ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

A. T. LASCU

Sous-variétés régulièrement contractibles d'une variété algébrique

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 23, nº 4 (1969), p. 675-695

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1969_3_23_4_675_0>

SOUS-VARIÉTÉS RÉGULIÈREMENT CONTRACTIBLES D'UNE VARIÉTÉ ALGÉBRIQUE

A. T. LASCU

Introduction.

Le problème dont il s'agit est de caractériser *les sous-variétés régulièrement contractibles* d'une variété-algébrique.

DÉFINITION. Soit V une sous-variété d'une variété algébrique U. Un morphisme birationnel $\varphi : U \longrightarrow X$ est une *contraction régulière* de U le long de V si

1⁰ φ est propre

2⁰ $Y = \varphi(V)$ est nonsingulière et X est nonsingulière dans chaque point de Y

3⁰ $\dim V > \dim Y$

4⁰ φ est birégulière dans $U \setminus V$.

Malgré son caractère naturel, on a publié peu sur ce problème en géométrie algébrique, si on laisse de côté ses diverses extensions en théorie des surfaces algébriques, regardant des contractions qui ne sont pas régulières dans le sens précédent (on renvoye à [1] pour bibliographie). En effet, après le critère de Castelnuovo-Enriques ([2]) pour les courbes exceptionnelles de première espéce d'une surface algébrique nonsingulière (projective complèxe) il semble qu'on peut citer seulement l'extension de ce résultat due à Kodaira ([5]) concernant les hypersurfaces d'une variété algébrique nonsingulière (projective complèxe) qui peuvent être obtenues par éclatement des points nonsingulières(*). Formellement ce résultat est moins satisfaisant que le critère de Castelnuovo-Enriques, la contraction étant supposée d'avant être un eclatement, sans préciser si cette condition est nécéssaire, ce qui est d'ailleurs vrai. Le résultat montre que le critère de Castelnuovo-Enriques est encore valable mais la démonstration employe des méthodes analytiques.

Pervenuto alla Redazione il 28 Maggio 1969 ed in forma definitiva il 28 Luglio 1969.

(*) (Note ajoutée à la corréction des épreuves). Il faut citer aussi les travaux récents sur les espaces algébriqués de M. ARTIN (Séminaire Bourbati 1968/69 exposé n⁰ 363) et de B. G. MOISHEZON (Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 33 (1969)).

On peut enoncer le problème général de la manière suivante. Soit $\varrho : V \to Y$ un morphisme rationnel propre avec Y nonsingulière et $i : V \to U$ un morphisme d'inclusion. On demande dans quelles conditions il existe un morphisme d'inclusion $j : Y \to X$ et une contraction régulière $\varphi : U \to X$ le long de V qui fait commutatif la diagramme

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varrho"'] & U \arrow[d, "\varphi"] \\ Y \arrow[r, "j"] & X \end{tikzcd}$$

On peut formuler *les conditions de Castelnuovo-Enriques* dans ce cas, comme suit:

1⁰ V est un fibré projectif sur Y i.e. $V = \operatorname{Proj}(E)$ avec E fibré vectoriel de base Y et ϱ le morphisme de projection.

2⁰ Si $\mathcal{J}$ est l'idéal de V dans O_U et $O(1)$ le O_V-faisceau inversible canonique sur $V = \operatorname{Proj}(E)$ alors

$$i^* \mathcal{J} = O(1)$$

De 1⁰ et 2⁰ on déduit que V est nonsingulière, $\mathcal{J}$ est inversible donc $\operatorname{codim}_U V = 1$ et $V_y = \varrho^{-1}(y)$ est un espace projectif pour tout $y \in Y$. Si on suppose U nonsingulière dans chaque point de V on peut exprimer 2⁰ sous la forme

$$(2)\ D \cdot Vy = - Hy$$

avec D diviseur linéairement équivalent à V dans U, $V_y \not\subset \operatorname{supp.}(D)$ et H_y un hyperplan de V_y (*condition de Segre* ([10]).

L'auteur a été amené a ce travail à la suite de l'érreur d'avoir auparavant cru que les conditions 1⁰ et 2⁰ valent encore pour un critère de contractibilité général ([8]). L'analogue analytique de ce problème à été étudié par Moishezon ([12]) (on y trouve aussi une bibliographie concernant la contractibilité à un point dans le càs analytique). Moishezon à prouvé que 1⁰, 2⁰ sont nécéssaires et suffisantes pour une classe des variétés analytique complèxes compactes très proches des variétés algébriques, à savoir ceux qui possèdent assez des fonctions méromorphes. De plus on montre ([12]) qu'il existe une contraction analytique $\varphi : U \to X$ le long d'une surfaces $V \subset U$, avec U variété algébrique projective (complète) trois dimensionelle, V une quadrique reglée $V = P^1 \times P^1$ et $\varphi / V = \varrho$ la projection $V \to P^1$ sur un des facteurs, dont X n'est plus algébrique. En vertu de l'unicité de X, relativement à U, il s'ensuit qu'il n'existe pas une contraction régulière algébrique de U dont la réstriction à V soit ϱ. Donc *les conditions de Castelnuovo-Enriques ne sont plus suffisantes dans le càs général en géométrie algébrique.* On donne içi une troisième condition, condition 3^0, qui jointe aux conditions de Castelnuovo-Enriques puisse constituer le critère cherché. La condition 3^0 regarde le plongement i de (1), aussi comme 2^0, pourtant elle est plus étroitement liée à l'application ϱ et c'est en ça qu'elle diffère essentiellement de 2^0; tandis que 2^0 peut-être exprimée par (2) dans le language global de la géometrie projective classique, la condition 3^0 étant locale relativement à ϱ, est de nature cohomologique. Afin de l'enoncer, on remarque d'abord que l'espace topologique T sous-jacent à X est détérminé par ϱ. En effet φ étant propre, T doit être l'espace quotient de U associé à ϱ i.e. l'espace obtenu en identifiant les fibres de ϱ avec les points respectifs de Y.

THÉORÈME. Soit V une sous-variété de U, $i: V \to U$ le morphisme d'inclusion et $\varrho: V \to Y$ un morphisme rationnel propre. On suppose U normale dans chaque point de V, l'idéal $\mathcal{I}$ de V dans O_U inversible, $\dim V > \dim Y$ et Y nonsingulière. S'il existe une contraction régulière φ de U le long de Y telle que $\varphi/V = \varrho$ alors les conditions 1^0 et 2^0 de Castelnuovo-Enriques sont remplies et aussi la condition

$$3_n^0 \quad R^1 f_* \mathcal{I}^n = 0 \quad \text{pour } n \geq 0$$

où $f: U \to T$ est l'application canonique sur l'espace quotient de U associé à ϱ. Réciproquement si 1^0, 2^0 et 3_n^0 pour une valeur $n \geq 2$ sont remplies alors la contraction cherchée φ existe. De plus φ est univoquement détérminée par ϱ jusqu'à un isomorphisme au dessous de U. U est isomorphe relativement à X avec l'eclatée de X le long de Y.

REMARQUE. Il s'ensuit que V doit être nonsingulière et U nonsingulière dans chaque point de V.

On a employé le language des schémas ([3]) mais il est dans ce cas bien equivalent à celui de la « Géométrie Algébrique Abstracte ». Le terme variété algébrique désigne dans ce qui suit un schéma *intègre*, *séparé* et *de type fini* sur un corps fixé Ω, algébriquement clos, de caracteristique arbitraire; une sous-variété sera un sous-schéma fermé qui est aussi une variété algébrique. Un point d'une variété sera toujours un point fermé.

Dans § 1 on demontre, pour la complétitude, le lemme 1 de van der Waerden. Le résultat principal de cette section, le théorème 1, a été etabli dans le cas nonsingulier par I. P. Murre ([9]) et rédémontré par Hironaka ([4]). Dans § 2 on prouve à l'aide d'un artifice de Castelnuovo-Enriques, que la condition 3^0 est superflue pour la contractibilité à un point dans le cas projectif. On retrouve ainsi pour $\Omega = \mathbf{C}$ le critère de Castelnuovo-Enriques ainsi que son extension due à Kodaira.

Un outil souvent employé dans ce qui suit est le théorème principal de Zariski cité Z. M. T. ([3], 2 chap. IV, où [6]) dans la forme suivante:

Soit $\varphi : X \longrightarrow Y$ un morphisme séparé de type fini. L'ensemble des points de X isolés dans leurs fibres par rapport à φ est un ouvert de X et si X' est le sous-schéma ouvert lui correspondant alors il existe un Y-schéma entier Y' et une immersion ouverte $\psi : X' \longrightarrow Y'$ faisant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & Y' \arrow[d] \\ X \arrow[r, "\varphi"'] & Y \end{tikzcd}$$

L'auteur exprime ici toute sa gratitude à Monsieur le Professeur B. Segre pour la stimulation et l'assistance précieuse qu'il lui a accordé.

Il remercie B. G. Moishezon, S. Kleiman et particulièrement H. Kurke pour leurs observations critiques extrêmement utiles sur la forme préliminaire de ce travail.

1. L'unicité des contractions.

Lemme 1. Soit $\varphi : U \longrightarrow X$ un morphisme birationnel et $S(\varphi)$ le sous-ensemble fermé de U des points dans lesquels φ n'est pas birégulier.

Soit V une composante irrèductible de $S(\varphi)$ telle que l'anneau local $O_{X,Y}$ de $Y = \overline{\varphi(V)}$ sur X soit factoriel. Alors $\operatorname{codim}_U V = 1$.

Preuve. (d'après H. Kurke). On a $O_{X,Y} \subset O_{U,V}$ et il existe $\alpha \in O_{U,V}$, $\alpha \notin O_{X,Y}$. Soit $\alpha = a/b$ avec $a, b \in O_{X,Y}$ dèpourvus des facteurs communs dans l'anneau factoriel $O_{X,Y}$. Il s'en suit que tout diviseur premier de $aO_{X,Y} + bO_{X,Y} = \underline{i}$ correspond à une sous-variété de codimension au moins égale à 2 dans X. On a $\underline{i}O_{U,V} = bO_{U,V}$ donc si H est une sous-variété de V correspondante à un diviseur premier minimal de $\underline{i}O_{U,V}$ dans $O_{U,V}$, $\operatorname{codim}_U H = 1$ ce qui prouve que $H \subseteq S(\varphi)$. D'autre part $V \subseteq H$ donc $V = H$.

Théorème 1. Soit $\varphi : U \longrightarrow X$ une contraction régulière de U le long d'une sous variété V. On suppose chaque point de V normal sur U et l'idéal de V dans O_U inversible. Si $\pi : X' \longrightarrow X$ est l'éclatement de X le long de $Y = \varphi(V)$ alors U est canoniquement isomorphe a X' relativement à X.

Preuve. En vertu de l'hypothèse V est une hypersurface simple de U. Supposons que

1) $v_Y = v_V \circ \varphi^*$ où $\varphi^*\colon \Omega(X) \to \Omega(U)$ est l'isomorphisme défini par φ [1]

2) $\mathcal{J}\, O_U$ est inversible, avec $\mathcal{J}$ l'idéal de Y dans O_X et montrons que le théorème est vrai.

En effet, d'après la proprieté universelle de π, φ se factorise dans $\varphi = \pi\chi$ où $\chi : U \to X'$ est un morphisme birationnel. En vertu de 1) $\pi^{-1}(Y) = Y'$ correspond birégulièrement à V par χ, parce que $v_Y = v_{Y'} \circ \pi^*$. Donc χ est birégulière en codimension 1 d'où on déduit que χ est partout birégulière, compte tenu du lemme 1. Mais χ est surjectif parce que φ est propre i. e. χ est un isomorphisme. Reste donc seulement à prouver 1) et 2).

1) On a le diagramme commutatif de morphismes birationnels où

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & X' \arrow[d, "\pi"] \\ U \arrow[r, "\varphi"'] & X \end{tikzcd}$$

$\Gamma \subset U \times X'$ est le graphe du correspondance birationnelle définie par φ, π; p, q sont les prejections respectives. On peut donc identifier les corps des fonctions rationnelles de ces quatre variétés à l'aide des isomorphismes définis par p, q, π, φ. Il suffit de prouver que

$$v_{Y'} \mid O(Y, X) = v_V \mid O(Y, X)$$

q est surjectif parceque φ est propre. Il existe donc une sous-variété Y'' de Γ telle que $q(Y'') = Y'$ d'où on déduit que $O(Y', X') = O(Y'', \Gamma)$, $O(Y', X')$ étant un anneau de valuation. Alors $p(Y'') = Z \subseteq V$ parce que $\varphi(Z) = Y$. On a le diagramme d'inclusions suivant

$$\begin{tikzcd} O(Y,X) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, "l"] & O(Y',X') = O(Y'',\Gamma) \\ O(V,U) & O(Z,U) \arrow[l, "h"] \arrow[u, "k"'] \end{tikzcd}$$

---

[1] v_Y, v_V sont les fonctions « ordre » définies par les anneaux locaux réguliers $O_{X,Y}$, $O_{V,U}$ dans $\Omega(X)$, $\Omega(U)$ respectivement.

où i, j, k, l sont des morphismes locaux et h est le morphisme canonique $O(Z, U) \rightarrow (O(Z, U))_{\underline{p}}$ avec $\underline{p}$ l'idéal premier de V dans $O(Z, U)$. On a deux circonstances favorables :

$$c) \qquad v_Y = v_{Y'},$$

$$d) \qquad v_V \mid O(Z, U) = \sigma$$

avec σ la fonction ordre associé à $\underline{p}$. La première est vraie parceque π est l'eclatement de X le long de Y. La seconde découle du fait que $\underline{p}$ est principal et $O(Z, U)$ normal, par hypothèse, d'où on déduit que $\underline{p}^n$ est $\underline{p}$-primaire pour tout n naturel positif; il en resulte $(\underline{p}^n\, O(V, U)) \cap O(Z, U) = \underline{p}^n$ ce qui montre bien que $v_V \mid O(Z, U) = \sigma$. On conclut maintenant de la façon suivante. Soit $\alpha \in O(Y, X)$. On a

$$v_{Y'}(\alpha) = v_Y(\alpha) \leq v_V(\alpha)$$

à cause de c) et de la relation de domination donnée par i;

$$v_V(\alpha) = \sigma(\alpha) \leq v_{Y'}(\alpha)$$

parceque $\alpha \in O(Z, U)$ compte tenu de l et $O(Z, U)$ est dominé par $O(Y', X')$.

2) Soit $u \in U$ et $x = \varphi(u)$. Il faut montrer que l'idéal $\mathcal{I}_x\, O_u$ de O_u est principal. On peut se borner au cas $u \in V$. Soit ω un générateur de l'idéal premier de V dans O_u. On peut écrire $\omega = \varphi^*(\alpha)/\varphi^*(\beta)$ avec $\alpha, \beta \in O_x$ dépourvus des facteurs premiers communs dans l'anneau factoriel O_x. On a $(\omega) = V$ dans un voisinage W de u dans U donc $v_V(\omega) = 1$. Mais $v_V(\omega) = v_Y(\alpha) - V_Y(\beta)$ d'après 1) d'où $n = v_Y(\alpha) > 0$. De l'égalité précédente $(\omega) = V$ valable dans W et de l'hypothèse que α et β n'ont pas des facteurs communs on déduit que $(\varphi^*(\alpha)) = nV$ dans W. Il s'ensuit que pour tout $\xi \in \mathcal{I}_x^n$ on a $(\varphi^*(\xi)/\varphi^*(\alpha)) \geq 0$ dans W parce que $v_V(\xi) \geq n$. Donc $\varphi^*(\xi) \in \varphi^*(\alpha)\, O_u$, O_u étant supposé normal. Par consequent $\mathcal{I}_x^n\, O_u = \varphi^*(\alpha)\, O_u$ est principal ce qui prouve que l'idèal $\mathcal{I}_x\, O_u$ est aussi principal, parce que l'anneau O_u est local.

LEMME 2. Soit $f_i\colon U \rightarrow X_i$ $(i = 1, 2)$ deux morphismes birationnels. Soit $x_i \in X_i$ $(i = 1, 2)$ tels que x_1 est normal sur X_1, f_1 est propre au dessus de x_1 et $f_1^{-1}(x_1) \subseteq f_2^{-1}(x_2)$. La correspondance birationnelle $\Gamma \subseteq X_1 \times X_2$ définie par f_i est règulière dans x_1 et $\Gamma(x_1) = x_2$.

Preuve. En vertu de Z. M. T. il suffit à voir que $(x_1 \times X_2) \cap \Gamma = \{(x_1, x_2)\}$. Soit $p_i\colon \Gamma \rightarrow X_i (i = 1, 2)$ les projections canoniques et $\varepsilon\colon U \rightarrow \Gamma$ l'unique morphisme birationnel avec $p_i \varepsilon = f_i (i = 1, 2)$. Par hypothèse $\varepsilon(f_1^{-1}(x_1)) \subseteq \varepsilon(f_i^{-1}(x_i))$, $(i = 1, 2)$ donc $p_i(\varepsilon(f_1^{-1}(x_1)) = x_i$ ce qui prouve que $\varepsilon(f_1^{-1}(x_1)) = \{(x_1, x_2)\}$ parce que $f_1^{-1}(x_1) \neq \varnothing$. Mais $\varepsilon(f_1^{-1}(x_1)) = p_1^{-1}(x_1)$ (f_1 étant propre au dessus de x_1) et $p_1^{-1}(x_1) = (x_1 \times X_2) \cap \Gamma$.

COROLLAIRE 1. Soit f_i: $U \to X_i (i = 1, 2)$ deux morphismes birationnels biréguliers dans $U \setminus V$ où V est un sous ensemble fermè de U. Soit $g_i = f_i/V$ et $f_i(V) = Y_i (i = 1, 2)$. On suppose f_1 propre et qu'il existe une application (d'ensembles) $\psi : Y_1 \to Y_2$ telle que $g_2 = \psi g_1$. Si X_1 est normal le long de Y_1 la correspondance birationnelle $\Gamma \subset X_1 \times X_2$ dèfinie par f_i est partout régulière dans X_1.

Preuve. En vertu du lemme précédent Γ est régulière dans chaque point de Y_1. Mais Γ est birégulière dans $X_1 \setminus Y_1$.

COROLLAIRE 2. Soit $f : U \to X$ un morphisme birationnel surjectif $S(f) = V$ et soit X factoriel dans chaque point de $Y = f(V)$. Soit $f' : U \to X'$ un morphisme birationnel propre dont $S(f') = V$ et chaque fibre de f'/V est contenue dans une fibre de f/V. On suppose X' normale dans chaque point de $Y' = f(V)$.

Il existe un isomorphisme canonique $h : X' \to X$ tel que $hf' = f$.

Preuve. En vertu du corollaire précédent la correspondance birationnelle $\Gamma \subset X' \times X$ est partout règulière dans X' donc on en obtient un morphisme birationnel $h : X' \to X$ tel que $hf' = f$. Il est claire que h est surjectif et birégulier dans $X' \setminus Y'$ donc $S(h) \subset Y'$. D'autre part $\operatorname{codim}_{X'} Y' > 1$ d'après Z. M. T. donc $\operatorname{codim}_{X'} S(h) > 1$. On conclut, avec le lemme 1, que $S(h) = \emptyset$.

THÉORÈME 2. Soit $f_1 : U \to X_1$ $(i = 1, 2)$ deux contractions régulières de U le long d'une même sous-variètès V. On suppose que chaque fibre de f_1/V est contenue dans une fibre de f_2/V. Il existe un isomorphisme $h : X_1 \to X_2$ tel que $hf_1 = f_2$.

Preuve. On vérifie aussitôt les hypothèses du corollaire précédent pour $f_1 = f'$, $f_2 = f$. Similairement on prouve le

THÉORÈME 3. Soit $f : U \to X$ un morphisme birationnel qui contracte régulièrement une sous-varieté V de U à un point. Soit $f' : U \to X'$ un morphisme birationnel propre tel que $S(f') = V$ et X' est normale le long de $Y' = f'(V)$. Il existe un isomorphisme $h : X' \to X$ tel que $hf' = f$.

REMARQUES 1. D'après le théorème 2 une contraction régulière $\varphi : U \to X$ le long de V est déterminée par $\varphi \mid V$ ce qu'on peut établir directement sans aucune hypothèse de non-singularité pourvu que X soit normale dans chaque point de Y. On a déjà vu que l'espace topologique T de X et l'application $f : U \to T$ sous-jacente à φ sont déterminés. On peut supposer X normale et alors $O_X = f_* O_U$. En effet $\Omega(U) = \Omega(X)$ et si $\alpha \in \Gamma(f^{-1}(A), O_U)$ avec A ouvert de X, le diviséur de α dans A est positif, φ etant propre donc $\alpha \in \Gamma(A, O_X)$.

2. Si V est régulièrement contractible à un point, cette contraction est unique absolument, d'après le théorème 3. Pourtant il y a des contractions régulières d'une sous-varieté V, transformant V dans des variétés de dimensions différentes, donc dont les variétés obtenues par contraction ne peuvent pas être isomorphes relativement à U. Un prend pour cela $V = P^{n_1} \times \ldots \ldots \times P^{n_r}$ avec P^{n_i} l'espace projectif de dimension $n_i (n_{i_r} > 0,\ 1 \leq i \leq r)$ et U égale au fibré en droites $V(\mathcal{L})$ associé à $\mathcal{L} = \prod_{i=1}^{r} p_i^* O_i(1)$, où $p_i : V \longrightarrow P^{n_i}$ est la projection canonique et $O_i(1) = O_{_{n^i}}(1)$. On considère V immergée dans U par la section nulle et on peut voir qu'il existe une contraction régulière f_j de U le long de V telle que f_j / V soit la projection canonique $V \longrightarrow \prod_{i \neq j} P^{n_i} = Y_j$. En effet on vérifie aisément que U peut être identifiée à l'eclatée selon la section nulle du fibré vectoriel E_j sur Y_j définie par $E_j = T_j \otimes L_j$ où T_j est le fibré vectoriel trivial de rang $n_j + 1$ sur Y_j et L est le fibré vectoriel associé à $\prod_{i \neq j} q_i^* O_i(1) = \mathcal{L}_j$, avec $q_i : Y_j \longrightarrow P^{n_i}$ la projection canonique. Il suffit pour cela de remarquer que l'eclatée de T_j selon la section nulle est égale au fibré vectoriel $V(O_{P(T_j)}(1))$ sur $P(T_j) = V$, on a

$$O_{P(T_j)}(1) = p_j^* O_j(1)$$

$$P(T_j) = P(E_j)$$

$$O_{P(E_j)}(1) = O_{P(T_j)}(1) \otimes \varrho_j^* \mathcal{L}_j$$

$$\varrho_j^* \mathcal{L}_j = \prod_{i \neq j} p_i^* O_i(1)$$

donc $O_{P(E_j)}(1) = \mathcal{L}$ et de plus l'eclatée de E_j selon la section nulle est égale à $V(O_p(E_j)(1))$. On obtient ainsi r contractions régulières de U le long de $V, f_j : U \longrightarrow X_j (1 \leq j \leq r)$ telles que $f_j / V = \varrho_j$ où X_j ne peut pas être isomorphe a X_i pour $i \neq j$ si $n_i \neq n_j$ (relativement à U).

On peut appliquer cet exemple dans le cas particulier suivant. Soit X la variété projective d'équation $z_1 z_2 - z_3 z_4 = 0$ dans l'espace projectif P^4 de coordonnées, homogènes z_0, z_1, z_2, z_3, z_4. Soit $\pi : U \longrightarrow X$ l'eclatement de X dans $Q = (1, 0, 0, 0, 0)$. Alors $V = n^{-1}(Q)$ est la quadrique d'équation $x_1 x_2 - x_3 x_4 = 0$ dans P^3, isomorphe à $P^1 \times P^1$, par l'immersion de Segre

$P^1 \times P^1 \to P^3$ définie en prenant:

$$x_1 = \xi_0^1 \xi_0^2$$

$$x_2 = \xi_1^1 \xi_1^2$$

$$x_3 = \xi_0^1 \xi_1^2$$

$$x_4 = \xi_1^1 \xi_0^2$$

avec ξ_0^i, ξ_1^i $(i = 1, 2)$ coordonnées homogènes dans le facteur de rang i de $P^1 \times P^1$. Soit P_i: $V \to p^1$ $(i = 1, 2)$ les projections canoniques. On peut montrer que U est non-singulière et qu'il existe une contraction régulière f_i de U le long de V telle que $f_i / V = p_i$ $(i = 1, 2)$. Le problème étant local sur U au voisinage de V on peut remplacer X par $X \setminus (X \cap H)$ où H est l'hyperplan $z_0 = 0$ de P^4. Alors X est le cône affine de V, donc U est le fibré vectoriel $V(\mathcal{L})$ avec $\mathcal{L}$ égal au faisceau induit sur V par $O_{p^3}(1)$. Or la section de V par l'hyperplan $x_3 = 0$ est égale à $C_1 + C_2$ où C_i est la droite $x_i = x_3 = 0$ $(i = 1, 2)$ ce qui prouve que $\mathcal{L} = \prod_{i=1}^{2} p_i^* O_{P^1}(1)$. On se trouve donc dans la situation précédente avec $r = 1$, $n_1 = n_2 = 1$.

On peut retrouver, à partir de X, les varietés X_i obtenues par les contractions f_i $(i = 1, 2)$ dans l'exemple précédent. Soit L le sous-space de P^4 défini par

$$z_1 = z_3 = 0$$

L est une hypersurface de X et nous allons montrer que X_2 coincide avec l'éclatée X' de X le long de L, i.e. le long de l'idéal $\mathcal{I}$ de L dans O_U. Si $P^4 = P$ et $f: \bar{P} \to P$ est le morphisme canonique obtenue en eclatant P selon L, alors X' est l'image inverse générique de X par f et $g = f \mid X'$ est le morphisme canonique $X' \to X \cdot g$ est birégulier dans $X' \setminus Q$ parceque $\mathcal{I}$ est inversible dans $X' \setminus Q$ (il suffit à voir que $\mathcal{I}$ est inversible dans $L \setminus Q$ ce qui résulte du fait que chaque point $x \in L \setminus Q$ est simple sur X et sur L à la fois). Il reste à déterminer $g^{-1}(Q)$. Mais $g^{-1}(Q) = \text{Proj } (S_Q)$ où S_Q est l'algèbre graduée positive sur Ω dont les composantes homogènes sont $(S_Q)_0 = O/\underline{m}$, $O = O(Q, X)$, $\underline{m} = m(Q, X)$ et pour $n > 0$, $(S_Q)_n = \mathcal{I}_Q^n / \underline{m}\mathcal{I}_Q^n$ avec la structure de Ω-module déduite de la structure de O-module de $\mathcal{I}_Q^n$. On peut montrer que $g^{-1}(Q) = f^{-1}(Q)$ qui est une droite projective, parce que $f^{-1}(L)$ est le fibré projectif sur L correspondant au fibré vectoriel associé avec le O_L-faisceau $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ où $\mathcal{J}$ est l'idéal de L dans O_P, qui est localement libre de rang 2. En effet si $A = \Omega[Z_1, Z_2, Z_3, Z_4]$ est l'algèbre affine de l'ouvert $A^4 = P^4 \setminus H$ alors $I = Z_1 A + Z_3 A$ est l'ideal de $L \cap A^4$ et $\underline{a} = (Z_1 Z_2 - Z_3 Z_4) A$ est l'idéal de $X \cap A^4 \cdot S_Q$ correspond à l'algèbre S sur Ω dont les composantes homogènes sont $S_n = (I^n + \underline{a})/(MI^n + \underline{a})$ avec $M = \sum_{i=1}^{4} Z_i A$. On en déduit $S_n = I^n/(I^n \cap (MI^n + \underline{a})) = I^n/(MI^n + \underline{a} \cap I^n) =$ $= I^n/MI^n$ parce que $\underline{a} \cap I^n = (Z_1 Z_2 - Z_3 Z_4) I^{n-1} \subset MI^n$. Or $f^{-1}(Q) =$ $= \mathrm{Proj}(T)$ où est l'algèbre graduée sur Ω avec $T_n = I^n/MI^n$. Ainsi $g^{-1}(Q) = C$ est une droite projective i. e. une sous-varieté de codimension 2 de X' ce qui montre le fait bien connu que le lemme 1 n'est peut pas être étendue sans hypothèses restrictives sur la variété X, le but du morphisme birationnel $\varphi : U \to X$ considéré là. On peut voir que la variété X' est nonsingulière, ce qui revient à prouver que chaque point de C est simple sur X'. Mais si $\bar{L} = f^{-1}(L)$ alors $L' = g^{-1}(L)$ satisfait à $L' = \bar{L} \cap X'$. Du fait que chaque point de $L \setminus Q$ est simple sur X il s'énsuit que la multiplicité de L' dans $\bar{L} \cap X'$, sur $\bar{P}$ est ègale à 1 i. e. $L' = \bar{L} \cdot X'$. Comme $C \subset L'$ ont conclut avec le critère de multiplicité 1 ([15]). On peut voir maintenant que $X' = X_2$. On peut se réduire de nouveau au cas affine i. e. remplacer X per $X \setminus (X \cap H)$. Alors g est le morphisme canonique $\mathrm{Proj}\ (S) \to X$ où S est l'algèbre graduée positive sur $B = A/\underline{a}$ dont les composantes homogènes sont

$$S_0 = B$$

$$S_n = (I^n + \underline{a}) \setminus \underline{a} \qquad (n > 0)$$

De même π est le morphisme canonique $\mathrm{Proj}\ (R) \to X$ avec R la B-algèbre graduée définie par

$$R_0 = B$$

$$R_n = (M^n + \underline{a}) \setminus \underline{a} \qquad (n > 0)$$

On a un morphisme canonique $\omega : S \to R$ défini par les morphismes d'inclusions $I^n \to M^n$ et il suffit à voir que le morphisme h associé à ω est partout défini sur U et $h/V = P_2$. Le fait que h est partout défini résulte de l'observation que l'idéal $(I/\underline{a})\, O_U = \mathfrak{I} O_U$ est inversible ; c'est l'idéal associé au diviseur $V + L_U$, où L_U est l'image inverse générique de L par π. $l = h/V$ est le morphisme défini par l'homomorphisme $\lambda : S/MS \to R/MR$ déduit de ω. Or S/MS est une algèbre de polynomes sur Ω engendrée par les images T_1, T_3 de Z_1, Z_3 dans $I/MI = S_1/MS_1$. De même $R/MR = \Omega[Z_1, Z_2, Z_3, Z_4]/(Z_1 Z_2 - Z_3 Z_4) = B$, parce que c'est l'algèbre du con tangent de Zariski de U dans Q qui coincide évidemment avec U. λ est défini par $\lambda\ (T_i) = \bar{Z}_i$ (classe de Z_i dans B),

$i = 1, 3$. Si $\Gamma = P^1 \times (a, b)$, l'inclusion $\Gamma \xrightarrow{i} V$ correspond à la surjection canonique $B \xrightarrow{\sigma} B/(b\bar{Z}_1 - a\bar{Z}_3\,,\, a\bar{Z}_2 - b\bar{Z}_4)$. Donc ker $(\sigma\lambda) = (b\,T_1 - a\,T_3)$ ce qui prouve que $l\,(\Gamma) = (a, b)$ i. e $l = p_2$.

2. L'existence des contractions régulières.

LEMME 3. Soit Y une variété affine, $V = Y \times P^{r-1}\,(r > 1)$, $\varrho : V \to Y$ la projection, $0\,(1)$ le O_V-faisceau immage inverse de $O_{P^{r-1}}(1)$ par la projection $V \to P^{r-1}$. Soit U une variété contenant V comme sous-variété, $i : V \to U$ le morphisme d'inclusion et $\mathcal{J}$ l'idéal de V dans O_U. Soit $\underline{p} = \Gamma(U, \mathcal{J})$.

On suppose Y nonsingulière, $0\,(1) = i^*\mathcal{J}$, U normale, les morphismes canoniques $\Gamma(U, O_U) \to \Gamma(V, O_V)$, $\Gamma(U, \mathcal{J}) \to \Gamma(V, 0\,(1))$ surjectifs et $\underline{p}\; O_U = \mathcal{J}$.

Dans ces conditions il existe une contraction régulière $\varphi : U \to X$ telle que $\varphi / V = \varrho$.

Preuve. Soit $A = \Gamma(U, O_U)$ et $U \to X$ le morphisme correspondant à l'application identique $A \to A$. Le morphisme $\Gamma(Y, O_Y) \to \Gamma(V, O_V)$ associé à ϱ est un isomorphisme en vertu de l'hypothèse. Donc le morphisme $A = \Gamma(U, O_U) \to \Gamma(V, O_V)$, définit un morphisme $j : Y \to X$, qui est une immersion fermée. Le diagramme

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varrho"'] & U \arrow[d, "\varphi"] \\ Y \arrow[r, "j"'] & X \end{tikzcd}$$

est commutatif, en vertu de la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(Y, O_Y) \arrow[d] \\ \Gamma(U, O_U) \arrow[r] & \Gamma(V, O_V) \end{tikzcd}$$

Soit X' l'eclatée de X selon Y et $\pi : X' \to X$ le morphisme canonique. On a $\underline{p} = \ker(\Gamma(U, O_U) \to \Gamma(V, O_V))$ donc $\underline{p}$ est l'idéal de Y dans A. Par hypothèse $\underline{p}\; O_U = \mathcal{J}$. Or $i^*\mathcal{J} = 0\,(1)$ implique $\mathcal{J}$ inversible (Nakayama) donc d'après la propriété universelle de π, il existe un morphisme $\varepsilon: U \to X'$ faisant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\varphi"'] & X' \arrow[d, "\pi"] \\ & X \end{tikzcd}$$

On peut voir qu'il existe un voisinage W de V dans U tel que ε/W soit une immersion ouverte. Pour démontrer ça soit S la A-algèbre graduée dont les composantes homogènes sont $S_0 = A$, $S_n = \underline{p}^n$. Par définition $X' = \operatorname{Proj}(A)$ et ε est défini par le morphisme canonique $\underline{p} = S_1 \to \mathcal{I}$. On en déduit que εi est défini par $\underline{p} \to i^*\mathcal{I} = \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$. Mais en vertu de l'hypothèse $V = \operatorname{Proj}(E)$ avec $E = \Gamma(V, 0(1)) = \Gamma(V, i^*\mathcal{I})$ module libre sur $B = A/\underline{p}$. D'autre part on a supposé $\underline{p} \to \Gamma(V, 0(1))$ surjectif donc le morphisme défini par α: $S \to S_E(B)$, avec $S_E(B)$ la B-algèbre symmétrique associée à E, est surjectif. Il en résulte que εi est une immersion fermée. Donc $\dim(V) \leq \dim X' - 1$, parce que $\varepsilon(V) \subseteq Y' = \pi^{-1}(Y)$, d'où $\dim V \leq$ $\leq \dim X - 1$ i. e. $\dim U = \dim X$. Mais A est intégralement clos dans $\Omega(U)$, parce que U est normale donc $\dim U = \dim X$ implique $\Omega(U) = \Omega(X)$ i. e. φ est un morphisme birationnel. Compte tenu des dimensions, il s'en suit que $\varepsilon(V)$ est une composante C de $Y' = \pi^{-1}(Y)$. Comme $\underline{p}\, O_U = \mathcal{I}$, $\varphi^{-1}(Y) = V$ donc $\varepsilon^{-1}(Y') = V$ et du fait que εi est injectif on déduit que chaque point de V est isolé dans sa fibre par rapport à ε. D'après Z.M.T. il existe un voisinage U_0 de V dans U et une immersion ouverte $\omega: U_0 \to Z$, avec Z la normalisée de X', qui fait commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} U_0 \arrow[r, "\omega"] \arrow[d] & Z \arrow[d, "\mu"] \\ U \arrow[r, "\varepsilon"] & X' \end{tikzcd}$$

où μ est le morphisme canonique. Donc si $\nu = \pi\mu$, $\omega(V) = D$ est une composante isolée de $\nu^{-1}(Y)$. Mais $\nu: Z \to X$ est un morphisme rationnel et X est normale, parce que A est intégralement clos. Donc $\nu^{-1}(Y) = D$ par le théoreme de connexion de Zariski ([14]). Par conséquant $C = Y'$, $\mu^{-1}(C) = D$ et $\mu/\mu^{-1}(C)$ est bijectif ce qui montre que pour chaque $z \in D$ le morphisme canonique $\mu_z : O_{X'}, \underset{\mu(z)}{\longrightarrow} O_{Z,z}$ est fini. Mais ce deux anneaux ont le même corps résiduel donc pour montrer qu'ils coincident il suffit à voir que $\underline{m}_{\mu(z)} O_{Z,z} = \underline{m}_z$ où $\underline{m}_{\mu(z)}, \underline{m}_z$ sont les idéaux maximaux respectifs (Nakayama). On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
O_{X',\mu(z)} \arrow[rr] \arrow[dr, "\varepsilon_v"'] & & O_{Z,z} \arrow[dl] \\
& O_{U,v} &
\end{tikzcd}$$

avec $z = \omega(v)$, $\mu(z) = \varepsilon(v)$ donc on s'est réduit à $m_{\mu(z)} O_{U,v} = \underline{m}_v$. Soit $T = \mathrm{Proj}\ (S/\underline{p}S)$ l'image inverse de Y par π en tant comme sous-schéma. On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \underline{p}_y O_{X',\mu(z)} \arrow[r] \arrow[d] & O_{X',\mu(z)} \arrow[r] \arrow[d] & O_{T,\mu(z)} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{J}_v \arrow[r] & O_{U,v} \arrow[r] & O_{V,v} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

avec $y = \pi(\mu(z)$ et $O_{T,\mu(z)} \to O_{V,v}$ surjectif parce que $\varepsilon i : V \to T$ est une immersion. Ce ci montre que $\underline{m}_{\mu(z)} O_{U,v} = \underline{m}_v$, parceque $\underline{p}\ O_U = \mathcal{J}$. Ainsi μ est birégulièr le long de D. Donc ε est birégulier dans chaque point de V ce qui prouve l'existence du voisinage W cherché. On peut identifier W avec son image par ε et alors $\pi^{-1}(Y) = V$. Comme π est propre et birégulier dans $X' \setminus V$ on en déduit que $\pi(W)$ est un voisinage de Y dans X. En remplaçant U par W et X par $\pi(W)$ on trouve finalement le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\rho"'] & U \arrow[d, "\pi"] \\
Y \arrow[r, "j"'] & X
\end{tikzcd}$$

avec π propre, $\pi(U \setminus V) = X \setminus Y$ et π birégulier dans $U \setminus V$.

Pour conclure il reste seulement à prouver que X est nonsingulière dans chaque point de Y. Mais du diagramme $(*)$ on déduit $O_{T,\, \varepsilon(v)} = O_{V,\, v}$ pour tout $v \in V$ donc le morphisme $\varepsilon\, i : V \longrightarrow T$ est un isomorphisme. Il en résulte que le morphisme $S/\underline{p}\, S \xrightarrow{\alpha} \bigoplus\limits_{0}^{\infty} \Gamma(V, O(n))$ correspondant est un TN-isomorphisme ([3, π]) i. e. $\underline{p}^n/\underline{p}^{n+1} \xrightarrow{\sim} \Gamma(V, 0\,(n))$ pour $n > h$, avec h convenable. Mais on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d] & \bigoplus\limits_{0}^{\infty} \Gamma(U, \mathcal{J}^n) \arrow[d] \\
S/\underline{p}S \arrow[r, "\alpha"'] & \bigoplus\limits_{0}^{\infty} \Gamma(V, O(n))
\end{tikzcd}$$

d'où on obtient un diagramme

$$\begin{tikzcd}
\underline{p}^n/\underline{p}^{n+1} \arrow[r, "\beta_n"] \arrow[dr, "\alpha_n"'] & \Gamma(U, \mathcal{J}^n)/\Gamma(U, \mathcal{J}^{n+1}) \arrow[d, "\gamma_n"] \\
 & \Gamma(V, O(n))
\end{tikzcd}$$

aussi commutatif. La suite

$$O \longrightarrow \mathcal{J}^{n+1} \longrightarrow \mathcal{J}^n \longrightarrow i_* \, O\,(n) \longrightarrow O$$

est' exacte, parce que $i^* \mathcal{J} = O\,(1)$ et par consèquant γ est injectit. Comme α est surjectif, parce que α_1 est surjectif et $\Gamma\,(V, 0\,(n))$ engéndrée sur $B = \Gamma\,(V, O_V)$ par $\Gamma\,(V, 0\,(1))$, il s'en suit que γ est bijectif. Donc β_n est surjectif pour tout n naturel et bijectif pour $n > h$ ce qui implique $p^n = \Gamma(U, \mathcal{J}^n)$ pour tout n i. e α est un isomorphisme. En particulier $\alpha_1 : \underline{p}/\underline{p}^2 \longrightarrow \Gamma(V, 0\,(1))$ est un isomorphisme donc $\underline{p}/\underline{p}^2$ est un B-module libre de rang T, comme $\Gamma(V, 0\,(1))$. On en déduit avec Nakayama que $\underline{p}_y$ est engendrée par r elements pour tout $y \in Y$. Or $r = \operatorname{codim}_x Y$, donc X est nonsingulière dans y parce que Y est nonsingulière.

LEMME 4. Soit V une sous-variété d'une variété U tel que U est normale dans chaque point de V et l'idéal $\mathcal{J}$ de V dans O_U est inversible. Soit $\varrho : V \longrightarrow Y$ un morphisme rationnel.

On suppose que pour chaque point $y \in Y$ il existe un voisinage Y_y de y dans Y, un ouvert U_y de U tel que $V \cap U_y = \varrho^{-1}(Y_y)$ et une contraction regulière φ_y de U_y le long de $V_y = \varrho^{-1}(Y_y)$ relativement à $\varrho_y = \varrho / V_y$. Alors U est régulièrement contractible le long de V relativement à ϱ.

Preuve. On peut prendre un recouvrement fini de Y avec des ouverts $Y_{y_i} = Y_i \, (1 \leq i \leq s)$ et remplacer U par $\bigcup_{i=1}^{s} U_i$, $U_i = U_{y_i}$. Soit X l'espace topologique quotient de U associé à ϱ et $f : U \longrightarrow X$ l'application continue canonique. Soit $O_X = f_* O_U$. Il suffit à voir que (X, O_X) est une varieté algébrique. Soit $X_i = f(U_i)$. En vertu des hypothèses $(X_i, O_X/X_i)$ est une variété algébrique. En effet il existe une contraction régulière $\varphi_i = \varphi_{y_i}$: $U_i \longrightarrow Z_i$ telle que $\varphi_i / V_i = \varrho_i$ avec $V_i = V_{y_i}$, $i = y_i$. L'espace topologique sous-jacent à Z_i peut être identifié à X_i e alors $O_{X_i} = O_X / X_i$ s'identifie à O_{Z_i} (remarque 1 de § 1). Il reste seulement à prouver que la diagonale Δ est fermée dans $X \times X$ ce qui revient à voir que $\Delta_{ij} = \Delta \cap (X_i \times X_j)$ est fermée dans $X_i \times X_j$. On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} D_{ij} \arrow[r] \arrow[d] & \Delta_{ij} \arrow[d] \\ U_i \times U_j \arrow[r] & X_i \times X_j \end{tikzcd}$$

avec $D_{ij} = D \cap (U_i \times U_j)$ où D est la diagonale de $U \times U$ parce que $\varphi_i / U_i = = f / U_i$. Or D_{ij} est fermé dans $U_i \times U_j$ et $\varphi_i \times \varphi_j$ est propre d'où on déduit que l'image Γ_{ij} de D_{ij} dans $X_i \times X_j$ est fermé. On a $\Gamma_{ij} \subseteq \Delta_{ij}$. Si $(x, x) \in \Delta_{ij}$, alors $x \in X_i \cap X_j$ et $f^{-1}(x) \neq \emptyset$, donc $(x, x) = \varphi_i \times \varphi_j (u, u)$ avec $u \in f^{-1}(x)$. Par conséquant $\Gamma_{ij} \; \Delta_{ij}$.

DÉFINITION. Soit B une sous-variété d'une variété A $i : B \longrightarrow A$ le morphisme d'inclusion et $\theta : B \longrightarrow C$ un morphisme. On dit qu'un O_A faisceau $\mathcal{F}$ possède assez des sections au voisinage des fibres de θ si pourtout $y \in C$ et pour toute section σ de $i^* \mathcal{F}$ au dessus d'un voisinage de $\theta^{-1}(y) = B_y$ dans B il existe une section τ de $\mathcal{F}$ au dessus d'un voisinage de B_y dans A telle que

$$(\varrho_{\mathcal{F}}(\tau))_x = \sigma_x$$

pour tout $x \in B_y$ où $\varrho_{\mathcal{F}}$ est le morphisme canonique $\mathcal{F} \longrightarrow i_* i^* \mathcal{F}$.

LEMME 5. Soit V une sous-variété d'une variété U telle que U est normale dans chaque point de V et l' idéal $\mathcal{I}$ de V dans O_U inversible. Soit $\varrho : V \to Y$ un morphisme rationnel. On suppose Y nonsingulière, $V = \operatorname{Proj}(\mathcal{E})$ avec $\mathcal{E}$ un O_Y-module localement libre de rang $r > 1$, ϱ la projection canonique $\operatorname{Proj}(\mathcal{E}) \to Y$ et $i^*\mathcal{I} = 0\,(1)$ avec $i : V \to U$ le morphisme canonique.

Si O_U et $\mathcal{I}$ possèdent assez des sections aux voisinages des fibres de ϱ alors U est régulièrement contractible par rapport à ϱ.

Preuve. D'après le lemme 4 il suffit de prouver l'existence de la contraction cherchés localement par rapport à V. Pour conclure il reste donc seulement à montrer qu'on peut se situer dans les hypothèses du lemme 3, pourvu qu'on remplace Y et U par des ouverts convenables.

On peut supposer $\mathcal{E}$ libre sur O_Y engandrée par $\varepsilon_i \in (Y, \mathcal{E})\ (1 \leq i \leq r)$ et nous allons identifier $\Gamma(V, i^*\mathcal{I}) = \Gamma(V, 0\,(1))$ avec $\Gamma(Y, \mathcal{E})$. De plus on peut se borner au càs Y affine. Soit $\Omega[Y] = \Omega[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ l'algèbre affine de Y. En vertu de l'hypothèse en restreignant eventuellement U à un voisinage de V convenable, on peut trouver $\varphi_i \in \Gamma(U, \mathcal{I})\ (1 \leq i \leq r)$ tel que ε_i soit l'image de φ_i par le morphisme canonique $\Gamma(U, \mathcal{I}) \to \Gamma(V, i^*\mathcal{I})$. Soit $y_0 \in Y$. Montrons qu'il existe un ouvert affine $Y_0 = \operatorname{Spec} C$ de Y avec $y_0 \in Y_0$, $C = \Omega[\xi_1, \dots, \xi_n]$ et $\bar{\xi}_t \in \Omega(U)\ (1 \leq t \leq n)$ définies dans un ouvert U_0 de U pour lequel $U_0 \cap V = \varrho^{-1}(Y_0)$ et telles que $i^* \bar{\xi}_t = \varrho^* \xi_t$. On a $\varrho^*\alpha_j = i^*\bar{\alpha}_j\,(1 \leq j \leq m)$ avec $\bar{\alpha}_j \in \Omega(U)$ défini dans un voisinage W de $\varrho^{-1}(y_0)$ dans U. Si $F = V \setminus W$ alors $\varrho(F)$ est fermé parce que ϱ est propre donc $Y \setminus \varrho(F)$ est un voisinage de y_0. Il est clair que pour tout $y \in (Y \setminus \varrho(F))$, $\varrho^{-1}(y) \subset W$. On peut trouver un voisinage $Y_0 \subset (Y \setminus \varrho(F))$ de y_0 telle que $Y_0 = D(f) = \{y \in Y \mid f(y) \neq 0\}$ avec $F = P(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $P \in \Omega[T_1, \dots, T_m]$ (l'anneau des polynomes en m indeterminées sur Ω). Soit $V_0 = \varrho^{-1}(Y_0)$. On a $V_0 \subset W$ et $\varrho_0 = \varrho \mid V_0$ est propre sur Y_0. Si $g = P(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_m)$ alors $g \in \Gamma(W, O_U)$ et pour tout $v \in V_0$, $g(v) = P(\bar{\alpha}_1(v), \dots, \bar{\alpha}_m(v)) = P(i^*\bar{\alpha}_1(v), \dots$ $\dots, i^*\bar{\alpha}_m(v)) = P(\varrho^*\alpha_1(v), \dots, \varrho^*\alpha_m(v)) = P(\alpha_1(\varrho(v)), \dots, \alpha_m(\varrho(v)) = f(\varrho(v)) \neq 0$ parce que $\varrho(v) \in Y_0$. Ainsi on voit que l'ensemble fermé $V(g)$ des zéros de g dans W satisfait à $V(g) \cap V_0 = \varnothing$ i. e. $V_0 \subseteq (W\ V(g))$. Il existe donc un ouvert U_0 de $W \setminus V(g)$ tel que $V \cap U_0 = V_0$ et $g^{-1} \in \Gamma(U_0, O_U)$. On a $f^{-1} \in \Gamma(Y_0, O_Y)$ et $i^* g^{-1} = \varrho^* f^{-1}$. Mais $Y_0 = \operatorname{Spec}(\Omega[\alpha_1, \dots, \alpha_m, f^{-1}])$ donc si on prend $n = m + 1$, $\xi_1 = \alpha_1, \dots, \xi_{n-1} = \alpha_m$, $\xi_n = f^{-1}$, $\bar{\xi}_1 = \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\xi}_{n-1} = \bar{\alpha}_n$, $\bar{\xi}_n = g^{-1}$ on a $i^* \bar{\xi}_t = \varrho^* \xi_t\,(1 \leq t \leq n)$. Par conséquent si on remplace U par U_0, V par V_0 et Y par Y_0 on a $Y = \operatorname{Spec}(\Omega[\xi_1, \dots, \xi_n])$ et $i^* \bar{\xi}_t = \varrho^* \xi_t\,(1 \leq t \leq n)$ avec $\bar{\xi}_t \in \Gamma(U, O_U)$.

Soit $v \in V$. Il existe $i = i(v)\ (1 \leq i \leq r)$ tel que $\varepsilon_i \notin \underline{m}_{v,V}(i^*\mathcal{I})$ où $\underline{m}_{v,V}$ est l'idéal maximal de l'anneau local de v sur V; en effet $V = \operatorname{Proj}(\mathcal{E})$,

$i^* \mathcal{J} = 0\,(1)$ implique $V = \bigcup_1^r D_+(\varepsilon_i)$ avec $D_+(\varepsilon_i) = \{v \in V \mid \varepsilon_i \notin \underline{m}_{v,\,V}(i^* \mathcal{J})\}$. Mais $(i^* \mathcal{J})_v = \mathcal{J}_v / \mathcal{J}_v^2$ et $\varepsilon_i = \varphi_i \bmod \mathcal{J}_v^2$ donc $\varphi_i \notin \underline{m}_v \mathcal{J}_v$ où $\underline{m}_v$ est l'idéal maximal de l'anneau local O_v de v sur U. Comme $\mathcal{J}_v$ est principal $\varphi_i \notin \underline{m}_v \mathcal{J}_v$ implique $\varphi_i O_v = \mathcal{J}_v$. Donc $\sum_1^r \varphi_i O_u = \mathcal{J}_u$ pour chaque point $u \in V$. Alors on peut restreindre U à un voisinage de V de telle sorte qu'on ait $\sum_1^r \varphi_i O_U = \mathcal{J}$ d'où on déduit $\underline{p}\, O_U = \mathcal{J}$ avec $\underline{p} = \Gamma(U, \mathcal{J})$. De plus comme U est normale dans chaque point de V on peut supposer U normale.

REMARQUE. Dans le lemme précédent on peut remplacer l'hypothèse que O_U et $\mathcal{J}$ possèdent assez des sections aux voisinages des fibres de ϱ par les conditions suivantes

a) pour tout $y \in Y$ et $\alpha \in O_{Y,y}$ il existe $\overline{\alpha} \in \Omega(U)$ régulière dans tout point de $V_y = \varrho^{-1}(y)$ telle que $i^* \overline{\alpha} = \varrho^* \alpha$

b) pour tout $v \in V$ il existe des sections de $\mathcal{J}$ au dessus d'un voisinage de V_y dans U dont les images dans $E_y = \Gamma(V_y, 0\,(1))/\underline{m}\,\Gamma(V_y, 0\,(1))$ avec $0\,(1) = O_{V_y}(1)$ et $\underline{m}$ l'idéal maximal de $O_{Y,y}$ engendrent E_v sur Ω.

En effet il est clair que *a*) et *b*) sont remplies dans les hypothèses du lemme et que *a*) équivaut à dire que O_U possède assez des sections aux voisinages des fibres de ϱ. Reste seulement à voir que la condition du lemme concernant les sections de $\mathcal{J}$ est aussi remplie, en supposant *b*). Le problème étant local on peut supposer Y affine d'algèbre A et $V = \operatorname{Proj}(\mathcal{E})$ avec $\mathcal{E}$ O_Y-module libre i. e. $\mathcal{E} = E \otimes_A O_Y$ et E A-module libre, $E = \Gamma(Y, \mathcal{E})$. On a $\Gamma(V, O_V(1)) = E$ et il faut montrer que le morphisme $\Gamma(U, \mathcal{J}) \to E$ est surjectif avec Y et U convenables. Soit F l'image de celui-ci dans E. Il suffit à voir que $F \otimes_A O_{Y,y} = E \otimes_A O_{Y,y}$ pourtout $y \in Y$ avec U convenable. Par Nakayama on peut réduire modulo $\underline{m}$ es on trouve précisément *b*).

Pour démontrer le théorème énoncé dans l'introduction il suffit maintenant à établir, le lemme suivant.

LEMME 6. Soit U, V, Y, ϱ, i, $\mathcal{J}$ comme dans le lemme 5. Les conditions suivantes sont équivalentes

a) O_U et $\mathcal{J}$ possèdent assez des sections aux voisinages des fibres de ϱ

b) $R^1 f_* \mathcal{J}^n = 0$ pour tout n naturel

c) $R^1 f_* \mathcal{J}^2 = 0$

d) $R^1 f_* \mathcal{J}^{n_0} = 0$ pour un n_0 avec $n_0 \geq 2$.

En effet s'il existe une contraction régulière $\varphi : U \to X$ alors, d'après le théorème 1, U est obtenue en eclatant X selon Y, donc les hypothèses du lemme 6 sont remplies. On peut voir aisément que a) est aussi vérifiée, en se réduisant au càs X affine, ce qui est licit, le problème étant local. Dans ce càs $\Gamma(Y, O_Y) = \Gamma(V, O_V)$, $\Gamma(V, 0(1)) = \underline{p}/\underline{p}^2$, avec $\underline{p}$ l'idéal premier de Y dans $\Gamma(X, O_X) = A$, $A \subseteq \Gamma(U, O_U)$, $\underline{p} \subseteq \Gamma(U, \mathcal{J})$ ce qui prouve bien a). Réciproquement si les hypothèses du lemme 6 sont vérifiées et a) l'est aussi, alors l'existence de la contraction cherchée est garantie par le lemme 5 et son unicité par les théorèmes 1 et 2.

Démonstration du lemme 6. $a) \Longrightarrow b)$. D'après le lemme 5 il existe une contraction régulière $\varphi: U \longrightarrow X$ telle que $\varphi/V = \varrho$. Alors φ est obtenue en eclatant X selon Y donc $\mathcal{J}$ est ample pour φ. D'après un critère d'amplitude ([3], III) $R^1 \varphi_* \mathcal{J}^n = 0$ pour n assez grand donc $R^1 f_* \mathcal{J}^n = 0$ parce que f est l'application sous-jacente à φ. On a la suite exacte

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{J}^{n+1} \longrightarrow \mathcal{J}^n \longrightarrow i_* O(n) \longrightarrow 0$$

donc pour tout n naturel la suite

$$(**) \quad f_* \mathcal{J}^n \longrightarrow f_* i_* O(n) \longrightarrow R^1 f_* \mathcal{J}^{n+1} \longrightarrow R^1 f_* \mathcal{J}^n \longrightarrow R^1 f_* i_* O(n)$$

est encore exacte. Or $f_* \mathcal{J}^n \longrightarrow f_* i_* O(n)$ est surjectif en vertu de a), d'après la démonstration du lemme 3. De plus $R^1 f_* i_* O(n) = j_* R^1 \varrho_* O(n)$ avec j l'immersion $Y \longrightarrow X$. Donc $R^1 f_* i_* O(n) = 0$ parce que $R^1 \varrho_* O(n) \doteq 0$ ([3]). Il s'en suit que $R^1 f_* \mathcal{J}^{n+1} \xrightarrow{\sim} R^1 f_* \mathcal{J}^n$ pour tout n naturel d'où b).

$b) \Longrightarrow c)$ et $c) \Longrightarrow d)$ évidemment. $d) \Longrightarrow a)$ comme suit. La suite exacte $(**)$ pour $n = n - 1$ montre que $R^1 f_* \mathcal{J}^{n_0 - 1} = 0$ parceque $R^1 f_* i_* (O(n)) = 0$ pour $n \geq 0$. Par récurrence $R^1 f_* \mathcal{J}^n = 0$ pour $0 \leq n \leq n_0$. Alors de $(**)$ on déduit que les morphismes $f_* \mathcal{J} \longrightarrow f_* i_* O(1)$, $f_* O_U \longrightarrow f_* i_* O_V$ sont surjectifs ce qui est précisément a).

Théorème 5. Soit U une variété projective et V une sous-variété telle que U soit normale dans chaque point de V et l'idéal $\mathcal{J}$ de V dans 0 soit inversible. V est contractible à un point simple d'une variété X si et seulement si

1⁰) V est un espace projectif P^{d-1} avec $d = \dim U$

2⁰) $i^* \mathcal{J} = O_P(1)$ où $i: V \dashrightarrow U$ est le morphisme d'inclusion.

Si ces conditions sont remplies alors X est aussi projective.

Preuve. 1^0 et 2^0 sont les conditions de Castelnuovo-Enriques qui sont nécessaires pour l'existence d'une contraction qui transforme V dans un point simple. Pour prouver qu'elles sont aussi suffisantes nous allons voir, en les supposant satisfaites, que la condition a) du lemme 6 est aussi vérifiée. On remarque d'abord que $\Gamma(V, O_V) = \Omega$ en vertu de 1^0 donc O_U possède assez des sections. Soit $\mathcal{H}$ le faisceau associé à une section hyperplane de U et n naturel assez grand pour qu'on ait $H^1(U, \mathcal{I}(n)) = 0$ avec $\mathcal{I}(n) = \mathcal{I} \otimes \mathcal{H}^{\otimes n}$. Si $i^* \mathcal{H} = O(k)$ alors pour tout entier N la suite

$$0 \to \mathcal{I}^{\otimes(N+1)} \otimes \mathcal{I}(n) \to \mathcal{I}^{\otimes N} \otimes \mathcal{I}(n) \to i_* O(N+1+nk) \to 0$$

est exacte parce que

$$O \to \mathcal{I}^{\otimes(N+1)} \to \mathcal{I}^{\otimes N} \to i\, O(N) \to O$$

est exacte en vertu de 2^0. On prend successivement $N = -1, -2, \ldots, -nk-1$ et, compte tenu de $H^1(U, i_* O(nk+N+1)) = H^1(V, O(nk+N+1)) = 0$ pour $nk+N+1 > 0$ on voit finalement que les morphismes canoniques

$$\Gamma(U, \mathcal{I}^{\otimes(-nk)} \otimes \mathcal{I}(n)) \to \Gamma(V, O(1))$$

$$\Gamma(U, \mathcal{I}^{\otimes(-nk-1)} \otimes \mathcal{I}(n)) \to \Gamma)V, O_V)$$

sont surjectifs. Le dernier montre qu'il existe un diviseur positif D de U tel que $D \backsim nkV + H(n)$, où $H(n)$ est une section hyperplane de U de degré n, telle que $D \cdot V = O$. Donc $nkV + H(n) \backsim O$ dans $W = U \setminus$Supp D), $V \subset W$. Comme $\mathcal{I}^{\otimes(-nh)} \otimes \mathcal{I}(n) \mid W \approx \mathcal{I}/W$ le premier des epimorphismes précédents montre que $\Gamma(W, \mathcal{I}) \to \Gamma(V, O(1))$ est surjectif donc $\mathcal{I}$ possède assez des sections. Par conséquent il existe une contraction régulière $f: U \to X$ qui transforme V dans un point. Il reste à prouver que X est projective.

Le système linéaire complet $H(n)$ est trés ample. Donc $L = |nkV + H(n)|$ est très ample dans $U \setminus V$. D'autre part L n'a pas des points fixes parce que $H(n)$ n'en a pas et il existe $D \in L$ tel que $V \cdot D = 0$ i.e. $V \cap \operatorname{Supp}(D) = \emptyset$. Donc L définit un morphisme birationnel $\lambda: U \to Z$ dans une variété projective Z, qui est birégulier dans $U \setminus V$. D'autre part l'existence de $D \in L$ tel que $D \cdot V = 0$ montre que $\lambda(V)$ est réduit à un point. Il s'ensuit d'après Z.M.T. que la transformation birationnel définie par f et λ est régulière dans chaque point de X. On obtient ainsi un morphisme birationnel $X \to Z$, évidemment bijectif; on peut supposer Z normale et on conclut avec le remarque 1 de § 1 que c'est un isomorphisme.

On conclut par un exemple $V, U, \varrho: V \to Y$ vérifiant les conditions 1^0, 2^0 de Castelnuovo-Enriques dont $R^1 f_* \mathcal{I} \neq 0$. Dans le càs $\Omega = \mathbb{C}$ on en déduit ([12]) l'existence d'une contraction analytique telle que $\varphi / V = \varrho$, qui n'est pas algébrique.

Soit Z l'hypersurface d'équation $z_1 z_2 - z_3 z_4 + z_3^3 + z_4^3 = 0$ dans l'espace affine A^4 de dimension $4, \pi: U \to X$ le morphisme de l'eclatement de X dans

$Q = (O, O, O, O)$, $V = \pi^{-1}(Q)$ le cône des tangentes de X en Q, d'équation $x_1 x_2 - x_3 x_4 = O$ dans P^3. L'anneau gradué de $O = O_{x,Q}$ est $G = \Omega[x_1, x_2, x_3 x_4]/ /(x_1 x_2 - x_3 x_4)$ qui est intégre donc V est une hypersurface simple de U dont la valuation associée dans $\Omega(X)$ coincide avec la fonction ordre v définie par l'idéal maximal $\bar{m}$ de O. Il en resulte que l'idéal $\mathcal{I}$ de V dans O_U est égal a $\bar{m}\, O_U$, donc est inversible, ce qui prouve que chaque point de V est simple sur U, V étant nonsingulière. $V = P^1 \times P^1$ et si $P_i : V \to P^1$ sont les projections $p_1^* O(1) \otimes p_2^* O(1)$ est le O_V faisceau $O(1)$ associé à une section plane de V dans P^3 (§ 1). Soit $Y = P_1$ $\varrho = p_2$ i. e.

$$(1) \qquad \begin{aligned} \varrho((x_1, x_2, x_3, x_4)) &= (x_1, x_3) \text{ si } x_1 \neq O \text{ ou } x_3 \neq O \\ \varrho((x_1, x_2, x_3, x_4)) &= (x_4, x_2) \text{ si } x_2 \neq O \text{ ou } x_4 \neq O. \end{aligned}$$

Si E est le produit tensoriel du fibré trivial de rang 2 de base P^1 avec le fibré associé à $O(1)$, alors $V = \operatorname{Proj}(E)$, ϱ coincide avec la projection de celui-ci et $O(1) = O(1) \operatorname{Proj}(E)$. Soit $i : V \to U$ le morphisme d'inclusion. Pour voir que $i^* \mathcal{I} = O(1)$ soit $\psi_i = \varphi_i \circ \pi$ avec $\varphi_i \in \Omega[X]$ définie par Z_i. On a $(\varphi_1) = H$ où H est l'hypersurface $z_1 = 0$, $z_3^3 + z_4^3 - z_3 z_4 = 0$. Donc $(\psi_1) = H' + V$ avec $\pi(H') = H$ parceque $v(\varphi_1) = 1$. Or $H' \cdot V = L_3 + L_4$ avec L_i la droite $x_1 = x_i = 0$ $(i = 3, 4)$ ce qui montre que $i^* \mathcal{I} = O(1)$. Ainsi les conditions $1^0, 2^0$, sont remplies. $\mathcal{I}$ possède assez de sections par rapport à ϱ parceque V étant projectivement normale, $\Gamma(V, O(1)) = \sum_1^4 \xi_i \Omega$ avec ξ_i la classe de X_i dans l'anneau des cordonnées homogènes de V. Or ξ_i est induite par $\psi_i \in \Gamma(U, \mathcal{I})$ $(1 \leq i \leq 4)$. Pour montrer que $R^1 f_* \mathcal{I} \neq 0$ il suffit à prouver que O_U ne possède pas assez des sections par rapport à ϱ. Si $\xi_1/\xi_3 = \varphi \in \Omega(V)$ alors (1) montre que $\varphi = \alpha \circ \varrho$ avec $\alpha \in \Omega(Y)$ la fonction définie par $\alpha((a, b)) = a/b$. On a $\alpha \in \Gamma(A^1, O_Y)$ avec $A^1 = Y \setminus \{(1, 0)\}$. Soit $\varphi = \zeta \circ i$ avec $\zeta \in \Omega(U)$. On a $\zeta = \eta \circ \pi$ avec $\eta \in \Omega(X)$. Supposons l'anneau $\Omega[X] = \Omega[Z_1, Z_2, Z_3, Z_4]/(Z_1 Z_2 - Z_3 Z_4 + Z_3^3 + Z_4^3)$ factoriel, $\eta = \omega/\nu$ avec $\omega, \nu \in \Omega[X]$ dépourvus des facteurs communs ce qui implique $(\zeta)_\infty = (\bar{\nu}) - nV$ avec $\bar{\nu} = \nu \circ \pi$, $n = v(\nu)$. Or $\eta \notin O$ parceque $(\varphi)_\infty \neq 0$ donc $n > 0$. Si $\tau \in G_n$ est la forme initiale de ν et T le diviseur de V lui associé alors

$$(\zeta)_\infty \cdot V = T.$$

Mais T est la section de V avec une hypersurface de P^3 de degré $n > 0$. Donc l'intersection de T avec chaque fibre de ϱ est nonvide, ce qui prouve que ζ n'est définie dans le voisinage d'aucune fibre de ϱ. Il reste à prouver la factorialité de $\Omega[X]$. Soit $R = \Omega[X]$ et $R' = R[\varphi_1^{-1}]$. Comme l'idéal $\varphi_1 R$ est premier et R est normal il suffit de montrer que R' est factoriel. Mais

$R' = \Omega[Z_1, \dots, Z_5]/(Z_1 Z_5 - 1, Z_1 Z_2 - Z_3 Z_4 + Z_3^3 + Z_4^3)$ et $(Z_1 Z_5 - 1, Z_1 Z_2 - Z_3 Z_4 + Z_3^3 + Z_4^3) = (Z_1 Z_5 - 1, Z_2 - Z_3 Z_4 Z_5 + Z_3^3 Z_5 + Z_4^3 Z_5)$ donc $R' = \Omega[Z_1, Z_3, Z_4, Z_1^{-1}]$ qui est évidemment factoriel.

BIBLIOGRAPHIE

1. ARTIN M. - American Journal vol. 84 (1962) p. 485-496 et *On isolated rational singularities of surfaces.* American Journal vol. 88 (1966) p. 129-136.

2. CASTELNUOVO G. et ENRIQUES F. - *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche.* Annali di Matematica pura e applicata serie 3a vol. 6 (1901) p. 162-225.

3. GROTHENDIECK A. et DIEUDONNE' J. - *Eléments de Géometrie Algébrique* chap. I-IV.

4. HIRONAKA H. - Thesis Harvard University (1960).

5. KODAIRA K. - *On Kähler varieties of restricted type.* Annals of Mathematics, vol. 60, n0 1 (1954), p. 28-48.

6. KURKE H. - *Einige Eigenshaften von quasiendlichen Morphismen von Präschemata Monatsberichte der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin,* Band 9, Heft 415, (1967) p. 248-257.

7. LANG S. - *Introduction to Algebraic* Geometry, *Interscience Publishers* (1958).

8. LASCU A. - *Simposio Internazionale di Geometria Algebrica,* Roma, 30 settembre 1965 et Atti Acc. Naz. Lincei ser. VIII, vol. XL, fasc. 6 (1966) p. 1014-1019.

9. MURRE J. P - *On a uniqueness theorem for certain kinds of birational transformations.* Indagationes Math. 21, n0 2 (1959), p. 129-134.

10. SEGRE B. - *Recenti prospettive nella teoria delle corrispondenze.* Bull. Soc. Math. France 86 (1958) p. 355-372.

11. SERRE J. P. - *Faisceaux algébriques cohérents.* Annals of Math. Vol. 61, n0 2, (1955).

12. MOISHEZON B. G. - Izvestia Ac. N. U. R. S. S. Tom 30 (1966) p. 133-174, 345-386, 621-656.

13. NAGATA M. - Local Rings, Interscience Publishers (1962).

14. ZARISKI O. - *Theory and applications of holomorphic functions on algebraic varieties.* Memoirs of the American Mathematical Society, Number 5 (1961).

15. WEIL A. *Foundations of Algebraic Geometry.* American Math. Soc. Colloquium Publication (1946).