ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

A. ANDREOTTI
E. BOMBIERI

Sugli omeomorfismi delle varietà algebriche

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 23, nº 3 (1969), p. 431-450
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1969_3_23_3_431_0>

SUGLI OMEOMORFISMI DELLE VARIETÀ ALGEBRICHE

A. ANDREOTTI ed E. BOMBIERI

§ 0. Nell'ambito della geometria algebrica classica il problema che trattiamo in questo lavoro è il seguente. Sia X una varietà algebrica, consideriamo l'insieme delle coppie (Y, f) formate da una varietà algebrica Y e da un morfismo $f: Y \longrightarrow X$ birazionale che sia anche un omeomorfismo: diremo che (Y', f') domina (Y, f) se esiste un morfismo $h: Y' \longrightarrow Y$ tale che $f' = f \circ h$. Identificando varietà tra loro isomorfe si domanda se tra le coppie (Y, f) ne esiste una massima che domina tutte le altre.

Nel caso che X sia normale la risposta è fornita dal « Main Theorem » di Zariski: (X, id) è già massima. Nel caso che X non sia normale, come si vede su semplici esempi già nel caso delle curve, può accadere che l'elemento massimale (Y, f) non sia né isomorfo ad X né Y stesso sia normale.

Ciò ci ha condotto a trattare il problema nel suo aspetto puramente algebrico-topologico nel caso dei preschemi e morfismi di preschemi. Abbiamo così introdotto la nozione di « chiusura integrale debole » e « normalizzata debole » analoghe a quelle classiche di chiusura integrale e di normalizzata.

Questo ci permette di dare una risposta affermativa al problema considerato sotto condizioni assai larghe che includono ampiamente il caso classico.

Nel caso analitico questo problema è già stato trattato e risolto in [1].

Le applicazioni del concetto di normalizzata debole sembrano numerose e ci proponiamo di ritornare, se l'ispirazione ce lo consente, su questo argomento specialmente in vista del teorema di estensione di Riemann e dello studio delle singolarità delle varietà algebriche. È qui opportuno segnalare

Pervenuto alla Redazione il 1 Marzo 1969.

i legami esistenti tra il concetto da noi introdotto e quello di « saturazione » introdotto recentemente da Zariski [5].

Nel § 1. vengono dimostrati alcuni risultati elementari di algebra locale, che sono però essenziali per le dimostrazioni dei teoremi dati nei paragrafi successivi.

Nel § 2. si definisce la chiusura integrale debole $\mathcal{A}^*$ del fascio strutturale di un preschema $(X, \mathcal{O}_X)$ e dopo avere dato dei criteri di coerenza e di quasi-coerenza per questo fascio, se ne studia il suo spettro. Il risultato principale di questo paragrafo è la dimostrazione del fatto che il morfismo canonico $\mathrm{Spec}(\mathcal{A}^*) \longrightarrow X$ si fattorizza in un omeomorfismo universale ed una immersione chiusa (Teorema 1).

Nel § 3. i risultati del § 2. vengono interpretati geometricamente e viene dimostrato il teorema principale sugli omeomorfismi (Teorema 2) che risolve in parte il problema posto all'inizio di questa introduzione.

Nel § 4. si applicano i teoremi precedenti al caso particolare di varietà algebriche. In questa situazione il Teorema 2 può essere ulteriormente precisato risolvendo completamente il nostro problema.

Infine nel § 5. si fanno alcune osservazioni di carattere generale a proposito dell'operazione di chiusura integrale debole e vengono presentati alcuni problemi.

I riferimenti agli Éléments de Géométrie Algébrique di A. Grothendieck verranno fatti nella forma (EGA, X.y.z.t).

§ 1. Preliminari di algebra.

Tutti gli anelli qui considerati sono commutativi con identità e gli omomorfismi di anelli portano l'identità del primo nell'identità del secondo. Se A è un anello, il radicale $R(A)$ di A è l'intersezione della famiglia degli ideali massimali di A e il nilradicale $N(A)$ di A è l'ideale di tutti gli elementi nilpotenti di A, cioè l'intersezione della famiglia degli ideali primi di A. Risulta

$$N(A) \subset R(A).$$

PROPOSIZIONE 1. *Sia A un anello, $\bar{A}$ una A-algebra intera su A $\omega : A \longrightarrow \bar{A}$ l'omomorfismo canonico.*

Supponiamo che $\ker(\omega) \subset R(A)$.

Allora

$$R(A) = \omega^{-1}(R(\bar{A})).$$

DIMOSTRAZIONE. È una conseguenza del teorema di Cohen-Seidenberg. Si veda in proposito Bourbaki, Algèbre Commutative, Ch. V, § 2. Th. 1 e osservazione al teorema (pag. 38) e Cor. 3 (pag. 39).

Siano A, $\bar{A}$ come nella Proposizione 1 e sia $\ker(\omega) \subset R(A)$.

Applicando la Proposizione 1 si ricava per passaggio al quoziente un omomorfismo canonico

$$\theta: \ A/R(A) \rightarrow \bar{A}/R(\bar{A})$$

che è un monomorfismo poichè $\ker(\omega) \subset R(A)$.

Supponiamo adesso che A sia un anello locale e quindi che $R(A)$ sia l'ideale massimale di A; allora $A/R(A)$ è un corpo. Sia p l'esponente caratteristico di $A/R(A)$, cioè $p = 1$ se $\operatorname{char}(A/R(A)) = 0$ e $p = \operatorname{char}(A/R(A))$ se la caratteristica è diversa da 0.

Sia ancora $\omega(A) + R(\bar{A})$ il sottoanello di $\bar{A}$ formato da tutti gli elementi di $\bar{A}$ del tipo $x + y$ con $x \in \omega(A)$ e $y \in R(\bar{A})$ e poniamo per definizione

$$(\bar{A})_r = \{u \in \bar{A} \mid \exists\, m, \ u^{p^m} \in \omega(A) + R(\bar{A})\},$$

vale a dire che $(\bar{A})_r$ consiste di tutti gli elementi $u \in \bar{A}$ una cui potenza p^m-esima opportuna (dipendente da u) sta in $\omega(A) + R(\bar{A})$.

Verifichiamo che $(\bar{A})_r$ è un sottoanello di $\bar{A}$. Ciò è ovvio quando $p = 1$. Sia $p > 1$ e siano $u, v \in (\bar{A})_r$. Avremo

$$u^{p^m} \in \omega(A) + R(\bar{A}),$$

$$v^{p^n} \in \omega(A) + R(\bar{A})$$

da cui è chiaro che

$$(uv)^{p^{m+n}} \in \omega(A) + R(\bar{A})$$

e quindi $uv \in (\bar{A})_r$.

Poichè θ è un monomorfismo che manda l'identità di $A/R(A)$ nell'identità di $\bar{A}/R(\bar{A})$ segue che l'anello $\bar{A}/R(\bar{A})$ ha ancora caratteristica p. Dunque

$$p\,\bar{A} \in R(\bar{A}).$$

Segue di qui facilmente che

$$(u + v)^{p^{m+n}} - (u^{p^{m+n}} + v^{p^{m+n}}) \in R(\bar{A})$$

da cui si ricava che $u + v \in (\bar{A})_r$. Se $u \in (\bar{A})_r$ è ovvio che anche $-u \in (\bar{A})_r$; così è completa la verifica che $(\bar{A})_r$ è un sottoanello di $\bar{A}$.

Osserviamo infine che $\omega(A) + R(\bar{A}) \subset (\bar{A})_r \subset \bar{A}$ da cui si vede che $R(\bar{A})$ è un ideale di $(\bar{A})_r$.

La costruzione dell'anello $(\bar{A})_r$ a partire dall'anello locale A e dalle A-algebra $\bar{A}$ si può sempre effettuare in quanto per le ipotesi fatte all'inizio di questa sezione $\ker(\omega)$ deve essere un ideale proprio di A e quindi la condizione $\ker(\omega) \subset R(A)$ è automaticamente verificata.

PROPOSIZIONE 2. *Sia A un anello locale, $\bar{A}$ una A-algebra intera su A. Allora*

(i) *l'anello $(\bar{A})_r$ è un anello locale e $R(\bar{A})$ è il suo ideale massimale;*

ii) *si ha un monomorfismo canonico*

$$\theta : A/R(A) \longrightarrow (\bar{A})_r/R(\bar{A})$$

che fa del corpo dei resti di $(\bar{A})_r$ una estensione puramente inseparabile del corpo dei resti di A.

DIMOSTRAZIONE. L'omomorfismo di inclusione $i : (\bar{A})_r \longrightarrow \bar{A}$ fa di $\bar{A}$ una $(\bar{A})_r$-algebra intera su $(\bar{A})_r$ dato che $\omega(A) \subset (\bar{A})_r$. Dalla Proposizione 1 si ottiene

$$R((\bar{A})_r) = R(\bar{A}) \cap (\bar{A})_r = R(\bar{A}).$$

È anche chiaro che l'omomorfismo ω si fattorizza in $\omega = i \circ \eta$ dove η è un omomorfismo $\eta : A \longrightarrow (\bar{A})_r$ tale che $\eta(A) = \omega(A)$ e inoltre $\ker(\eta) = \ker(\omega)$. Applicando la Proposizione 1 si ricava $R(A) = \eta^{-1}(R(\bar{A}))$ e di qui si ha un monomorfismo canonico

$$\theta : A/R(A) \longrightarrow (\bar{A})_r/R(\bar{A}).$$

Per il Teorema dell'isomorfismo otteniamo

$$\theta(A/R(A)) = [\omega(A) + R(\bar{A})]/R(\bar{A}).$$

Sia $\sigma : (\bar{A})_r \longrightarrow (\bar{A})_r/R(\bar{A})$ l'omomorfismo canonico; se x, y sono elementi di $(\bar{A})_r/R(\bar{A})$ tali che $xy = 0$ e se u, v sono elementi di $(\bar{A})_r$ con $\sigma(u) = x$, $\sigma(v) = y$ avremo $\sigma(u^{p^m})$, $\sigma(v^{p^m}) \in [\omega(A) + R(\bar{A})]/R(\bar{A}) = \theta(A/R(A))$. Poichè $\theta(A/R(A))$ è un corpo ne segue $x^{p^m} = 0$ oppure $y^{p^m} = 0$, per m opportuno. Ne segue $u^{p^m} \in R(\bar{A})$ e quindi $u \in R(\bar{A})$ poichè $R(\bar{A})$ è un ideale che coincide con la propria radice, oppure allo stesso modo $v \in R(\bar{A})$. Dunque se $xy = 0$ otteniamo $x = 0$ oppure $y = 0$. Dunque $(\bar{A})_r/R(\bar{A})$ è un anello integro, intero sul corpo $\theta(A/R(A))$. Da Bourbaki, Algèbre Commutative, Ch. V, § 2., Prop. 1 e Lemme 2 (pag. 36) segue che $(\bar{A})_r/R(\bar{A})$ è un corpo e quindi che $R(\bar{A})$ è un ideale massimale di $(\bar{A})_r$.

Abbiamo già verificato che $R(\bar{A})$ è il radicale di Jacobson dell'anello $(\bar{A})_r$ e ne concludiamo che $R(\bar{A})$ è l'unico ideale massimale di $(\bar{A})_r$. Dunque $(\bar{A})_r$ è un anello locale e $R(\bar{A})$ e il suo ideale massimale.

Ciò verifica la (i) della Proposizione 2; la (ii) è adesso immediata poichè nel corso della dimostrazione della (i) abbiamo verificato che se $x \in (\bar{A})_r/R(\bar{A})$ allora per un intero m opportuno $x^{p^m} \in \theta(A/R(A))$.

Proposizione 3. *Sia A un anello locale, $\bar{A}$ una A-algebra intera su A, $\omega : A \to \bar{A}$ l'omomorfismo canonico. Supponiamo che*

$$\ker(\omega) \subset N(A).$$

Sia ancora B un altro anello locale e si abbia un diagramma commutativo di A-algebre

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\omega"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & \bar{A} \\ & B \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

tale che

$$\ker(\psi) \subset N(B).$$

Allora B è una A-algebra intera su A e $\bar{A}$ è una B-algebra intera su B. Si ha

$$\ker(\varphi) \subset N(A)$$

e inoltre

$$R(A) = \varphi^{-1}(R(B)).$$

Infine se il monomorfismo canonico

$$\theta : A/R(A) \to B/R(B)$$

ottenuto per passaggio al quoziente fa di $B/R(B)$ una estensione inseparabile di $A/R(A)$, allora

$$\omega(A) \subset \psi(B) \subset (\bar{A})_r.$$

Dimostrazione. È chiaro che

$$\ker(\varphi) \subset \ker(\omega) \subset N(A).$$

Verifichiamo poi che B è una A-algebra intera su A.

Sia $x \in B$; allora $y = \psi(x) \in \bar{A}$ è intero su A e si ha una equazione di dipendenza integrale

$$y^n + \omega(a_1)\, y^{n-1} + \ldots + \omega(a_n) = 0,$$

dove $a_i \in A$. Ne segue che essendo $\omega = \psi \circ \varphi$ dovrà essere

$$x^n + \varphi(a_1)\, x^{n-1} + \ldots + \varphi(a_n) \in \ker(\psi).$$

Per le ipotesi fatte, ogni elemento di $\ker(\psi)$ è nilpotente da cui segue immediatamente che x è intero su A.

Il fatto che $\bar{A}$ sia una B-algebra intera su B è ovvio da $\omega(A) \subset \psi(B)$.

Applicando la Proposizione 1 ricaviamo

$$R(A) = \varphi^{-1}(R(B)),$$

$$R(B) = \psi^{-1}(R(\bar{A}))$$

e in particolare si ottiene un monomorfismo canonico

$$\theta : A/R(A) \longrightarrow B/R(B).$$

Supponiamo che $B/R(B)$ sia estensione puramente inseparabile di $\theta(A/R(A))$. Per il Teorema dell'isomorfismo si ha

$$\theta(A/R(A)) = [\psi(A) + R(B)]/R(B),$$

dunque se $x \in B$ e se p è l'esponente caratteristico di $A/R(A)$ esiste m tale che $x^{p^m} \in \varphi(A) + R(B)$. Ne segue

$$\psi(x)^{p^m} \in \psi[\varphi(A) + R(B)] \subset \omega(A) + R(\bar{A})$$

poichè $\psi(R(B)) = \psi(\psi^{-1}(R(\bar{A})) \subset R(\bar{A})$. Dalla Definizione dell'anello $(\bar{A})_r$ ricaviamo $\psi(x) \in (\bar{A})_r$ e la Proposizione 3 è completamente dimostrata.

§ 2. La chiusura integrale debole di un fascio.

Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ un preschema $\bar{\mathcal{A}}$ una $\mathcal{O}_X$ algebra intera su X e sia $\omega : \mathcal{O}_X \rightarrow \bar{\mathcal{A}}$ l'omomorfismo canonico di $\mathcal{O}_X$-algebra. Per ogni punto $x \in X$ siano $\mathcal{O}_x$ e $\bar{\mathcal{A}}_x$ le fibre di $\mathcal{O}_X$ e di $\bar{\mathcal{A}}$ in x; sia infine $\omega_x : \mathcal{O}_x \longrightarrow \bar{\mathcal{A}}_x$ l'omomorfismo canonico di $\mathcal{O}_x$-algebre.

Conformemente alle notazioni della sezione precedente, sia p l'esponente caratteristico del corpo dei resti $k(x)$ dell'anello locale $\mathcal{O}_x$ e poniamo

$$(\bar{\mathcal{A}}_x)_r = \{x \in \bar{\mathcal{A}}_x \mid \exists\, m,\ u^{p^m} \in \omega_x(\mathcal{O}_x) + R(\bar{\mathcal{A}}_x)\}$$

dove $R(\bar{\mathcal{A}}_x)$ è il radicale di Jacobson dell'anello $\bar{\mathcal{A}}_x$.

DEFINIZIONE 1. *Si dice chiusura integrale debole $\bar{\mathcal{A}}^*$ di $\mathcal{O}_X$ in $\bar{\mathcal{A}}$ la sotto $\mathcal{O}_X$-algebra di $\bar{\mathcal{A}}$ le cui sezioni $f \in \Gamma(U, \mathcal{A}^*)$ sono le sezioni $f \in \Gamma(U, \bar{\mathcal{A}})$ il cui germe f_x in ogni punto $x \in U$ è tale che*

$$f_x \in (\bar{\mathcal{A}}_x)_r \qquad (x \in U).$$

È ovvio dalla Definizione 1 che $\mathcal{A}^*$ è ancora un fascio.

PROPOSIZIONE 4. *Se $\bar{\mathcal{A}}$ è una $\mathcal{O}_X$-algebra quasi coerente allora $\mathcal{A}^*$ è una $\mathcal{O}_X$-algebra quasi coerente.*

DIMOSTRAZIONE. Poichè la questione è di carattere locale, possiamo supporre X affine con anello di coordinate A.

Sia $f \in A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ una sezione globale di $\mathcal{O}_X$ e sia $D(f)$ l'aperto di X definito da

$$D(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\},$$

cioè l'insieme dei punti $x \in X$ tali che il germe f_x di f in x sia $f_x \in \mathfrak{m}_x$, dove $\mathfrak{m}_x$ indica l'ideale massimale di $\mathcal{O}_x$.

Sia U un aperto di X con $D(f) \subset U$ e sia s una sezione $s \in \Gamma(D(f), \bar{\mathcal{A}})$ tale che

$$s_x \in (\bar{\mathcal{A}}_x)_r \quad \text{per ogni } x \in D(f).$$

Adesso dimostriamo che esiste un intero n non negativo tale che $f^n|_{D(f)} \cdot s$ si estende a una sezione in $\Gamma(U, \mathcal{A}^*)$.

Infatti, poichè $\bar{\mathcal{A}}$ è quasi-coerente per ipotesi, esiste $n \geq 1$ tale $f^{n-1}|_{D(f)} \cdot s$ si estende a una sezione $t \in \Gamma(U, \bar{\mathcal{A}})$, come si vede applicando (EGA, I.1.4.1.d1).

Avremo quindi

$$t_x \in \bar{\mathcal{A}}_x \quad \text{per } x \in U.$$

Consideriamo la sezione $f|_U \cdot t \in \Gamma(U, \bar{\mathcal{A}})$. È chiaro che $(f|_U \cdot t)|_{D(f)} = f^n|_{D(f)} \cdot s \in \Gamma(D(f), \mathcal{A}^*)$ e ne segue

$$(f|_U \cdot t)_x \in (\bar{\mathcal{A}}_x)_r \qquad \text{per } x \in D(f).$$

D'altra parte, se $x \in U - D(f)$ si ha $f(x) = 0$, cioè $f_x \in \mathfrak{m}_x$. Ne segue

$$(f|_U \cdot t)_x = f_x \cdot t_x \in \mathfrak{M}_x \cdot \bar{\mathcal{A}}_x \qquad \text{per } x \in U - D(f).$$

Per ipotesi, l'anello $\bar{\mathcal{A}}_x$ è intero su $\mathcal{O}_x$, dunque se $\bar{\mathfrak{m}}$ è un qualunque ideale massimale di $\bar{\mathcal{A}}_x$ si ha

$$\omega_x^{-1}(\bar{\mathfrak{m}}) = \mathfrak{m}_x$$

(si veda Bourbaki, Algèbre Commutative, Ch. V_2, Prop. 1, pag. 36). Ne segue

$$\mathfrak{m}_x \cdot \bar{\mathcal{A}}_x = \omega_x(\mathfrak{m}_x)\, \bar{\mathcal{A}}_x \subset \omega_x(\omega_x^{-1}(\bar{\mathfrak{m}}))\bar{\mathcal{A}}_x \subset \bar{\mathfrak{m}}\, \bar{\mathcal{A}}_x = \bar{\mathfrak{m}}$$

e poichè $\bar{\mathfrak{M}}$ è arbitrario si avrà

$$\mathfrak{m}_x \cdot \bar{\mathcal{A}}_x \subset \cap\, \bar{\mathfrak{m}} = R(\bar{\mathcal{A}}_x) \subset (\bar{\mathcal{A}}_x)_r\,.$$

Da quanto precede si ottiene

$$(f|_U \cdot t)_x \in (\bar{\mathcal{A}}_x)_r \qquad \text{per } x \in U - D(f);$$

abbiamo già verificato quest'ultima relazione per $x \in D(f)$ e quindi ricordando la definizione di $\mathcal{A}^*$ si ha che $f^n|_{D(f)} \cdot s$ si estende a una sezione in $\Gamma(U, \mathcal{A}^*)$, come volevamo.

La Proposizione 4 segue di qui applicando il criterio di quasi-coerenza in (EGA, I.1.4.1). Infatti abbiamo verificato la condizione 1.4.1.d1) è banalmente verificata poichè $\bar{\mathcal{A}}$ è quasi-coerente per ipotesi e poichè $\Gamma(U, \mathcal{A}^*) \subset \Gamma(U, \bar{\mathcal{A}})$.

La conclusione cercata viene adesso da (EGA, I. 1. 4. 1. c).

PROPOSIZIONE-DEFINIZIONE 5. *Sia X un preschema $\bar{\mathcal{A}}$ una $\mathcal{O}_X$-algebra quasi coerente e intera su $\mathcal{O}_X$, $\mathcal{A}^*$ la chiusura integrale debole di $\mathcal{O}_X$ in $\bar{\mathcal{A}}$.*

Allora esiste un X-preschema X^*, affiine su X, tale che posto $f : X^* \to X$ il morfismo strutturale risulti

$$f_*(\mathcal{O}_{X^*}) = \mathcal{A}^*.$$

Il preschema X^* si indica anche con la notazione Spec $(\mathscr{A}^*)$ *ed è univocamente determinato a meno di X-isomorfismi e si chiama normalizzata debole di X relativa alla $\mathcal{O}_X$-algebra $\bar{\mathscr{A}}$.*

DIMOSTRAZIONE. Dalla Proposizione 4 segue che $\mathscr{A}^*$ è quasi-coerente e il risultato cercato viene da (EGA, II.1.3.1).

Consideriamo la categoria degli S-preschemi e come morfismi gli S-morfismi. Una proprietà P di S morfismi si dice universale se è compatibile con la formazione di prodotti e se è compatibile con l'estensione del preschema di base.

DEFINIZIONE 2. *Un morfismo $f: X \longrightarrow Y$ di preschemi si dice un omeomorfismo universale se*

(i) *f è universalmente iniettivo*

(ii) *f è universalmente chiuso*

(iii) *f è suriettivo.*

Come è noto (EGA, I.3.5.8) al posto della (i) si può sostituire la condizione equivalente

(i)′ f è un morfismo iniettivo e posto più precisamente $f = (\psi, \theta)$ allora per ogni $x \in X$ il monomorfismo

$$\theta^x : k(\psi(x)) \longrightarrow k(x)$$

fa di $k(x)$ una estensione puramente inseparabile di $k(\psi(x))$.

Le tre proprietà espresse dalle condizioni (i), (ii) e (iii) sono universali, cioè si conservano per estensione del preschema di base e per la formazione di prodotti di morfismi aventi le medesime proprietà.

TEOREMA 1. *Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ un preschema, $\bar{\mathscr{A}}$ una $\mathcal{O}_X$-algebra quasi coerente e intera su $\mathcal{O}_X$, $\mathscr{A}^*$ la chiusura integrale debole di $\mathcal{O}_X$ in $\bar{\mathscr{A}}$.*

Sia f: Spec $(\mathscr{A}^*) \longrightarrow X$ *il morfismo canonico e sia $Y = f$* (Spec $(\mathscr{A}^*)$) *il sottopreschema di X immagine di* Spec $(\mathscr{A}^*)$ *definito dal fascio di ideali*

$$\mathcal{J}_Y = \ker(\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathscr{A}^*).$$

Allora f si fattorizza in

$$\mathrm{Spec}(\mathscr{A}^*) \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{j} X$$

dove φ è un omeomorfismo universale e j è una immersione chiusa.

Dimostrazione del Teorema 1.

Cominciamo col verificare che f è universalmente chiuso.

Poichè $\mathcal{A}^*$ è una sotto $\mathcal{O}_X$-algebra di $\bar{\mathcal{A}}$ ed $\bar{\mathcal{A}}$ è intera su $\mathcal{O}_X$ ne segue che anche $\mathcal{A}^*$ è intera su $\mathcal{O}_X$. Dunque il morfismo f è intero (EGA, II, 6.1.2) e perciò universalmente chiuso (EGA, II. 6.1.10). Inoltre il morfismo f, essendo intero, è anche affine e quindi per dimostrare il Teorema 1 possiamo supporre X affine.

Sia $\mathcal{J}_Y = \ker(\mathcal{O}_X \to \mathcal{A}^*)$; avremo $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X/\mathcal{J}_Y$ e la successione di morfismi

$$\mathrm{Spec}\,(\mathcal{A}^*) \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{j} X$$

si porta nella successione equivalente di omomorfismi di $\mathcal{O}_X$ algebre

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow{a_j} \mathcal{O}_X/\mathcal{J}_Y \xrightarrow{a_\varphi} \mathcal{A}^*.$$

Per costruzione l'omomorfismo a_j è surgettivo e quindi il corrispondente morfismo

$$j : \mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}_Y) \to \mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_X)$$

è una immersione chiusa (EGA, I. 4.2.3).

Resta da dimostrare che $\varphi : \mathrm{Spec}\,(\mathcal{A}^*) \to Y$ è un omeomorfismo universale.

Poichè $\mathcal{J}_Y = \ker(\mathcal{O}_X \to \mathcal{A}^*) = \ker(\mathcal{O}_X \to \bar{\mathcal{A}})$ ne segue che $\bar{\mathcal{A}}$ è intero su $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}_Y$ e che $\mathcal{A}^*$ è la chiusura integrale debole di $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}_Y$ in $\bar{\mathcal{A}}$, dato che $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}_Y$ si può identificare all'immagine di $\mathcal{O}_X$ in $\bar{\mathcal{A}}$.

Per dimostrare il Teorema 1 basterà dimostrare che se $\mathcal{O}_X \to \mathcal{A}^*$ è iniettivo allora il morfismo f associato è un omeomorfismo universale.

Verifichiamo che f è un morfismo suriettivo.

Possiamo supporre X affine, e quindi $X = \mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_X)$; poichè $\mathcal{O}_X \to \mathcal{A}^*$ è iniettivo ne segue che f è dominante (EGA, I. 1.2.7). Dunque l'immagine di f è densa in X e poichè f è un morfismo chiuso ne segue che f è suriettivo.

Resta da dimostrare che f è universalmente iniettivo.

Poichè f è affine, possiamo supporre X affine. Sia

$$A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X),$$
$$A^* = \Gamma(X, \mathcal{A}^*).$$

Sia ancora $x \in X$, j_x l'ideale primo di A associato a x e sia $S = A - j_x$. Allora $S^{-1}A$ e $S^{-1}A^*$ si identificano canonicamente alle fibre $\mathcal{O}_x$ e $\mathcal{A}^*_x$ dato che $\mathcal{A}^*$ è quasi-coerente, come si vede da (EGA, I, 1.4.1.0)).

Si ottiene di qui un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(\mathcal{A}_x^*) \arrow[r, "f_x"] \arrow[d] & \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_x) \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}(\mathcal{A}^*) \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

Da Bourbaki, Algèbre Commutative, Ch. 5, § 2, 1, Lemme 1 ricaviamo che l'insieme $f^{-1}(x)$ è in corrispondenza biunivoca con l'insieme $f_x^{-1}(\xi)$ dove ξ è l'unico punto chiuso di Spec $(\mathcal{O}_x)$. Sia $y \in f_x^{-1}(\xi)$, j_y l'ideale primo di $\mathcal{A}_x^*$ associato a y; sia $\eta_x : \mathcal{O}_x \longrightarrow \mathcal{A}_x^*$ l'omomorfismo canonico. Se $\mathfrak{m}_x$ è l'ideale massimale di $\mathcal{O}_x$ avremo $\eta_x^{-1}(j_y) = \mathfrak{M}_x$ e ne viene un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_x \arrow[r, "\eta_x"] \arrow[d] & \mathcal{A}_x^* \arrow[d] \\ k(x) \arrow[r, "\theta"] & \mathcal{A}_x^*/j_y \end{tikzcd}$$

dove η_x è iniettivo, θ è un monomorfismo e $\mathcal{A}_x^*$ è intero su $\mathcal{O}_x$. Essendo $\eta_x^{-1}(j_y) = \mathfrak{M}_x$ anche $\mathcal{A}_x^*/j_y$ è intero sul corpo $k(x)$. Poichè $\mathcal{A}_x^*/j_y$ è integro e intero sul corpo $k(x)$, anche $\mathcal{A}_{x/}^*j_y$ è un corpo (Bourbaki, Algèbre Commutative, Chi 5, § 2, Prop. 1 e Lemme 2 (pag. 36)) e quindi j_y è un ideale massimale di $\mathcal{A}_x^*$.

Ne segue che se dimostriamo che $\mathcal{A}_x^*$ è un anello locale allora $f_x^{-1}(\xi)$ è l'unico punto chiuso di Spec $(\mathcal{A}_x^*)$ e qnindi $f^{-1}(x)$ consiste di un solo punto.

Si ha $\eta_x(\mathcal{O}_x) \subset \mathcal{A}_x^* \subset (\bar{\mathcal{A}}_x)_r$ e dunque $(\bar{\mathcal{A}}_x)_r$ è intero sul suo sottoanello $\mathcal{A}_x^*$. D'altra parte, $(\bar{\mathcal{A}}_x)_r$ è un anello locale (Proposizione 2) e quindi per il Teorema di Cohen-Seidenberg lo è anche $\mathcal{A}_x^*$.

Dunque f è un morfismo iniettivo. Per verificare che è universalmente iniettivo basta osservare che il corpo di resti di $\mathcal{A}_x^*$ si identifica con un sottocorpo del corpo dei resti dell'anello locale $(\bar{\mathcal{A}}_x)_r$. Per la (ii) della Proposizione 2 il corpo dei resti di $\mathcal{A}_x^*$ è estensione puramente inseparabile di $k(x)$ e la condizione (i)$'$ della Definizione 2 è verificata. Dunque f è universalmente iniettivo ed un omeomorfismo universale e il Teorema 1 è completamente dimostrato.

§ 3. La normalizzazione debole di un preschema relativamente ad un altro preschema.

Sia $f : Y \longrightarrow X$ un morfismo di preschemi tale che $f_* (\mathcal{O}_Y)$ sia una $\mathcal{O}_X$-algebra quasi-coerente. Allora potremo considerare

$$X' = \operatorname{Spec} (f_* (\mathcal{O}_Y))$$

e X' sarà uno schema affine su X, dove la struttura di $\mathcal{O}_X$-algebra del fascio $f_* (\mathcal{O}_Y)$ determina un morfismo

$$u : X' \longrightarrow X.$$

Si ha $f_* (\mathcal{O}_Y) = u_* (\mathcal{O}_{Y'})$ dunque questo isomorfismo identico determina un morfismo

$$f' : Y \longrightarrow X'$$

tale che $f = u \circ f'$; si veda in proposito (EGA, II.1.2.7).

La fattorizzazione ottenuta

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & & X \\ & X' \arrow[ur, "u"'] & \end{tikzcd}$$

si dice fattorizzazione affine del morfismo f, e nel caso particolare in cui f è un morfismo proprio si indica anche come fattorizzazione di Stein di f.

PROPOSIZIONE 6. (*proprietà universale della fattorizzazione affine*).

Sia $f : Y \longrightarrow X$ un morfismo tale che $f_* (\mathcal{O}_Y)$ sia quasi coerente e sia

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & & X \\ & X' \arrow[ur, "u"'] & \end{tikzcd}$$

la fattorizzazione affine di f.

Allora per ogni preschema Z e morfismi $h : Y \longrightarrow Z$, $g : Z \longrightarrow X$ tali che $f = g \circ h$ e tale che g sia un morfismo affine, esiste un morfismo affine

$\Phi : X' \longrightarrow Z$ tale che il diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "f'"] \arrow[dr, "f"] & \\
Z \arrow[rr, "g"'] & X' \arrow[l, "\Phi"'] \arrow[r, "u"] & X
\end{tikzcd}$$

sia commutativo.

Dimostrazione. Si ha $g_*(h_*(\mathcal{O}_Y)) = f_*(\mathcal{O}_Y)$ il che fa di $f_*(\mathcal{O}_Y)$ una $g_*(\mathcal{O}_Z)$-algebra tramite la $\mathcal{O}_Z$-algebra $h_*(\mathcal{O}_Y)$.

Se ne ricava un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
 & f_*(\mathcal{O}_Y) & \\
g_*(\mathcal{O}_Z) \arrow[ur] & & \mathcal{O}_X \arrow[ul] \arrow[ll]
\end{tikzcd}$$

Poichè Z è affine su X per ipotesi, da (EGA, II.1.2.7) si ricava facilmente la Proposizione 6.

Supponiamo ancora che $f : Y \longrightarrow X$ sia un morfismo tale che $f_*(\mathcal{O}_Y)$ sia quasi-coerente. Sia $\bar{\mathcal{A}}$ la chiusura integrale di $\mathcal{O}_X$ in $f_*(\mathcal{O}_Y)$. Allora $\bar{\mathcal{A}}$ è quasi-coerente (EGA, II.6.3.4) e per la Proposizione 5 lo è anche $\mathcal{A}^*$. Posto $X^* = \operatorname{Spec}(\mathcal{A}^*)$ ricaviamo un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[d, "f'"'] \arrow[ddr, "f"] & \\
X' \arrow[d, "\Phi"'] \arrow[dr, "u"] & \\
X^* \arrow[r, "\sigma"'] & X
\end{tikzcd}$$

dove Φ, σ, u sono morfismi affini, Φ ottenendosi dalla Proposizione 6.

Il preschema ottenuto X^* si dice normalizzata debole di X in Y; esso si può costruire ogni volta che il fascio $f_*(\mathcal{O}_Y)$ è quasi-coerente, in particolare se f è quasi-compatto e quasi-separato.

PROPOSIZIONE 7. *Sia $f: Y \longrightarrow X$ un morfismo tale che $f_*(\mathcal{O}_Y)$ sia quasi coerente, e sia X^* la normalizzata debole di X in Y.*

Allora il morfismo $\sigma: X^* \longrightarrow X$ è un omeomorfismo universale se e solamente se f è dominante, cioè se $f(Y)$ è denso in X.

DIMOSTRAZIONE. Cominciamo col verificare che σ è un omeomorfismo universale se e solo se u è dominante.

Poichè u, σ e Φ sono affini e poichè la questione è di carattere locale possiamo supporre X, X^* e X' affini, di anello di coordinate $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, $A^* = \Gamma(X^*, \mathcal{O}_{X^*}) = \Gamma(X, \mathcal{A}^*)$ $B = \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'}) = \Gamma(X, f_*(\mathcal{O}_Y))$.

L'inclusione $\mathcal{A}^* \subset f_*(\mathcal{O}_Y)$ mostra che l'omomorfismo $A^* \longrightarrow B$ associato al morfismo $\Phi: X' \longrightarrow X^*$ è una inclusione, dunque Φ è dominante (EGA, I. 1.2.7). Ne segue che σ è dominante se e solo se u è dominante.

Se σ è dominante, da (EGA, I. 1.2.7) ricaviamo che $\mathcal{J} = \ker(\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{A}^*) \subset \subset \mathcal{N}_X$ dove $\mathcal{N}_X$ è il sottofascio degli elementi nilpotenti di $\mathcal{O}_X$. Ma allora l'immersione chiusa

$$\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}) \longrightarrow X$$

è un omeomorfismo universale e quindi per il Teorema 1 σ è un omeomorfismo universale.

D'altra parte, u è dominante se e solo se f è dominante. Infatti per (EGA, I. 1.2.7) u è dominante se e solo se

$$\ker(\mathcal{O}_X \longrightarrow u_*(\mathcal{O}_{X'})) \subset \mathcal{N}_X$$

e poichè $f_*(\mathcal{O}_Y) = u_*(\mathcal{O}_{X'})$ avremo $\ker(\mathcal{O}_X \longrightarrow f_*(\mathcal{O}_Y)) \subset \mathcal{N}_X$. D'altra parte $\operatorname{supp}(f_*(\mathcal{O}_Y)) = X$ se e solo se $\ker(\mathcal{O}_X \longrightarrow f_*(\mathcal{O}_Y)) \subset \mathcal{N}_X$ ed essendo $\operatorname{supp}(f_*(\mathcal{O}_Y)) = \overline{f(Y)}$ ne segue che u è dominante se e solo se $\overline{f(Y)} = X$, e la Proposizione 7 è dimostrata.

TEOREMA 2. *Sia $f: Y \longrightarrow X$ un morfismo dominante tale che $f_*(\mathcal{O}_Y)$ sia quasi-coerente, sia X^* la normalizzata di X in Y, $\sigma: X^* \longrightarrow X$ il morfismo canonico.*

Sia Z un preschema e g, h due morfismi $h: Y \longrightarrow Z$, $g: Z \longrightarrow X$ tali che

(i) $f = g \circ h$;

(ii) *g è un omeomorfismo universale intero.*

Allora esiste un omeomorfismo universale $\tau: X^* \longrightarrow Z$ tale che $\sigma = g \circ \tau$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $Y \xrightarrow{f'} X' \xrightarrow{u} X$ la fattorizzazione affine del morfismo f.

Per ipotesi g è un morfismo intero, dunque affine e quindi per la proprietà universale della fattorizzazione affine (Proposizione 6) si vede che nel Teorema 2 possiamo limitarci al caso in cui Y è affine su X.

In questo caso, tutti i preschemi considerati sono affini su X e quindi il diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "\Phi"] \arrow[ddr, "f"] & \\
 & X^* \arrow[dl, "\tau"] \arrow[dr] & \\
Z \arrow[rr, "g"'] & & X
\end{tikzcd}$$

è equivalente al diagramma di fasci e omomorfismi

$$\begin{tikzcd}
 & f_*(\mathcal{O}_Y) & \\
 & \mathcal{A}^* \arrow[u, "\Phi'"] & \\
g_*(\mathcal{O}_Z) \arrow[uur, "h'"] \arrow[ur, "\tau'"'] & & \mathcal{O}_X \arrow[uul, "f'"'] \arrow[ul, "\sigma'"] \arrow[ll, "g'"]
\end{tikzcd}$$

dove abbiano indicato con $f', g', \dots$, gli omomorfismi corrispondenti ai morfismi $f, g \dots$.

Dobbiamo verificare che esiste un omomorfismo τ' che rende commutativo l'ultimo diagramma è tale che τ sia un omeomorfismo universale.

Sia $\bar{\mathcal{A}}$ la chiusura integrale di $\mathcal{O}_X$ in $f_*(\mathcal{O}_Y)$. Poichè g è un morfismo intero, risulta

$$h'(g_*(\mathcal{O}_Z)) \subset \bar{\mathcal{A}}$$

da cui si ha un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X \arrow[r, "\sigma'"] \arrow[dr, "g'"'] & \mathcal{A}^* \arrow[r, "i"] & \bar{\mathcal{A}} \\
 & g_*(\mathcal{O}_Z) \arrow[ur, "h'"'] &
\end{tikzcd}$$

dove i è l'inclusione. Poichè f è dominante σ è un omeomorfismo universale (Proposizione 7) quindi dominante e da (EGA, I. 1.2.7) si ricava $\ker(\sigma') \subset \mathcal{N}_X$.

Passando alle fibre si ha un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_x \arrow[rr, "i_x \circ \sigma'_x"] \arrow[dr, "g'"'] & & \bar{\mathcal{A}}_x \\
& g_*(\mathcal{O}_Z)_x \arrow[ur, "h'"'] &
\end{tikzcd}$$

tale che ogni elemento del nucleo di $i_x \circ \sigma'_x$ è nilpotente, e tale che $g_*(\mathcal{O}_Z)_x$ è intero su $\mathcal{O}_x$.

D'altra parte, essendo f dominante e g un omeomorfismo universale, anche h è dominante e quindi ogni elemento del nucleo di h'_x è nilpotente.

Poichè g è un omeomorfismo universale, $g_*(\mathcal{O}_Z)_x$ è un anello locale e il corpo dei resti di $g_*(\mathcal{O}_Z)_x$ è estensione puramente inseparabile del corpo dei resti di $\mathcal{O}_x$, tramite il monomorfismo ottenuto da g'_x per passaggio al quoziente.

Dunque siamo in grado di applicare la Proposizione 3 e si deduce che

$$h'_x(g_*(\mathcal{O}_Z)_x) \subset (\bar{\mathcal{A}}_x)_r$$

per ogni x. Ricordiamo la definizione del fascio $\mathcal{A}_*$ si deduce che

$$h'(g_*(\mathcal{O}_Z)) \subset \mathcal{A}^*.$$

Dunque h' si fattorizza in $i \circ \tau'$ dove $i : \mathcal{A}^* \longrightarrow \bar{\mathcal{A}}$ è l'inclusione e $\tau' : g_*(\mathcal{O}_Z) \longrightarrow \mathcal{A}^*$. Passando agli spettri si vede così che esiste un morfismo $\tau : X^* \longrightarrow Z$ che rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[d, "\Phi"] \arrow[ddl, "h"'] \arrow[ddr, "f"] & \\
& X^* \arrow[dl, "\tau"] \arrow[dr, "\sigma"'] & \\
Z \arrow[rr, "g"'] & & X
\end{tikzcd}$$

Si ha $\sigma = g \circ \tau$. Poichè σ è universalmente iniettivo, τ lo è (EGA, I. 3.5.6 (iii)); poichè σ è suriettivo e g è iniettivo, τ è suriettivo; poichè σ è universalmente chiuso e g è separato, τ è universalmente chiuso (EGA, II. 5.4.3) e (EGA, II. Remarque 5.4.9). Ne segue che τ è un omeomorfismo universale e il Teorema 2 è dimostrato.

§ 4. Applicazioni al caso di varietà algebriche.

Sia K un corpo e consideriamo la categoria dei K-preschemi algebrici. Un preschema X si dice algebrico se esiste un ricoprimento finito $\{U_\alpha\}$ di X con aperti affini, tali che i corrispondenti anelli A_α siano algebre di tipo finito su un corpo K.

È ben noto (EGA, I. 6.3) che ogni K-preschema algebrico è noetheriano, ogni K-morfismo di preschemi algebrici è di tipo finito e la categoria dei preschemi algebrici ammette prodotti.

Teorema 3. *Siano Y, X due K-preschemi algebrici, $f: Y \to X$ un K-morfismo dominante.*

Allora $f_*(\mathcal{O}_Y)$ è coerente, e se X^* è la normalizzata debole di X in Y allora X^* è un K-preschema algebrico.

Dimostrazione. $f_*(\mathcal{O}_Y)$ è coerente poichè X è noetheriano, $f_*(\mathcal{O}_Y)$ è una $\mathcal{O}_X$ algebra di tipo finito ed è quasi-coerente (EGA, I. 9.9.2. c)) e (EGA, I. 6.6.3).

Dunque la chiusura integrale $\overline{\mathcal{A}}$ di $\mathcal{O}_X$ in $f_*(\mathcal{O}_Y)$ è coerente, infatti se $\omega: \mathcal{O}_X \to f_*(\mathcal{O}_Y)$ avremo che $\omega(\mathcal{O}_X)$ è coerente, e $\omega(\mathcal{O}_X) \subset \overline{\mathcal{A}} \subset f_*(\mathcal{O}_Y)$. Adesso $\omega(\mathcal{O}_X)$ e $f_*(\mathcal{O}_Y)$ sono $\mathcal{O}_X$-moduli noetheriani e di tipo finito, dunque lo è $\overline{\mathcal{A}}$; poichè $\overline{\mathcal{A}}$ è quasi-coerente (EGA, II. 6.3.4) e di tipo finito su $\mathcal{O}_X$, è anche coerente (EGA, I. 9.6.3).

Per la Proposizione 5, $\mathcal{A}^*$ è quasi coerente e poichè $\omega(\mathcal{O}_X) \subset \mathcal{A}^* \subset \overline{\mathcal{A}}$ avremo come in precedenza che $\mathcal{A}^*$ è coerente. Ma allora il morfismo canonico $\sigma: X^* \to X$ è di tipo finito (EGA, II. 1.3.7) e poichè X è di tipo finito su Spec(K) anche X^* lo è. Dunque X^* è un K-preschema algebrico.

Sia X un K-preschema algebrico ridotto, $R(X)$ il fascio delle funzioni razionali su X. Allora $R(X)$ è quasi-coerente (EGA, I. 7.3.7); sia $\overline{\mathcal{A}}$ la chiusura integrale di $\mathcal{O}_X$ in $R(X)$ e sia $\overline{X} = \mathrm{Spec}(\overline{\mathcal{A}})$. Per (EGA, II. 6.3.8) e (EGA, II. 6.3.10) si ottiene che il morfismo canonico $f: \overline{X} \to X$ è birazionale (dunque dominante) e di tipo finito, e ne viene che $\overline{X}$ è un K-preschema algebrico ridotto che si dice normalizzata di X.

Sia X^* la normalizzazione debole di X in $\overline{X}$; per il Teorema 3, X^* è un K-preschema algebrico, anch'esso ridotto (infatti l'omomorfismo canonico

$\mathcal{O}_X \longrightarrow R(X)$ è iniettivo (EGA, I. 7.3.7)), universalmente omeomorfo e birazionale con X, che si dirà normalizzata debole di X.

Si noti che X^* è anche la normalizzazione debole di X in Spec $(R(X))$.

TEOREMA 4. (*Proprietà universale della normalizzata debole*).

Sia X un K-preschema algebrico ridotto, X^* la sua normalizzata debole, $\sigma : X^* \longrightarrow X$ il morfismo canonico di K-preschemi.

Allora la coppia (X^*, σ) è massima tra tutte le coppie (Z, g) formate da un K-preschema algebrico ridotto Z e un K-morfismo

$$g : Z \longrightarrow X$$

che sia un omeomorfismo universale e birazionale.

DIMOSTRAZIONE. Poichè g è di tipo finito, X è noetheriano e g è un omeomorfismo universale, avremo che g è un morfismo intero e in particolare affine (è una conseguenza del Main Theorem di Zariski; si veda (EGA; IV. 8.11.6)).

Ne segue che $Z = \operatorname{Spec}(g_*(\mathcal{O}_Z))$.

Adesso poichè g è birazionale e Z ridotto dovrà essere $\mathcal{O}_X \subset g_*(\mathcal{O}_Z) \subset R(X)$ (EGA, I. 7.3.3) e poichè $g_*(\mathcal{O}_Z)$ è intero su $\mathcal{O}_X$ ne segue che

$$\mathcal{O}_X \subset g_*(\mathcal{O}_Z) \subset \bar{\mathscr{A}}$$

da cui il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} & \bar{X} \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Z \arrow[rr, "g"'] & & X \end{tikzcd}$$

dove f è il morfismo canonico e h è indotto dall'inclusione $g_*(\mathcal{O}_Z) \subset \bar{\mathscr{A}}$.

Il Teorema 4 viene adesso immediatamente come corollario del Teorema 2.

§ 5. Osservazioni e problemi.

In questo paragrafo faremo alcune osservazioni ed enunceremo alcuni problemi, non strettamente legati tra loro ma aventi come substrato comune l'operazione di chiusura integrale debole.

La chiusura integrale debole di un fascio permette di definire una operazione algebrica su anelli qualunque, nel seguente modo.

Siano A e B due anelli, $\omega : A \longrightarrow B$ un omomorfismo. Posto $X = \operatorname{Spec}(A)$, $Y = \operatorname{Spec}(B)$, il morfismo $f : Y \longrightarrow X$ indotto da ω ha la proprietà che $f_*(\mathcal{O}_Y)$ è quasi coerente; infatti $f_*(\mathcal{O}_Y) = \widetilde{B}$ dove $\widetilde{B}$ è la $\widetilde{A}$-algebra indotta dalla struttura di A-algebra di B tramite ω.

Si può allora definire come chiusura integrale debole A^* di A in B l'anello

$$A^* = \Gamma(X, \mathcal{A}^*).$$

Un'altra operazione di natura algebrica può essere ottenuta senza introdurre l'anello $(\bar{A})_r$ come nel § 1 e lavorando esclusivamente con l'anello $\omega(A) + R(\bar{A})$, senza aggiungere « la parte inseparabile ».

Si otterrà così un sottofascio, $\mathcal{A}^0$, di $\mathcal{A}^*$ che avrà la proprietà che per ogni $x \in X$ il corpo dei resti di $\mathcal{A}_x^0$ è isomorfo al corpo dei resti $k(x)$ di $\mathcal{O}_x$.

Il corrispondente preschema $X^0 = \operatorname{Spec}(\mathcal{A}^0)$ avrà le stesse proprietà del preschema X^*, ma questa volta rispetto agli omeomorfismi universali tali che la condizione (i)$'$ della Definizione 2 sia rimpiazzata da:

$$\theta^x : k(f(x)) \longrightarrow k(x)$$

è un isomorfismo per ogni x.

Non sappiamo però se questa condizione è universale, cioè compatibile con la formazione di prodotti.

Analogamente alla definizione di A^*, possiamo definire $A^0 = \Gamma(X, \mathcal{A}^0)$ come chiusura integrale debole separabile di A in B. Nel caso in cui A sia un anello integro di dimensione 1 e B il suo corpo di frazioni, A^0 coincide con la chiusura integrale debole di Endô [2], e può essere definita direttamente. Se la dimensione di A è maggiore di 1, per ottenere risultati significativi sembra indispensabile il passaggio effettuato nel § 2, definendo i fasci $\mathcal{A}^*$ oppure $\mathcal{A}^0$ per mezzo degli $(\bar{A}_x)_r$ o degli $\omega_x(A_x) + R(\bar{A}_x)$.

Se A è un anello integro e A^0 è la chiusura integrale debole separabile di A nel suo corpo di frazioni, diciamo che A è seminormale se $A = A^0$.

C. Traverso ha caratterizzato questi anelli seminormali, dimostrando che

TEOREMA (C. Traverso). *Sia A integro noetheriano, A' la chiusura integrale di A, e A' sia un A-modulo di tipo finito. Allora A è seminormale se e solamente se*

$$\operatorname{Pic}(A) = \operatorname{Pic}(A[t])$$

dove t è una indeterminata.

Altre questioni che possono rivelarsi interessanti sono quelle legate alla permanenza delle proprietà noetheriane.

Se A è integro e noetheriano, è vero sempre che A^0 è noetheriano?

Come si comporta l'operazione di normalizzazione debole rispetto ai completamenti?

Dal punto di vista geometrico, è possibile l'applicazione del concetto di chiusura integrale debole allo studio delle singolarità delle varietà algebriche, definendo una singolarità come debolmente normale se il corrispondente anello locale lo è. Poichè ogni varietà algebrica è omeomorfa a una debolmente normale, le singolarità debolmente normali sarebbero di importanza particolare.

Ad esempio, le cosiddette singolarità ordinarie, ottenute per proiezione generica di una varietà non singolare, sono debolmente normali?

Ulteriori applicazioni del concetto di varietà debolmente normale si hanno per quanto riguarda il teorema di estensione di Riemann; nel caso analitico, si veda ad esempio [1].

Ulteriori applicazioni del concetto di normalizzazione debole si possono trovare per i morfismi debolmente normali.

DEFINIZIONE 3. *Sia $f: X \longrightarrow Y$ un morfismo di preschemi. Diremo che f è debolmente normale in un punto $x \in X$ se*

(i) *per ogni $y \in Y$, la fibra f^{-} (y) è un preschema localmente noetheriano;*

(ii) *il morfismo f è piatto nel punto x e posto $y = f(x)$ la fibra $f^{-1}(y)$ è debolmente normale, cioè coincide con la chiusura integrale debole di $f^{-1}(y)$ in* $\mathrm{Spec}\,(R\,(f^{-1}(y)))$.

Si presentano così il problema di vedere sotto quali ipotesi il prodotto di due morfismi debolmente normali è ancora debolmente normale; il problema di dare condizioni su X e Y affinchè un morfismo $f: X \longrightarrow Y$ sia debolmente normale in un aperto di X, e molti altri problemi in analogia con questioni riguardanti preschemi e morfismi normali.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. ANDREOTTI e F. NORGUET, *La convexité holomorphe dans l'espace analytique des cycles d'une variété algébrique*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 21 (1967), pp. 31-82.

[2] S. ENDÔ, *Projective modules over polynomial rings*, J. Math. Soc. Japan, Vol. 15, (1963).

[3] A. GROTHENDIECK et J. DIEUDONNÉ, *Éléments de Géométrie Algebrique*, I. H. E. S. Paris (1960).

[4] C. TRAVERSO, in preparazione.

[5] O. ZARISKI, *A new operation (« saturation ») on local rings and applications to classifications of singularities,* Rendiconti di Mat , 25 (1966), pp. 283-284.