ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

PIERRE MOLINO

Sur la *G*-géométrie des variétés différentiables

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 23, nº 3 (1969), p. 461-480

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1969_3_23_3_461_0>

SUR LA G-GÉOMÉTRIE DES VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES

par PIERRE MOLINO

(*) Soient V une variété différentielle (C^∞) de dimension n, G un sous-groupe de Lie fermé de $GL(n, R)$. Un certain nombre de problèmes concernant les G-structures ont un caractère purement local. Comme sur toute variété il existe localement des G-structures, il est naturel d'étudier directement la « G-géométrie » de V sans faire a priori d'hypothèses d'existence. Ceci revient à traiter simultanément le cas de toutes les structures locales du type considéré sur V. Bien entendu cette étude a un lien étroit avec la théorie des déformations qui s'intéresse à un « continuum » de structures sur une variété. Pour simplifier on se limite au cas des structures du premier ordre.

I. L'espace des G-structures sur V.

I.1. *Soit* $E^0 = E^0(V, GL(n, R))$ le fibré principal des repères linéaires de V muni de sa 1 forme fondamentale θ^0. L'espace $F_G^0 = E^0/G$ quotient de E^0 par les translations à droite de G sera dit espace des G-structures sur V. Dans le triangle commutatif de fibrations :

(I.1.1)
$$\begin{tikzcd} E^0 \arrow[rr, "\pi^0"] \arrow[dr, "\psi^0"'] & & F^0_G \arrow[dl, "p^0"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

Pervenuto alla Redazione il 18 Marzo 1969.

(*) Cet article a été écrit pendant que l'auteur était invité par l'École Normale Supérieure de Pise. Le sejour de l'auteur a été financé par le CNR (Contratto di Ricerca, n.° 115.2755.0 4930).

π^0 est une fibration principale de groupe structural G, et θ^0 est tensorielle pour cette fibration.

Une section globale (différentiable) s de F_G^0 au dessus de V définit une G-structure sur V, c'est à dire le couple $[E_s, \theta_s]$ d'un fibré principal sur V, E_s, de groupe structural G, et d'une forme fondamentale θ_s sur E_s (1-forme tensorielle à valeurs dans R^n de rang n en tout point). E_s et θ_s sont induits par E^0 et θ^0 sur l'image $s(V)$ de la section, ce que l'on notera :

$$[E_s, \theta_s] = s^*([E^0, \theta^0]). \tag{I.1.2}$$

Toute G-structure s'obtient par ce procédé.

Une famille différentiable à un paramètre $\}s_t, t \in R\{$ de sections de F_G^0 définira une famille différentiable à un paramètre de G-structures.

Une section locale s_0 de F_G^0 au dessus d'un ouvert U de V définira une G structure locale $[E_{s_0}, \theta_{s_0}] = s_0^*([E^0, \theta^0])$ sur U. Muni de cette structure, U sera dit «domaine G-structuré».

On appellera faisceau des germes de G-structures sur V le faisceau $\mathcal{F}_G^0$ des germes de sections locales de F_G^0.

REMARQUE : L'espace fibré principal $E^0 \longrightarrow F_G^0$ définit des classes caractéristiques sur F_G^0. Si s est une section de F_G^0, les classes caractéristiques définies sur V par E_s seront les images des précédentes par l'application induite $s^* : H^*(F_G^0, A) \longrightarrow H^*(V, A)$ où A est l'anneau de coefficients considéré. Il est clair que les classes obtenues ne dépendent que de la classe d'homotopie de la section s. En particulier, deux G-structures qui définissent des classes caractéristiques distinctes ne peuvent être reliées par une famille différentiable à 1 paramètre de structures. Ainsi les classes caractéristiques sont invariantes dans les composantes connexes par arcs de $H^0(V, \mathcal{F}_G^0)$.

I.2. *Considérons l'espace* $\mathcal{E}_G^0 = \mathcal{E}_G^0(F_G^0, GL(n, R))$ des repères transverses à la fibration $F_G^0 \longrightarrow V$. On a le diagramme commutatif de fibrations :

$$\begin{tikzcd}
E^0 \arrow[r, "i^0"] \arrow[dr, Leftrightarrow, "id."'] & \mathcal{E}_G^0 \arrow[r, "\Psi_0"] \arrow[d, "p^0"] & F_G^0 \arrow[d, "p^0"] \\
 & E^0 \arrow[r, "\psi^0"] \arrow[d, "\pi^0"'] & V \\
 & F_G^0 \arrow[ur, "p^0"'] &
\end{tikzcd} \tag{I.2.1}$$

$\mathcal{E}^0_G$ est muni naturellement d'une 1-forme fondamentale θ^0_G à valeurs dans R^n dont la restriction à E^0 est θ^0. E^0, par l'injection i^0, est un G-sous fibré principal de $\mathcal{E}^0_G$. Si E_s est la G-structure définie par une section s de $F^0_G \dashrightarrow V$, $(\pi^0 \circ P^0)^{-1}(s(V)) = (P^0)^{-1}(E_s)$ est un G-sous fibré principal $\mathcal{E}_s$ de $\mathcal{E}^0_G$, « projetable » celui-là pour la fibration P^0. Si $\widetilde{F}^0_G = \mathcal{E}^0_G/G$ est le fibré quotient de $\mathcal{E}^0_G$ par les translations à droite de G, on a le diagramme commutatif :

(1.2.2)
$$\begin{tikzcd}
E^0 \arrow[r, "i^0"] & \mathcal{E}^0_G \arrow[r, "\widetilde{\pi}^0"] \arrow[d, "P^0"'] & \widetilde{F}^0_G \arrow[d, "\widetilde{p}^0"] \arrow[dr, "\widetilde{p}^0"] & \\
& E^0 \arrow[r, "\pi^0"] & F^0_G \arrow[dr, "p^0"'] & F^0_G \arrow[d, "p^0"] \\
& & & V
\end{tikzcd}$$

L'image $(\widetilde{\pi}^0 \circ i^0)(E^0)$ définit une section S^0 de $\widetilde{F}^0_G \xrightarrow{\widetilde{p}^0} F^0_G$. De même, si s est une section de $F^0_G \longrightarrow V$, $\mathcal{E}_s = (P^0)^{-1}(E_s)$ définit une section $\widetilde{s}$ de $\widetilde{F}^0_G \xrightarrow{\widetilde{p}^0} F^0_G$ « projetable » suivant $\widetilde{p}_0$, i. e. :

(1.2.3) $$\widetilde{p}_0 \circ \widetilde{s} = s \circ p^0.$$

Une famille différentiable à 1 paramètre s_t de G-structures sur V définit une famille différentiable à 1 paramètre $\widetilde{s}_t$ de sections projetables de $\widetilde{F}^0_G \longrightarrow F^0_G$ (c'est à dire une famille à un paramètre de G-sous-fibrés principaux de $\mathcal{E}^0_G$ projetables) et réciproquement.

Naturellement si on se contente d'étudier dans $\widetilde{F}^0_G$ les section (ou les familles de sections) projetables cela revient simplement à étudier directement les sections (ou familles de sections) de F^0_G. Au contraire il semble intéressant d'étudier les sections (ou familles de sections) quelconque de $\widetilde{F}^0_G$. Soit S une telle section. Elle définit un G-sous fibré principal $\mathcal{E}_S$ de $\mathcal{E}^0_G$. Si on regarde $\widetilde{F}^0_G$ comme le produit fibré $F^0_G \underset{V}{\boxtimes} F^0_G$, S est le graphe d'une application fibrée $F^0_G \longrightarrow F^0_G$ et définira donc une « corrélation entre structures » : pour toute G-structure (ou germe de G-structure) s, $S(s)$ sera une autre G-structure (ou germe de G structure). On pourra encore dire que S définit un « morphisme structural » sur V. S^0 définira le morphisme identité, et pour toute section s de $F^0_G \longrightarrow V$, $\widetilde{s}$ définira un morphisme constant. On a la proposition immédiate :

PROPOSITION I.2.1 : S'il existe une famille différentiable à un paramètre $\{S_t,\ 0 \leq t \leq 1\}$ de sections de $\widetilde{F}_G^0 \to F_G^0$ avec $S_0 = S^0$ et $S_1 = \widetilde{s}$, alors $H^0(V, \mathcal{F}_G^0)$ est connexe par arcs.

REMARQUE : Plus généralement, si G' est un autre sous groupe de Lie fermé de $GL(n, R)$, soit $\widetilde{F}^0_{G, G'} = \mathcal{E}^0_G/G'$. Une section S de $\widetilde{F}^0_{G, G'} \to F^0_G$ définira une corrélation entre structures de types différents.

I.3. *En fait, dans les constructions précédentes,* comme dans l'étude infinitésimale qui va suivre, n'intervient essentiellement que le diagramme de fibrations :

$$\begin{tikzcd} E^0 \arrow[r, "\pi^0"] & F^0_G \arrow[d, "p^0"] \\ & V \end{tikzcd} \tag{I.3.1}$$

Où π^0 est une G-fibration principale munie d'une 1 forme tensorielle θ^0 à valeurs dans R^n dont le noyau en chaque point est le sous-espace vertical pour la fibration $p^0 \circ \pi^0$. Ceci conduit à une généralisation naturelle (qui sera élargie ultérieurement dans l'étude des G-structures quotient) :

DEFINITION I.3.1 : Soit un diagramme de fibrations :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\pi"] & F \arrow[d, "p"] \\ & V \end{tikzcd} \tag{I.3.2}$$

Où π est une fibration principale de groupe $G \subset GL(n, R)$ — $n =$ dimension de V — et où E est muni d'une 1 forme tensorielle θ à valeurs dans R^n dont le noyau en chaque point est le sous-espace vertical pour la fibration $\psi = p \circ \pi$. On dit que le couple $[E, \theta]$ est une G-structure transverse à la fibration p. Le fibré $F \to V$, muni du couple $[E, \theta]$, est dit fibré G structuré.

Etant donné un fibré arbitraire $F \to V$, considérons le fibré principal $\mathcal{E}_F(F, GL(n, R))$ des repères transverses à la fibration. Soit $\widetilde{F} = \mathcal{E}_F/G$. Une G-structure transverse à la fibration sera définie par une section S de $\widetilde{F} \to F$. On a une projection naturelle $\mathcal{E}_F \xrightarrow{P} E^0(V)$ qui induit une projection

$\tilde{d} : \tilde{F} \longrightarrow F^0_G$. Les G structures transverses projetables correspondront aux sections $\tilde{s}$ de $\tilde{F} \longrightarrow F$ qui sont l'image réciproque par p de sections s de $F^0_G \longrightarrow V$.

Si $[E, \theta]$ est une G structure transverse à la fibration $F \longrightarrow V$, on a un diagramme commutatif de fibrations :

(I.3.3)
$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "i"] \arrow[d] & \mathcal{E}_F \arrow[r, "p"] \arrow[d] & E^0 \arrow[d] \\
F \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \tilde{F} \arrow[r, "\tilde{p}"] & F^0_G
\end{tikzcd}$$

qui montre que $[E, \theta]$ est l'image inverse de $[E^0, \theta^0]$ par une application $f : F \longrightarrow F^0_G$ respectant la fibration. En ce sens, le couple $[E^0, \theta^0]$ joue un rôle universel. Mais cela n'empêche pas d'étudier d'autres fibrations G-structurées sur V que la fibration « universelle » $F^0_G \longrightarrow V$. On obtiendra, à l'aide des sections (ou des sections locales) de $F \longrightarrow V$ des G-structures (ou des G-structures locales) sur V. Toute fibration G-structurée $F \longrightarrow V$, munie de sa G-structnre transverse $[E, \theta]$ définit ainsi un faisceau $\mathcal{F}_E$ de germes de G-structures sur V, c'est à dire un sous-faisceau de $\mathcal{F}^0_G$. On aura ainsi des « G-géométries restreintes » sur la variété V.

EXEMPLES :

(1) Soit $E(V, G)$ une G-structure sur V munie de sa forme fondamentale θ. Si H est un sous groupe de Lie fermé de G, $F_E = E/H$, le couple $[E, \theta]$ définit une H-structure transverse à la fibration $F_E \longrightarrow V$. La H-géométrie restreinte correspondante sur V est celle des H-structures subordonnées à la G structure E.

(2) Soit $E = E(V, G)$ un G-fibré principal arbitraire su V. Considérons le produit fibré $E^0_E = E^0 \boxtimes E$ et le quotient $F^0_E = E^0_E/G$. $F^0_E \longrightarrow V$ sera dit « espace des soudures » sur E. Si θ^0_E est l'image réciproque de θ^0 par la projection $E^0_E \longrightarrow E^0$, le couple $[E^0_E, \theta^0_E]$ définit une G-structure transverse sur l'espace des soudures. La G-géométrie restreinte correspondante sur V (que l'on peut appeler « géométrie des soudures sur E ») est l'étude des G-structures sur V appartenant à la même classe d'isomorphisme de fibrés principaux (celle de E).

L'intérêt essentiel de la géométrie des soudures consiste dans la possibilité de linéariser les problèmes. En effet F^0_E est un ouvert (dense) dans le fibré vectoriel $L_E^0 \to V$ des 1 formes tensorielles sur E à valeurs dans R^n. D'où l'intérêt de l'étude des soudures, en particulier dans les problèmes de déformations : soit V une variété compacte. On considère une famille à un paramètre différentiable de G-structures sur V. Toute les structures de la famille sont isomorphes en tant de G-fibrés principaux (étant induits à partir de $E^0 \to F_G^0$ par une famille continue d'applications $V \to F_G^0$). Soit E un G-fibré principal appartenant à la même classe d'isomorphisme. La famille de G-structures définit alors une famille de soudures. Au voisinage de la section s_0 on a donc une variation infinitésimale dont l'étude est un problème linéaire car le fibré tangent vertical à F_E^0 le long de s^0 s'identifie canoniquement à L_R^0. Ainsi, dans [3], GUILLEMIN - STERNBERG utilisent l'espace des soudures (en imposant bien entendu une condition de rigidité pour les soudures d'une même famille, dont on verra qu'elle se traduit par un système différentiel qui — dans ce cas — est linéaire).

(3) Soit W une autre variété différentiable et la fibration triviale $V \times W \to V$. Si $[E, \theta]$ est une G-structure transverse à cette fibration, elle définit une famille différentiable de G-structures sur V paramétrées par la variété W. Par exemple une famille différentiable à 1 paramètre de G-structures sur V correspond à une G-structure transverse pour la projection $V \times R \to V$.

Prenons pour W une sphère S^p. Supposons V munie d'une G-structure $[E(V, G), \theta]$. Considérons l'espace $\mathcal{E}_{S^p}$ des repères transverses à la fibration $V \times S^p \to V$. Munissons la sphère S^p d'une origine 0 et identifions V à $V \times \{0\}$. Dans $\widetilde{F}_{S^p} = \mathcal{E}_{S^p}/G$, on a une section de $\widetilde{F}_{S^p} \to V \times S^p$ au dessus de $V \times \{0\}$, à savoir la section s_0 définie par la G-structure $[E, \theta]$. Les classes d'homotopie de sections S de $\widetilde{F}_{S^p} \to V \times S^p$ qui coïncident avec s_0 sur $V \times \{0\}$ définissent l'homotopie de l'espace $H^0(V, \mathcal{F}_G^0)$ en dimension p.

REMARQUE : Chaque section S de $\widetilde{F}_{S^p} \to V \times S^p$ définit un G-fibré principal sur $V \times S^p$, donc des classes caractéristique sur $V \times S^p$. De la suite d'applications $V \xrightarrow{i} V \times S^p \xrightarrow{p} V$ on déduit une suite d'applications $H^*(V, A) \xrightarrow{p^*} H^*(V \times S^p, A) \xrightarrow{i^*} H^*(V, A)$. Une classe d'homotopie de $H^0(V, \mathcal{F}_G^0)$ en dimension p définit des classes caractéristiques dans $H^*(V \times S^p, A)$ dont les images par i^* sont les classes caractéristiques de la G-structure $[E, \theta]$. L'élément neutre du groupe d'homotopie correspond aux images par p^* des classes caractéristiques de la G structure $[E, \theta]$.

II. Les G-prolongements de V.

Les constructions que l'on va faire sur l'espace des G-structures F_G^0 pourraient être faites de la même manière sur tout fibré G-structuré. Mais il suffit de traiter le cas de F_G^0, compte tenu du rôle universel du couple $[E^0, \theta^0]$ (diagramme I.3.3) : si $F \longrightarrow V$ est un autre fibré G-structuré, on a une application $f : F \longrightarrow F_G^0$ qui nous permettra de reporter sur F les constructions faites sur F_G^0.

II.1. *Pour étudier la géométrie infinitésimale* de l'espace des G structures, on introduira les espaces de jets de sections du fibré $F_G^0 \longrightarrow V$. Par commodité, on notera $F_G^k = J_V^k F_G^0$ le fibré des k-jets (k entier > 0) de sections de F_G^0 et on l'appellera espace des k-jets de G-structures sur V. On aura, pour tout couple d'entiers k, l avec $k > l > 0$ un diagramme commutatif de fibrations :

(II.1.1)
$$\begin{tikzcd} F_G^k \arrow[r, "p_l^k"] \arrow[drr, "p^k"'] & F_G^l \arrow[r, "p_0^l"] \arrow[dr, "p^l"] & F_G^0 \arrow[d, "p^0"] \\ & & V \end{tikzcd}$$

Tout germe de section s de F_G^0 définira un germe $j^* s$ de section « intégrable » de F_G^k. Réciproquement, un germe de section s^k de $F_G^k \longrightarrow V$ sera intégrable si et seulement si :

(II.1.2)
$$s^k = j^1 (p_{k-1}^k \circ s^k).$$

En général le second membre de (II.1.2) appartient à $J_V^1(F_G^{k-1})$. On a une injection naturelle $F_G^k \longrightarrow J_V^1(F_G^{k-1})$ qui donne un sens à la condition précédente.

II.2. *On se propose de construire* les « G-prolongements » de V, c'est à dire des espaces fibrès qui réalisent simultanément les prolongements successifs de tous les germes de G-structures sur V. Pour cela on adoptera, en ce qui concerne les prolongements, la méthode de SINGER-STERNBERG (voir [7]). Dans ces conditions la définition n'est pas entiérement intrinsèque : pour tout groupe G d'automorphismes linéaires de R^n on devra choisir une fois pour toutes un supplémentaire $\mathcal{C}$ de $\partial (g \otimes R^{n*})$ dans $R^n \otimes \Lambda^2 (R^{n*})$ où g est l'algèbre de Lie de G et ∂ l'application définie par :

$$\partial (S) (u \wedge v) = S(u)\, v - S(v)\, u.$$

E^0, fibré sur F^0_G, et muni de sa forme fondamentale θ^0, pourra être regardé comme le G-prolongement d'ordre 0.

Considérons la famille E^1_G formée des sous-espaces « horizontaux » de E^0 dont la « torsion » appartient à $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{E}^1_G$ désigne l'image réciproque du fibré $E^0 \longrightarrow F^0_G$ par la projection $p^1_0 : F^1_G \longrightarrow F^0_G$, on a le diagramme commutatif de fibrations :

(II.2.1)
$$\begin{tikzcd}
E^1_G \arrow[d] \arrow[dr, "\pi^1"] & & \\
\mathcal{E}^1_G \arrow[r] \arrow[d] & F^1_G \arrow[d, "p^1_0"] \arrow[dr, "p^1"] & \\
E^0 \arrow[r, "\pi^0"] & F^0_G \arrow[r, "p^0"] & V
\end{tikzcd}$$

où la fibration $E^1_G \longrightarrow \mathcal{E}^1_G$ est une fibration principale de groupe structural $G^{(1)}$ d'algèbre de Lie $g^{(1)}$ (avec les notations de SINGER-STERNBERG). E^1_G, en tant que fibré de repères sur E^0, est muni d'une 1-forme tensorielle θ^1_G à valeurs dans $R^n + gl(n, R)$. En tout point $z^1 \in E^1_G$ on a un « sous-espace canonique » H_{z^1}, qui est l'image réciproque par θ^1_G du sous-espace $R^n + g$ de $R^n + gl(n, R)$. H_{z^1} peut encore être défini comme suit : si $\pi^1(z^1) = y^1$ et $p^1_0(y^1) = y^0$, y^1 définit en y^0 un sous-espace h_{y^1} horizontal pour la fibration $F^0_G \longrightarrow V$. Alors H_{z^1} est l'image réciproque de h_{y^1} par l'application linéaire tangente en z^1 à $p^1_0 \circ \pi^1$.

DEFINITION II.2.1 : Le couple $[E^1_G, \theta^1_G]$ formé du fibré $E^1_G \xrightarrow{\pi^1} F^1_G$ muni de la forme θ^1_G sera dit G-prolongement d'ordre 1 de V.

Le G-prolongement d'ordre 1 possède la propriété caractéristique suivante :

PROPOSITION II.2.1 : Si s est une section (respectivement une section locale, un germe de section) de $F^0_G \longrightarrow V$, E_s la G-structure associée (respectivement G structure locale, germe de G-structure), le premier prolongement E^1_s de E_s, muni de sa forme fondamentale θ^1_s est induit à partir de E^1_G, muni de sa forme fondamental θ^1_G, par le jet d'ordre 1 de s, soit :

(II.2.2)
$$[E^1_s, \theta^1_s] = (j^1 s)^* ([E^1_G, \theta^1_G]) .$$

On remarquera que dans l'énoncé de la propriété caractéristique n'intervient que la restriction de θ^1_G aux sous-espaces canoniques en chaque point de E^1_G. C'est en réalité cette restriction que l'on appellera forme fondamentale sur E^1_G. C'est donc une 1-forme partiellement définie en chaque point.

Les G-prolongements d'ordre supérieur de V seront construit par récurrence de façon à vérifier, pour les ordres correspondants, une propriété caractéristique analogue à la précédente. Supposons construit de la sorte le G-prolongement d'ordre k, E^k_G, muni de sa forme fondamentale θ^k_G. On va indiquer comment se construit le prolongement d'ordre $k+1$. Par hypothèse on a un diagramme commutatif :

(II.2.3)
$$\begin{tikzcd}
E^k_G \arrow[r, "\pi^k"] & F^k_G \arrow[d, "p^k_{k-1}"'] \arrow[dr, "p^k"] & \\
& F^{k-1}_G \arrow[r, "p^{k-1}"] & V
\end{tikzcd}$$

Sur E^k_G on a une 1-forme θ^k_G définie sur le sous-espace canonique H_{z^k} en chaque point $z^k \in E^k_G$: si $\pi^k(z^k) = y^k$, $p^k_{k-1}(y^k) = y^{k-1}$, y^k définit un sous-espace horizontal h_{y^k} en y^{k-1} pour la fibration p^{k-1}. Alors $H_{z^k} = (p^k_{k-1} \circ \pi^k)^{-1}(h_{y^k})$. θ^k_G est à valeurs dans $R^n + g + g^{(1)} + \ldots + g^{(k-1)}$. Par hypothèse le couple $[E^k_G, \theta^k_G]$ vérifie la propriété analogue à la proposition II.2.1 pour l'ordre k.

Ceci étant, soit $\mathcal{E}^{k+1}_G$ l'image inverse du fibré $E^k_G \rightarrow F^k_G$ par la projection $p^{k+1}_k : F^{k+1}_G \rightarrow F^k_G$. On a diagramme commutatif :

(II.2.4)
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}^{k+1}_G \arrow[r] \arrow[d] & F^{k+1}_G \arrow[d, "p^{k+1}_k"] & \\
E^k_G \arrow[r, "\pi^k"] & F^k_G \arrow[r, "p^k"] & V
\end{tikzcd}$$

Un point $\mathcal{Z}^{k+1} \in \mathcal{E}^{k+1}_G$ est un couple (z^k, y^{k+1}) avec $p^{k+1}_k(y^{k+1}) = \pi^k(z^k) = y^k \cdot y^{k+1}$ définit en y^k un sous espace horizontal $h_{y^{k+1}}$ pour la fibration p^k. Soit $\widetilde{h}_{z^k, y^{k+1}} = (\pi^k)'^{-1}(h_{y^{k+1}})$. Pour toute G-structure locale ayant y^{k+1} comme $(k+1)$-jet en $(p^k \circ \pi^k)(z^k)$, $\widetilde{h}_{z^k, y^{k+1}}$ représente, d'après l'hypothèse de récurrence, l'espace tangent en z^k à son $k$ème prolongement. Le $(k+1)$-ème prolongement définira alors en z^k une famille distinguée de repères de $\widetilde{h}_{z^k, y^{k+1}}$. De plus cette famille de repères ne dépend pas de la structure locale considérée, mais seulement de son $(k+1)$ ème-jet y^{k+1}. Ce qui revient à remarquer que la fibre en un point du $(k+1)$-ème prolongement d'une G-structure ne dépend que de son $(k+1)$ ème-jet en ce point.

On a ainsi obtenu pour tout couple (z^k, y^{k+1}), c'est à dire pour tout point $\mathcal{Z}^{k+1} \in \mathcal{E}_G^{k+1}$, une famille distinguée de repères de $\widetilde{h}_{z^k, y^{k+1}}$. La réunion de ces familles aux différents points de $\mathcal{E}_G^{k+1}$ forme alors un $G^{(k+1)}$-fibré principal E_G^{k+1} sur $\mathcal{E}_G^{k+1}$; si z^{k+1} appartient à la fibre de E_G^{k+1}, au dessus de $\mathcal{Z}^{k+1}$, z^{k+1} définit un repère de $\widetilde{h}_{z^k, y^{k+1}}$. Donc on aura sur E_G^{k+1} une 1-forme fondamentale θ_G^{k+1}, à valeurs dans $R^n + g + g^{(1)} + \ldots + g^{(k)}$, définie sur l'image réciproque de $\widetilde{h}_{z^k, y^{k+1}}$ par la projection $E_G^{k+1} \longrightarrow E_G^k$, c'est à dire sur l'image réciproque de $h_{y^{k+1}}$ par la projection $E_G^{k+1} \longrightarrow F_G^k$, autrement dit le sous-espace canonique $H_{z^{k+1}}$.

Il est clair par la construction même que le couple $[E_G^{k+1}, \theta_G^{k+1}]$ possède pour l'ordre $k+1$ la propriété caracteristique analogue à la proposition II.2.1. On a donc établi par récurrence :

PROPOSITION II.2.2 : Pour tout $k > 0$ on peut construire un couple $[E_G^k, \theta_G^k]$ unique formé d'un fibré $E_G^k \longrightarrow F_G^k$ et d'une forme fondamentale θ_G^k (1-forme à valeurs dans $R^n + g + \ldots + g^{(k-1)}$ partiellement définie sur les sous espace canoniques de E_G^k) tel que si s est une section (respectivement une section locale, un germe de section) de $F_G^0 \longrightarrow V$, E_s la G-structure associée (respectivement G-structure locale, germe de G-structure) le $k^{\text{ème}}$ prolongement E_s^k de E_s, muni de sa forme fondamentale θ_s^k, est induit à partir de E_G^k, muni de sa forme fondamentale θ_G^k, par le jet d'ordre k de s, soit :

$$[E_s^k, \theta_s^k] = (j_s^k)^* ([E_G^k, \theta_G^k]). \tag{II.2.5}$$

II.3. *Sur le $k^{\text{ème}}$ prolongement* d'une G-structure se trouve défini un « tenseur de structure » d'ordre k. Construisons le tenseur correspondant sur les G-prolongements de V.

La valeur du tenseur de structure d'ordre k au dessus d'un point de V dépend, pour une G-structure, du jet d'ordre $(k+1)$ de la G-structure en ce point. Autrement dit, dans le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
E_G^{k+1} \arrow[d] \arrow[dr, "\pi^{k+1}"] & \\
\mathcal{E}_G^{k+1} \arrow[d] \arrow[r] & F_G^{k+1} \arrow[d, dash, "p_k^{k+1}"'] \\
E_G^k \arrow[r, "\pi^k"] & F_G^k
\end{tikzcd} \tag{II.3.1}$$

le tenseur de structure d'ordre k, t_G^k, sera un tenseur sur le fibré $\mathcal{E}_G^{k+1} \rightarrow F_G^{k+1}$. On peut également prendre son image réciproque sur E_G^{k+1}, mais ceci donnera un décalage sur les ordres. Etant donnée une section s de $F_G^0 \rightarrow V$, et la G-structure associée E_s, si l'on veut construire son $k^{\text{ème}}$ prolongement muni de son tenseur de structure t_s^k, il faudra prendre le couple $[E_s^k, t_s^k]$ induit à partir de $[\mathcal{E}_G^{k+1}, t_G^k]$ par l'application $j^{k+1} s : V \rightarrow F_G^{k+1}$.

Soit maintenant V_0 une variété différentiable de même dimension n que V. Etant donné un pseudo-groupe de Lie transitif Γ sur V_0, d'ordre 1 et de groupe d'isotropie linéaire G, on peut définir sur V la notion de germe de Γ structure, de Γ-structure locale, éventuellement de Γ-structure globale. On notera $\mathcal{T}_\Gamma$ le faisceau des germes de Γ-structures sur V. Pour tout entier $k > 0$, pour qu'un germe de G-structure soit un germe de Γ-structure, on aura une condition nécessaire portant sur le tenseur de structure d'ordre k, qui devra être constant et égal au tenseur correspondant de la Γ-structure associée au pseudo-groupe sur la variété modèle V_0. Cette condition sera vérifiée sur une partie du fibré $\mathcal{E}_G^{k+1} \rightarrow F_G^{k+1}$, c'est à dire au dessus d'un sous-fibré F_Γ^{k+1} de F_G^{k+1}. En particulier, si l'on prend $k+1 = k_0 =$ ordre de stabilité pour la cohomologie de Spencer de l'algèbre de Lie de G, on obtient un sous-fibré $F_\Gamma^{k_0}$ de $F_G^{k_0}$; c'est à dire un système différentiel (non linéaire) d'ordre k_0 sur le fibré $F_G^0 \rightarrow V$. Ce système sera appelé ***système différentiel fondamental pour les Γ-structures sur V.***

En restreignant pour tout $k > 0$ les G-prolongements de V aux sous-fibrés F_Γ^k, on obtient des « Γ-prolongements de V », E_Γ^k, munis de la 1 forme θ_Γ^k obtenue par restriction de θ_Γ^k.

Une « presque Γ-structure » sur V (ou un germe de presque Γ-structure) sera définie par une section s de F_G^0 (ou un germe de section) dont le jet d'ordre k_0 soit à valeurs dans $F_\Gamma^{k_0}$. De façon équivalente elle sera définie par une section (ou un germe de section) intégrable de $F_\Gamma^{k_0}$. Soit :

PROPOSITION II.3.1 : Les presque Γ-structures sur V correspondent aux solutions du système différentiel fondamental pour les Γ-structures, c'est à dire aux sections s^{k_0} de $F_\Gamma^{k_0}$ veréfiant la condition :

$$s^{k_0} = j^1 (p_{k_0-1}^{k_0} \circ s^{k_0}) . \tag{II.3.2}$$

Si l'on prend pour Γ le pseudo-groupe de Lie d'ordre 1 plat $\Gamma(G)$, on obtient un système différentiel fondamental d'ordre k_0 pour les G-structures plates, défini par un sous fibré $F_{\Gamma(G)}^{k_0}$ de $F_G^{k_0}$, dont les solutions seront les G-structures formellement plates sur V.

III. Les Γ-deformations.

III.1. *Tout champ de vecteurs X sur V* définit de façon naturelle une opération infinitésimale sur les k jets de G-structures de V, pour tout entier $k \geq 0$. Donc X se relève en un champ de vecteurs projetables X_G^k sur F_G^k. En fait, si y^k est un point de F_G^k, la valeur de X_G^k au point y^k ne dépend que du $(k+1)$-jet de X au point $x = p^k(y^k)$.

Pour $0 < l < k$ on notera $y^l = p_l^k(y^k)$.

Notons $T^k F_G^k$ le fibré tangent à F_G^k; $T^l F_G^k (0 \leq l < k)$ l'image réciproque du fibré $T^l F_G^l$ par la projection $F_G^k \to F_G^l$.

$J^m T$ désignant le fibré des m-jets de vecteurs tangents à V, notons $J^m T \circ F_G^k$ l'image réciproque du précédent par la projection $F_G^k \to V$.

La correspondance $X \to X_G^k$ définit un morphisme de fibrés vectoriels $J^{k+1} T \circ F_G^k \xrightarrow{\lambda^{k+1}} T^k F_G^k$. De même, pour $0 \leq l < k$ on aura un morphisme $J_{l+1} T \circ F_G^l \xrightarrow{\lambda^{l+1}} T^l F_G^l$ d'où l'on déduit un morphisme (encore noté λ^{l+1}) $J_{l+1} T \circ F_G^k \to T^l F_G^k$, et on a le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccccccc} J^{k+1}\ T \circ F_G^k & \longrightarrow & J^k\ T \circ F_G^k & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & J^l\ T \circ F_G^k & \longrightarrow & T \circ F_G^k \\ \lambda^{k+1}\downarrow & & \lambda^k \downarrow & & & & \lambda^l \downarrow & & \| \\ T^k\ F_G^k & \longrightarrow & T^{k-1}\ F_G^k & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & T^0\ F_G^k & \longrightarrow & T \circ F_G^k \end{array} \tag{III.1.1}$$

En fait, $(T^l F_G^k)_{y^k}$ s'identifie à $(T^l F_G^l)_{y^l}$. En particulier, considérons le cas $l = k-1 \cdot y^k$ définit un sous-espace horizontal h_{y^k} en y^{k-1} dans F_G^{k-1}. Considérons $l_{y^k} = (\lambda^k)^{-1}(h_{y^k}) \cdot l_{y^k}$ s'identifie à un sous-espace de l'espace $(J^k T)_x$ des k-jets de champs de vecteurs en $x = p^k(y^k)$. Notons $l_{y^k}^x$ ce sous-espace. Tout k-jet de champs de vecteurs en x appartenant à $l_{y^k}^x$ se relèvera de façon naturelle au dessus de y^{k-1} en un vecteur tangent en chaque point de la fibre correspondente de $E_G^{k-1} \to F_G^{k-1}$. Autrement dit, si $X_G^{k-1}(y^{k-1}) \in h_{y^k}$ alors $X_G^{k-1}(y^{k-1})$ se relève dans E^{k-1}.

Les espaces l_{y^k} peuvent s'interpréter de la façon suivante comme définissant un système différentiel d'ordre k : considérons le fibré $T \circ F_G^0 \to V$ des vecteurs « transverses » de F_G^0. Le fibré des k-jets de sections (sur V) de $T \circ F_G^0$ s'identifie à $J^k T \circ F_G^k$. Si Γ est par exemple un pseudo-groupe de Lie transitif d'ordre 1 de groupe d'isotropie linéaire G, en un point $y^k \in F_\Gamma^k$, le sous-espace l_{y^k} de $J^k T \circ F_G^k$ définit *les k-jets de Γ-champs relatifs* à y^k. Prenons la réunion des l_{y^k} pour tous les $y^k \in F^k_\Gamma$. On obtient ainsi un système différentiel (non linéaire) d'ordre k sur le fibré $T \circ F^0_G$ qui sera dit *systeme différentiel des Γ-champs de V d'ordre k.* Ce système différentiel est « projetable » sur F^0_G (par construction). Une solution de ce système sera une Γ-presque structure (pour $k \geq k_0 + 1$) sur V munie d'un automorphisme infinitésimal. On remarquera enfin que la restriction de ce système au dessus d'une Γ-presque structure est un système différentiel linéaire, celui qui définit les automorphisme infinitésimaux de la structure considérée.

III.2. *On notera désormais* l^Γ_k le sous-fibré de $J^k T \circ F^k_G$ qui définit le système différentiel des Γ-champs de vecteurs de V d'ordre k. On a diagramme commutatif de fibrations :

(III.2.1)
$$\begin{tikzcd} l^\Gamma_k \arrow[r, "p_k"] \arrow[dr, "\mathcal{S}_k"'] & F^k_\Gamma \arrow[d, "p^k"] \\ & V \end{tikzcd}$$

Pour $\underline{0 \leq p \leq n}$, on notera $l^\Gamma_k \otimes \Lambda^p (T)^*$ le fibré obtenu en faisant le produit tensoriel sur F^k_G de l^Γ_k et de $\Lambda^p (T^*) \circ F^k_G$. Si on prend l'espace $J^m_V (l^\Gamma_k \otimes \Lambda^p)$ des m-jets de sections (sur V) de $l^\Gamma_k \otimes \Lambda^p$, on notera $\mathcal{J}^m_\Gamma (l^\Gamma_k \otimes \Lambda^p)$ la restriction du précédent au dessus de $F^{k+m}_\Gamma \subset J^m_V (F^k_G)$.

Proposition III.2.1 : On a la suite de Spencer :

(III.2.2)
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & l^\Gamma_{k+m} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{J}^m_\Gamma(l^\Gamma_k) \arrow[r, "\mathcal{D}^1"] \arrow[d] & \mathcal{J}^{m-1}_\Gamma(l^\Gamma_{k-1} \otimes T^*) \arrow[r, "\mathcal{D}^2"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "\mathcal{D}^p"] & \mathcal{J}^{m-p}_\Gamma(l^\Gamma_{k-p} \otimes \Lambda^p) \arrow[d] \\ & F^{k+m}_\Gamma \arrow[r] & F^{k+m}_\Gamma \arrow[r] & F^{k+m-2}_\Gamma \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & F^{k+m-2p} \end{tikzcd}$$

dans laquelle les carrés sont commutatifs (ici $p = \inf(k, n, m)$) et $\mathcal{D}^{i+1} \circ \mathcal{D}^i = 0$.

En réalité la proposition résulte immédiatement de ce que, pour un point donné $y^{k+m} \in F^{k+m}_\Gamma$, si on considère une Γ-presque structure locale E_s telle que $j^{k+m} s = y^{k+m}$, la suite de Spencer,

(III.2.3) $$0 \to \Theta \to \underline{H_k} \xrightarrow{D^1} \underline{H_{k-1} \otimes T^*} \xrightarrow{D^2} \dots \xrightarrow{D^p} \underline{H_{k-p} \otimes \Lambda^p} \quad (p < m, n, k)$$

relative aux automorphismes infinitésimaux de E_s correspond, au point $x = p^{k+m}(y^{k+m})$, à des morphismes de fibrés qui ne dépendent pas de la section.

Par commodité, on prendra les images réciproques des fibrés

$$\mathcal{J}_\Gamma^{m-q}(l_{k-q}^\Gamma \otimes \Lambda^q)$$

sur F_Γ^{k+m} par la projection $F_\Gamma^{k+m} \to F_\Gamma^{k+m-2q}$. On obtiendra ainsi des fibrés notés $\mathcal{J}_\Gamma^{m-q}(l_{k-q}^\Gamma \otimes \Lambda^q)_{k+m}$, et la suite :

$$\text{(III.2 4)} \qquad 0 \to l_{k+m}^\Gamma \to \mathcal{J}_\Gamma^m(l_k^\Gamma) \xrightarrow{\mathcal{D}^1} \mathcal{J}_\Gamma^{m-1}(l_{k-1}^\Gamma \otimes T^*)_{k+m} \xrightarrow{\mathcal{D}^2} \dots$$

$$\dots \xrightarrow{\mathcal{D}^p} \mathcal{J}_\Gamma^{m-p}(l_{k-p}^\Gamma \otimes \Lambda^p)_{k+m}$$

de fibrés et de morphismes de fibrés vectoriels sur F_Γ^{k+m}.

Il est clair que la suite précédente ne définit pas d'opérateurs différentiels linéaires mais, sous la forme (III.2.2), une suite d'opérateurs différentiels non linéaires d'ordre 1.

III.3. *Ecrivons la suite* (III.2.2) *pour* $m = 2$. On obtient ainsi :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & l_{k+2}^\Gamma \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{J}_\Gamma^2(l_k^\Gamma) \arrow[r, "\mathcal{D}^1"] \arrow[d] & \mathcal{J}_\Gamma^1(l_{k-1}^\Gamma \otimes T^*) \arrow[r, "\mathcal{D}^2"] \arrow[d] & l_{k-2}^\Gamma \otimes \Lambda^2 T^* \arrow[d] \\
& F_\Gamma^{k+2} \arrow[r] & F_\Gamma^{k+2} \arrow[r] & F_\Gamma^k \arrow[r] & F_\Gamma^{k-2}
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{D}^2$ est linéaire au dessus de chaque point y^k de F_Γ^k. Soit $(\mathcal{N}_{k-1}^\Gamma)_{y^k}$ le noyau de $\mathcal{D}^2$ en y^k, $\mathcal{N}_{k-1}^\Gamma$ la réunion de ces noyaux aux différents points de F_Γ^k.

$\mathcal{N}_{k-1}^\Gamma$ est un sous fibré de l'espace $J_V^1(l_{k-1}^\Gamma \otimes T^*)$. Donc il définit un système différentiel d'ordre 1 sur le fibré $l_{k-1}^\Gamma \otimes T^* \to V$. Ce système sera dit : *système différentiel des Γ-déformations infinitésimales* à l'ordre $k-1$. Il est, par construction, projetable sur F_G^0. Une solution de ce système sera une presque Γ-structure E_s sur V munie d'un cocycle global pour la suite de SPENCER ordinaire (III.2.3) dans $\underline{H_{k-1} \otimes T^*}$. On sait (voir GUILLEMIN-STERNBERG, op. cité) qu'une déformation infinitésimale d'une Γ-structure correspond précisément à un tel cocycle.

Un élément $\xi \in \mathcal{N}_{k-1}^\Gamma$ au dessus de y^k dans F_Γ^k sera dit 1-jet de déformation infinitésimale relatif au k-jet de Γ-structure y^k.

III.4. *Un autre point de vue sur les déformations.* Reprenons les notations de I.2. Une Γ-structure E_s sur V définit une section s de $F^0_G \longrightarrow V$, au dessus de laquelle E_s correspond à la restriction de $E^0 \longrightarrow F^0_G$. On a une section S^0 de $\widetilde{F}^0_G \longrightarrow F^0_G$. Pour déformer E_s on peut, sans changer s, déformer S^0 au dessus de $s(V)$. On peut alors se demander s'il n'est pas possible de « déformer » S^0 au dessus de F^0_G de façon que pour tout germe de Γ structure s on obtienne une déformation de Γ-structure. Si une telle déformation existe on dira que c'est une « *Γ-déformation simultanée sur V* ». En fait on peut toujours construire de telles déformations, mais qui sont pour chaque Γ-structure des équivalences globales, en partant d'un difféomorphisme f de V sur elle-même. On peut se poser la question de savoir si toute Γ-déformation simultanée est nécessairement une équivalence.

Donnons la version infinitésimale de ce problème. En reprenant les notations du paragraphe précédent, $\mathcal{N}^\Gamma_{k-1}$ définit un sous-fibré de $J^1_V(l^\Gamma_{k-1} \otimes T^*)$. On peut en déduire un sous-fibré $\mathcal{S}^\Gamma_{k-1}$ de $J^1_{F^{k-1}_\Gamma}(l^\Gamma_{k-1} \otimes T^*)$: un 1-jet de section ξ du fibré $l^\Gamma_{k-1} \otimes T^* \longrightarrow F^{k-1}_\Gamma$ appartiendra à $\mathcal{S}^\Gamma_{k-1}$ si et seulement si pour tout $y^k \in F^k_\Gamma$ la restriction de ξ au dessus de h_{y^k} appartient à $\mathcal{N}^\Gamma_{k-1}$.

$\mathcal{S}^\Gamma_{k-1}$ définit un système différentiel d'ordre 1 sur le fibré $l^\Gamma_{k-1} \otimes T^* \longrightarrow F^{k-1}_\Gamma$. Ce système différentiel sera dit « *système différentiel des Γ-déformations infinitésimales simultanées* » sur V à l'ordre $k-1$. Il est clair que une solution de ce système définira pour tout germe de Γ-structure sur V un cocycle pour la suite de SPENCER (III.2.3) correspondante dans $H_{k-1} \otimes T^*$.

IV. G-Structures quotient.

La plupart des constructions faites précédemment peuvent, convenablement adaptées, s'étendre au cadre plus général des « G-structures quotient » (comme on l'avait déjà fait remarquer pour les G-structures transverses à une fibration). On se contentera d'indiquer rapidement comment cette généralisation peut se faire, et de montrer le rôle (en un certain sens) universel des G-structures quotient par rapport aux G-structures usuelles. Ce dernier point avait été indiqué dans [6] avec une erreur évidente, rectifiée ici (c'est le groupe linéaire et non le groupe orthogonal qui intervient dans la construction).

IV.1. *Soient F une variété différentiable* de dimension N, n un entier $< N$, G un sous-groupe de Lie fermé de $GL(n, R)$. Une G-structure quotient sur F sera définie par le couple $[E, \theta]$ d'un G-fibré principal de base

F et d'une 1-forme tensorielle sur E, à valeurs dans R^n et de rang maximum en tout point. θ définit un système de Pfaff, et donc un champ d'éléments de contact $\{M_y, y \in F\}$ de codimension n sur F. Si $\mathcal{E}(F, GL(n, R))$ désigne l'espace des repères transverses au champ $\{M_y\}$, $\widetilde{F} = \mathcal{E}/G$, E correspond à une section globale de $\widetilde{F} \to F$, et toute autre section définirait une autre G-structure quotient ayant le même système de Pfaff sous-jacent.

Il est clair que le cas des G-structures transverses à une fibration est un cas particulier de G-structures quotients. Une situation intermédiaire, également importante, est celle des G-structures transverses à un feuilletage. Dans ce cas on a un feuilletage relevé dans $\mathcal{E}$. Si la G-structure transverse est réunion de feuilles du feuilletage relevé, on dit qu'elle est projetable, ou feuilletée. Elle est dite Γ-structure transverse si elle est localement l'image réciproque d'une Γ-structure par la projection suivant le feuilletage. Les Γ-structures transverses ont été étudiées par HAEFLIGER (voir [5]).

Si $[E, \theta]$ est une G-structure quotient sur F et si V est une n sous variété de F transverse au champ d'éléments $\{M_y\}$, alors $[E, \theta]$ induit une G-structure $[E_V, \theta_V]$ sur V. Ou encore, étant donnée une n-variété V, toute immersion $f: V \to F$ transverse en chaque point au champ d'éléments $\{M_y\}$ induit une G-structure sur V, définie par:

$$[E_V, \theta_V] = f^*([E, \theta]). \tag{IV.1.1}$$

REMARQUE : On notera en particulier que si $[E, \theta]$ est une G-structure transverse à une fibration $F \to V$, toute application $f: V \to F$ transverse à la fibration (pas nécessairement une section) induit une G-structure sur V.

IV.2. *On peut, à l'aide du théorème* de plongement de WHITNEY, construire une « G-structure quotient universelle » en ce sens que pour toute n-variété V et pour toute G-structure $[E_V, \theta_V]$ sur cette variété, $[E_V, \theta_V]$ est induite sur V par une immersion dans l'espace de la G structure quotient universelle.

Pour cela, considérons le groupe affine $GA(2n+1, R)$ et l'espace quotient $F^0 = GA(2n+1, R)/GL(n+1, R) \times G$. On notera E^0 l'espace $GA(2n+1, R)/GL(n+1, R)$. On a alors le diagramme de fibrations:

(IV.2.1)
$$\begin{tikzcd} E^0 \arrow[r, "\pi^0"] & F^0 \arrow[d, "p^0"] \\ & R^{2n+1} = GA(2n+1, R)/GL(2n+1, R) \end{tikzcd}$$

dans lequel π^0 est une fibration principale de groupe structural G. On a sur E^0 une 1-forme fondamentale θ^0 à valeurs dans R^n de rang n en tout point, définie de la façon suivante : soit $z^0 \in E^0$, $y^0 = \pi^0(z^0)$, $x = p^0(y^0)$, z^0 définit le couple $\{M_x, z_x^0\}$ d'un $(n+1)$ plan M_x en x et d'un n-repère z_x^0 transverse à M_x. Soit N_x le sous espace engendré par ce repère transverse. Pour tout vecteur v_0 tangent en z^0 à E^0, soit v_{0x} sa projection sur R^{2n+1} en x. Soit $\mathcal{N}(v_{0x})$ la composante sur N_x de v_{0x}. On posera alors $\theta_{z^0}^0(v_0) = z_x^0(\mathcal{N}(v_{0x}))$. Il est clair que la 1-forme θ^0 ainsi définie est tensorielle et de rang n en tout point

On a donc une G structure quotient $[E^0, \theta^0]$ sur F^0.

Proposition IV.2.1 : Pour toute n-variété différentiable V, toute G-structure $[E_V, \theta_V]$ sur V est induite à partir de la G-structure quotient $[E^0, \theta^0]$ par une immersion transverse f, soit :

$$[E_V, \theta_V] = f^*([E^0, \theta^0]). \tag{IV.2.2}$$

En effet, le théorème de Whitney permet de plonger différentiablement V dans R^{2n+1}. Munissant R^{2n+1} de sa métrique habituelle, en tout point $x \in V$ on obtient un $(n+1)$ sous espace M_x supplémentaire de l'espace tangent T_x à V en x. Si V est munie d'une G structure $[E_V, \theta_V]$, celle ci définit en chaque point x une classe de repères de T_x. Cette classe de repères, avec le sous-espace M_x, correspond à un point $y^0 \in F^0$ au dessus de x. On obtient ainsi une application $(y^0 = f(x))$ de V dans F^0, et il est clair que $f^*([E^0, \theta^0])$ coïncide avec $[E_V, \theta_V]$.

Corollaire : Pour qu'il existe une G-structure sur V, il faut et il suffit qu'il existe une immersion transverse de V dans F^0.

Ainsi la G-structure quotient $[E^0, \theta^0]$ sur F^0 joue un rôle universel pour les G-structures (sur les n-variétés). Pour cette raison on pourra l'appeler « G-structure quotient universelle », à condition toutefois de préciser qu'elle n'est pas la solution canonique d'un problème universel. On remarquera que le système de Pfaff sous-jacent à $[E^0, \theta^0]$ sur F^0 n'est pas intégrable ; il ne s'agit donc pas d'une G-structure transverse à un feuilletage.

Remarque : Il serait intéressant d'arriver à construire des G-structures quotient universelles (au sens précédent) ayant des propriétés plus maniables, par exemple (a) d'être transverses à un feuilletage (b) vérifier la propriété que si f_1 et f_2 sont deux immersions transverses d'une variété V, alors les G-structures qu'elles définissent sur V sont les mêmes si et seulement si il existe une homotopie transverse entre f_1 et f_2. Le problème est ouvert.

IV.3. *Venons en à la géométrie* des G-structures quotient. On reprend les notations de IV.1.

On définit sans difficultés, pour $k > 0$, l'espace des k-jets de sous variétés transverses au champ d'éléments de contact $\{M_y\}$. On notera F^k cet espace. On aura des projections :

(IV.3.1)
$$\begin{tikzcd} F^k \arrow[r, "p^k_l"] \arrow[dr, "p^k"'] & F^l \arrow[d, "p^l"] \\ & F \end{tikzcd}$$

On construira les prolongements successifs de $E \longrightarrow F$ exactement comme au paragraphe (II.2) à ceci près que la construction du premier prolongement n'aura pas les propriétés particulières d'un espace de repères : ce sera une famille de sous-espaces transverses dans E, et la 1-forme fondamentale n'y sera définie que sur les sous espaces canoniques. De façon générale on aura un diagramme commutatif à l'ordre $k+1$:

(IV.3.2)
$$\begin{tikzcd} E^{k+1} \arrow[d] \arrow[dr, dashed, "\pi^{k+1}"] & \\ \mathcal{E}^{k+1} \arrow[r, dashed] \arrow[d] & F^{k+1} \arrow[d, "p^{k+1}_k"] \\ E^k \arrow[r, "\pi^k"] & F^k \end{tikzcd}$$

où la fibration $E^{k+1} \longrightarrow \mathcal{E}^{k+1}$ sera principale de groupe structural $G^{(k+1)}$. E^{k+1} est muni d'une 1-forme fondamentale θ^{k+1} à valeurs dans $R^n + g + g^{(1)} + \ldots + g^{(k)}$ définie partiellement sur les sous-espaces canoniques de E^{k+1}. De même, sur $\mathcal{E}^{k+1}$ sera défini un tenseur de structure d'ordre k, t^k.

Si f est une immersion transverse d'une n variété V dans F, f définit de façon naturelle pour tout $k > 0$ une immersion f^k de V dans F^k, transverse au champ d'éléments de contacts $\{M^k_{y^k}, y^k \in F^k\}$ obtenu par image réciproque du champ $\{M_y, y \in F\}$ par la projection $F^k \longrightarrow F$. On a alors :

PROPOSITION IV.3.1 : Si $[E_V, \theta_V]$ est la G-structure induite par l'immersion transverse $f: V \rightarrow F$, son $k^{\text{ème}}$ prolongement, muni de sa forme fondamentale, est induit par l'application $f^k: V \rightarrow F^k$ à partir du $k^{\text{ème}}$ prolongement de $E \rightarrow F$ muni de sa forme fondamentale. Soit :

$$(\text{IV.3.3}) \qquad [E_V, \theta_V] = f^*([E, \theta]) \Rightarrow [E_V^k, \theta_V^k] = f^k_* ([E^k, \theta^k]).$$

Ainsi, par exemple, l'étude des prolongements successifs d'une G-structure quotient universelle (pour les n variétés) permet l'étude simultanée des prolongements de toutes les G-structures usuelles.

Si Γ est un pseudo groupe de Lie transitif d'ordre 1, de groupe d'isotropie linéaire G, la condition pour qu'un k-jet transverse soit un k-jet de presque-Γ-structure définit une sous-variété F_Γ^k de F^k. Si l'on prend $k > k_0 + 1$ (ordre de stabilité de G) on obtient un *système différentiel fondamental pour les Γ-structures transverses sur F.* Une solution de ce système définira une sous-variété transverse sur F telle que la G-structure induite sur cette sous-variété par $[E, \theta]$ soit une presque Γ-structure.

Soit $T \cdot F$ le fibré vectoriel sur F défini en chaque point y par le quotient de l'espace tangent en y, $\mathcal{T}_y$, par le sous-espace $M_y \cdot T \cdot F$ sera dit fibré vectoriel transverse (ou quotient) sur F. On a sur $T \cdot F$ un champ d'éléments de contacts $\{T \cdot M_z, z \in T \cdot F\}$ de codimension n, image réciproque du champ $\{M_y\}$ par la projection $T \cdot F \rightarrow F$. Une sous variété transverse à ce champ d'éléments de contact dans $T \cdot F$ sera formée du couple d'une sous-variété transverse sur F et d'un champ de vecteurs sur cette sous-variété. Les k-jets de sous-variétés transverses dans $T \cdot F$ se projetteront sur les k-jets transverses de sous-variétés de F. On notera $J^k T \cdot F^k$ l'espace des k-jets transverses dans $T \cdot F$; au dessus de $y^k \in F^k$, la condition pour qu'un k-jet $z^k \in J^k T \cdot F^k$ définisse un automorphisme infinitésimal du k-jet de G-structure défini par y^k détermine un sous espace vectoriel l_{y^k} de la fibre $J^k T \cdot F^k \rightarrow F^k$. La réunion de ces sous espaces aux différents points de F_Γ^k forme une sous variété l_k^Γ de $J^k T \cdot F^k$, donc un système différentiel d'ordre k sur la variété $T \cdot F$; et pour $k \geq k_0 + 1$ on obtiendra le *système différentiel des Γ-champs transverses* sur Γ. Une solution sera une sous-variété transverse dans F munie par $[E, \theta]$ d'une presque Γ structure, avec un automorphisme infinitésimal sur cette variété.

Enfin, si l'on note $l_k^\Gamma \otimes \Lambda^p(T^*)$ le produit tensoriel sur F^k de l_k^Γ par l'image réciproque du fibré $\Lambda^p(T^*)$, $0 \leq p \leq n$, et si l'on considère la restriction $\mathcal{J}_\Gamma^m(l_k^\Gamma \otimes \Lambda^p(T^*))$ au dessus de F_Γ^{k+m} de l'espace des m-jets de sous-variétés de $l_k^\Gamma \otimes \Lambda^p(T^*)$ transverses au champ d'éléments de contact relevés à partir du champ $\{M_y\}$, alors on a une suite de SPENCER :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & l^\Gamma_{k+m} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{G}^m_\Gamma(l^\Gamma_k) \arrow[r, "\mathcal{D}^1"] \arrow[d] & \mathcal{G}^{m-1}_\Gamma(l^\Gamma_{k-1} \otimes T^*) \arrow[r, "\mathcal{D}^2"] \arrow[d] & .. \arrow[r, "\mathcal{D}^p"] & \mathcal{G}^{m-p}_\Gamma(l^\Gamma_{k-p} \otimes \Lambda^p) \arrow[d] \\
 & F^{k+m}_\Gamma \arrow[r] & F^{k+m}_\Gamma \arrow[r] & F^{k+m-2}_\Gamma \arrow[r] & .. \arrow[r] & F^{k+m-2p}_\Gamma
\end{tikzcd}$$

(IV.3.4) où les carrés commutent et $\mathcal{D}^{i+r} \circ \mathcal{D}^i = 0$.

En particulier le noyau de $\mathcal{D}^2$ définira une sous-variété $\mathcal{N}^\Gamma_{k-1}$ de l'espace des 1-jets transverses à $l^\Gamma_{k-1} \otimes T^*$, donc un système différentiel d'ordre 1 sur $l^\Gamma_{k-1} \otimes T^*$. Une solution de ce système sera formée d'un variété transverse dans F, munie par $[E, \theta]$ d'une presque Γ-structure, et d'un cocycle de déformation infinitésimale de cette structure. Ainsi ce système sera-t-il appelé *système différentiel des Γ-déformations infinitésimales transverses* sur F (à l'ordre $k-1$).

REMARQUE : Pour que les constructions précédentes soient correctes, il faut faire certaines hypothèses de régularité sur la G-structure quotient. On peut remarquer que ces hypothèses seront automatiquement satisfaites sur la G-structure quotient universelle introduite au paragraphe précédent, pour des raisons évidentes d'homogénéité.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. S. CHERN, *The geometry of G-structures*. Bulletin of AMS (72) 1966 pp. 167-219.

[2] C. EHRESMANN, *Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudo-groupes de Lie*. Colloque C.N.R.S. – Strasbourg 1953 (Editions du C.N.R.S.).

[3] GUILLEMIN-STERNBERG, *Déformation theory of Pseudogroup structures* Mem. of AMS 1966.

[4] H. GOLDSCHMIDT, *Existence theorems for analytic partial differential equations*. I Annals of Maths 1967, (86) pp, 246-272. II à paraitre.

[5] A. HAEFLIGER, *Structures feullietées et cohomologie à valeurs dans un faisceau de groupoïdes*. Comment. Math. Helvet. 1958, (32), pp. 248-329.

[6] P. MOLINO, *Applications des structures infinitésimales quotient à l'étude des problèmes d'existence pour les G-structures ...* . C.R.A.S. 1968, (tome 266). pp. 1242-1245.

[7] SINGER-STERNBERG, *The infinite groups of Lie and Cartan*. Journal d'Analyse mathématique 1965, (XV) pp. 1-114.

[8] D C. SPENCER, *Deformations of structures on manifolds defined by transitive continuous pseudogroups*. Ann. of Maths 1962, (76) pp 306-445.

Departement de Mathématiques
Université de Montpellier
France