ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

FRANCO GORI

Sulle deformazioni delle varieta algebriche intersezioni complete non singolari di codimensione 2

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 24, nº 1 (1970), p. 103-110

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1970_3_24_1_103_0>

SULLE DEFORMAZIONI DELLE VARIETA ALGEBRICHE INTERSEZIONI COMPLETE NON SINGOLARI DI CODIMENSIONE 2

di Franco Gori

Riassunto - Utilizzando una caratterizzazione delle varietà algebriche intersezioni complete non singolari di due ipersuperficie dovuta essenzialmente a J. P. Serre [5], si trovano delle condizioni sufficienti perchè tali varietà restino intersezioni complete per deformazioni nel senso di K. Kodaira e D. C. Spencer [3].

1. Sia X una varietà algebrica non singolare di dimensione d, contenuta nello spazio proiettivo complesso P^{d+2}. Indichiamo con E tanto il sistema lineare delle sezioni iperpiane di X quanto il fibrato lineare ad esso associato. Indichiamo poi con $\mathcal{O}(E)$ il fascio dei germi delle sezioni del fibrato E e con E^{ν} $(\nu \in \mathbb{Z})$ il multiplo secondo ν di E.

Supponiamo che X sia intersezione completa non singolare di due ipersuperficie Y_1 e Y_2.

In questa nota si dimostra che se $d+2$ è maggiore di 4 ogni deformazione « sufficientemente piccola » di X è ancora algebrica e intersezione completa.

Precisamente proveremo il

Teorema 1. Le varietà algebriche di P^{d+2} intersezioni complete non singolari di due ipersuperficie Y_1 e Y_2 di dati ordini formano una famiglia algebrica completa (nel senso di Kodaira e Specer) nei casi seguenti:

I) $d+2>4$

II) $d+2=4$ quando grado $Y_1 +$ grado $Y_2 \leq 4$

III) $d+2=3$ quando grado $Y_1 +$ grado $Y_2 \leq 3$.

Osservazione. Le limitazioni II) e III) del Teor. 1 sono essenziali come mostrano i seguenti esempi: i) famiglia analitica complessa delle

Pervenuto alla Redazione il 19 Ottobre 1969.

curve piane di ordine maggiore di 3; *ii*) famiglia analitica complessa di tutte le ipersuperficie non singolari di ordine 4 in P^3. ([3], Teor. 14.1 pag. 404 e Teor. 14.2 pag. 407).

La dimostrazione del Teorema 1 si basa sulla caratterizzazione delle varietà intersezioni complete di due ipersuperficie ([5], [2] [1]) data dal seguente

TEOREMA 2. Perchè la varietà algebrica non singolare X sia intersezione completa di due ipersuperficie Y_1 e Y_2 di uno spazio proiettivo è necessario e basta che:

a) X sia una varietà normale;

b) il sistema canonico K_X di X sia multiplo secondo un intero $\nu \gtreqless 0$ del sistema E delle sezioni iperpiane: $E^\nu \simeq K_X$;

c) se $\nu > 0$ allora siano nulli i gruppi di coomologia di X a valori nel fascio definito dal fibrato E^l: $H^i(X, E^l) = 0$ per $i > 0$ e $0 \leq l \leq \nu$.

Per provare il Teorema 1 basta quindi verificare che le condizioni *a*), *b*) e *c*) del Teorema 2 sono stabili per deformazioni quando: $d + 2 > 4$; $d + 2 = 4$ e grado Y_1 + grado $Y_2 \leq 4$; $d + 2 = 3$ e grado Y_1 + grado $Y_2 \leq 3$.

2. Cominciamo a provare che la condizione *c*) del Teorema 2 è stabile per deformazioni.

Sia $\mathcal{I}_X$ il fascio di ideali definito da X, sottofascio del fascio $\mathcal{O}$ dei germi delle funzioni olomorfe in P^{d+2}, e sia $\mathcal{O}_X$ il fascio dei germi delle funzioni olomorfe su X. In altre parole consideriamo la successione esatta

$$(1) \qquad 0 \to \mathcal{I}_X \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_X \to 0.$$

Poichè X è intersezione completa di Y_1 e Y_2 è esatta la successione (delle sizigie)

$$(2) \qquad 0 \to \mathcal{O}(Y_1^{-1} \otimes Y_2^{-1}) \xrightarrow{i} \mathcal{O}(Y_1^{-1}) \oplus \mathcal{O}(Y_2^{-1}) \xrightarrow{j} \mathcal{I}_X \to 0$$

ove Y_1 e Y_2 sono i fibrati definiti dalle ipersuperficie Y_1 e Y_2 e se $s_1 = 0$ ed $s_2 = 0$ sono equazioni locali di Y_1 e Y_2 l'omomorfismo i è dato da

$$i : f \to (s_1 f, s_2 f)$$

e l'omomorfismo j da

$$j : (v, w) \to v s_2 - w s_1 .$$

Le (1) e (2) si conglobano nella

$$(3) \qquad 0 \to \mathcal{O}(Y_1^{-1} \otimes Y_2^{-1}) \to \mathcal{O}(Y_1^{-1}) \oplus \mathcal{O}(Y_2^{-1}) \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_X \to 0$$

ancora esatta.

Dalla (1) si ha la successione esatta di coomologia

$$(1') \quad 0 = H^2(P^{d+2}, \mathcal{O}) \to H^2(X, \mathcal{O}_X) \to H^3(P^{d+2}, \mathcal{I}_X) \to H^3(P^{d+2}, \mathcal{O}) = 0$$

e quindi l'isomorfismo $H^2(X, \mathcal{O}_X) \simeq H^3(P^{d+2}, \mathcal{I}_X)$.

Dalla (2) analogamente

$$(2') \qquad H^3(P^{d+2}, \mathcal{O}(Y_1^{-1})) \oplus H^3(P^{d+2}, \mathcal{O}(Y_2^{-1})) \to$$
$$\to H^3(P^{d+2}, \mathcal{I}_X) \to H^4(P^{d+2}, \mathcal{O}(Y_1^{-1} \otimes Y_2^{-1})).$$

Per un teorema noto dovuto a R. Bott ([3], pag. 405) si ha

$$(4) \quad H^4(P^{d+2}, \mathcal{O}(Y_1^{-1} \otimes Y_2^{-1})) = 0 \quad \begin{array}{l} \text{se } d+2 \gtrless 4 \\ \text{se } d+2 = 4 \text{ e grado } Y_1 + \text{grado } Y_2 \leq 4\,; \end{array}$$

ed in queste condizioni sono sicuramente nulli anche i gruppi

$$H^3(P^{d+2}, \mathcal{O}(Y_1^{-1})) \text{ e } H^3(P^{d+2}, \mathcal{O}(Y_2^{-1})).$$

Se vale la (4) è quindi $H^3(P^{d+2}, \mathcal{I}_X) = 0$, cioè per la (1′) si ottiene la

$$(5) \qquad H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0.$$

Tensorizzando su $\mathcal{O}$ col fibrato sezione iperpiana, dalle (1), (2), (3) si ottengono le successioni ancora esatte

$$(1'') \quad 0 \to \mathcal{I}_X \otimes \mathcal{O}(E) \to \mathcal{O}(E) \to \mathcal{O}(E)_X \to 0$$

$$(2'') \quad 0 \to \mathcal{O}(Y_1^{-1} \otimes Y_2^{-1} \otimes E) \to \mathcal{O}(Y_1^{-1} \otimes E) \oplus$$
$$\oplus\, \mathcal{O}(Y_2^{-1} \otimes E) \to \mathcal{I}_X \otimes \mathcal{O}(E) \to 0$$

$$(3'') \quad 0 \to \mathcal{O}(Y_1^{-1} \otimes Y_2^{-1} \otimes E) \to \mathcal{O}(Y_1^{-1} \otimes E) \oplus$$
$$\oplus\, \mathcal{O}(Y_2^{-1} \otimes E) \to \mathcal{O}(E) \to \mathcal{O}(E)_X \to 0.$$

Dalle successioni esatte di coomologia associate, sempre tenendo conto del teorema di R. Bott citato sopra, con facili passaggi si ottiene

$$(6) \qquad H^1(X, \mathcal{O}(E)_X) = 0$$

che vale nelle stesse condizioni per cui sono vere la (4) e la (5).

Sia ora $\mathcal{V} \xrightarrow{\tilde{\omega}} M$ una qualunque famiglia di deformazioni della varietà X nel senso di Kodaira e Spencer.

Poichè siamo interessati a piccole deformazioni di X possiamo supporre che M sia un polidisco $M = (|t_1| < R, |t_2| < R, \dots, |t_r| < R) \subset \mathbb{C}^r$; e che $X = \tilde{\omega}^{-1}(0)$ con $0 \in M$.

Per un teorema di Kodaira e Spencer ([3], Teor. 13.2 pag. 400) le (5) e (6) implicano l'esistenza di un intorno $\mathcal{U}$ dello zero in M e di una applicazione olomorfa sulle fibre

$$\Phi: \ \mathcal{V}|_{\mathcal{U}} \to P^{d+2}.$$

Si vede poi con argomentazioni analoghe a quelle di [3], (Teor. 13.4 pag. 400) che l'intorno $\mathcal{U}$ si può scegliere così piccolo che l'applicazione Φ sia biolomorfa sulle fibre $X_t = \tilde{\omega}^{-1}(t)$, $t \in \mathcal{U}$. Basta infatti applicare il teorema citato tenendo presente che la varietà X è algebrica e che pertanto la dimensione l di $H^0(X_t, \mathcal{O}(E)_{X_t})$, costante per la (6) e per [3] (Teor. 2.1 e Teor. 2.3 pag. 350), è proprio uguale a $d + 2$.

Ma X è intersezione completa onde $H^i(X, E^l) = 0$ per ogni $i > 0$ e $0 \leq l \leq \nu$. Segue quindi per il teorema di semicontinuità superiore ([3], Teor. 2.1 pag. 350) che per qualunque $t \in \mathcal{U}$, intorno dello zero in M tale che l'applicazione Φ sia bioloforma sulle fibre, è vera la

$$H^i(X_t, E_t^l) = 0 \tag{7}$$

cioè vale la stabilità della condizione *c*) del Teorema 2.

3. Proviamo ora la stabilità della condizione *a*) del Teorema 2.

Per un teorema di Muhly-Zariski [4] è noto che una varietà algebrica X è normale se e soltanto se l'omomorfismo

$$j: \ H^0(P^{d+2}, \mathcal{O}(E^l)) \to H^0(X, \mathcal{O}_X(E^l))$$

è surgettivo per ogni $l \geq 0$.

A noi basta quindi provare che esiste un intorno dello zero in M tale che per ogni t appartenente ad esso sia esatta la successione

$$0 \to N_t^l \to H^0(P^{d+2}, \mathcal{O}(E^l)) \xrightarrow{j_t} H^0(X_t, \mathcal{O}_{X_t}(E^l)) \to 0 \quad \text{per ogni } l \geq 0 \tag{8}$$

che è sicuramente esatta per $t = 0$.

Un teorema classico dovuto essenzialmente al Castelnuovo afferma che la (8) è esatta per ogni varietà algebrica non singolare appena che sia l

maggiore di un certo l_0 abbastanza grande. Quindi la (8) è vera per $l > l_0$ opportuno per tutte le X_t tali che $t \in \mathcal{U}$; essendo $\mathcal{U}$ un intorno dello zero in M per cui l'applicazione Φ è biolomorfa sulle fibre.

Resta da provare che la (8) vale anche quando è $1 \leq l \leq l_0$ per tutte le X_t con t appartenente ad un intorno dello zero in M opportunamente determinato.

In base al già citato teorema di semicontinuità essendo

$$\dim H^0(X_t, \mathcal{O}_{X_t}(E^l)) \leq \dim H^0(X_0, \mathcal{O}_{X_t}(E^l))$$

ed essendo esatta, come già si è detto, la (8) per $t = 0$, si ottiene che

$$\dim N_t^l \geq \dim N_0^l \quad \text{per ogni } l \geq 1 \text{ e per ogni } t \in \mathcal{U}. \tag{9}$$

Dimostrando perciò l'esistenza, per ogni $l \leq l_0$ e positivo, di un intorno dello zero in M: $\mathcal{U}^l \subset \mathcal{U}$ in cui.

$$\dim N_t^l \leq \dim N_0^l$$

sarà provata la uguaglianza

$$\dim \operatorname{Im} j_t = \dim H^0(X_t, \mathcal{O}_{X_t}(E^l)),$$

vera per ogni $l > 0$ nell'intorno $\tilde{\mathcal{U}}$ definito dalla

$$\tilde{\mathcal{U}} = \bigcap_{1 \leq l \leq l_0} \mathcal{U}^l,$$

che è quanto vogliamo.

Sia dapprima $l = 1$ cioè $E^l = E$.

Si può supporre che X non appartenga a nessun iperpiano di P^{d+2}, (se X appartiene ad un iperpiano si procede analogamente ma questo caso presenta per noi poco interesse), allora ciò vale anche per tutte le X_t con $t \in \mathcal{U}^1$ opportuno e per tali valori di t è dunque: $\dim N_t^1 = \dim N_0^1$.

Infatti l'immersione $\Phi_0 : X \to P^{d+2}$, biolomorfa sull'immagine, può essere scritta localmente mediante $d + 2$ funzioni olomorfe $\Phi_{0,i}$ $(i = 1, 2, \dots, d + 2)$; e per l'ipotesi fatta le $\Phi_{0,i}$ sono linearmente indipendenti. Scrivendo in componenti anche l'espressione $\Phi : \mathcal{V}|_{\mathcal{U}} \to P^{d+2}$ si hanno delle funzioni olomorfe

$$\Phi_i(z, t) \qquad (i = 1, 2, \dots, d + 2)$$

tali che

$$\Phi_i(z, 0) = \Phi_{0,i}.$$

Giacchè si è detto

$$\sum_0^{d+2}{}_i \lambda_i \Phi_{0,i} = \sum_0^{d+2}{}_i \lambda_i \Phi_i(z, 0) \neq 0,$$

(dove è per definizione $\Phi_0(z, t) = 1$), essendo $\sum_0^{d+2}{}_i \lambda_i \Phi_i(z, t)$ una funzione olomorfa, esiste sicuramente un intorno $\mathcal{U}^1$ dello zero in M in cui le $\Phi_i(z, t)$ sono linearmente indipendenti.

Sia ora $l > 1$.

Poniamo

$$h_l = \dim \{H^0(P^{d+2}, \mathcal{O}(E^l))/N_0^l\};$$

ciò significa che esistono h_l polinomi omogenei $\varphi_k(\xi)$ di grado l che godono le proprietà di essere linearmente indipendenti, di non annullarsi su X, e tali che nessuna loro combinazione lineare si annulla su X.

Poichè come è ormai noto le applicazioni $\Phi_i(z, t)$ sono olomorfe, le h_l funzioni $\varphi_k(\Phi(z, t))$, che sono linearmente indipendenti, non annullandosi per $t = 0$ non si annulleranno qualunque sia $t \in \mathcal{U}_1^l$, con $\mathcal{U}_1^l$ intorno opportuno dello zero.

Infine, poichè $\Sigma_k \lambda_k \varphi_k(\Phi(z, t))$ è una funzione olomorfa diversa da zero per $t = 0$, esiste sicuramente anche l'intorno $\mathcal{U}_{11}^l$ tale che per ogni $t \in \mathcal{U}_{11}^l$ sia

$$\sum_1^{h_l} \lambda_k \varphi_k(\Phi(z, t)) \neq 0.$$

Concludendo, per ogni $t \in \mathcal{U}^l = \mathcal{U}_1^l \cap \mathcal{U}_{11}^l$, è

$$\dim \{H^0(P^{d+2}, \mathcal{O}(E^l))/N_t^l\} \geq h_l$$

cioè

$$\dim N_t^l \leq \dim N_0^l.$$

4. Verifichiamo ora la stabilità della condizione *b*) del teorema 2.

Indichiamo con $K_{\mathcal{U}}$ il fibrato canonico definito su $\mathcal{V}_{|\mathcal{U}}$, e con K_{X_t} il fibrato canonico su $\tilde{\omega}^{-1}(t)$. Per la definizione di fibrato canonico si ha

$$K_{\mathcal{U}|X_t} = K_{X_t} \qquad \text{qualunqe sia } t \in \mathcal{U}. \tag{10}$$

È d'altra parte possibile ([3], Prop. 13.2 pag. 398) costruire l'estensione $\mathcal{E}_{\mathcal{U}}$ del fibrato $E^\nu|_{X_0}$, definito su $X = X_0 = \tilde{\omega}^{-1}(0)$, a $\mathcal{V}_{|\mathcal{U}}$ con $\mathcal{U}$ abbastanza piccolo.

Sarà allora

(11) $$\mathcal{E}_{\mathcal{U}|_t} = E^{\vee}_{X_t} \quad \text{qualunque sia } t \in \mathcal{U}.$$

Basterà quindi trovare un intorno $\widehat{\mathcal{U}}$ dello zero in M in cui sia $K_{\widehat{\mathcal{U}}} = \mathcal{E}_{\widehat{\mathcal{U}}}$ perchè in base alla (10) e alla (11) sia provata la stabilità della *b*)

I fibrati lineari $\mathcal{E}_{\mathcal{U}}$ e $K_{\mathcal{U}}$ definiscono due elementi del gruppo $H^1(\mathcal{V}_{|\mathcal{U}}, \mathcal{O}^*)$, dove $\mathcal{O}^*$ è il fascio dei germi delle funzioni olomorfe $\neq 0$ su $\mathcal{V}_{|\mathcal{U}}$. Tenendo allora presente il diagramma a righe esatte e commutativo ([3], 13.5 pag. 398).

(α)
$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots \to & H^1(\mathcal{V}_{|\mathcal{U}}, \mathcal{O}) & \xrightarrow{\varepsilon^*} & H^1(\mathcal{V}_{|\mathcal{U}}, \mathcal{O}^*) & \xrightarrow{\delta^*} & H^2(X, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\tau^*} & H^2(\mathcal{V}_{|\mathcal{U}}, \mathcal{O}) & \to \ldots \\
& \downarrow{\scriptstyle r_t^*} & & \downarrow{\scriptstyle r_t^*} & & \| & & \downarrow{\scriptstyle r_t^*} & \\
\ldots \to & H^1(X_t, \mathcal{O}_t) & \xrightarrow{\varepsilon_t^*} & H^1(X_t, \mathcal{O}_t^*) & \xrightarrow{\delta_t^*} & H^2(X, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\tau_t^*} & H^2(X_t, \mathcal{O}) & \to \ldots
\end{array}$$

l'ipotesi $E^{\vee}_{|X_0} = \mathcal{E}_{\mathcal{U}|X_0} = K_{\mathcal{U}|X_0}$, cioè $\mathcal{E}_{\mathcal{U}|X_0} \otimes K^{-1}_{\mathcal{U}|X_0} \in 1 \in H^1(X, \mathcal{O}_0^*)$, ci dice che

$$r_0^*(\mathcal{E}_{\mathcal{U}} \otimes K_{\mathcal{U}}^{-1}) = 1 \in H^1(X_0, \mathcal{O}_0^*)$$

e quindi

$$\delta^*(\mathcal{E}_{\mathcal{U}} \otimes K_{\mathcal{U}}^{-1}) = 0 \in H^2(X, \mathbb{Z})$$

cioè

(12) $$\mathcal{E}_{\mathcal{U}} \otimes K_{\mathcal{U}}^{-1} \in \ker \delta^*.$$

Essendo X intersezione completa essa è regolare ovvero

(13) $H^1(X_0, \mathcal{O}_0) = 0$ per $d+2 \geq 4$, per $d+2=3$ se grado Y_1+ grado $Y_2 \leq 3$.

La (13) per semicontinuità implica l'esistenza di un intorno dello zero $\mathcal{U}' \subset M$ tale che in esso sia

(14) $$H^1(X_t\, \mathcal{O}_t) = 0,$$

e pertanto posto $\widehat{\mathcal{U}} = \mathcal{U} \cap \mathcal{U}'$ dalla (14) e da [3] (Teor. 2.2 pag. 350) segue

(15) $$H^1(\mathcal{V}_{|\widehat{\mathcal{U}}}, \mathcal{O}) = 0,$$

da cui segue che nel diagramma (α) l'omomorfismo δ^* è iniettivo.

La (12) si riscrive allora

$$\mathcal{E}_{\widehat{\mathfrak{U}}} \otimes K_{\widehat{\mathfrak{U}}}^{-1} = 1$$

che è quanto si voleva, e il teorema 1 è completamente dimostrato.

BIBLIOGRAFIA

[1] U. GASAPINA: *Sulle sezioni spaziali delle varietà aritmeticamente normali e aritmeticamente regolari;* Bollettino dell'Un. Mat. Italiana 1961, serie III, vol. 16, pag. 476-483.

[2] G. GHERARDELLI: *Sulle curve sghembe algebriche intersezioni complete di due superficie,* Atti R. Acc. d'Italia, vol. IV (1942).

[3] K. KODAIRA e D. C. SPENCER: *On deformations of complex analytic structures;* Annals of Mathematics 1958, vol. 67, pag. 328-466.

[4] H. T. MUHLY: *A remark on normal varieties;* Annals of Matematics 1941, vol. 42, pag 921-925.

[5] J. P. SERRE: Seminario Dubreil, 1960/1961, fascicolo 1.