

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

VALENTIN POÉNARU

## **Quelques remarques sur les diagrammes de Heegard**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série, tome 24, n° 1 (1970), p. 37-52*

<[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1970\\_3\\_24\\_1\\_37\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1970_3_24_1_37_0)>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# QUELQUES REMARQUES SUR LES DIAGRAMMES DE HEEGARD

par VALENTIN POÉNARU (\*)

## 1. Introduction.

Le présent travail est un supplément à la Conférence (mise à jour) de l'Auteur, au Colloque de Géométrie de Rome, mai 1968. Le texte (mis à jour) de cette conférence, va paraître sous le titre « Sur les variétés différentiables de basses dimensions », dans le volume dédié au travaux du Colloque (voire [5]). On y trouvera un THEOREME DE STRUCTURE (sur les sphères d'homotopie de dimension 3).

On va donner ici un autre énoncé de ce théorème (voir le paragraphe 3 du présent travail).

On y déduira une certaine propriété relative aux diagrammes de Heegard des sphères d'homotopie, qu'on va indiquer ici brièvement (voir les paragraphes 2 et 3 pour plus de détails).

Je rappelle qu'un diagramme de Heegard de  $M_3$  est une paire  $(M_3, T_3^p)$  où  $T_3^p$  et  $M_3 - \text{int } T_3^p$  sont difféomorphes à  $(S_1 \times D_2) \# \dots \# (S_1 \times D_2)$  ( $p$ -fois). On prouve sans peine, par des procédés « classiques » que  $(M_3, T_3^p)$  est un diagramme de Heegard d'une sphères d'homotopie  $M_3$ , si et seulement si elle a la propriété suivante :

On considère un « bouquet » (« wedge ») de  $p$  cercles (c'est à dire  $p$  cercles avec exactement un point en commun) :

$$\Sigma^{p_i} = S_1^1 \vee \dots \vee S_1^p \subset \text{int } T_3^p$$

« différentiablement » plongé tel que  $T_3^p$  soit un voisinage régulier (dans

---

Pervenuto alla Redazione il 27 Giugno 1969.

(\*) Ce travail a été effectué pendant que l'auteur était invité par le Consiglio Nazionale delle Ricerche à la Scuola Normale Superiore (Pisa).

le sens de J. H. C. Whitehead) de  $T_3^p$ . Alors, chacun des cercles  $S_1^i$ , est homotope (dans  $T_3^p$ ) à un lacet  $l^i: S_1 \longrightarrow \partial T_3^p$  qui est homotope à 0 dans  $M_3 - \text{int } T_3^p$ .

On va donner une version *isotopique* (donc plus forte) de ce fait *homotopique*. On montre qu'il existe, pour une sphère d'homotopie  $M_3$ , un diagramme de Heegard:  $(M_3, T_3^p)$  et un  $\Sigma^p \subset \text{int } T_3^p$ , tel que  $T_3^p$  soit voisinage régulier de  $\Sigma^p$ , avec la propriété; chaque  $S_1^i \subset \Sigma^p = S_1^1 \vee \dots \vee S_1^p$  est *isotope* (dans  $T_3^p$ ) à un *plongement*  $l^i: S_1 \rightarrow \partial T_3^p$  qui est homotope à 0 (donc *isotope* à 0, d'après le Lemme de Dehn [3]) dans  $M_3 - \text{int } T_3^p$ .

On a ajouté une remarque finale sur les « diagramme de Heegard en grandes dimensions », qui gardent les mêmes propriétés algébriques (c'est-à-dire un « homomorphisme de Stallings », comme au paragraphe 2, ci-dessus) que les diagrammes de Heegard en dimension 3, et leurs applications (possibles) en « basses » dimensions.

## 2. Rappels sur les diagrammes de Heegard; résultats homotopiques.

Soit  $M_3$  une variété différentiable de dimension 3, connexe et fermée (c'est-à-dire compacte et sans bord).

DÉFINITION: *Un diagramme de Heegard (de longueur  $p$ ) de  $M_3$  est par définition, une paire  $(M_3, T_3)$  où  $T_3$  est une sousvariété différentiable, connexe, compacte, à bord, de dimension 3, de  $M_3$ , telle qu'on ait les difféomorphismes suivants:*

$$T_3 = p \# (S_1 \times D_2)$$

$$M_3 - \text{int } T_3 = p \# (S_1 \times D_2).$$

(\* désigne de « somme connexe »).

On rappelle le théorème classique :

THÉORÈME 1: « *Toute variété de dimension 3, connexe fermée et orientable admet un diagramme de Heegard* »

DÉMONSTRATION: (différentiable). Soit  $M_3$  la variété respective. Il existe sur  $M_3$  une fonction de Morse  $f$ . On peut toujours supposer que  $f$  a: 1 Point critique d'indice 0 (le minimum de  $f$ ),  $p$  points critiques d'indice 1,  $q$  points critiques d'indice 2 et 1 point critique d'indice 3 (le maximum de  $f$ ). On peut supposer aussi que si  $x_1, x_2 \in M_3$  sont deux points critiques, d'indi-

ces  $\lambda(x_1), \lambda(x_2)$ , alors :

$$(f(x_2) - f(x_1))(\lambda(x_2) - \lambda(x_1)) \geq 0$$

(i. e. la fonction  $f$  est « nice »). Ceci nous permet de considérer un niveau non singulier ( $f = c$ ) qui sépare les points critiques d'indices 0 et 1 de ceux d'indices 2 et 3. Les variétés ( $f \leq c$ ) et ( $f \geq c$ ) sont des variétés orientables obtenues en ajoutant à  $D_3, p$  (respectivement  $q$ ) anses d'indice 1. On a donc des difféomorphismes.

$$(f \leq c) = p \# (S_1 \times D_2)$$

$$(f \geq c) = q \# (S_1 \times D_2).$$

D'autre part, vu que  $\partial(f \leq c) = \partial(f \geq c) = (f = c)$  il résulte que  $p = q$ . Donc  $(M_3, (f \leq c))$  est un diagramme de Heegard de longueur  $p$  de  $M_3$ .

DÉFINITION : Soit  $G_p = \pi_1(\partial(p \# (S_1 \times D_2)))$  et  $F_p$  le groupe libre à  $p$  générateurs. On considère les inclusions naturelles :

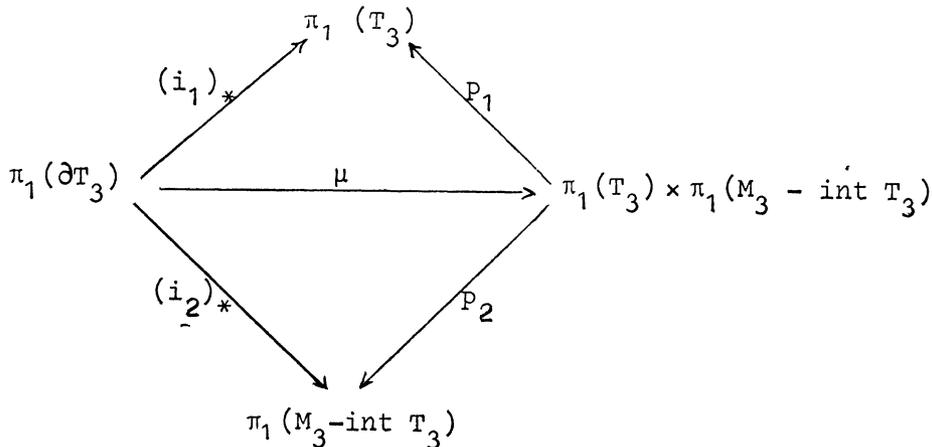
$$i_1 : \partial T_3 \longrightarrow T_3$$

$$i_2 : \partial T_3 \longrightarrow M_3 - \text{int } T_3.$$

Par définition, l'homomorphisme de Stallings associé au diagramme de Heegard de longueur  $p : (M_3, T_3)$  est l'unique homomorphisme

$$\mu : \pi_2(\partial T_3) \longrightarrow \pi_1(T_3) \times \pi_1(M_3 - \text{int } T_3)$$

( $\times$  désigne le « produit direct ») qui rend commutatif le diagramme suivant:



$\mu$  est donc un homomorphisme :

$$G_p \xrightarrow{\mu} F_p \times F_p.$$

LEMME 1 : «  $\mu$  est surjectif si et seulement si  $M_3$  est simplement connexe ». (voir aussi [6]).

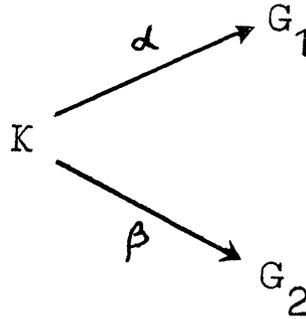
DÉMONSTRATION : Remarquons d'abord que sans aucune hypothèse supplémentaire sur  $M_3$ , les flèches  $(i_1)_*$  et  $(i_2)_*$  sont de toute façon surjectives, puisque la suite suivante est exacte :

$$\pi_1(\partial(p \#(S_1 \times D_2))) \xrightarrow{i_*} \pi_1(p \#(S_1 \times D_2)) \longrightarrow 0$$

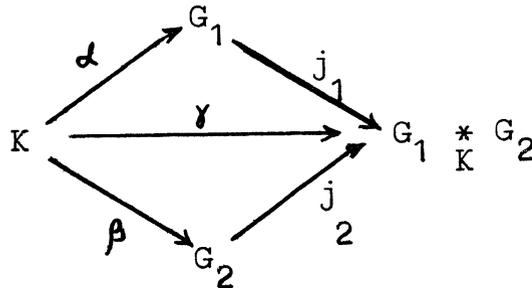
(où  $i : \partial(p \#(S_1 \times D_2)) \subset p \#(S_1 \times D_2)$  est l'inclusion naturelle).

On rappelle la notion de « somme amalgamée » (qui est le dual du « produit cartésien fibré »).

On part de 3 groupes  $G_1$ ,  $G_2$  et  $K$  et deux homomorphismes  $\alpha$  et  $\beta$  :

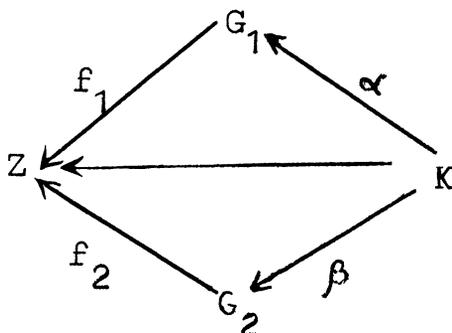


La « somme amalgamée de  $G_1$  et  $G_2$ , suivant  $(K, \alpha, \beta)$  » est un groupe  $G_1 *_K G_2$  donné avec un diagramme commutatif d'homomorphismes :



représentant la solution du « problème universel » suivant :

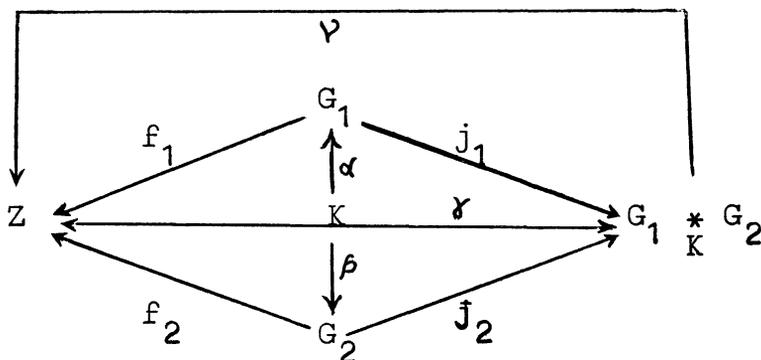
Chaque fois qu'un diagramme commutatif (dans la catégorie des groupes) est donné sous la forme suivante



il existe un homomorphisme unique :

$$G_1 \underset{K}{*} G_2 \xrightarrow{\gamma} Z$$

qui rend commutatif le diagramme suivant :



On montre que  $G_1 \underset{K}{*} G_2$ ,  $j_1$ ,  $j_2$ ,  $\gamma$  existent et sont uniques à isomorphisme pres.

En particulier, si  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $K$  sont à nombre fini de générateurs :  $(x_1, \dots, x_n)$  (pour  $G_1$ ),  $(y_1, \dots, y_m)$  (pour  $G_2$ ) et  $(z_1, \dots, z_q)$  (pour  $K$ ) et  $G_1(G_2)$  sont en plus de « présentation finie » (donc peuvent être définis pour un nombre fini de relation :  $R_1, \dots, R_a$  (en  $x$ , pour  $G_1$ ) et  $Q_1, \dots, Q_b$  (en  $y$  pour  $G_2$ ), alors  $G_1 \underset{K}{*} G_2$  admet la présentation finie suivante : Les générateurs sont  $j_1(x_1) \dots j_1(x_n)$ ,  $j_2(y_1) \dots j_2(y_m)$  et ses relations  $R_1(j_1(x)), \dots, R_a(j_1(x))$ ,  $Q_1(j_2(y)), \dots, Q_b(j_2(y))$ , et en plus les relations :  $j_1(\alpha(z_1)) = j_2(\beta(z_1))$ ,  $\dots, j_1(\alpha(z_q)) = j_2(\beta(z_q))$ .

Ceci vaut aussi si  $n, m, q, a$  ou  $b$  sont  $\infty$ .

Donc  $G_1 \underset{K}{*} G_2$  est engendré par Image  $j_1 \cup$  Image  $j_2$ .

En particulier, si  $K$  est réduit à l'élément unité 1 :

$$G_1 \underset{1}{*} G_2 = G_1 * G_2$$

est le « produit libre » habituel.

Si on revient à notre diagramme de Heegard, le théorème de Van Kampen nous dit qu'il existe un isomorphisme :

$$\pi_1(M_3) = \pi_1(T_3) \underset{\pi_1(\partial T_3)}{*} \pi_1(M_3 - \text{int } T_3).$$

tel que dans le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 & \pi_1(T_3) & \\
 (i_1)_* \nearrow & & \searrow j_1 \\
 \pi_1(\partial T_3) & \xrightarrow{\gamma} & \pi_1(T_3) \underset{\pi_1(\partial T_3)}{*} \pi_1(M_3 - \text{int } T_3) \\
 (i_2)_* \searrow & & \nearrow j_2 \\
 & \pi_1(M_3 - \text{int } T_3) &
 \end{array}$$

les homomorphismes  $j_1, j_2, \gamma$  sont les homomorphismes de groupes fondamentaux, induits par les inclusions :  $T_3 \subset M_3, M_3 - \text{int } T_3 \subset M_3, \partial T_3 \subset M_3$ .

La remarque faite au début de la démonstration nous dit que la suite suivante est exacte :

$$\pi_1(\partial T_3) \xrightarrow{\gamma} \pi_1(M_3) \longrightarrow 0.$$

Maintenant, si l'homomorphisme de Stallings :

$$\pi_1(\partial T_3) \xrightarrow{\mu} \pi_1(T_3) \times \pi_1(M_3 - \text{int } T_3)$$

est surjectif, cela veut dire que pour chaque élément

$$\eta \in \pi_1(T_3) \quad (\eta \in \pi_1(M_3 - \text{int } T_3)) \quad \text{il existe un } \xi \in \pi_1(\partial T_3)$$

tel que :

$$(i_1)_*(\xi) = \eta, \quad (i_2)_*(\xi) = 1 \in \pi_1(M_3 - \text{int } T_3)$$

(ou :  $(i_1)_*(\xi) = 1 \in \pi_1(T_3), (i_2)_*(\xi) = \eta$ ).

Ceci implique que  $\gamma$  est nul, donc  $\pi_1(M_3) = 1$ .

Réciproquement, supposons que  $\pi_1(M_3) = 1$ .

On va montrer que  $\mu$  est surjectif.

Il suffit de montrer que pour chaque  $\eta \in \pi_1(T_3)$  il existe un  $\xi \in \pi_1(\partial T_3)$  tel que :

$$(i_1)_*(\xi) = \eta, \quad (i_2)_*(\xi) = 1.$$

On peut supposer que  $\eta$  est représenté par un plongement différentiable  $g = S_1 \longrightarrow \text{int } T_3$ .

Puisque  $\pi_1(M_3) = 1$  il existe une application (différentiable)  $G: D_2 \longrightarrow M_3$  telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} S_1 & \subset & D_2 \\ \downarrow g & & \downarrow G \\ \text{int } T_3 & \subset & M_3 \end{array}$$

Sans perdre la généralité, on peut supposer que :

- 1)  $G$  est une immersion (différentiable)
- 2)  $G$  est transversable à  $\partial T_3$ .

Ceci nous permet de considérer la sousvariété  $G^{-1}(T_3)$  de  $D_2$ , dont le bord contient  $S_1 = \partial D_2$ .

Si  $G^{-1}(T_3) = S_1 \times I$  (avec  $S_1 \times 0 = S_1$ ) on a fini, puisqu'on peut prendre  $[G(S_1 \times 1) = \xi \in \pi_1(\partial T_3)]$  ([...] signifie la classe d'homotopie de ...).

En général, pour un sousensemble  $X \subset D_2$  qui contient  $S_1 = \partial D_2$ , on définit :

$$\rho(X) = \text{rang}_{Z_2}(H_0(X \text{ mod } S_1; Z_2)) + \text{rang}_{Z_2} H_1(X, Z_2)$$

$G^{-1}(T_3)$  est  $S_1 \times I$  si et seulement si  $\rho(G^{-1}(T_3)) = 1$ . L'idée de la démonstration est de faire de la chirurgie sur  $G^{-1}(T_3)$  de telle façon que  $\rho$  devienne 1 (et de changer, d'une façon correspondante  $G$ , sans tendre à  $g$ ).

On commence par considérer, dans  $\text{int } D_2$ , des arcs différentiablement plongés, deux-à-deux disjoints :

$$A_1, \dots, A_n, \quad B_1, \dots, B_m$$

tels que :

- 1)  $A_i \cap G^{-1}(\partial T_3) = \partial A_i, \quad B_j \cap G^{-1}(\partial T_3) = \partial B_j,$

et  $A_i, B_j$  rencontrent  $G^{-1}(\partial T_3)$  transversalement

$$2) \quad A_i \subset G^{-1}(T_3), \quad B_j \subset G^{-1}(M_3 - \text{int } T_3).$$

$$3) \quad \rho(G^{-1}(T_3) + B_1 + B_2 + \dots + B_m - A_1 - \dots - A_n) = 1$$

(voire figure 1).

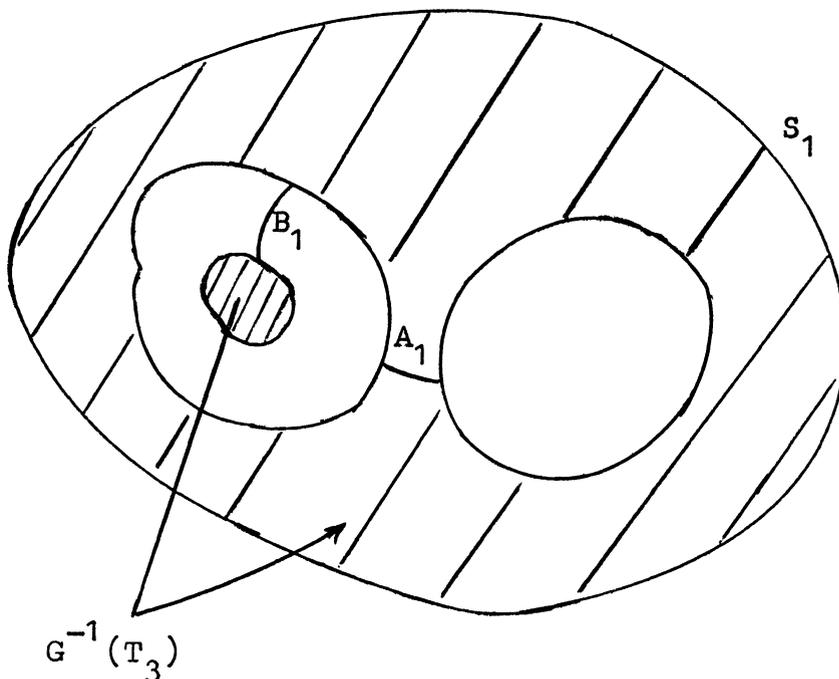


fig. 1

La suite exacte d'homotopie :

$$\begin{aligned} \pi_1(\partial(p \#(S_1 \times D_2))) &\longrightarrow \pi_1(p \#(S_1 \times D_2)) \longrightarrow \pi_1(p \#(S_1 \times D_2)), \\ \partial(p \#(S_1 \times D_2)) &\longrightarrow \pi_0(\partial(p \#(S_1 \times D_2))) = 1 \end{aligned}$$

dont la première flèche est surjective, nous dit que

$$\pi_1(p \#(S_1 \times D_2), \partial(p \#(S_1 \times D_2))) = 1.$$

En particulier, il existe des applications différentiables :

$$f_i, g_j: I \longrightarrow \partial T_3 \quad (i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m),$$

$$F_i: D_2 \longrightarrow T_3, \quad G_j: D_2 \longrightarrow M_3 - \text{int } T_3$$

telles que :

$$4) \quad f_i(\partial I) = G(\partial A_i), \quad g_j(\partial I) = G(\partial B_j)$$

$$5) \quad F_i(\partial D_2) = G(A_i) + f_i(I)$$

$$G_j(\partial D_2) = G(B_j) + g_j(I).$$

On remarque que  $G^{-1}(\partial T_3)$  est formé de exactement  $\varrho(G^{-1}(T_3))$  composantes connexes, chacune difféomorphe à  $S_1$  et que  $n + m = \varrho(G^{-1}(\partial T_3)) - 1$ .

Les  $\varrho(G^{-1}(T_3))$  lacets différentiables de  $G(G^{-1}(\partial T_3))$  avec les  $\varrho(G^{-1}(T_3)) - 1$  chemins différentiables  $f_i(I)$ ,  $g_j(I)$  qui les unissent, définissent sur  $\partial T_3$  un lacet unique  $z$ .

Je dis que  $z$  est homotope à  $g(S_1)$  dans  $T_3$  (une homotopie est obtenue en ajoutant à  $G(G^{-1}(T_3))$ , deux fois chaque disque singulier  $F_i(D_2)$ ) et à 0 dans  $M_3 - \text{int } T_3$  (un disque singulier qui borde  $z$  dans  $M_3 - \text{int } T_3$  est obtenu en ajoutant à  $G(G^{-1}(M_3 - \text{int } T_3))$  chaque  $G_j(D_2)$ , deux fois). On peut donc prendre  $[z] = \xi \in \pi_1(\partial T_3)$  ce qui résout notre problème.

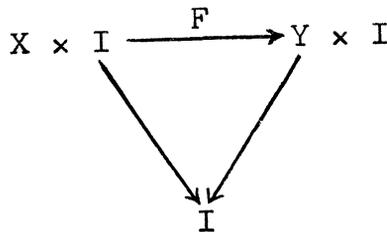
Du lemme précédent, on déduit tout de suite le :

**THÉORÈME 1.** (Le THÉORÈME HOMOTOPIQUE sur les diagrammes de Heegard des sphères d'homotopie). Soit  $(M_3, T_3)$  un diagramme de Heegard de longueur  $p$ . On identifie  $T_3$  avec  $(S_1 \times D_2) \# \dots \# (S_1 \times D_2)$  ( $p$  fois) et on considère les  $p$  cercles  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_p \subset T_3$  obtenus en considérant dans chaque facteur  $S_1 \times D_2$  le cercle  $S_1 \times 0_2$  ( $0_2 =$  centre du disque  $D_2$ ).

$M_3$  est une sphère d'homotopie, si et seulement si la condition suivante est satisfaite : Il existe  $p$  lacets :  $l_i : S_1 \longrightarrow \partial T_3$  ( $i = 1, \dots, p$ ) tels que  $l_i(S_1)$  soit homotope à  $\Sigma_i$  dans  $T_3$  et  $l_i(S_1)$  soit homotope à 0 dans  $M_3 - \text{int } T_3$ .

### 3. Résultats « isotopiques » sur les diagrammes de Heegard des sphères d'homotopie :

Soient  $X, Y$  deux variétés différentiables et  $f_0, f_1 \in Pl^\infty(X, Y) =$  espace des plongements différentiables de  $X$  dans  $Y$ .  $f_0$  et  $f_1$  sont dits isotopes s'il existe un diagramme commutatif :



où  $F \in Pl^\infty(X \times I, Y \times I)$  et  $F(i) = f_i$  ( $i = 0, 1$ ). Si en plus l'application composée :

$$X \times I \xrightarrow{F} Y \times I \xrightarrow{\pi} Y$$

est dans  $Pl^\infty(X \times I, Y)$ , on dit que  $f_0$  et  $f_1$  sont *fortement isotopes*.  $F \circ \pi \in Pl^\infty(X \times I, Y)$  s'appelle une *isotopie forte* ( $F$  s'appelle une *isotopie*, tout court).

Par définition  $f \in Pl^\infty(S_k, X)$  ( $\dim X > \dim S_k$ ) est dite *fortement isotope à 0* s'il existe un  $F \in Pl^\infty(D_{k+1}, X)$  tel que  $F|_{\partial D_{k+1}} = f$ . C'est une conséquence immédiate des théorème de fibration pour les espaces différentiables, que si  $f_0, f_1 \in Pl^\infty(S_k, X)$  sont isotopes, et  $f_1$  est fortement isotope à 0, alors  $f_0$  est aussi fortement isotope à 0.

On peut donner le théorème suivant qui est en quelque sorte une contrepartie *isotopique* du théorème *homotopique* ci-dessus.

**THÉORÈME 2 :** (le THÉORÈME ISOTOPIQUE pour les diagrammes de Heegard des sphères d'homotopie).

« Soit  $M_3$  une sphère d'homotopie. Il existe un diagramme de Heegard  $(M_3, T_3)$  et un difféomorphisme  $h : T \longrightarrow (S_1 \times D_2) \# \dots \# (S_1 \times D_2)$  ( $p$  fois), ayant les propriétés suivantes :

Si  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_p \subset (S_1 \times D_2) \# \dots \# (S_1 \times D_2)$  ( $p$  fois) désignent les  $p$  cercles obtenues en prenant dans chaque  $(S_1 \times D_2)$  la sousvariété  $S_1 \times 0_2$ , il existe  $p$  cercles différentiables  $\sigma_1, \dots, \sigma_p$  différentiablements plongés dans  $\partial T_3$  tels que :

a)  $h^{-1}(\Sigma_i)$  et  $\sigma_i$  sont FORTEMENT ISOTOPES dans  $T_3$ .

b) Chaque  $\sigma_i$  est FORTEMENT ISOTOPES à 0 dans  $M_3 - \text{int } T_3$ .

**REMARQUES :** 1°. D'après le lemme de Dehn, [3] puisque  $\sigma_i$  est plongé dans  $\partial T_3 = \partial(M_3 - \text{int } T_3)$  c'est la même chose de dire qu'il est homotope à 0, où (fortement) isotope à 0 (dans  $M_3 - \text{int } T_3$ ).

2°. Le théorème 2) contient plusieurs restrictions : on n'affirme ni que la propriété énoncée soit vraie pour *tous les diagrammes de Heegard*  $(M_3, T_3)$  d'une sphère d'homotopie  $M_3$ , ni pour *tous les difféomorphismes*  $h : T_3 \longrightarrow (S_1 \times D_2) \# \dots \# (S_1 \times D_2)$ .

Si c'était vrai pour tous les diagrammes (mais pas nécessairement pour tous les  $h$ ), on pourrait d'ailleurs  $y$  déduire que  $M_3 = S_3$ .

En effet, il suffit de montrer la proposition suivante :

**PROPOSITION 1 :** « Si  $M_3$  admet un diagramme de Heegard de longueur  $p : (M_3, T_3)$  avec les propriétés de l'énoncé du théorème 2, alors  $M_3$  admet aussi un diagramme de Heegard de longueur  $(p - 1)$  ».

La proposition 1 va être prouvée à partir de plusieurs lemmes :

LEMME 2 (Papakyriakopoulos) : « Soit  $N_3$  une variété de dimension 3, pas nécessairement compacte, avec un bord  $\partial N_3 \neq \emptyset$ . ( $\partial N_3$  n'est ni nécessairement compact, ni nécessairement avec  $\partial\partial N_3$  où  $\partial\partial\partial N_3$  nuls). Si l'homomorphisme :

$$\pi_1(\partial N_3) \longrightarrow \pi_1(N_3)$$

possède un noyau différent de 1, il existe un disque différentiablement plongé :

$$\varphi : (D_2, \partial D_2) \longrightarrow (N_3, \partial N_3)$$

tel que  $[\varphi | \partial D_2] \in \pi_1(\partial N_3)$  soit différent de  $1 \in \pi_1(\partial N_3)$  ».

Ceci est une conséquence immédiate des « loop theorem » [2] et du lemme de Dehn [3].

LEMME 3 : « Soit  $N_3$  une variété de dimension 3, dont le revêtement universel  $\tilde{N}_3$  puisse être plongé (différentiablement) dans  $S_3$ .

Soit  $M_3$  une variété à bord, compacte, connexe, de bord connexe, telle que  $M_3$  soit sousvariété (différentiable) de  $N_3$ , que  $\pi_1(M_3)$  soit libre à  $p$  générateurs,  $F_p$ , et que  $\partial M_3 = (S_1 \times S_1) \# \dots \# (S_1 \times S_1)$  ( $p$  fois) (le même  $p$  que pour  $F_p$ ). Alors :

$$M_2 = D_3 \# (p \# (S_1 \times D_2)) \text{ »}.$$

Démonstration : Si  $\pi_1(M_3) = 0$  le lemme est trivial puisqu'on peut relever le plongement  $M_3 \subset N_3$  dans un plongement  $M_3 \subset \tilde{N}_3 \subset S_3$  et on sait que toute sousvariété compacte, connexe et simplement connexe de  $S_3$  est  $D_3$ . Si  $p > 0$ , on remarque que le noyau de  $\pi_1(\partial M_3) \longrightarrow \pi_1(M_3)$  est non-trivial puisque le dernier groupe est libre et le premier ne l'est pas. D'après lemme 2, il existe un plongement différentiable :

$$\varphi : (D_2, \partial D_2) \longrightarrow (M_3, \partial M_3) (\varphi(\text{int } D_2) \subset \text{int } M_3)$$

tel que  $[\varphi | \partial D_2] \in \pi_1(\partial M_3)$  soit non trivial.

Il y a deux cas :

a) Ou bien  $\varphi(D_2)$  ne sépare pas  $M_3$ . Alors en coupant  $M_3$  suivant  $\varphi(D_2)$  on obtient une variété  $M_3^1$  qui est connexe, telle que  $\partial M_3^1$  soit  $(S_1 \times S_1) \# \dots \# (S_1 \times S_1)$  ( $p - 1$ ) fois, et telle que :

$\pi_1(M_3^1) * Z = F_p =$  groupe libre à  $p$  générateurs. (ici  $Z = F_1 =$  le groupe des entiers).

D'après le théorème de Groushko [1],  $\pi_1(M_3^1) = F_{p-1}$ .

b) ou bien  $\varphi(D_2)$  sépare  $M_3$  en  $M_3 = M_3^{11} \# M_3^{12}$ . Toujours d'après le théorème de Groushko :

$$\pi_1(M_3^{11}) = F_\alpha, \pi_1(M_3^{12}) = F_\beta \text{ où } \alpha + \beta = p, \alpha \neq 0 \neq \beta.$$

$$\text{On a } \partial M_3^{11} = \alpha' \# (S_1 \times S_1), \partial M_3^{12} = \beta' \# (S_1 \times S_1), \alpha' + \beta' = p.$$

Je dis que  $\alpha = \alpha', \beta = \beta'$ . En effet, autrement  $\alpha' > \alpha$  (ou  $\beta' > \beta$ ). En appliquant le même construction que ci-dessus à  $M_3^{11}$  (ou à  $M_3^{11}$ , suivant le cas), après un nombre fini de pas on trouverait une variété simplement connexe à bord non simplement connexe, ce qui est impossible.

Donc, dans chaque cas,  $M_3^1, M_3^{11}, M_3^{12}$ , qui sont clairement des sousvariétés différentiables de  $N_3$ , satisfont aux mêmes hypothèses que  $M_3$  mais avec des  $p$  plus petits. Par induction on se ramène au cas  $p = 0$ , traité déjà.

On va considérer maintenant  $T_2^p = p \# (S_1 \times D_2)$  et le plongement « canonique ».

$$i: T_3^p = p \# (S_1 \times D_2) \subset p \# (S_1 \times S_2) = 2T_3^p$$

obtenu en « doublant »  $T_3^p$  (et recollant les deux examplaires suivant leurs bords), ou bien en « multipliant »  $D_2 \subset S_2 = 2D_2$  par  $S_1$  et par  $p \#$ . On remarque que  $i_*: \pi_1(T_3^p) \longrightarrow \pi_1(2T_3^p)$  est un *isomorphisme*.

LEMME 4 : On considère dans  $\partial T_3^p$ ,  $q \leq p$  cercles  $\sigma_1^1, \dots, \sigma_1^q \subset \partial T_3^p$  différenciablement plongés, 2-à-2 disjoints. Les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

a) il existent  $q$  plongements différentiables 2-à-2 disjoints :  $\varphi_i: (D_2, \partial D_2) \longrightarrow T_3^p$  ( $\varphi_i(\text{int } D_2) \subset \text{int } T_3^p$ ) tels que  $\varphi_i(\partial D_2) \cap \sigma_1^j = \emptyset$  si  $i \neq j$  et  $\varphi_i(\partial D_2)$  rencontre  $\sigma_1^i$  exactement en un point, transversalement.

b) Il existent  $q$  plongements différentiables  $\psi_i: S_2 \longrightarrow 2T_3^p$ , 2-à-2 disjoints, tels que  $\psi_i(S_2) \cap \sigma_1^j = \emptyset$  si  $i \neq j$  et  $\psi_i(S_2)$  rencontre  $\sigma_1^i$  exactement en un point, transversalement.

DÉMONSTRATION : Clairement  $a) \implies b)$ . Pour montrer que  $b) \implies a)$  on raisonne comme suit :

On peut supposer que les  $\psi_i$  coupent  $\partial T_3^p \subset 2T_3^p$  transversalement. En particulier on considère dans chaque  $\psi_i(S_2)$  la composante connexe de  $\psi_i(S_2) \cap \partial T_3^p$ , appelons là  $\gamma_i$  qui contient  $\psi_i(S_2) \cap \sigma_1^i$ .  $\gamma_i \subset \partial T_3^p$  sont des cercles différenciablement plongés, 2-à-2 disjoints de  $\partial T_3^p$ . Dans  $\pi_1(2T_3^p)$  (donc dans  $\pi_1(T_3^p)$ !) les  $[\psi_i]$  sont nuls.

D'après le lemme de Dehn [3] il existent donc des plongements :

$$\Phi_i(D_2, \text{int } D_2) \longrightarrow (T_3^p, \text{int } T_3^p)$$

tels que  $\Phi_i(\partial D_2) = \gamma_i$ . Si les  $\Phi_i(D_2)$  étaient deux-à-deux disjoints tout serait fini. Supposons, par induction que  $\Phi_1, \dots, \Phi_r$  sont déjà 2-à-2 disjoints. On

va modifier  $\Phi_{r+1}$  de façon à le rendre disjoint des  $\Phi_1, \dots, \Phi_r$ , sans toucher à son bord. On peut supposer qu'il coupe les  $\Phi_i (i \leq r)$  transversalement, et parmi les composantes connexes de  $\bigcup_{i \leq r} \Phi_i \cap \Phi_{r+1}$  choisir un cercle  $C \subset \Phi_{i_0} \cap \Phi_{r+1}$  qui soit minimal dans  $\Phi_{i_0}$  (sans un autre cercle dans son intérieur). On enlève de  $\Phi_{r+1}$  l'intérieur de  $C$  (dans  $\Phi_{r+1}$ ) et on le remplace par l'intérieur de  $C$  dans  $\Phi_{i_0}$ . En perturbant un peu le nouveau  $\Phi_{r+1}$  (appelons le  $\Phi'_{r+1}$ ), ainsi obtenu, on peut le rendre transversal aux  $\Phi_i (i \leq r)$  et tel que le nombre des composantes connexes de  $\bigcap_{i \leq r} \Phi_i \cap \Phi_{r+1}$  soit strictement plus petit que celui de  $\bigcup_{i \leq r} \Phi_i \cap \Phi_{r+1}$ , e.a.d.s.

Après tous ces lemmes, on peut démontrer notre proposition 1 :

On part donc d'un diagramme de Heegard  $(M_3, T_3)$ , de longueur  $p$ , qui a les propriétés de l'énoncé du Théorème 2. On considère la sousvariété  $\sigma_1 \subset \partial T_3$  et le disque différentiablement plongé :

$\psi_2 : (D_2, \text{int } D_2) \longrightarrow (M_3 - \text{int } T_3, M_3 - T_3)$ ,  $\psi_2(\partial D_2) = \sigma_1$ , qui existe, d'après l'énoncé du théorème 2.

On peut utiliser  $\psi_2$  pour ajouter une anse d'indice 2 à  $T_3$ , dans  $M_3$ . (on considère donc un plongement  $\psi_2 : D_2 \times I \longrightarrow M_3 - \text{int } T_3$ , tel que  $\psi_2|_{D_2 \times 0} = \psi_2$  et que  $\psi_2^{-1}(\partial T_3) = \partial D_2 \times I$ . Je dis que  $(M_3, T_3 + (\psi_2) = T_3 \cup \psi_2(D_2 \times I))$  est un diagramme de Heegard de longueur  $(p - 1)$ .

D'après le lemme 4, on a :

$$T_3 + (\psi_2) = (S_1 \times D_2) \# \dots \# (S_1 \times D_2) \text{ ((} p - 1 \text{) fois)}$$

(en effet  $\sigma_1$  et  $S_1 \times O_2 \subset$  le premier  $(S_1 \times D_2)$  de  $p \# (S_1 \times D_2) = T_3$ ) sont isotopes dans  $2T_3$ , donc  $\sigma_1$  satisfait à b) du lemme 4, ce qui implique que  $(\psi_2)$  « tue » une anse d'indice 1 de  $T_3$ ).

D'après le lemme 3 on a :

$$M_3 - \text{int } (T_3 + (\psi_2)) = (p - 1) \# (S_1 \times D_2).$$

En effet il suffit, (pour pouvoir appliquer le lemme 3) de montrer que  $\sigma_1$  ne sépare pas  $\partial T_3$  (donc que  $[\sigma_1] \neq 0 \in H_1(\partial T_3, \mathbb{Z})$ ). Ceci est évident puisque dans l'homomorphisme d'inclusion  $H_1(\partial T_3) \longrightarrow H_1(T_3)$ , l'image de  $[\sigma_1]$  est  $[S_1 \times O_2] \neq 0 \in H_1(T_3)$ .

Ceci finit la démonstration de la proposition 1.

Le théorème 2, est un corollaire immédiat du théorème suivant, qui est une reformulation du THÉORÈME DE STRUCTURE de [5].

**THÉORÈME 3 : (THÉORÈME DE STRUCTURE) :**

« Une sphère d'homotopie  $M_3$  possède toujours un diagramme de Heegard

$(M_3, T_3)$  avec la structure suivante : Il existe un difféomorphisme :

$$h : T_3 \longrightarrow (S_1^1 \times D_2^1) \# \dots \# (S_1^{2p+q} \times D_2^{2p+q}) = (2p+q) \# (S_1 \times D_2)$$

et  $2p+q$  plongements différentiables de  $S_1$  dans  $\partial T_3 : \sigma_1, \dots, \sigma_{2p+q}$  tels que :

1) Il existe des isotopies fortes :

$$F_i : S_1 \times I \rightarrow T_3 \quad (i = 1, \dots, 2p+q)$$

reliant  $S_1^i \times 0^i$  et  $\sigma_i$  ( $F_i(S_1 \times 0) = S_1^i \times 0^i$ ;  $F_i(S_1 \times 1) = \text{Image } F_i \cap \partial T_3 = \sigma_i$ ).

2)  $\sigma_i$  est fortement homotope à 0 dans  $M_3 - \text{int } T_3$ .

3) Image  $F_i \cap \text{Image } F_{p+j} = \emptyset$  si  $i, j \leq p$  et  $i \neq j$ .

4) Image  $F_i \cap \text{Image } F_j = \emptyset$

Image  $F_{p+i} \cap \text{Image } F_{p+j} = \emptyset$  et :

Image  $F_{2p+i_0} \cap \text{Image } F_{2p+j_0} = \emptyset$

(si  $i \neq j$  ( $i_0 \neq j_0$ ) et  $i, j \leq p$  ( $i_0, j_0 \leq q$ )).

5)  $F_i$  et  $F_{p+i}$  ( $i \leq p$ ) se coupent transversalement et  $F_i^{-1}(F_i \cap F_{p+i})$  est constitué par deux arcs reliant  $S_1 \times 0$  et  $S_1 \times 1$ .

6) Image  $F_{2p+i} \cap \text{Image } F_{p+j} \cap \text{Image } F_k = \emptyset$

et  $F_{2p+i}$  coupe  $F_j$  ( $j \leq 2p$ ) transversalement. »

Le théorème 3 est équivalent au théorème de structure de [5]. On obtient cette équivalence en utilisant l'*involution canonique*  $j : 2T_3 \longrightarrow 2T_3$  ( $j^2 = id_{2T_3}$ ) qui permute les deux exemplaires de  $T_3$  (dans  $2T_3$ ) et qui a comme ensemble des points fixes  $\partial T_3$ .

PROPOSITION 2 : « Soit  $(M_3, T_3)$  un diagramme de Heegard (de la sphère d'homotopie  $M_3$ ), ayant les propriétés du théorème 3. Si en plus :

$$\text{Image } F_{2p+i} \cap \text{Image } F_j = \emptyset$$

pour tous les  $i \leq q$ ,  $j \leq 2p$ , alors  $M_3 = S_3$ . »

La démonstration est assez technique, elle va paraître dans le travail qui contiendra la démonstration complète du théorème de structure (voire aussi le Théorème 3 de [4]).

#### 4. Une remarque finale :

(Sur la manière dont la topologie « en grandes dimension » pourrait servir pour établir des résultats en « petites dimensions »).

On va considérer maintenant des « diagrammes de Heegard » pour les variétés de la forme  $M_3 \times S_n$  où  $M_3$  est une variété orientable, fermée de dimension 3. Un diagramme de Heegard (de longueur  $p$ ) de  $M_3 \times S_n$ , sera une paire :  $(M_3 \times S_n, \Theta_{3+n})$  où  $\Theta_{3+n}$  est une sousvariété différentiable telle que :

$$\Theta_{3+n} = (p \# (S_1 \times D_2)) \times S_n$$

$$M_3 \times S_n - \text{int } \Theta_{3+n} = (p \# (S_1 \times D_2)) \times S_n.$$

Si  $n > 1$  on remarque que du point de vue des groupes fondamentaux la situation se présente exactement comme pour les diagrammes de Heegard ordinaires.

En particulier il y a un homomorphisme de Stallings :

$$\mu : G_p \longrightarrow F_p' \times F_p''$$

attaché à  $(M_3 \times S_n, \Theta_{3+n})$ . On dira que le diagramme de Heegard  $(M_3 \times S_n, \Theta_{3+n})$  est *dégénéré* s'il existe un diagramme de Heegard  $(M_3, T_3)$  et un difféomorphisme :

$$(M_3, T_3) \times S_n = (M_3 \times S_n, \Theta_{3+n}).$$

Remarquons que  $(M_3, T_3)$  et  $(M_3 \times S_n, \Theta_{3+n})$  ont le même homomorphisme de Stallings.

Soit maintenant  $M_3$  une sphère d'homotopie. Alors si  $n \geq 2$ ,  $M_3 \times S_n = S_3 \times S_n$ , donc  $(M_3, T_3) \times S_n$  peut être conçu comme diagramme de Heegard de  $S_3 \times S_n$ . Si ce diagramme est dégénéré (c'est-à-dire de la forme  $(S_3, T_3') \times S_n$ ) son homomorphisme de Stallings se factorise (si  $p > 1$ ) d'une façon non triviale pour un produit libre. (Ceci est facile à voir). On sait d'autre part [6] que si pour tous les diagrammes de Heegard de  $M_3$ , de longueur  $p > 1$  cette propriété est vraie, alors  $M_3 = S_3$  (En effet si  $\text{Ker } \mu$  contient toujours un élément non trivial représenté par un plongement  $\omega : S_1 \subset \partial T_3$  on peut faire une induction sur la longueur des diagrammes de Heegard. D'autre part, si  $\mu$  se factorise pour un produit libre, il n'y a aucune obstruction à considérer la flèche  $\nu : G_p \longrightarrow K * L$  comme étant l'homomorphisme induit sur les groupes fondamentaux pour une application du type :

$f : p \# (S_1 \times S_1) \longrightarrow X \vee Y$ . On peut trouver un  $\omega$  comme ci-dessus en utilisant l'image inverse ( $f^{-1}$ ) du point unique de  $X \cap Y \subset X \vee Y$ .

Donc, la conjecture suivante implique que  $M_3$  (sphère d'homotopie) est toujours  $S_3$ .

*Conjecture*: « Tout diagramme de Heegard de  $S_3 \times S_n$  ( $n \geq 2$ ) est dégénéré ».

Il s'agit donc de déterminer la position d'une sousvariété de  $S_3 \times S_n$ , qui est voisinage régulier d'un sous complexe de codimension 2 (dans  $S_3 \times S_n$ ), et telle qu'on connait de type d'homotopie (en fait le type de difféotopie) du complément.

*Faculté des Sciences d'Orsay  
Dept. de Mathématiques  
91 - ORSAY (France)*

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. G. KUROSH : *The theory of groups*. Chelsea 1956.
- [2] C. D. PAPAKYRIAKOPOULOS : *On solid tori*. Proc. London Math. Sc. 7 (1957) pp. 281-299.
- [3] C. D. PAPAKYRIAKOPOULOS : *On Dehn's lemma and the asphericity of knots*. Ann. of Math. 66 (1957) pp. 1-26.
- [4] V. POÉNARU : *Constructions on low-dimensional differentiable manifolds*. B. A. M. S. 74 (1968) pp. 253-257.
- [5] V. POÉNARU : *Sur les variétés différentiables de basses dimension*. Symposia Matematica vol. II, 1968 pp. 363-369 (Istituto Nazionale di Alta Matematica).
- [6] J. STALLINGS : *How not to prove the Poincaré conjecture*. (Topology Seminar Ann. of Math. Studies 60 (1966)).