow \exists x_1 \exists y_1 [o \subset x_1 \subseteq x,\ o \subset y_1 \subseteq y,$$
$$\forall x_2 \forall y_2 [o \subset x_2 \subseteq x_1,\ o \subset y_2 \subseteq y_1 \rightarrow \partial(x_2, y_2) < \beta + \gamma]].$$

Di qui, poichè ovviamente $\partial(x,y) < \alpha \rightarrow \exists \beta \exists \gamma (\partial(x,y) < \beta,\ \gamma > 0,\ \beta + \gamma < \alpha)$, segue subito $\partial.7$.

Successivamente applicando $\partial.6$, $\partial.7$, $\Delta_2(\delta, \partial)$, si ha:

$$\partial(x, y) < \beta,\ 0 < \gamma < \beta \rightarrow$$
$$\rightarrow \exists x_1 \exists y_1 [o \subset x_1 \subseteq x,\ o \subset y_1 \subseteq y,$$
$$\forall x_2 \forall x_3 (o \subset x_2 \subseteq x_1,\ o \subset x_3 \subseteq x_1 \rightarrow \partial(x_2, x_3) < \gamma),$$
$$\forall y_2 \forall y_3 (o \subset y_2 \subseteq y_1,\ o \subset y_3 \subseteq y_1 \rightarrow \partial(y_2, y_3) < \gamma),$$
$$\forall x_2 \forall y_2 (o \subset x_2 \subseteq x_1,\ o \subset y_2 \subseteq y_1 \rightarrow \partial(x_2, y_2) < \beta)]$$

$$\rightarrow \exists\, x_1\, \exists\, y_1\, [o \subset x_1 \subseteq x,\ o \subset y_1 \subseteq y,\ \delta\,(x_1 \cup y_1) \leqq \beta]$$

dunque, poichè $\partial\,(x, y) < \alpha \rightarrow \exists\, \beta\, \exists\, \gamma\,(\partial\,(x, y) < \beta,\ 0 < \gamma < \beta < \alpha)$,

$$\text{(L)} \qquad \partial\,(x, y) < \alpha \rightarrow \exists\, x_1\, \exists\, y_1\, [o \subset x_1 \subseteq x,\ o \subset y_1 \subseteq y,\ \delta\,(x_1 \cup y_1) < \alpha].$$

L'implicazione inversa della (L) è d'altra parte immediata conseguenza di

$$o \subset x_1 \subseteq x,\ o \subset y_1 \subseteq y \rightarrow \delta\,(x_1 \cup y_1) \geqq \partial\,(x_1\,, y_1) \geqq \partial\,(x, y).$$

Da (L) e dalla sua inversa si ricava subito $\Delta_2\,(\partial, \delta)$.

Le considerazioni fatte contengono la dimostrazione del seguente teorema:

4.6. *$\Gamma'_{2\partial}$ e $\Gamma'_{2\delta}$ sono tra loro K_2-equipollenti rispetto alla coppia $\Delta_2\,(\delta, \partial)$, $\Delta_2\,(\partial, \delta)$. Essi sono anzi caratterizzabili univocamente, a meno di K_2-equivalenze, come i minimi ampliamenti di $\Gamma_{2\partial}$ e di $\Gamma_{2\delta}$, rispettiv. in $\Sigma\,(\mathcal{L}_{2\partial})$ e $\Sigma\,(\mathcal{L}_{2\delta})$, soddisfacenti a tale condizione.*

Con un procedimento del tutto simile a quello seguito per dedurre $\Delta_2\,(\partial, \delta)$ da $K_2 \cup \Gamma'_{2\partial} \cup \Delta_2\,(\delta, \partial)$, si può dedurre $\Delta_2\,(\partial, \varepsilon)$ da $K_2 \cup \Gamma'_{2\partial} \cup \Delta_2\,(\varepsilon, \partial)$. Esiste pertanto un ampliamento $\Gamma'_{2\varepsilon}$ di $\Gamma_{2\varepsilon}$ (in $\Sigma\,(\mathcal{L}_{2\varepsilon})$) K_2-equipollente a $\Gamma'_{2\partial}$ rispetto alla coppia $\Delta_2\,(\varepsilon, \partial)$, $\Delta_2\,(\partial, \varepsilon)$. Poichè d'altra parte esistono ovviamente pure degli ampliamenti Γ'_{2u}, Γ'_{2v}, $\Gamma'_{2\varrho}$ di Γ_{2u}, Γ_{2v}, $\Gamma_{2\varrho}$, K_2-equipollenti a $\Gamma'_{2\partial}$, la geometria metrica «senza punti» assiomatizzata da $\Gamma'_{2\partial}$ risulta assiomatizzabile mediante ciascuna delle sei nozioni metriche fondamentali considerate in questo paragrafo. Il teorema 4.6 permette anzi di dire che tale geometria è, in un senso esattamente precisabile, la più generale geometria metrica assiomatizzabile mediante ciascuna di quelle sei nozioni.

La geometria in questione non è peraltro (come si vedrà nel § 6) sostanzialmente più generale dell'ordinaria geometria metrica «dei punti». Si può pertanto pensare di generalizzarla, indebolendo i postulati propriamenti metrici, o anche generalizzando l'insieme base K_2, cosa questa che può a sua volta ottenersi sia omettendo qualcuna delle condizioni R.1-10, sia sostituendo alla teoria B_2 delle algebre complete di Boole una teoria meno restrittiva. Limitandoci per ora al primo tipo di generalizzazione, ci si trova di fronte all'inconveniente costituito dal carattere discriminatorio che ciascuna delle nozioni metriche fondamentali ha nei confronti delle possibili generalizzazioni. Così ad esempio, la geometria assiomatizzata da ciascuno degli insiemi Γ_{2u}, Γ_{2v}, $\Gamma_{2\partial}$, $\Gamma_{2\varrho}$ non può venir assiomatizzata usando le nozioni di *diametro* o di *distanza esterna*; mentre le geometrie assiomatizzate da Γ_{2s} o da $\Gamma_{2\delta}$ non possono a loro volta venir assiomatizzate usando una delle altre quattro nozioni.

Sembra tuttavia giusto a questo punto lasciarsi guidare dal rilievo che, tra le sei nozioni metriche fondamentali, la nozione di diametro è la più direttamente legata a quegli oggetti, come *regoli* o *scale*, che sono a fondamento di ogni concreta misurazione geometrica. Ogni oggetto di questo tipo si può in effetti identificare con una famiglia di solidi di diametro noto. La nozione di diametro è in un certo senso un'autentica *nozione primitiva* della geometria « senza punti », e non sarà perciò un puro arbitrio limitarsi a considerare le generalizzazioni della geometria « senzi punti » che scaturiscono dall'omissione di alcuni degli assiomi di $\Gamma'_{2\delta}$.

In tale operazione alcuni assiomi dovranno venir considerati come inamovibili, in quanto esprimenti proprietà caratteristiche della nozione di diametro; altri invece non godranno di tale privilegio. Credo che si possa trovare un accordo di massima nell'assegnare $\delta.2$ e $\delta.3$ alla prima categoria, e $\delta.1$, $\delta.4$, $\delta.5$ alla seconda. Per quanto concerne le generalizzazioni che si ottengono per questa via, ci limiteremo ad alcune brevi considerazioni. Osserviamo anzitutto che $\delta.1$ è conseguenza di $\delta.5$, e non può pertanto venir negato senza che venga negato anche $\delta.5$. L'omissione di $\delta.5$ elimina in sostanza la possibilità di definire per astrazione i punti necessari per la ricostruzione dell'ordinaria geometria metrica; quella simultanea di $\delta.1$ consente inoltre di considerare il caso di una geometria con *atomi estesi* di spazio.

Di un certo interesse critico sono pure le generalizzazioni che si ottengono lasciando cadere $\delta.4$. Ci limiteremo qui a considerare la geometria assiomatizzata dall'insieme $\check{\Gamma}_{2\delta} = \Gamma'_{2\delta} - \{\delta.4\}$.

Non è difficile verificare le relazioni:

$$K_2 \cup \check{\Gamma}_{2\delta} \cup \Delta_2(\partial, \delta) \vdash \Gamma'_{2\partial}$$

$$K_2 \cup \Gamma'_{2\partial} \cup \Delta_2(\delta, \partial) \vdash \check{\Gamma}_{2\delta} \cup \Delta_2(\partial, \delta)$$

$\Gamma'_{2\partial}$ è dunque K_2-rappresentabile in $\check{\Gamma}_{2\delta}$ mediante la coppia $\Delta_2(\partial, \delta)$, $\Delta_2(\delta, \partial)$. Non vi è invece K_2-equipollenza tra i due insiemi rispetto a tale coppia, poichè non è valida la relazione:

$$K_2 \cup \check{\Gamma}_{2\delta} \cup \Delta_2(\partial, \delta) \vdash \Delta_2(\delta, \partial).$$

Se, usando per un momento concetti *semantici*, chiamiamo *struttura metrica* un modello di $K_2 \cup \Gamma'_{2\partial}$ e *struttura di diametro* un modello di

$K_2 \cup \check{\Gamma}_{2\delta}$, il precedente risultato si esprime dicendo che le strutture metriche sono tutte e sole quelle indotte canonicamente, mediante $\Delta_2(\partial, \delta)$, da strutture di diametro, ma vi è generalmente più di una struttura di diametro che induce in questo modo una data struttura metrica. Una di tali strutture di diametro viene indotta canonicamente dalla data struttura metrica, mediante $\Delta_2(\delta, \partial)$. Per il teorema 4.6 essa è l'unica, tra le strutture di diametro inducenti la data struttura metrica, che soddisfa alla condizione δ.4. Si potrebbe dimostrare che essa è pure quella che assegna diametro minimo a ciascun elemento della struttura ([16]).

Se, riprendendo un osservazione già fatta, consideriamo che, per quanto concerne lo spazio reale, l'assegnazione di una struttura di diametro comporta in particolare la *taratura* di tutti gli strumenti di rilevazione metrica, possiamo interpretare il precedente risultato pure in chiave fenomenologica, dicendo che vi sono certi limiti di tolleranza nella taratura degli strumenti di rilevazione, entro i quali ogni variazione è priva di effetto sulla *metrizzazione* dello spazio.

5. Alcune delle relazioni tra insiemi di assiomi trovate nei paragrafi precedenti hanno un carattere più profondo di certe altre. Ciò appare chiaramente se si generalizza l'insieme K o K_2 a cui esse fanno riferimento.

Siano ad esempio H_0, H, H_2 gli insiemi di enunciati che si ottengono da K_0, K, K_2 lasciando cadere l'assioma R.6. Ripercorrendo le dimostrazioni del § 1, si può osservare che Γ_d e Γ_V sono H-equipollenti rispetto alla coppia $\Delta(V, d)$, $\Delta(d, V)$, mentre Γ_d e Γ_U non sono H-equipollenti rispetto alla coppia $\Delta(U, d)$, $\Delta(d, U)$. Tuttavia $\Delta(d, U)$ è ancora reciproca di $\Delta(U, d)$ rispetto a $H \cup \Gamma_d$. Esiste pertanto un insieme di enunciati di $\mathcal{L}_U$ H-equipollente a Γ_d rispetto alla coppia $\Delta(U, d)$, $\Delta(d, U)$. Tale insieme non potrà ovviamente coincidere, e neppure essere H-equivalente, con Γ_U; sarà invece certamente K-equivalente a Γ_U.

D'altra parte, se si considerano le definizioni

$$\check{\Delta}(U, d): \; U(p, \alpha) = \{q \mid d(p, q) \ngeq \alpha\}$$

$$\check{\Delta}(d, U): \; d(p, q) = sup\,\{\alpha \mid q \notin U(p, \alpha)\}$$

([16]) Infatti, detto $\overline{\delta}$ un simbolo funzionale di classe $(0_0, 0_2)$, $\mathcal{L}_{\overline{\delta}}$ il linguaggio che si ottiene da $\mathcal{L}_\delta$, sostituendovi δ con $\overline{\delta}$, $\Delta_2(\overline{\delta}, \partial)$ la definizione di $\mathcal{L}_{\overline{\delta}}$ in $\mathcal{L}_\partial$ che si ottiene da $\Delta_2(\delta, \partial)$ sostituendovi δ con $\overline{\delta}$, si ha:

$$K_2 \cup \check{\Gamma}_{2\delta} \cup \Delta_2(\partial, \delta) \cup \Delta_2(\overline{\delta}, \partial) \vdash \forall x \; [\overline{\delta}(x) \leq \delta(x)].$$

Questo risultato è sostanzialmente dimostrato in [4].

l'insieme di enunciati $\check{\Gamma}_d = \{d.1, d.2, \check{d}.3\}$, ove

$\check{d}.3$ $$d(p, q) \ngeqq \alpha, \ d(q, r) \ngeqq \beta \rightarrow d(p, r) \ngeqq \alpha + \beta$$

risulta H-equipollente a Γ_U rispetto alla coppia $\check{\Delta}(U, d)$, $\check{\Delta}(d, U)$.

Infatti ammesso $H \cup \check{\Gamma} \cup \check{\Delta}(U, d)$, si deduce immediatamente·

(M) $$q \in U(p, \alpha) <\!\!-\!\!-\!\!> d(p, q) \ngeqq \alpha$$

(M′) $$q \notin U(p, \alpha) <\!\!-\!\!-\!\!> d(p, q) \geqq \alpha$$

e perciò pure $\check{\Delta}(d, U)$, e U.1-U.3. U.4 può invece essere dedotto così:

$$U(p, sup\ \alpha^{(1)}) = \{q \mid d(p, q) \ngeqq sup\ \alpha^{(1)}\} = \{q \mid \exists\, \alpha\, (\alpha \in \alpha^{(1)}, d(p, q) \ngeqq \alpha) =$$

$$= \{q \mid \exists\, \alpha\, (\alpha \in \alpha^{(1)},\ q \in U(p, \alpha)) = \bigcup \{U(p, \alpha) \mid_{\alpha} \alpha \in \alpha^{(1)}\}.$$

Ammesso viceversa $H \cup \Gamma_U \cup \check{\Delta}(d, U)$, si ha, per U.4 e $\check{\Delta}(d, U)$, $U(p, d(p, q)) = \bigcup \{U(p, \alpha) \mid_{\alpha} q \notin U(p, \alpha)\}$, dunque $q \notin U(p, d(p, q))$ e di qui (M′) e (M). Servendosi di queste equivalenze si ottiene facilmente $\check{\Gamma}_d \cup \check{\Delta}(U, d)$. Con ciò la H-equipollenza di $\check{\Gamma}_d$ e Γ_U è dimostrata.

Passando agli insiemi di assiomi non facenti esplicito riferimento ai punti, considerati nei §§ 2 e 3, si rileva che nessuna delle relazioni di K-equipollenza di tali insiemi con Γ_d si conserva, e cioè si traduce in una corrispondente relazione di H-equipollenza. Tuttavia $\Delta(d, u)$ continua ad essere una definizione reciproca di $\Delta(u, d)$ anche rispetto a $H \cup \Gamma_{\check{d}}$, e la stessa cosa vale per le coppie $\Delta(v, d)$ e $\Delta(d, v)$, $\Delta(\partial, d)$ e $\Delta(d, \partial)$, ecc.. Ciò significa che si possono modificare tutti gli insiemi di enunciati Γ_u, Γ_v, Γ_∂, ecc. in altri H-equipollenti a Γ_d rispetto alle suddette coppie di definizioni. Del resto almeno una delle mutue relazioni di K-equipollenza tra gli insiemi Γ_u, Γ_v, Γ_∂, ecc. si conserva: Come si constata ripercorrendo la dimostrazione del teorema 2.5, Γ_v e Γ_ϱ sono H-equipollenti rispetto alla coppia $\Delta(\varrho, v)$, $\Delta(v, \varrho)$. Questa conclusione si estende anche ai corrispondenti insiemi di assiomi della geometria «senza punti»: Γ_{2v} e $\Gamma_{2\varrho}$ sono H_2 equipollenti rispetto alla coppia di definizioni $\Delta_2(\varrho, v)$, $\Delta_2(v, \varrho)$.

Tra le proprietà invarianti per il passaggio da K ad H, vi è anche la seguente. La definizione $\Delta(\partial, u)$ ammette ancora una definizione reciproca rispetto ad $H \cup \Gamma_u$, precisamente:

$$\Delta(u, \partial): \qquad u(X, \alpha) = \bigcup \{Y \mid \forall\, Z\, (\varnothing \subset Z \subseteq Y \rightarrow \partial(X, Z) \ngeqq \alpha)\}$$

Per convincersene, basta ripercorrere la prima parte della dimostrazione del teorema 3.2. Anche in questo caso il risultato si estende agli insiemi di assiomi della geometria « senza punti ».

6. La geometria metrica « senza punti », assiomatizzata da $\Gamma'_{2\partial}$ o dagli altri insiemi di assiomi ad esso K_2-equipollenti, può considerarsi, in un certo senso, come la versione *astratta* dell'ordinaria geometria metrica « dei punti ». In questo paragrafo cercheremo di precisare esattamente la relazione esistente tra Γ_d e $\Gamma'_{2\partial}$.

Consideriamo l'insieme di enunciati:

$$(1) \qquad \exists x (u = x) <\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!> \exists X (u = X)$$

$$(2) \qquad y = inf\, x^{(1)} <\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!> \exists X^{(1)} \exists Y (x^{(1)} = X^{(1)}, \quad y = Y,\ Y = \bigcap X^{(1)})$$

$$(3) \qquad y = sup\, x^{(1)} <\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!> \exists X^{(1)} \exists Y (x^{(1)} = X^{(1)}, \quad y = Y,\ Y = \bigcup X^{(1)})$$

$$(4) \qquad o = \emptyset$$

$$(5) \qquad 1 = \{p \mid p = p\}$$

$$(6) \qquad \partial (x, y) = inf_{p,q} \{d (p, q) \mid \exists X \exists Y (x = X, y = Y, p \in X, q \in Y)\}.$$

Tale insieme è una definizione di $\mathcal{L}_{2\partial}$ in $\mathcal{L}_d$ ([17]), che indicheremo con $\Delta(\mathcal{L}_{2\partial}, \mathcal{L}_d)$. Ovviamente $B \cup Ins_2 \cup \Gamma'_{2\partial}$ è K_0-interpretabile in $Ins_1 \cup \Gamma_d$ mediante $\Delta(\mathcal{L}_{2\partial}, \mathcal{L}_d)$. Per il *Teorema* 1' della *I Parte* deve esistere un ampliamento di $B \cup Ins_2 \cup \Gamma'_{2\partial}$ in $\Sigma_0(\mathcal{L}_{2\partial})$ K_0-rappresentabile debolmente in *s. l.* in $Ins_1 \cup \Gamma_d$ mediante $\Delta(\mathcal{L}_{2\partial}, \mathcal{L}_d)$. Si verifica facilmente che un ampliamento soddisfacente e tale requisito è $B' \cup Ins_2 \cup \Gamma'_{2\partial}$, ove B' è un insieme di assiomi per il concetto di algebra di Boole completa e *atomica*. Questo ampliamento è anzi K_0-equipollente in *s. l.* a $Ins_1 \cup \Gamma_d$ rispetto alla coppia formata da $\Delta(\mathcal{L}_{2\partial}, \mathcal{L}_d)$ e dalla definizione semplice $\Delta(\mathcal{L}_d, \mathcal{L}_{2\partial})$ costituita dai due seguenti enunciati:

$$\exists p (u = p) <\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!> \exists x (u = x, At(x))$$

$$d(p, q) = \alpha <\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!> \exists x \exists y (p = x, q = y, \partial (x, y) = \alpha)$$

([17]) Pur non essendo una definizione *semplice*, tale insieme implica infatti enunciati come:

$$x \subseteq y <\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!> \exists X \exists Y (x = X, y = Y, X \subseteq Y), \text{ o}$$

$$y^{(1)} = \bigcap x^{(2)} <\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!> \exists X^{(2)} \exists Y^{(1)} (x^{(2)} = X^{(2)}, y^{(1)} = Y^{(1)}, Y^{(1)} = \bigcap X^{(2)})$$

Posto infatti $C(u_1, u_2) = \forall u (u \in u_2 \rightarrow u = u_1)$, si ha

$$K_0 \cup Ins_1 \cup \Gamma_d \cup \Delta(\mathcal{L}_{2\eth}, \mathcal{L}_d) \cup \Delta(\overline{\mathcal{L}}_d, \mathcal{L}_{2\eth}) \vdash Isom(C; \mathcal{L}_d, \overline{\mathcal{L}}_d). \text{ (18)}$$

Inoltre $\Delta(\mathcal{L}_{2\eth}, \mathcal{L}_d)$, $\Delta(\mathcal{L}_d, \mathcal{L}_{2\eth})$ sono definizioni normali di altezza 1 e 0, $C(u_1, u_2)$ è una formula di trasformazione normale di altezza $1 = 1 + 0$ e infine $\Delta(\mathcal{L}_d, \mathcal{L}_{2\eth})$ è ammissibile per $B' \cup Ins_2 \cup \Gamma'_{2\eth}$. Si può pertanto applicare (banalmente) il *Teorema 3'* della *I Parte*, per concludere che $Ins_1 \cap \Gamma_d$ e $B' \cup Ins_2 \cup \Gamma'_{2\eth}$ sono K_0-equipollenti in *s. l.* rispetto alla coppia $\Delta(\mathcal{L}_{2\eth}, \mathcal{L}_d)$, $\Delta(\mathcal{L}_d, \mathcal{L}_{2\eth})$.

Il risultato appena ottenuto non traduce in modo soddisfacente la relazione esistente tra Γ_d e $\Gamma'_{2\eth}$, in quanto l'ipotesi di *atomicità* fatta sull'algebra di Boole, sostegno della geometria « senza punti », distrugge la principale caratteristica di quest'ultima. Ciò è messo in evidenza dal fatto che $\Gamma'_{2\eth}$ è B'-equivalente a $\Gamma_{2\eth}$, cosicchè i risultati finora ottenuti in questo paragrafo continuano a valere se si sostituisce $\Gamma'_{2\eth}$ con $\Gamma_{2\eth}$. Vi è tuttavia un altro modo di affrontare il nostro problema che risulta assai più soddisfacente. Esso in sostanza consiste nell'aggirare l'ostacolo, costituito dal fatto che i sottoinsiemi di un insieme sono, nella loro totalità, *troppi* per rappresentare gli elementi di una data, generica, algebra completa di Boole, ammettendo di poter prendere soltanto una parte di quei sottoinsiemi.

Sia R un simbolo relazionale di classe (1_1), Γ_R il seguente insieme di assiomi per un'*algebra completa di insiemi*:

R.1 : $\exists X (X = \emptyset, RX)$

R.2 : $RX, RY \rightarrow R(X \cap Y), R(X \cup Y), R(\complement X)$

R.3 : $\forall X (X \in X^{(1)} \rightarrow RX) \rightarrow$

$$\rightarrow R[\bigcup \{Z \mid RZ, Z \subseteq \bigcap X^{(1)}\}], R[\bigcap \{Z \mid RZ, \bigcup X^{(1)} \subseteq Z\}].$$

Per un noto *teorema di rappresentazione* per le algebre di Boole, dovuto a M. H. Stone, si ha che ogni modello di B, o più esattamente di $B \cup Ins_2$, si può identificare con un opportuno modello di $\Gamma_R \cup Ins_1$ *di cui si trascurino gli elementi di tipo* 0. In termini più precisi: $B \cup Ins_2$ è $(\emptyset-)$rappresen-

(18) $\overline{\mathcal{L}}_d$ è un linguaggio *isomorfo* a $\mathcal{L}_d$ e tale che $\mathcal{L}_d \cap \overline{\mathcal{L}}_d = \mathcal{L}_{2\eth} \cap \overline{\mathcal{L}}_d = \mathcal{L}_0$. Si veda in proposito il § 3 della *I Parte*.

tabile debolmente in *s. l.* in $\Gamma_R \cup Ins_1$ mediante la definizione semplice $\Delta(l_2, l_1)$ di $l_2 = L(B \cup Ins_2)$ in $l_1 = L(\Gamma_R \cup Ins_1)$ costituita da

$$(1') \quad \exists x\,(u = x) <\!\!\longrightarrow \exists X(RX,\, u = X)$$

$$(2') \quad y = inf\, x^{(1)} <\!\!\longrightarrow \exists X^{(1)} \exists Y(x^{(1)} = X^{(1)},\, y = Y, Y = \bigcup \{Z \mid RZ,\, Z \subseteq \bigcap X^{(1)}\})$$

$$(3') \quad y = sup\, x^{(1)} <\!\!\longrightarrow \exists X^{(1)} \exists Y(x^{(1)} = X^{(1)},\, y = Y, Y = \bigcap \{Z \mid RZ,\, \bigcup X^{(1)} \subseteq Z\})$$

e inoltre da (4) e (5).

Nella dimostrazione del teorema di Stone, si fa uso del *lemma di Zorn* per provare che ogni elemento non nullo di un'algebra di Boole fa parte di almeno un *filtro massimale.* L'uso del lemma di Zorn avviene a livello metateorico. Trasferendo tale ipotesi a livello teorico, il teorema di rappresentazione per le algebre complete di Boole può venir così riformulato: $B \cup \mathrm{Ins}_2^z$ è rappresentabile in *s. l.* in $\Gamma_R \cup \mathrm{Ins}_1^z$ mediante la coppia di definizioni costituita da $\Delta(l_2, l_1)$ e da

$$\Delta(l_1, l_2): \begin{cases} \exists p\,(u = p) <\!\!\longrightarrow \exists x^{(1)}\,(u = x^{(1)},\, ultrf\, x^{(1)}) \\ RX <\!\!\longrightarrow \exists x^{(2)}\,(X = x^{(2)},\, \exists x^{(0)}\; Ultrf\,(x^{(2)}, x^{(0)})) \end{cases}$$

ove $ultrf\, x^{(1)}$ (che si legge: $x^{(1)}$ *è un ultrafiltro*) sta per

$$\forall y\, \forall z\, [(y \in x^{(1)} \longrightarrow y \cup z \in x^{(1)}) \wedge (y \in x^{(1)},\, z \in x^{(1)} \longrightarrow y \cap z \in x^{(1)})] \wedge$$

$$\wedge\, \forall x\,(x \in x^{(1)} \vee \complement\, x \in x^{(1)}) \wedge o \notin x^{(1)}$$

e $Ultrf\,(x^{(2)}, x^{(0)})$ (che si legge : $x^{(2)}$ *è l'insieme degli ultrafiltri contenenti* $x^{(0)}$) sta per

$$\forall x^{(1)}\,(x^{(1)} \in x^{(2)} \longrightarrow ultrf\, x^{(1)},\, x^{(0)} \in x^{(1)}).$$

Si può infatti dimostrare che, posto $C'(u_1, u_2) = \forall u\,(u \in u_2 \longrightarrow u_1 \in u)$, si ha :

$$\Gamma_R \cup Ins_1^z \cup \Delta(l_2, l_1) \vdash B \cup Ins_2^z$$

$$B \cup Ins_2^z \cup \Delta(l_1, l_2) \cup \Delta(\overline{l}_2, l_1) \vdash \Gamma_R \cup Ins_1^z \cup Isom\,(C';\, l_2, \overline{l}_2).$$

Inoltre $\Delta(l_2, l_1)$ e $\Delta(l_1, l_2)$ soddisfano alle condizioni di ammissibilità per $\Gamma_R \cup Ins_1^z$ e $B \cup Ins_2^z$ e sono entrambe definizioni normali di altezza 1, mentre $C'(u_1, u_1)$ è una formula di trasformazione normale di altezza 2. L'asserto risulta pertanto una conseguenza del *Teorema* 2′ della *I Parte.*

Applicando il *Teorema* 4′ della *I Parte* si può arguire l'esistenza di un ampliamento di $\Gamma_R \cup Ins_1^z$ in $\Sigma_0(l_1)$ equipollente in *s.l.* a $B \cup Ins_2^z$ rispetto alla coppia $\Delta(l_2, l_1)$, $\Delta(l_1, l_2)$. In effetti un ampliamento del genere è $\Gamma_R' \cup Ins_1^z$, ove Γ_R' è la riunione di Γ_R e dei due assiomi:

R.4 : $p \neq q \rightarrow \exists X(RX, p \in X, q \notin X)$

R.5 : $[\forall X(X \in X^{(1)} \rightarrow RX, X \neq \emptyset),$

$$\forall Y \forall Z(Y \in X^{(1)}, Z \in X^{(1)} \rightarrow Y \cap Z \in X^{(1)})] \rightarrow \bigcap X^{(1)} \neq \emptyset.$$

Ritornando ora alla geometria « senza punti », consideriamo l'enunciato:

γ_{dR} : $\alpha > 0 \rightarrow \forall p \exists X[RX, p \in X, \forall q(q \in X \rightarrow d(p, q) < \alpha)]$

e poniamo

$$\Gamma_{dR} = \Gamma_d \cup \Gamma_R \cup \{\gamma_{dR}\}, \ \Gamma_{dR}' = \Gamma_d \cup \Gamma_R' \cup \{\gamma_{dR}\}.$$

Indichiamo poi con $\mathcal{L}_{dR}$ il minimo sottolinguaggio contenente $\mathcal{L}_d$ e R, con $\Delta(\mathcal{L}_{2\partial}, \mathcal{L}_{dR})$ l'insieme $\{(1'), (2'), (3'), (4), (5), (6)\}$ e con $\Delta(\mathcal{L}_{dR}, \mathcal{L}_{2\partial})$ l'insieme:

$$\begin{cases} \exists p(u = p) \longleftrightarrow \exists x^{(1)}(u = x^{(1)}, \ ultrf^* \, x^{(1)}) \\ RX \longleftrightarrow \exists x^{(2)}(X = x^{(2)}, \exists x^{(0)} \ Ultrf^*(x^{(2)}, x^{(0)})) \\ d(p, q) = sup \{\partial(x, y) \mid_{x,y} \exists x^{(1)} \exists y^{(1)}(p = x^{(1)}, q = y^{(1)}, x \in x^{(1)}, y \in y^{(1)}\} \end{cases}$$

ove $Ultrf^* \, x^{(1)}$ sta per

$ultrf \, x^{(1)}, \forall \alpha[\alpha > 0 \rightarrow \exists x[x \in x^{(1)}, \forall y \forall z(o \subset y \subseteq x, o \subset z \subseteq x \rightarrow \partial(y, z) < \alpha)]]$

e $Ultrf^*(x^{(2)}, x^{(0)})$ sta per

$$\forall x^{(1)}(x^{(1)} \in x^{(2)} \rightarrow ultrf^* \, x^{(1)}, x^{(0)} \in x^{(1)}).$$

Sulla base dei precedenti risultati, non è difficile ottenere i seguenti altri concernenti la geometria « senza punti ». $B \cup Ins_2 \cup \Gamma_{2\partial}'$ è K_0-rappresentabile debolmente in *s.l.* in $Ins_1 \cup \Gamma_{dR}$ mediante la definizione $\Delta(\mathcal{L}_{2\partial}, \mathcal{L}_{dR})$. $B \cup Ins_2^z \cup \Gamma_{2\partial}'$ è d'altra parte K_0-rappresentabile in *s.l.* in $Ins_1^z \cup \Gamma_{dR}$ mediante la coppia di definizioni $\Delta(\mathcal{L}_{2\partial}, \mathcal{L}_{dR})$, $\Delta(\mathcal{L}_{dR}, \mathcal{L}_{2\partial})$ ed è K_0-equipollente in *s.l.* a $Ins_1^z \cup \Gamma_{dR}'$ rispetto alla stessa coppia.

TESTI CITATI.

[1] CSACSAR, A., *Foundations of General Topology,* Pergamon Press, Oxford, 1963.

[2] MENGER, K., *Topology without points,* « The Rice Institut Pamphlet », vol. XXVII, fasc. 1, 1940, pp. 80-107.

[3] NÖBELING, G., *Grundlagen der Analytischen Topologie,* Springer Verlag, 1954.

[4] PREVIALE F., *Su una caratterizzazione reticolare del concetto di spazio metrico* Atti d. Accad. d. Sc. di Torino, Cl. Sc. Fis., vol. 100, 1966, pp. 766-779.

[5] PREVIALE, F., *Rappresentabilità ed equipollenza di teorie assiomatiche* (I), Annali d. Scuola Normale super. di Pisa, Cl. Sc., Vol. XXIII, fasc. IV, (1969), pp. 635-655,

[6] SIKORSKI, R., *Boolean Algebras,* Springer Verlag, 2ª ediz., 1964.

[7] SMIRNOV Ju. M., *On proximity spaces,* 1952, traduz. ingl. in « Amer. Math. Soc. Transl. », Serie 2, vol. 38, 1964.

[8] ŠVARC, A. S., *Spazi di prossimità e reticoli* (in russo), « Ivanov Gos. Pedag. Inst. Učeny Zapiski Fiz. Mat. Nauki », 10, 1956, pp. 55-60.

[9] WHITEHEAD, A. N., *An enquiry concerning the principles of natural knowledge,* Cambridge, 1919.