ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

BRUNO BIGOLIN

Gruppi di Aeppli

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 23, nº 2 (1969), p. 259-287

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1969_3_23_2_259_0>

GRUPPI DI AEPPLI

BRUNO BIGOLIN

Lo studio dei gruppi di Aeppli $V^{p,q}$ e $\Lambda^{p,q}$ intrapreso in questo lavoro si giustifica in vista di alcune applicazioni nella teoria dei cicli delle varietà algebriche (ampiamente trattata in vari lavori di A. Andreotti e F. Norguet), e di utilizzazioni nello studio delle classi di Chern secondo la definizione di R. Bott e S. S. Chern (in Acta Mathematica — 114 (1965)).

Nel § 1 si introducono i gruppi di Aeppli e si descrive il caso in cui la varietà-base X è di Stein: i risultati di questo § sono in [1] e [5].

Nel § 2 si costruisce, su ogni varietà complessa e per ogni (fissata) coppia di interi non negativi (p, q), una risoluzione:

$$0 \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{L}^0 \rightarrow \mathcal{L}^1 \rightarrow \dots$$

del fascio $\mathcal{H}$ dei germi di funzioni pluriarmoniche, tale che:

$$\frac{\operatorname{Ker}(\Gamma(X, \mathcal{L}^{p+q}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{L}^{p+q+1}))}{\operatorname{Im}(\Gamma(X, \mathcal{L}^{p+q-1}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{L}^{p+q}))} = V^{p,q}$$

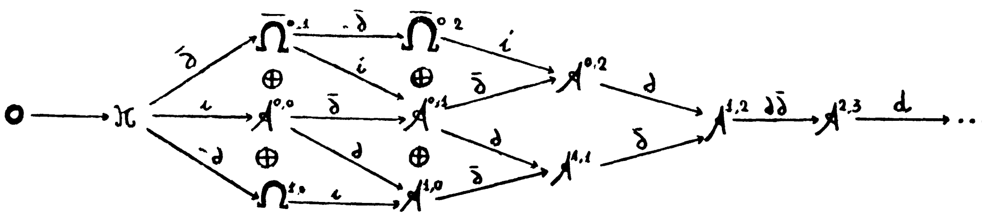
$$\frac{\operatorname{Ker}(\Gamma(X, \mathcal{L}^{p+q+1}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{L}^{p+q+2}))}{\operatorname{Im}(\Gamma(X, \mathcal{L}^{p+q}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{L}^{p+q+1}))} = \Lambda^{p+q,q+1}.$$

Per esempio, nei casi semplici corrispondenti alle coppie di interi (1,1) e (1,2), si hanno le risoluzioni:

$$\begin{tikzcd}
 & & \Omega^{0,1} \arrow[dr, "i"] & & & & \\
 & & \oplus & \mathcal{A}^{0,1} \arrow[dr, "\partial"] & & & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{H} \arrow[uur, "-\bar\partial"] \arrow[r, "i"] \arrow[ddr, "-\partial"'] & \mathcal{A}^{0,0} \arrow[ur, "\bar\partial"] \arrow[dr, "\partial"] & \oplus & \mathcal{A}^{1,1} \arrow[r, "\partial\bar\partial"] & \mathcal{A}^{2,2} \arrow[r, "d"] & \dots \\
 & & \oplus & \mathcal{A}^{1,0} \arrow[ur, "\bar\partial"'] & & & \\
 & & \Omega^{1,0} \arrow[ur, "i"'] & & & &
\end{tikzcd}$$

Pervenuto in Redazione il 5 Novembre 1968.

Questo lavoro è stato eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca per la matematica del C. N. R. nell'anno accademico 1968-1969.



Come si vede, siffatte risoluzioni non sono acicliche (a meno che la varietà X non sia di Stein), l'ostruzione essendo rappresentata dalla presenza dei fasci $\Omega^{p,0}$ e $\overline{\Omega}^{0,q}$ dei germi di forme olomorfe ed antiolomorfe.

Usando un'opportuna (e ovvia) successione spettrale, nel § 3 si ottiene la finitezza dei $V^{p,q}$ e $\Lambda^{p,q}$ su varietà fortemente k-pseudoconvesse, nel § 4 si dimostra la dualità:

$$\begin{cases} (V^{p,q})' \simeq \Lambda^{n-p,n-q} \\ (\Lambda^{p,q})' \simeq V^{n-p,n-q} \end{cases}$$

su varièta compatte ($n = \dim_C X$).

Il caso compatto è ripreso, con spirito diverso, nel § 5, dove si introduce l'operatore $\mathcal{D}$: si tratta di un operatore ellittico del 4⁰ ordine, verificante:

$$\operatorname{Ker}\,(A^{p,q} \xrightarrow{\mathcal{D}} A^{p,q}) \simeq V^{p,q}.$$

Siccome per metriche Kähleriane si ha $\mathcal{D} = \frac{1}{4}\Delta^2 + \partial\overline{\vartheta} + \overline{\partial}\vartheta$, ne viene (in questa situazione particolare) una notevole precisazione:

$$V^{p,q} \simeq H^{p,q},$$

dove $H^{p,q}$ indica lo spazio delle forme globali (di bigrado (p,q)) armoniche.

In tutto il seguito saranno usate le notazioni seguenti:

$\mathcal{K}^{p,q}$ = fascio dei germi di (p,q)-correnti;

$\mathcal{A}^{p,q}$ = » » » » (p,q)-forme C^∞;

$\Omega^{p,0}$ = » » » » p-forme olomorfe;

$\overline{\Omega}^{0,q}$ = » » » » q-forme antiolomorfe;

C = » costante dei complessi;

$$K^{p,q} = \Gamma(X, \mathcal{K}^{p,q}); \qquad K_c^{p,q} = \Gamma_c(X, \mathcal{K}_c^{p,q});$$

$$A^{p,q} = \Gamma(X, \mathcal{A}^{p,q}); \qquad D^{p,q} = \Gamma_c(X, \mathcal{A}^{p,q});$$

$$\Omega^{p,0} = \Gamma(X, \mathfrak{Q}^{p,0}); \qquad \bar{\Omega}^{0,q} = \Gamma(X, \bar{\mathfrak{Q}}^{0,q}).$$

Sono grato al prof. A. Andreotti che, dopo avermi assegnato questo problema come tesi di laurea (discussa a Pisa l'8 luglio 1968), mi ha guidato nella ricerca concedendomi molti utili colloqui.

§ 1. I gruppi di Aeppli.

1. Definizioni.

Su ogni varietà analitica complessa X, definiamo:

$$(1.1) \quad \begin{cases} V^{p,q} = \dfrac{\operatorname{Ker}(A^{p,q} \xrightarrow{\partial\bar\partial} A^{p+1,q+1})}{\partial A^{p-1,q} + \bar\partial A^{p,q-1}} & [p, q \geq 1] \\[2ex] V^{0,q} = \dfrac{\operatorname{Ker}(A^{0,q} \xrightarrow{\partial\bar\partial} A^{1,q+1})}{\bar\Omega^{0,q} + \bar\partial A^{0,q-1}} & [q \geq 1] \\[2ex] V^{p,0} = \dfrac{\operatorname{Ker}(A^{p,0} \xrightarrow{\partial\bar\partial} A^{p+1,1})}{\partial A^{p-1,0} + \Omega^{p,0}} & [p \geq 1] \\[2ex] V^{0,0} = \dfrac{\operatorname{Ker}(A^{0,0} \xrightarrow{\partial\bar\partial} A^{1,1})}{\bar\Omega^{0,0} + \Omega^{0,0}} & \end{cases}$$

$$(1.2) \quad \begin{cases} \Lambda^{p,q} = \dfrac{\operatorname{Ker}(A^{p,q} \xrightarrow{d} A^{p+1,q} \oplus A^{p,q+1})}{\partial\bar\partial A^{p-1,q-1}} & [p, q \geq 1] \\[2ex] \Lambda^{0,q} = \dfrac{\operatorname{Ker}(A^{0,q} \xrightarrow{d} A^{1,q} \oplus A^{0,q+1})}{\bar\partial\, \bar\Omega^{0,q-1}} & [q \geq 1] \\[2ex] \Lambda^{p,0} = \dfrac{\operatorname{Ker}(A^{p,0} \xrightarrow{d} A^{p+1,0} \oplus A^{p,1})}{\partial \Omega^{p-1,0}} & [p \geq 1] \\[2ex] \Lambda^{0,0} = \operatorname{Ker}(A^{0,0} \xrightarrow{d} A^{1,0} \oplus A^{0,1}) & \end{cases}$$

Sostituendo $A^{p,q}$ con $D^{p,q}$ (spazio delle (p, q)-forme C^{∞} a supporto compatto) e $\Omega^{p,0}$, $\bar{\Omega}^{0,p}$ con $\{0\}$, si ottengono le analoghe definizioni per i gruppi a supporti compatti:

(1.3) $$V_c^{p,q}, \; \Lambda_c^{p,q} \qquad [p, q \geq 0].$$

Le osservazioni seguenti sono di immediata verifica:

(1.4) $$\Lambda^{0,q} \simeq \frac{\operatorname{Ker}(\bar{\Omega}^{0,q} \xrightarrow{\partial} \bar{\Omega}^{0,q+1})}{\partial \bar{\Omega}^{0,q-1}};$$

pertanto, se X è di Stein, si ha:

$$\Lambda^{0,q} \simeq H^q(X, C)$$

(1.5) $$\Lambda^{p,0} \simeq \frac{\operatorname{Ker}(\Omega^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{p+1,0})}{\partial \Omega^{p-1,0}};$$

pertanto, se X è di Stein, si trova:

$$\Lambda^{p,0} \simeq H^p(X, C) \simeq \Lambda^{0,p}.$$

(1.6) Su una qualsiasi varietà, si ha:

$$\Lambda^{0,0} \simeq H^0(X, C).$$

(1.7) Su una qualsiasi varietà priva di componenti connesse compatte, si ha

$$V_c^{0,q} = \frac{\operatorname{Ker}(D^{0,q} \xrightarrow{\partial\bar{\partial}} D^{1,q+1})}{\bar{\partial} D^{0,q-1}} \simeq H_c^q(X, O).$$

Infatti se $a^{0,q} \in D^{0,q}$, $\partial\bar{\partial} a^{0,q} = 0 \Longrightarrow \bar{\partial} a^{0q}$ è antiolomorfa a supporto compatto e quindi nulla. Perciò il numeratore è $\operatorname{Ker}(D^{0,q} \xrightarrow{\bar{\partial}} D^{0,q+1})$.

(1.8) Analogamente si trova, su una qualsiasi varietà priva di componenti connesse compatte:

$$V_c^{p,0} \simeq H_c^p(X, \bar{O}).$$

(1.9) $$V_c^{0,0} = 0$$

(1.10) $$\Lambda_c^{0,q} = \Lambda_c^{p,0} = \Lambda_c^{0,0} = 0.$$

2. Caso delle varietà di Stein.

(2.1) LEMMA. Si ha un omomorfismo naturale:

$$V^{p,q} \xrightarrow{\bar{\partial}_*} A^{p,q+1}. \qquad [p, q \geq 0]$$

Se X è di Stein, esso è iniettivo e surgettivo.

DIM. L'omomorfismo $\bar{\partial}_*$

$$\frac{\operatorname{Ker}(A^{p,q} \xrightarrow{\partial\bar{\partial}} A^{p+1,q+1})}{\partial A^{p-1,q} + \bar{\partial} A^{p,q-1}} \longrightarrow \frac{\operatorname{Ker}(A^{p,q+1} \xrightarrow{d} A^{p+1,q+1} \oplus A^{p,q+2})}{\partial\bar{\partial} A^{p-1,q}}$$

è definito con un ovvio passaggio al quoziente.

Perchè $\bar{\partial}_*$ sia iniettivo, occorre e basta che:

$$\left\{ a^{p,q} \in A^{p,q} \;\middle|\; \begin{array}{l} \partial\bar{\partial} a^{p,q} = 0 \\ \\ \bar{\partial} a^{p,q} = \partial\bar{\partial} a^{p-1,q} \end{array} \right\} \subset \partial A^{p-1,q} + \bar{\partial} A^{p,q-1};$$

ora se X è di Stein, si ha successivamente:

$$\bar{\partial} a^{p,q} = \partial\bar{\partial} a^{p-1,q} \Longrightarrow \bar{\partial}(a^{p,q} + \partial a^{p-1,q}) = 0 \Longrightarrow a^{p,q} = -\partial a^{p-1,q} + \bar{\partial} a^{p,q-1}.$$

Perchè $\bar{\partial}_*$ sia surgettivo, occorre e basta che:

$$\left\{ a^{p,q+1} \in A^{p,q+1} \;\middle|\; \begin{array}{l} d\, a^{p,q+1} = 0 \\ \\ a^{p,q+1} = \bar{\partial} a^{p,q} \\ \\ \partial\bar{\partial} a^{p,q} = 0 \end{array} \right\} + \partial\bar{\partial} A^{p-1,q} \supset$$

$$\supset \operatorname{Ker}(A^{p,q+1} \xrightarrow{d} A^{p+1,p+1} \oplus A^{p,q+2}).$$

Allora:

$$d a^{p,q+1} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \partial a^{p,q+1} = 0 \\ \\ \bar{\partial} a^{p,q+1} = 0 \end{cases}; \quad \text{ma} \quad \bar{\partial} a^{p,q+1} = 0 \Longrightarrow a^{p,q+1} = \bar{\partial} a^{p,q};$$

inoltre

$$\partial a^{p,q+1} = 0 \Longrightarrow \partial \bar{\partial} a^{p,q} = 0.$$

(2.1′) LEMMA. **Si ha un omomorfismo naturale:**

$$V^{p,q} \xrightarrow{\partial_*} \Lambda^{p+1,q} \qquad [p, q \geq 0].$$

Se X è di Stein, esso è iniettivo e surgettivo.

(2.2) LEMMA. **Si ha un omomorfismo naturale:**

$$V_c^{p,q} \xrightarrow{\bar{\partial}_*} \Lambda_c^{p,q+1} \qquad [p, q \geq 0].$$

Se X è di Stein, esso è:
i) iniettivo, se $q < n = \dim_C X$
ii) surgettivo, se $q + 1 < n = \dim_C X$.

DIM. L'omomorfismo $\bar{\partial}_*$

$$\frac{\operatorname{Ker}(D^{p,q} \xrightarrow{\partial\bar{\partial}} D^{p+1,q+1})}{\partial D^{p-1,q} + \bar{\partial} D^{p,q-1}} \to \frac{\operatorname{Ker}(D^{p,q+1} \xrightarrow{d} D^{p+1,q+1} \oplus D^{p,q+2})}{\partial \bar{\partial} D^{p-1,q}}$$

si deduce con un ovvio passaggio al quoziente.

Affinchè $\bar{\partial}_*$ sia iniettivo, occorre e basta che

$$\left\{ a^{p,q} \in D^{p,q} \,\middle|\, \begin{array}{l} \partial \bar{\partial} a^{p,q} = 0 \\ \\ \bar{\partial} a^{p,q} = \partial \bar{\partial} a^{p-1,q} \end{array} \right\} \subset \partial D^{p-1,q} + \bar{\partial} D^{p,q-1};$$

ora si abbia

$$\bar{\partial}(a^{p,q} + \partial a^{p-1,q}) = 0;$$

dall'essere

$$H_c^q(X, \Omega^{p,0}) = 0 \qquad \forall\, q \neq n$$

sulle varietà di Stein, segue che, se $q < n$, si ha:

$$a^{p,q} = -\partial a^{p-1,q} + \bar{\partial} a^{p,q-1}$$

(le forme scritte essendo tutte a supporto compatto).

Affinchè $\bar{\partial}_*$ sia surgettivo, occorre e basta che:

$$\left\{ a^{p,\,q+1} \in D^{p,\,q+1} \;\middle|\; \begin{array}{l} d a^{p,\,q+1} = 0 \\ a^{p,\,q+1} = \bar{\partial} a^{p,\,q} \\ \partial \bar{\partial} a^{p,\,q} = 0 \end{array} \right\} + \partial \bar{\partial} D^{p-1,\,q} \supset$$

$$\supset \operatorname{Ker}\left(D^{p,\,q+1} \xrightarrow{d} D^{p+1,\,q+1} \oplus D^{p,\,q+2}\right).$$

Supponiamo allora che $d a^{p,\,q+1} = 0$, ossia che $\begin{cases} \partial a^{p,\,q+1} = 0 \\ \bar{\partial} a^{p,\,q+1} = 0 \end{cases}$; se $q + 1 < n$, $\bar{\partial} a^{p,\,q+1} = 0 \Longrightarrow a^{p,\,q+1} = \bar{\partial} a^{p,\,q}$, $a^{pq} \in D^{p,\,q}$.
D'altra parte $\partial a^{p,\,q+1} = 0 \Longrightarrow \partial \bar{\partial} a^{p,\,q} = 0$.

(2.2′) **Lemma.** Si ha un omomorfismo naturale:

$$V_c^{p,\,q} \xrightarrow{\partial_*} \Lambda_c^{p+1,\,q}. \qquad [p, q \geq 0]$$

Se X è di Stein, esso è:
A) iniettivo, se $p < n = \dim_C X$
B) surgettivo, se $p + 1 < n = \dim_C X$.
Siamo ora in grado di provare i due teoremi seguenti

(2.3) **Teorema.** *Se X è di Stein, si hanno gli isomorfismi:*

$$V^{p,\,q} \simeq H^{p+q+1}(X, C)$$

$$\Lambda^{p,\,q} \simeq H^{p+q}(X, C).$$

Dim. $V^{pq} \underset{\sim}{\xrightarrow{\bar{\partial}_*}} \Lambda^{p,\,q+1} \underset{\sim}{\xleftarrow{\partial_*}} V^{p-1,\,q+1} \underset{\sim}{\xrightarrow{\bar{\partial}_*}} \Lambda^{p-1,\,q+2} \underset{\sim}{\xleftarrow{\partial_*}} V^{p-2,\,q+2} \underset{\sim}{\rightarrow}$
$\underset{\sim}{\rightarrow} \dots\ V^{0,\,p+q} \underset{\sim}{\xrightarrow{\bar{\partial}_*}} \Lambda^{0,\,p+q+1}$.
Dunque si ottiene:

$$V^{p,\,q} \simeq \Lambda^{0,\,p+q+1}$$

$$\Lambda^{p,\,q} \simeq \Lambda^{0,\,p+q} \simeq H^{p+q}(X, C), \qquad \text{se} \quad X$$

è di Stein (v. (1.4) di questo §).

(2.4) TEOREMA. A) *Se X è di Stein e $p+q<n$, allora*:

$$V_c^{p,q} \simeq H_c^{p+q}(X, \mathcal{O}) = 0$$

B) *Se X è di Stein, $p+q \leq n$ e p oppure $q<n$, allora*:

$$\Lambda_c^{p,q} \simeq H_c^{p+q-1}(X, \mathcal{O}) = 0.$$

DIM.

$$V_c^{pq} \underset{q+1<n}{\xrightarrow[\sim]{\bar{\partial}_*}} \Lambda_c^{p,q+1} \underset{p<n}{\xleftarrow[\sim]{\partial_*}} V_c^{p-1,q+1} \underset{q+2<n}{\xrightarrow[\sim]{\bar{\partial}_*}} \Lambda_c^{p-1,q+2} \xleftarrow[\sim]{}$$

$$\xleftarrow[\sim]{\partial_*} \dots V_c^{1,p+q-1} \underset{p+q<n}{\xrightarrow[\sim]{\bar{\partial}_*}} \Lambda^{1,p+q} \underset{1<n}{\xleftarrow[\sim]{\partial_*}} V_c^{0,p+q} = H_c^{p+q}(X, \mathcal{O}).$$

§ 2. RISOLUZIONI DEL FASCIO $\mathcal{H}$.

1. Notazioni.

Sia U un aperto di C^n; una funzione $\varphi \in C^2(U)$ è detta pluriarmonica se $\partial\bar{\partial}\varphi = 0$. Ciò equivale a dire che la forma di Levi

$$L(\varphi, \xi)\, u$$

è identicamente nulla in ogni punto $\xi \in U$. La parte reale di una funzione olomorfa su U è pluriarmonica; inversamente, se $H_1(U, R) = 0$, ogni funzione (a valori in R) pluriarmonica su U è parte reale di una funzione olomorfa.

In questo paragrafo, indicheremo con $\mathcal{H}$ il fascio dei germi di funzioni pluriarmoniche (locali) sulla varietà complessa X.

Useremo anche le notazioni seguenti: se

$$d: A^{p,q} \longrightarrow \begin{matrix} A^{p+1,q} \\ \oplus \\ A^{p,q+1} \end{matrix}$$

è l'ordinario operatore di differenziazione esterna, indicheremo con

$${}^t d: \begin{matrix} A^{p-1,q} \\ \oplus \\ A^{p,q-1} \end{matrix} \longrightarrow A^{p,q}$$

l'operatore definito da:

$$\begin{array}{c} A^{p-1,q} \\ \oplus \\ A^{p,q-1} \end{array} \begin{array}{c} \overset{\partial}{\searrow} \\ \\ \underset{\bar\partial}{\nearrow} \end{array} A^{p,q}.$$

Questa notazione è giustificata dal fatto che se si fa operare d da $K_c^{n-p,\,n-q}$ in $K_c^{n-p+1,\,n-q} \oplus K_c^{n-p,\,n-q+1}$, ${}^t d$ allora è esattamente il suo trasposto. Come d, così anche ${}^t d$ si prolunga per linearità su somme dirette degli $A^{p,q}$.

2. Risoluzione con le forme C^∞.

(2.1) Teorema. *Su ogni varietà analitica complessa di dimensione n (su C), si hanno le seguenti successioni esatte di fasci:*

A) $$0 \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{A}^{0,0} \xrightarrow{\partial\bar\partial} \mathcal{A}^{1,1} \xrightarrow{d} \begin{array}{c} \mathcal{A}^{2,1} \\ \oplus \\ \mathcal{A}^{1,2} \end{array} \longrightarrow \mathrm{CoKer}\, d \longrightarrow 0$$

B) $$0 \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{L}^0 \xrightarrow{h^0} \mathcal{L}^1 \xrightarrow{h^1} \dots \mathcal{L}^q \xrightarrow{h^q} \mathcal{L}^{q+1} \xrightarrow{h^{q+1}}$$

$$\longrightarrow \mathcal{L}^{q+2} \longrightarrow \mathrm{CoKer}\, h^{q+1} \longrightarrow 0 \qquad [q \geq 1]$$

dove

b$_1$) $\mathcal{L}^i = \overline{\mathfrak{Q}}^{0,i+1} \oplus \mathcal{A}^{0,i} \qquad \forall\ 0 \leq i \leq q-1$

b$_2$) $\mathcal{L}^q = \mathcal{A}^{0,q}$; $\mathcal{L}^{q+1} = \mathcal{A}^{1,q+1}$; $\mathcal{L}^{q+2} = \mathcal{A}^{2,q+1} \oplus \mathcal{A}^{1,q+2}$

b$_3$) $h^i\colon (\mu^{0,i+1}, a^{0,i}) \rightsquigarrow (-\bar\partial\mu^{0,i+1}, \mu^{0,i+1} + \bar\partial a^{0,i}) \qquad \forall\ 0 \leq i \leq q-2$

b$_4$) $h^{q-1}\colon (\mu^{0,q}, a^{0,q-1}) \rightsquigarrow (\mu^{0,q} + \bar\partial a^{0,q-1})$

b$_5$) $h^q = \partial\bar\partial$; $h^{q+1} = d$

C) $$0 \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{L}^0 \xrightarrow{h^0} \mathcal{L}^1 \xrightarrow{h^1} \dots \longrightarrow \mathcal{L}^{p+q} \xrightarrow{h^{p+q}} \mathcal{L}^{p+q+1} \xrightarrow{h^{p+q+1}}$$

$$\longrightarrow \mathcal{L}^{p+q+2} \longrightarrow \mathrm{CoKer}\, h^{p+q+1} \longrightarrow 0 \begin{bmatrix} p, q \geq 1 \\ p \leq q \end{bmatrix}$$

dove:

c$_1$) $\mathcal{L}^i = \overline{\Omega}^{0,i+1} \oplus \left(\bigoplus_{a=0}^{i} \mathcal{A}^{a,i-a}\right) \oplus \Omega^{i+1,0} \qquad \forall\ 0 \leq i \leq p-1$

c$_2$) $\mathcal{L}^i = \overline{\Omega}^{0,i+1} \oplus \left(\bigoplus_{a=0}^{p} \mathcal{A}^{a,i-a}\right) \qquad \forall\ p \leq i \leq q-1$

c$_3$) $\mathcal{L}^i = \bigoplus_{a=0}^{p+q-1} \mathcal{A}^{i-q+a,q-a} \qquad \forall\ q \leq i \leq p+q-1$

c$_4$) $\mathcal{L}^{p+q} = \mathcal{A}^{p,q}$; $\mathcal{L}^{p+q+1} = \mathcal{A}^{p+1,q+1}$; $\mathcal{L}^{p+q+2} = \mathcal{A}^{p+2,q+1} \oplus \mathcal{A}^{p+1,q+2}$

c$_5$) $h^i\colon (\mu^{0,i+1}, \{a^{a,i-a}\}_{a=0}^{i}, \nu^{i+1,0}) \rightsquigarrow (-\bar\partial\mu^{0,i+1}, \mu^{0,i+1} + \bar\partial a^{0,i},$

$\{\partial a^{a,i-a} + \bar\partial a^{a+1,i-a-1}\}_{a=0}^{i-1}, \partial a^{i,0} + \nu^{i+1,0}, -\partial\nu^{i+1,0}) \qquad \forall\ 0 \leq i \leq p-2$

c$_6$) $h^{p-1}\colon (\mu^{0,p}, \{a^{a,p-1-a}\}_{a=0}^{p-1}, \nu^{p,0}) \rightsquigarrow (-\bar\partial\mu^{0,p}, \mu^{0,p} + \bar\partial a^{0,p-1},$

$\{\partial a^{a,p-1-a} + \bar\partial a^{a+1,p-2-a}\}_{a=0}^{p-2}, \partial a^{p-1,0} + \nu^{p,0})$

c$_7$) $h^i\colon (\mu^{0,i+1}, \{a^{a,i-a}\}_{a=0}^{p}) \rightsquigarrow (-\partial\mu^{0,i+1}, \mu^{0,i+1} + \bar\partial a^{0,i},$

$\{\partial a^{a,i-a} + \bar\partial a^{a+1,i-a-1}\}_{a=0}^{p-1}) \qquad \forall\ p \leq i \leq q-2$

c$_8$) $h^{q-1}\colon (\mu^{0,q}, \{a^{a,q-1-a}\}_{a=0}^{p}) \rightsquigarrow (\mu^{0,q} + \bar\partial a^{0,q-1}, \{\partial a^{a,q-1-a} + \bar\partial a^{a+1,q-2-a}\}_{a=0}^{p-1})$

c$_9$) $h^i = {}^t d \qquad \forall\ q \leq i \leq p+q-1$

c$_{10}$) $h^{p+q} = \partial\bar\partial$; $h^{p+q+1} = d$.

D) le analoghe di B e C) che si ottengono considerando al quart'ultimo posto, rispettivamente, $\mathcal{A}^{p,0}$ con $p \geq 1$ e $\mathcal{A}^{pq}$ con $p \geq q \geq 1$.

DIM. Trattandosi di questioni locali, possiamo porci su una varietà di Stein e contrattile, e ragionare a livello delle sezioni.

Cominciamo col dimostrare l'esattezza delle successioni scritte nei termini che stanno a sinistra del $\partial\bar\partial$.

Nel caso A) non c'è nulla da dimostrare.

Dimostrazione di B). Basta far vedere che $\operatorname{Ker} h^i \subset \operatorname{Im} h^{i-1}$, per ogni $1 \leq i \leq q-1$, e che $\operatorname{Ker} \partial\bar\partial \subset \operatorname{Im} h^{q-1}$ (le conclusioni inverse essendo ovvie).

Ora $(\mu^{0,i+1}, a^{0,i}) \in \operatorname{Ker} h^i$ significa

$$\begin{cases} \bar\partial \mu^{0,i+1} = 0 \\ \mu^{0,i+1} = -\bar\partial a^{0,i}. \end{cases}$$

Dalla prima eguaglianza e dall'essere $H^q(X, C) = 0$ si deduce che

$$\mu^{0,i+1} = -\bar\partial \lambda^{0,i},$$

essendo $\lambda^{0,i}$ una forma antiolomorfa di grado i; la seconda eguaglianza scritta sopra dà allora

$$\bar\partial a^{0,i} = \bar\partial \lambda^{0,i}$$

da cui

$$\Longrightarrow \bar\partial (a^{0,i} - \lambda^{0i}) = 0 \Longrightarrow a^{0,i} = \lambda^{0i} + \bar\partial b^{0,i-1}.$$

L'inclusione $\operatorname{Ker} \partial\bar\partial \subset \operatorname{Im} h^{q-1}$ è nient'altro che il teorema (2.3) del § 1.

Dimostrazione di C). Sia i un generico grado compreso tra 1 e $p-2$; $\operatorname{Ker} h^i$ è l'insieme degli elementi

$$(\mu^{0,i+1}, \{a^{\alpha,i-\alpha}\}_{\alpha=0}^{i}, \nu^{i+1,0})$$

tali che

$$(*) \qquad \begin{cases} \bar\partial \mu^{0,i+1} = 0 \\ \mu^{0,i+1} = -\bar\partial a^{0,i} \\ \partial a^{\alpha,i-\alpha} = -\bar\partial a^{\alpha+1,i-\alpha-1} & \forall\ \alpha = 0 \dots i-1. \\ \nu^{i+1,0} = -\partial a^{i,0} \\ \partial \nu^{i+1,0} = 0 \end{cases}$$

Dalla prima delle (*) si ottiene $\mu^{0,i+1} = -\bar\partial \alpha^{0,i}$ ($\alpha^{0,i}$ forma antiolomorfa); la seconda delle (*) dà allora

$$\bar\partial a^{0,i} = \bar\partial \alpha^{0,i},$$

e successivamente

$$\bar\partial (a^{0i} - \alpha^{0i}) = 0$$

$$a^{0i} = \alpha^{0i} + \bar\partial b^{0,i-1}$$

perchè siano in una var. di Stein).

Dalla terza delle (*) si ricava poi

$$\partial a^{0,i} = -\bar{\partial}\, a^{1,i-1} \Longrightarrow \bar{\partial} a^{1,i-1} = \bar{\partial}\partial b^{0,i-1} \Longrightarrow a^{1,i-1} = \partial b^{0,i-1} + \bar{\partial} b^{1,i-2};$$

analogamente si trova

$$a^{2,i-2} = \partial\, b^{1,i-2} + \bar{\partial}\, b^{2,i-3},$$

e in generale si trova un sistema $\{b^{\alpha,i-1-\alpha}\}_{\alpha=a}^{i-1}$ di forme verificanti

$$a^{\alpha,i-\alpha} = \partial b^{\alpha-1,i-\alpha} + \bar{\partial}\, b^{\alpha,i-1-\alpha}, \qquad \forall\ 1 \leq \alpha \leq i-1.$$

Dalla penultima e dall'ultima delle (*) si ottiene

$$a^{i,0} = \partial\, b^{i-1,0} + \beta^{i,0}$$

$$\nu^{i+1,0} = -\,\partial\, a^{i,0} = -\,\partial\beta^{i,0}$$

($\beta^{i,0}$ forma olomorfa).

L'esattezza nei gradi $p-1$, p e i compreso tra $p+1$ e $q-1$ si dimostra con un discorso perfettamente analogo sfruttando sempre il fatto che ad una estremità del fascio $\mathcal{L}^i$ compaiono le forme antiolomorfe; per il termine $\mathcal{L}^q$ si osserva cha dall'essere

$$\partial\, a^{0q} + \bar{\partial}\, a^{1,q-1} = 0$$

si deduce

$$\partial\,\bar{\partial}\, a^{0,q} = 0,$$

da cui

$$\bar{\partial}\, a^{0,q} = \mu^{0,q+1} \qquad \text{(antiolomorfa).}$$

D'altra parte $\mu^{0,q+1} = \bar{\partial}^2 a^{0,q} = 0$, e quindi

$$\mu^{0,q+1} = \bar{\partial}\,\lambda^{0,q} \qquad \text{(antiolomorfa);}$$

sostituendo ne viene

$$a^{0q} = \lambda^{0q} + \bar{\partial}\, b^{0,q-1}.$$

A questo punto si procede come sopra.

Supponiamo infine che i varii tra $q+1$ e $p+q-1$ (l'esattezza nel termine $\mathcal{L}^{p+p}$ è il teorema (2.3) del § 1); intanto è $i-q < p < q$, poi si hanno le implicazioni

$$\partial a^{i-q,q} + \bar{\partial}\, a^{i-q+1,q-1} = 0 \Longrightarrow \partial\,(\bar{\partial}\, a^{i-q,q}) = 0 \Longrightarrow \bar{\partial} a^{i-q,q} = \partial c_{(1)}^{i-q-1,q+1};$$

avendosi anche

$$\partial(\bar{\partial}\, c_{(1)}^{i-q-1,\,q+1}) = 0$$

si ottiene a sua volta

$$\bar{\partial}\, c_{(1)}^{i-q-1,\,q+1} = \partial\, c_{(2)}^{i-q-2,\,q+2} \ldots$$

Proseguendo in tal modo, si ottiene un sistema di forme differenziali

$$c_{(1)}^{i-q-1,\,q+1}\,,\; c_{(2)}^{i-q-2,\,q+2}\,, \ldots ,\; c_{(i-q)}^{0,\,i}$$

verificanti

$$(**) \qquad \bar{\partial}\, c_{(a)}^{i-q-a,\,q+a} = \partial\, c_{(a+1)}^{i-q-a-1,\,q+a+1}\,.$$

L'ultima delle (**) dà in particolare:

$$\partial\,(\bar{\partial}\, c_{(i-q)}^{0,\,i}) = 0, \text{ ossia}$$

$$\bar{\partial}\, c_{(i-q)}^{0,\,i} = \mu^{0,\,i+1} \text{ (antiolomorfa)};$$

essendo poi $\bar{\partial}\,\mu^{0,\,i+1} = 0$, sarà $\mu^{0,\,i+1} = \bar{\partial}\,\mu^{0,\,i}$ (antiolomorfa), e quindi

$$c_{(i-q)}^{0,\,i} = \mu^{0,\,i} + \bar{\partial}\, f_{(i-q)}^{0,\,i-1}\,.$$

Successivamente $c_{(i-q-1)}^{1,\,i-1}$ è tale che

$$\bar{\partial}\, c_{(i-q-1)}^{1,\,i-1} = \partial\, c_{(i-q)}^{0,\,i} = \partial\,\bar{\partial}\, f_{(i-q)}^{0,\,i-1} = -\,\bar{\partial}\,\partial\, f_{(i-q)}^{0,\,i-1}\,,$$

ossia

$$c_{(i-q-1)}^{1,\,i-1} = \partial\,(-\,f_{(i-q)}^{0,\,i-1}) + \bar{\partial}\, f_{(i-q-1)}^{1,\,i-2} \,..$$

Dopo un numero finito di passi, otteniamo

$$c_{(1)}^{i-q-1,\,q+1} = \partial\,(-\,f_{(2)}^{i-q-2,\,q+1}) + \bar{\partial}\, f_{(1)}^{i-q-1,\,q}$$

e pertanto si avrà:

$$\bar{\partial}\, a^{i-q,\,q} = \partial\, c_{(1)}^{i-q-1,\,q+1} = -\,\bar{\partial}\,\partial\, f_{(1)}^{i-q-1,\,q}\,,$$

da cui

$$a^{i-q,\,q} = \partial\,(-\,f_{(1)}^{i-q-1,\,q}) + \bar{\partial}\, b^{i-q,\,q-1} = \partial\, b^{i-q-1,\,q} + \bar{\partial}\, b^{i-q,\,q-1}\,.$$

Adesso si va avanti come al solito (per esempio:

$$\bar\partial\, a^{i-q+1,\, q-1} = -\,\partial\, a^{i-q,\, q} = \bar\partial\, \partial\, b^{i-q,\, q-1} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow a^{i-q+1,\, q-1} = \partial\, b^{i-q,\, q-1} + \bar\partial\, b^{i-q+1,\, q-2}).$$

Per concludere la dimostrazione (i casi detti in D) sono i simmetrici di B) e C)) basta provare l'esattezza delle successioni nel termine che sta a destra del $\partial\, \partial$; e questo è sempre il teorema (2.3) del § 1.

(2.2) LEMMA. Sia X una varietà di Stein di dimensione (complessa) n, e siano p e q interi verificanti le relazioni

$$0 \leq p < q < n-1$$

$$n < p + q + 2.$$

Si ha la successione esatta di spazi vettoriali ed applicazioni lineari:

$$\begin{array}{ccccccc}
K_c^{q-p-1,\, n-q-1} & & K_c^{q-p,\, n-q-1} & & & & \\
\oplus & & \oplus & & & & \\
K_c^{q-p,\, n-q-2} & & K_c^{q-p+1,\, n-q-2} & & K_c^{n-p-3,\, n-q-1} & & \\
\oplus & & \oplus & & \oplus & & \\
\vdots & \xrightarrow{t_d} & \vdots & \xrightarrow{t_d} \cdots \xrightarrow{t_d} & K_c^{n-p-2,\, n-q-2} & \longrightarrow & \\
\oplus & & \oplus & & \oplus & & \\
K_c^{n-p-3,\, 1} & & K_c^{n-p-2,\, 1} & & K_c^{n-p-1,\, n-q-3} & & \\
\oplus & & \oplus & & & & \\
K_c^{n-p-2,\, 0} & & K_c^{n-p-1,\, 0} & & & &
\end{array}$$

$$\xrightarrow{t_d} \begin{array}{c} K_c^{n-p-2,\, n-q-1} \\ \oplus \\ K_c^{n-p-1,\, n-q-2} \end{array} \xrightarrow{t_d} K_c^{n-p-1,\, n-q-1} \xrightarrow{\partial\bar\partial} K_c^{n-p,\, n-q}\ .$$

DIM. (1) Verifichiamo l'esattezza della successione scritta nel grado $n-p-1$.

Da
$$\partial\, T_c^{n-p-2,\, 1} + \bar\partial\, T_c^{n-p-1,\, 0} = 0$$

viene $\bar\partial\, (\partial\, T_c^{n-p-1,\, 0}) = 0$ e quindi $\partial\, T_c^{n-p-1,\, 0} = 0$, perchè una distribuzione $\bar\partial$-chiusa è una funzione olomorfa, e perchè non ci sono forme olomorfe a supporto compatto.

Da $H_c^q(X, \Omega^{p,0}) = H^q(X, \overline{\Omega}^{0,p} = 0)$ per $q \neq n = \dim_C X$ e $p \geq 0$, si deduce:

$$T_c^{n-p-1,0} = \partial S_c^{n-p-2,0}; \text{ inoltre } \partial T_c^{n-p-2,1} = -\overline{\partial} T_c^{n-p-1,0} =$$

$$= \partial \partial S_c^{n-p-2,0}, \text{ da cui segue che } \partial (T_c^{n-p-2,1} - \overline{\partial} S_c^{n-p-2,0}) = 0.$$

Si ha inoltre:

$$T_c^{n-p-2,1} = \partial S_c^{n-p-3,1} + \overline{\partial} S_c^{n-p-2,0}.$$

Se poi è anche

$$\partial T_c^{n-p-3,2} = \overline{\partial} T_c^{n-p-2,1} = 0$$

sarà

$$\partial T_c^{n-p-3,2} = \partial \overline{\partial} S_c^{n-p-3,1},$$

da cui

$$T_c^{n-p-3,2} = \partial S_c^{n-p-4,2} + \overline{\partial} S_c^{n-p-3,1} \ldots$$

In questo modo si vede che il nucleo dell'operatore uscente da $K_c^{q-p,n-q-1} \oplus \ldots \oplus K_c^{n-p-1,0}$ è contenuto nell'immagine dell'operatore uscente da

$$K_c^{q-p-1,n-q-1} \oplus \ldots \oplus K_c^{n-p-2,0};$$

siccome l'inclusione inversa è ovvia, ne consegue l'esattezza della successione nel grado considerato.

(2) Consideriamo un grado $2n - p - q - j - 1$ qualsiasi, con $j \geq 3$. Da

$$\partial T_c^{n-p-2,n-q-j+1} + \overline{\partial} T_c^{n-p-1,n-q-j} = 0$$

segue $\overline{\partial}(\partial T_c^{n-p-1,n-q-j}) = 0$. Si avrà pertanto:

$$\partial T_c^{n-p-1,n-q-j} = \overline{\partial}\, {}^{(1)}R_c^{n-p,n-q-j-1};$$

da $\overline{\partial}(\partial\, {}^{(1)}R_c^{n-p,n-q-j-1}) = 0$ segue

$$\partial\, {}^{(1)}R_c^{n-p,n-q-j-1} = \overline{\partial}\, {}^{(2)}R_c^{n-p+1,n-q-j-2}.$$

Così proseguendo, si trovano correnti

$${}^{(1)}R_c^{n-p,n-q-j-1}, \quad {}^{(2)}R_c^{n-p+1,n-q-j-2}, \ldots, {}^{(n-q-j)}R_c^{2n-p-q-j-1,0}$$

verificanti

$$\partial\ {}^{(a)}R_c^{n-p+a-1,\ n-q-j-a} = \bar\partial\ {}^{(a+1)}R_c^{n-p+a,\ n-q-j-a-1}\ .$$

Si avrà in particolare

$$\bar\partial\,(\partial\ {}^{(n-q-j)}R_c^{2n-p-q-j-1,\ 0}) = 0,$$

ossia

$$\partial\ {}^{(n-q-j)}R_c^{2n-p-q-j-1,\ 0} = 0,$$

ossia

$${}^{(n-q-j)}R_c^{2n-p-q-j-1,\ 0} = \partial\ U_c^{2n-p-q-j-2,\ 0}.$$

Ora è

$$\partial\ {}^{(n-q-j-1)}R_c^{2n-p-q-j-2,\ 1} = -\ \partial\,\bar\partial\ U_c^{2n-p-q-j-2,\ 0}\ ,$$

da cui

$${}^{(n-q-j-1)}R_c^{2n-p-q-j-2,\ 1} = \partial\ V_c^{2n-p-q-j-3,\ 1} + \bar\partial\,(-\ U_c^{2n-p-q-j-2,\ 0}).$$

Ripetendo il discorso per le ${}^{(a)}R_c$ successive, si troverà finalmente:

$${}^{(1)}R_c^{n-p,\ n-q-j-1} = \partial\ Z_c^{n-p-1,\ n-q-j-1} + \bar\partial\ W_c^{n-p,\ n-q-j-2}\ .$$

Ma ci ricordiamo che deve essere

$$\partial\ T_c^{n-p-1,\ n-q-j} = \bar\partial\ {}^{(1)}R_c^{n-p,\ n-q-j-1} = -\ \partial\,\bar\partial\ Z_c^{n-p-1,\ n-q-j-1}\ ,$$

da cui:

$$T_c^{n-p-1,\ n-q-j} = \partial\ S_c^{n-p-2,\ n-q-j} + \bar\partial\,(-\ Z_c^{n-p-1,\ n-q-j-1}).$$

A questo punto si ragiona come nel caso precedente, ricavando una dopo l'altra tutte le $T_c^{n-p-1-a,\ n-q-j+a}$.

(3) Infine l'esattezza nel grado $2n-p-q-2$ equivale al fatto che il gruppo di Aeppli a coefficienti distribuzioni

$$\frac{\operatorname{Ker}\,(K_c^{n-p-1,\ n-p-1} \xrightarrow{\partial\,\bar\partial} K_c^{n-p,\ n-q})}{\partial\ K_c^{n-p-2,\ n-q-1} + \bar\partial\ K_c^{n-p-1,\ n-q-2}}$$

è nullo, come si verifica ripetendo la dimostrazione del teorema (2.4) del § 1.

(2.3) TEOREMA. *Sia X una varietà analitica complessa, di dimensione n (su C). La risoluzione C) del teorema* (2.1) *si prolunga a destra del* $\partial\bar{\partial}$:

$$\ldots \xrightarrow{{}^t d} \mathcal{A}^{p,q} \xrightarrow{\partial\bar{\partial}} \mathcal{A}^{p+1,q+1} \xrightarrow{d} \begin{matrix}\mathcal{A}^{p+2,q+1}\\ \oplus \\ \mathcal{A}^{p+1,q+2}\end{matrix} \xrightarrow{d} \begin{matrix}\mathcal{A}^{p+3,q+1}\\ \oplus \\ \mathcal{A}^{p+2,q+2} \\ \oplus \\ \mathcal{A}^{p+1,q+3}\end{matrix} \xrightarrow{d} \ldots$$

$$\ldots \longrightarrow \begin{matrix}\mathcal{A}^{n-1,n}\\ \oplus \\ \mathcal{A}^{n,n-1}\end{matrix} \xrightarrow{d} \mathcal{A}^{n\,n} \longrightarrow 0$$

se $p+q+2>n=\dim_C X$.

DIM. La verifica è facile per i termini di grado elevato (e precisamente per $p+n+2\leq i\leq 2n-1$, avendo posto $\mathcal{L}^i = \bigoplus_{\alpha=0}^{i-p-q-1} \mathcal{A}^{i-q-\alpha,\, q+1+\alpha}$), laddove la successione si va « assottigliando »; meno evidente è l'esattezza nel pezzo di risoluzione compreso tra $p+q+1$ e $p+n+1$. Ma osserviamo che questo pezzo si ottiene (a livello delle sezioni su un aperto coordinato) trasponendo nella successione esatta del lemma (2.2); se pertanto dimostriamo che tutti gli operatori ${}^t d$ che compaiono in detta successione sono omomorfismi, la nostra tesi è conseguenza di (2.2) e della dualità di Serre (vedi: [7], pagg. 64/65). Osserviamo anzi che, per poter applicare il lemma di Serre, basta che i ${}^t d$ siano omomorfismi rispetto alle topologie deboli degli spazi $K_c^{r,s}$; osserviamo poi che, per la continuità (anche debole) di tutte le applicazioni (${}^t d$ e $\partial\bar{\partial}$) che compaiono in (2.2) e per l'esattezza della successione, tutti i ${}^t d$ hanno immagine debolmente chiusa.

Siamo quindi nella situazione:

$$\begin{cases} E' \xleftarrow{{}^t d} F' \\ E \xrightarrow{d} F \end{cases}$$

dove E ed F sono spazi di Fréchet riflessivi, E' ed F' i loro duali forti, $\operatorname{Im}{}^t d$ è debolmente chiusa in E'.

Si ha successivamente:

$\operatorname{Im}{}^t d$ debolmente chiusa $\Longrightarrow d\,(={}^t({}^t d))$ omomorfismo $\Longrightarrow {}^t d$ omomorfismo per le topologie deboli, come risulta dal

LEMMA (vedi: [3] — Chap. IV — § 4 — Ex. 5).

Siano: E ed F due spazi di Fréchet, $d: E \longrightarrow F$ un'applicazione lineare. Le proprietà seguenti si equivalgono:

α) d è un omomorfismo di E su $d(E)$ per le topologie iniziali

β) ${}^t d(F')$ è debolmente chiuso in E'

γ) ${}^t d$ è un omomorfismo di F' su ${}^t d(F')$ per le topologie deboli $\sigma(F', F)$ e $\sigma(E', E)$.

3. Risoluzione con le correnti.

Il teorema seguente si dimostra con le stesse parole usate del n. 2, con l'accorgimento di usare le risoluzioni dei fasci $\Omega^{p,0}$, $\overline{\Omega}^{0,q}$ a coefficienti distribuzioni.

Un'ovvia variante del lemma (2.2) di questo §. permetterà di ottenere « per dualità » l'esattezza della successione nei termini che stanno a destra del $\partial\overline{\partial}$.

(3.1) TEOREMA. *Su ogni varietà analitica complessa sussistono le risoluzioni del fascio* $\mathcal{H}$ *scritte nei teoremi* (2.1) *e* (2.3) *del n⁰. precedente salvo ad avere ovunque* $\mathcal{K}^{p,q}$ *al posto di* $\mathcal{A}^{p,q}$.

§ 3. TEOREMI DI FINITEZZA.

1. Lemmi preliminari.

Su ogni varietà analitica complessa si ha la successione esatta di fasci :

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow \mathcal{O} \oplus \overline{\mathcal{O}} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

(ogni funzione f pluriarmonica su un aperto olomorficamente convesso U di C^n si può scrivere come somma di una funzione olomorfa φ e di una funzione antiolomorfa ψ. Prova : $\partial\overline{\partial} f = 0 \Longrightarrow \overline{\partial} f = \psi^{0,1} \in \overline{\Omega}^{0,1}$; siccome $\overline{\partial}\psi^{0,1} = 0$, ne viene $\psi^{0,1} = \overline{\partial}\psi$, $\psi \in \overline{\Omega}^{00}$. Dunque è $\overline{\partial}(f - \psi) = 0$, da cui $f - \psi = \varphi \in \Omega^{00}$).

Ne derivano la successione esatta di coomologia a supporti arbitrari :

$$\ldots \longrightarrow H^q(X, \mathcal{O}) \oplus H^q(X, \overline{\mathcal{O}}) \longrightarrow H^q(X, \mathcal{H}) \longrightarrow H^{q+1}(X, C) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^{q+1}(X, \mathcal{O}) \oplus H^{q+1}(X, \overline{\mathcal{O}}) \longrightarrow \ldots$$

e l'analoga a supporti compatti.

Applicando il teorema B di Cartan, si trova

(1.1) LEMMA. Se X è una varietà di Stein, allora

$$H^r(X, \mathcal{H}) \simeq H^{r+1}(X, C) \qquad [r \geq 1].$$

(1.2) OSSERVAZIONE. Analogamente, sulle varietà di Stein, si trova

$$H_c^r(X, \mathcal{H}) = 0 \qquad [1 \leq r < n = \dim_C X].$$

(Questi risultati si possono far discendere anche dalle risoluzioni del teorema (2.1) del § 2, che, sulle varietà di Stein sono tutte acicliche e danno quindi gli isomorfismi di De Rham:

$$H^{p+q}(X, \mathcal{H}) \simeq V^{p,q} \simeq H^{p+q+1}(X, C)$$

$$H_c^{p+q}(X, \mathcal{H}) \simeq V_c^{p,q} \simeq H_c^{p+q}(X, \mathcal{O}) = 0).$$

Nei prossimi n.[i] ci occorrerà sapere la finitezza di $H^r(X, \mathcal{H})$ su varietà compatte e pseudoconvesse; precisamente ci servirà il

(1.4) LEMMA. A) Su ogni varietà compatta X si ha:

$$\dim_C H^r(X, \mathcal{H}) < +\infty$$

per $r \geq 1$;

B) su ogni varietà fortemente k-pseudoconvessa si ha:

$$\dim_C H^r(X, \mathcal{H}) < +\infty$$

per $r \geq k$,

la cui dimostrazione può essere fatta ricalcando [4] e [2]. (Infatti il lemma (1.1) consente di utilizzare il teorema di Leray sui ricoprimenti aciclici, e inoltre lo spazio $A_{\partial\bar{\partial}}(U)$ delle funzioni pluriarmoniche su un aperto U di C^n, con la topologia della convergenza uniforme sui compatti, è uno spazio di Montel completo).

2. Caso delle varietà compatte.

(2.1) TEOREMA. *Su ogni varietà compatta si ha*:

A) $$\dim_C V^{p,q} < +\infty, \qquad \textit{per} \quad p+q \geq 1$$

B) $$\dim_C \Lambda^{p,q} < +\infty, \qquad \textit{per} \quad p, q \geq 1.$$

Dim. Fissiamoci, per semplicità, su una coppia (p, q) di indici, che rientri nel caso C) del teorema (2.1) del § 2.

È ben noto (vedi: [6], pag. 180) che esiste una successione spettrale $\{E_r\}_{r \in N}$ tale che:

1⁰) $$E_2^{ij} = \frac{\mathrm{Ker}\,(H^j(X, \mathcal{L}^i) \to H^j(X, \mathcal{L}^{i+1}))}{\mathrm{Im}\,(H^j(X, \mathcal{L}^{i-1}) \to H^j(X, \mathcal{L}^i))}$$

2⁰) $$E_\infty^{ij} = H^{i+j}(X, \mathcal{H}) \cap \Sigma_i / H^{i+j}(X, \mathcal{H}) \cap \Sigma_{i+1},$$

essendo $\{\Sigma_\nu\}_{\nu \in N}$ una opportuna filtrazione (decrescente) dell'omologia di X a valori in $\mathcal{H}$.

Osserviamo ora che i gruppi che compaiono in A), B), sono esattamente i termini $E_2^{i,0}$ della successione spettrale scritta sopra, per $i \geq p + q$, onde la nostra tesi sarà provata se faremo vedere (più in generale) che

$$\dim_C E_2^{i,0} < +\infty.$$

Evidentemente siamo nei casi in cui « la filtrazione è positiva » e « la graduazione è inferiore alla filtrazione »; il teorema di Leray dà allora le successioni esatte di spazi vettoriali ed omomorfismi:

$$0 \to \ker(E_2^{i-2,1} \xrightarrow{d_2} E_2^{i,0}) \to E_2^{i-2,1} \xrightarrow{d_2} E_2^{i,0} \to E_3^{i,0} \to 0$$

$$0 \to \ker(E_3^{i-3,2} \xrightarrow{d_3} E_3^{i,0}) \to E_3^{i-3,2} \xrightarrow{d_3} E_3^{i,0} \to E_4^{i,0} \to 0$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$0 \to \ker(E_{r-1}^{i-r+1,r-2} \xrightarrow{d_{r-1}} E_{r-1}^{i,0}) \to E_{r-1}^{i-r+1,r-2} \xrightarrow{d_{r-1}} E_{r-1}^{i,0} \to E_r^{i,0} \to 0.$$

Siccome, per il teorema di piattezza di Malgrange, $E_s^{u,v} = 0$ per $v \geq$ $\geq n + 1$ $[n = \dim_C X]$, si avrà, per r sufficientemente elevato, $E_r^{i,0} = E_\infty^{i,0}$; il punto 2⁰) scritto dianzi e il lemma (1.4) dicono allora che $\dim_C E_r^{i,0} < +\infty$.

D'altra parte, per il teorema di finitezza di Cartan-Serre, è anche $\dim_C E_2^{u,v} < +\infty$, per $v \geq 1$.

Pertanto, dall'ultima delle successioni esatte precedenti si ottiene (sandwich tra omomorfismi) [1]:

$$\dim_C E_{r-1}^{i,0} < +\infty,$$

---

[1] Il « Sandwich tra omomorfismi » dice che, se abbiamo una successione esatta (finita) di spazi vettoriali (su K) ed omomorfismi:

$$0 \to A_1 \to \ldots \to A_{i-1} \to A_i \to A_{i+1} \to \ldots \to A_N \to 0,$$

e se è $\dim_K A_j < +\infty$, per ogni $j \neq i$, allora è anche $\dim_K A_i < +\infty$.

e, risalendo, si ottiene successivamente:

$$\dim_C E_{r-2}^{i,0} < +\infty$$

$$\cdots\cdots$$

$$\dim_C E_3^{i,0} < +\infty$$

$$\dim_C E_2^{i,0} < +\infty.$$

3. Caso delle varietà k-convesse.

Ora i termini $E_2^{i,j}$ $[j \geq 1]$ della successione spettrale che compare nella dimostrazione del teorema (2.1) non sono più tutti finiti; sono finiti però i termini $E_2^{i,j}$ con $k \leq j \leq n$, per il teorema di Andreotti-Grauert, e, al solito, sono nulli gli $E_2^{i,j}$ con $j > n$, per il teorema di Malgrange.

Se allora è $i > k + \sup(p, q)$ ((p, q) come nella dimostrazione del teor. (2.1)), le successioni esatte:

$$0 \to \ker(E_2^{i-2,1} \xrightarrow{d_2} E_2^{i,0}) \to E_2^{i-2,1} \xrightarrow{d_2} E_2^{i,0} \to E_3^{i,0} \to 0$$

$$0 \to \ker(E_3^{i-3,2} \xrightarrow{d_3} E_3^{i,0}) \to E_3^{i-3,2} \xrightarrow{d_3} E_3^{i,0} \to E_4^{i,0} \to 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0 \to \ker(E_{r-1}^{i-r+1,r-2} \xrightarrow{d_{r-1}} E_{r-1}^{i,0}) \to E_{r-1}^{i-r+1,r-2} \xrightarrow{d_{r-1}} E_{r-1}^{i,0} \to E_\infty^{i,0} \to 0$$

sono tali che i termini $E_t^{i-t,t-1}$ contenuti in esse sono o nulli $(2 \leq t \leq k)$ o finiti $(k + 1 \leq t \leq n + 1)$.

Da esse si deduce quindi ancora che

$$\dim_C E_2^{i,0} < +\infty$$

se $i > k + \sup(p, q)$.

Abbiamo così provato il

(3.1) Teorema. *Su ogni varietà fortemente k-pseudoconvessa si ha:*

A) $\quad \dim_C V^{p,q} < +\infty, \quad$ per $\quad p, q > k$

B) $\quad \dim_C \Lambda^{p,q} < +\infty, \quad$ per $\quad p, q > k.$

4. Un'osservazione.

Se siamo nel caso in cui $p + q + 2 > n = \dim_C X$, la risoluzione del teorema (2.3) del § 1 ci dà delle informazioni sui gruppi di coomologia $H^r(X, \mathcal{H}^{p,q})$, dove con $\mathcal{H}^{p,q}$ indichiamo il fascio dei germi di forme (di bigrado (p, q)) pluriarmoniche (i.e. $\partial\bar{\partial}$-chiuse). Precisamente si ottiene:

$$H^r(X, \mathcal{H}^{p,q}) \simeq H^{p+q+r+1}(X, C) \qquad [r \geq 1] \tag{4.1}$$

sulle varietà di Stein;

$$\dim_C H^r(X, \mathcal{H}^{p,q}) < +\infty \qquad [r \geq 1] \tag{4.2}$$

sulle varietà compatte;

$$\dim_C H^r(X, \mathcal{H}^{p,q}) < +\infty \qquad [r \geq 1] \tag{4.3}$$

sulle varietà fortemente k-pseudoconvesse, se è inoltre $p, q > k$.

§ 4. TEOREMA DI DUALITÀ.

1. Duale di $V^{p,q}$.

(1.1) LEMMA. Siano: E, F due spazi di Fréchet; $T: E \to F$ una applicazione lineare continua e surgettiva.

Se $\{f_n\}$ è una successione convergente a 0 in F, esistono una successione $\{e_n\}$ in E ed un elemento $e \in \operatorname{Ker} T$, tali che $T(e_n) = f_n$ e che $e_n \to e$ in E.

DIM. Conseguenza immediata del teorema dell'applicazione aperta.

(1.2) PROPOSIZIONE. Supponiamo che $V^{p,q}\,[p, q \geq 1]$ sia dotato di una struttura di Fréchet. Allora il suo duale (topologico) è dato da:

$$(V^{p,q})' \simeq \frac{\ker\,(K_c^{n-p,n-q} \xrightarrow{d} K_c^{n-p+1,n-q} \oplus K_c^{n-p,n-q+1})}{\partial\bar{\partial} K_c^{n-p-1,n-q-1}}. \tag{*}$$

Dim. Se $\{T_c^{n-p\,n-q}\}$ è una classe appartenente al 2° membro della (*), sia $L_{\{T\}}$ il funzionale lineare definito su $V^{p,q}$ in questo modo:

$$L_{\{T\}}(\{a^{pq}\}) = \langle a^{pq}, T_c^{n-p,n-q} \rangle .$$

La definizione è ben posta, cioè dipende solo dalle classi $\{a^{pq}\}$ e $\{T_c^{n-p,n-q}\}$; inoltre, se $\{T_c^{n-p,n-q}\} = \{0\}$, il funzionale corrispondente $L_{\{0\}}$ è il funzionale nullo.

Basta pertanto dimostrare che:

(a) $L_{\{T\}}$ è un funz. lin. continuo su V^{pq}

(b) ogni funz. lin. continuo L su V^{pq} è del tipo $L = L_{\{T\}}$.

La prima affermazione è conseguenza del Lemma premesso; infatti se

$$\{a^{pq}\}_\nu \longrightarrow \{0\} \quad \text{in} \quad V^{p,q},$$

si avrà che

$$a_\nu^{pq} \longrightarrow \partial a^{p-1,q} + \bar\partial a^{p,q-1} \begin{bmatrix} a^{p-1,q} \in A^{p-1,q} \\ a^{p,q-1} \in A^{p,q-1} \end{bmatrix}$$

nella topologia di $A^{p,q}$, dunque si avrà enche

$$\langle a_\nu^{pq}, T_c^{n-p,n-q} \rangle \longrightarrow \langle \partial a^{p-1,q} + \bar\partial a^{p,q-1}, T_c^{n-p,n-q} \rangle = 0.$$

Quanto alla seconda affermazione, si ragiona così.

Sia L un funzionale lineare continuo su $V^{p,q}$; siamo allora nella situazione:

$$\mathrm{Ker}\,(A^{p,q} \xrightarrow{\cdot\partial\bar\partial} A^{p+1,q+1}) \xrightarrow{\pi} \frac{\mathrm{Ker}\,(A^{pq} \xrightarrow{\partial\bar\partial} A^{p+1,q+1})}{\partial A^{p-1,q} + \bar\partial A^{p,q-1}} \xrightarrow{L} C,$$

onde possiamo definire un funzionale lineare continuo $\widetilde{L}$ su

$$\mathrm{Ker}\,(A^{pq} \xrightarrow{\partial\bar\partial} A^{p+1,q+1}),$$

ponendo:

$$\widetilde{L} = L \cdot \pi.$$

Osservazione:

$$\widetilde{L}\,|_{(\partial A^{p-1,q} + \bar\partial A^{p,q-1})} = 0.$$

Per il teorema di Hahn-Banach, possiamo prolungare $\widetilde{L}$ ad un funzionale lineare continuo su tutto lo spazio A^{pq}, e questo prolungamento sarà una certa corrente a supporto compatto

$$T_c^{n-p,\, n-q} .$$

Tale corrente dovrà coincidere con L sul sottospazio

Ker $(A^{pq} \xrightarrow{\partial \bar{\partial}} A^{p+1,\, q+1})$ e in particolare essere nulla su $\partial A^{p-1,\, q} + \bar{\partial} A^{p,\, q-1}$, ossia dovremo avere:

$$\langle \partial a^{p-1,\, q} + \bar{\partial} a^{p,\, q-1} , T_c^{n-p,\, n-q} \rangle = 0, \forall \begin{cases} a^{p-1,\, q} \in A^{p-1,\, q} \\ a^{p,\, q-1} \in A^{p,\, q-1} . \end{cases}$$

Questo dice che $\begin{cases} \partial T_c^{n-p,\, n-q} = 0 \\ \bar{\partial} T_c^{n-p,\, n-q} = 0 \end{cases}$

ossia che $T_c^{n-p,\, n-q} \in \operatorname{Ker} (K_c^{n-p,\, n-q} \xrightarrow{d} K_c^{n-p+1,\, n-q} \oplus K_c^{n-p,\, n-q+1})$.

Si osservi infine che ogni elemento della classe di equivalenza

$$T_c^{n-p,\, n-q} + \partial \bar{\partial} K_c^{n-p-1,\, n-q-1}$$

(che è ancora un funzionale lineare continuo su $A^{p,\, q}$ e nullo su $\partial A^{p-1,\, q} + \bar{\partial} A^{p,\, q-1}$) è tale che la sua restrizione al sottospazio

$$\operatorname{Ker} (A^{p,\, q} \xrightarrow{\partial \bar{\partial}} A^{p+1,\, q+1})$$

coincide anch'essa con $\widetilde{L}$.

Poniamo allora:

$$L_{\{T\}} = T_c^{n-p,\, n-q} + \partial \bar{\partial} K_c^{n-p-1,\, n-q-1} .$$

OSSERVAZIONE. L'ipotesi della proposizione (1.2) è soddisfatta, ad esempio, nei seguenti casi:

α) *se* X *è di Stein* ($\partial A^{p-1,\, q} = \operatorname{Ker} (A^{p,\, q} \xrightarrow{\partial} A^{p+1,\, q})$ e $\bar{\partial} A^{p,\, q-1} = \operatorname{Ker} (A^{p,\, q} \xrightarrow{\bar{\partial}} A^{p,\, q-1})$ sono sottospazi chiusi di $A^{p,\, q}$)

β) *X è compatta* ($\dim_C V^{p,q} < +\infty$)

γ) *se X è fortemente* k*-pseudoconvessa e se $p, q > k$* ($\dim_C V^{p,q} < +\infty$).

2. Caso delle varietà compatte.

Se la varietà X è compatta, si ha semplicemente:

$$**) \qquad (V^{p,q})' \simeq \frac{\mathrm{Ker}\,(K^{n-p\,n-q} \xrightarrow{d} K^{n-p+1,\,n-q} \oplus K^{n-p,\,n-q+1})}{\partial\,\bar\partial\,K^{n-p-1,\,n-q-1}}.$$

Ora si ripeta la dimostrazione del teor. (2.1) del § 3, sostituendo alla risoluzione con le forme C^∞ la risoluzione con le correnti (teorema (3.1) del § 2); si trovano due fatti:

1⁰) il 2⁰ membro di (**) ha dimensione finita (e questo è già nella (**))

2⁰) il 2⁰ membro di (**) compare nelle successioni esatte della dimostrozione del teor. (2.1) esattamente al posto di $\Lambda^{n-p,\,n-q}$.

Se ne deduce la seguente dualità (²):

(2.1) TEOREMA. *Su ogni varietà compatta, si ha:*

A) $\quad (V^{p,q})' \simeq \Lambda^{n-p,\,n-q} \qquad [p+q \geq 1]$

B) $\quad (\Lambda^{p,q})' \simeq V^{n-p,\,n-q} \qquad [p, q \geq 1]$.

§ 5. L'OPERATORE $\mathcal{D}$.

1. L'operatore $\mathcal{D}$.

Sia X una varietà complessa compatta, su cui fissiamo una volta per tutte una metrica hermitiana ds^2 con forma fondamentale

$$\omega = \frac{i}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} h_{\alpha\beta}\, dz_\alpha \wedge d\bar z_\beta \qquad [n = \dim_C X].$$

Di conseguenza, ogni $A^{r,s}$ resta munito di una struttura prehilbertiana, e così pure lo spazio $A = \bigoplus A^{r,s}$ di tutte le forme differenziali.

(²) Infatti $\Lambda^{n-p,\,n-q}$ e $\dfrac{\mathrm{Ker}\,(K^{n-p,\,n-q} \xrightarrow{d} K^{n-p+1,\,n-q} \oplus K^{n-p,\,n-q+1})}{\partial\,\bar\partial\,K^{n-p-1,\,n-q-1}}$ hanno la stessa dimensione finita, e l'iniezione naturale del primo spazio nel secondo è, in realtà, un isomorfismo.

Sia $\mathcal{D}$: $A \longrightarrow A$ l'operatore così definito:

$$\mathcal{D} = \vartheta\bar{\vartheta}\, \partial\bar{\partial} + \partial\bar{\partial}\, \vartheta\bar{\vartheta} + \partial\bar{\vartheta}\, \bar{\partial}\bar{\vartheta} + \bar{\partial}\bar{\vartheta}\, \partial\vartheta + \partial\bar{\vartheta} + \bar{\partial}\vartheta\,;$$

si tratta di un operatore locale, le cui proprietà essenziali riportiamo qui sotto:

(1.1) $\mathcal{D}$ è biomogeneo di bigrado $(0, 0)$ (i. e. applica $A^{r,s}$ in $A^{r,s}$)

(1.2) $\mathcal{D}$ è autoaggiunto (i. e. $\langle \mathcal{D}\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, \mathcal{D}\psi \rangle$)

(1.3) $\mathcal{D}\varphi = 0 \iff \varphi \in F^{r,s} = \{\alpha \in A^{r,s} \mid \partial\bar{\partial}\alpha = \vartheta\alpha = \bar{\vartheta}\alpha = 0\}$
per ogni $\varphi \in A^{r,s}$

(prova:

$$\langle \mathcal{D}\varphi, \varphi \rangle = \| \partial\bar{\partial}\varphi \|^2 + \| \vartheta\bar{\vartheta}\varphi \|^2 + \| \bar{\partial}\bar{\vartheta}\varphi \|^2 + \| \partial\vartheta\varphi \|^2 + \| \bar{\vartheta}\varphi \|^2 + \| \vartheta\varphi \|^2,$$

da cui segue: $\mathcal{D}\varphi = 0 \Longrightarrow \partial\bar{\partial}\varphi = \vartheta\varphi = \bar{\vartheta}\varphi = 0$. L'implicazione inversa è evidente).

(1.4) $\mathcal{D}$ è un operatore ellittico

(1.5) Se la metrica ds^2 è kähleriana (i. e. $d\omega = 0$), allora:

$$\mathcal{D} = \frac{1}{4}\Delta^2 + \partial\bar{\vartheta} + \bar{\partial}\vartheta.$$

Dalla teoria degli operatori ellittici si deduce, in conformità, che Ker $\mathcal{D}$, ossia lo spazio $F^{r,s}$, ha dimensione finita, onde si può considerare l'operatore di proiezione ortogonale $\mathbf{F}$: $A^{r,s} \longrightarrow F^{r,s}$.

Esiste inoltre un operatore di Green $\mathbf{G}$: $A^{r,s} \longrightarrow (F^{r,s})^{\perp}$, legato a $\mathcal{D}$ e ad $\mathbf{F}$ dalla relazione fondamentale:

$$\mathcal{D}\mathbf{G} = 1 - \mathbf{F}, \tag{1.6}$$

dove 1 indica l'operatore identico.

Segue di qui il teorema di decomposizione:

(1.7) TEOREMA. $(\partial A^{r-1,s} + \bar{\partial} A^{r,s-1}) \oplus_{\perp} F^{r,s} = \Psi^{r,s} = \{\alpha \in A^{r,s} \mid \partial\bar{\partial}\alpha = 0\}$.

DIM. Sia φ un elemento di $\Psi^{r,s}$; per (1.6) si ha:

$$\varphi = \mathcal{D}\,\mathbf{G}\,\varphi + \mathbf{F}\varphi = \partial\,\bar\partial\,\vartheta\,\bar\vartheta\,\mathbf{G}\varphi + \vartheta\,\bar\vartheta\,\partial\,\bar\partial\,\mathbf{G}\varphi + \partial\vartheta\,\bar\partial\,\bar\vartheta\,\mathbf{G}\varphi + \bar\partial\,\bar\vartheta\,\partial\vartheta\,\mathbf{G}\varphi +$$

$$+ \partial\bar\vartheta\,\mathbf{G}\varphi + \bar\partial\,\vartheta\,\mathbf{G}\varphi + \mathbf{F}\varphi = \vartheta\bar\vartheta\,\alpha + \partial\lambda + \bar\partial\,\mu + f.$$

Ne segue:

$$\vartheta\bar\vartheta\alpha = \varphi - \partial\lambda - \bar\partial\,\mu - f$$

dove:

1⁰) $\varphi \in \Psi^{r,s}$ per ipotesi
2⁰) $\partial\lambda, \bar\partial\mu \in \Psi^{r,s}$ perchè $\partial^2 = \bar\partial^2 = 0$
3⁰) $f \in \Psi^{r,s}$ perchè $F^{r,s} \subset \Psi^{r,s}$.

Pertanto $\vartheta\bar\vartheta\alpha$ sarà una certa $\psi \in \Psi^{r,s}$, ma allora:

$$\|\,\vartheta\,\bar\vartheta\,\alpha\,\|^2 = \langle\,\vartheta\,\bar\vartheta\,\alpha, \psi\,\rangle = \langle\,\alpha, \partial\,\bar\partial\,\psi\,\rangle = 0,$$

e quindi $\vartheta\,\bar\vartheta\,\alpha = 0$, quando $\varphi \in \Psi^{r,s}$.

Abbiamo provato così che ogni $\varphi \in \Psi^{r,s}$ si scrive:

$$\varphi = \partial\lambda + \bar\partial\,\mu + f.$$

Supponiamo ora che una certa $\partial\alpha^{r-1,s} + \bar\partial\,\alpha^{r,s-1}$ appartenga ad $F^{r,s}$; si ha allora:

$$\|\,\partial\alpha^{r-1,s} + \bar\partial\,\alpha^{r,s-1}\,\|^2 = \langle\,\partial\alpha^{r-1,s} + \bar\partial\,\alpha^{r,s-1}, \partial\alpha^{r-1,s} + \bar\partial\,\alpha^{r,s-1}\,\rangle =$$

$$= \langle\,\alpha^{r-1,s}, \bar\vartheta\,(\partial\alpha^{r-1,s} + \bar\partial\,\alpha^{r,s-1})\,\rangle + \langle\,\alpha^{r,s-1}, \vartheta\,(\partial\alpha^{r-1,s} + \bar\partial\,\alpha^{r,s-1})\,\rangle = 0$$

ossia:

$$\partial\alpha^{r-1,s} + \bar\partial\,\alpha^{r,s-1} = 0.$$

(1.8) COROLLARIO.

$$F^{r,s} \simeq \frac{\Psi^{r,s}}{\partial A^{r+1,s} + \bar\partial A^{r,s-1}} = \frac{\mathrm{Ker}\,(A^{r,s} \xrightarrow{\partial\bar\partial} A^{r+1,s+1})}{\partial A^{r-1,s} + \bar\partial A^{r,s-1}} = V^{r,s}.$$

(1.9) COROLLARIO. Su ogni varietà compatta (su cui sia stata fissata una metrica hermitiana ds^2), si ha:

$$\dim_{\mathbb{C}} V^{r,s} < +\infty.$$

Ritroviamo così, con metodi di teoria del potenziale, il risultato già stabilito nel teorema (2.1) del § 3.

2. Caratterizzazione dei gruppi di Aeppli.

Se X è kähleriana compatta, allora

$$f \in F^{r,s} \Longleftrightarrow \Delta f = 0.$$

(Prova :

$$\langle \mathcal{D} f, f \rangle = 0 \Longrightarrow \| \Delta f \|^2 + \| \bar{\vartheta} f \|^2 + \| \vartheta f \|^2 = 0,$$

per quanto visto in (1.5). Viceversa :

$$\Delta f = 0 \Longrightarrow \square f = \overline{\square} f = 0 \Longrightarrow \partial f = \bar{\partial} f = \bar{\vartheta} f = \vartheta f = 0)$$

Per metriche kähleriane si ha dunque il seguente fondamentale

(2.1) TEOREMA. $V^{r,s} \simeq F^{r,s} \simeq H^{r,s}$ (3)

NOTA.

Scambiando, nella definizione dell'operatore $\mathcal{D}$, rispettivamente ∂ con $\bar{\vartheta}$ e $\bar{\partial}$ con ϑ, si ottiene un operatore $\mathcal{D}_*$ che gode proprietà del tutto analoghe a quelle del $\mathcal{D}$; precisamente si vede che :

$$\mathrm{Ker}\,(A^{r,s} \xrightarrow{\mathcal{D}_*} A^{r,s}) \simeq F_*^{r,s} = \{\alpha \in A^{r,s} \mid \bar{\vartheta}\vartheta\alpha = \partial\alpha = \bar{\partial}\alpha = 0\},$$

e che :

$$\mathrm{Ker}\,(A^{r,s} \xrightarrow{d} A^{r+1,s} \oplus A^{r,s+1}) \simeq (\partial\bar{\partial}\, A^{r-1,s-1}) \oplus_{\perp} F_*^{r,s}.$$

Pertanto è $\Lambda^{r,s} \simeq F_*^{r,s}$.

Nel caso kähleriano si ha ancora $F_*^{r,s} \simeq H^{r,s}$, e quindi si caratterizzano compiutamente anche i gruppi di Aeppli $\Lambda^{r,s}$.

Istituto Matematico
Univerità di Pisa

(3) Con $H^{r,s}$ si indica lo spazio delle (r, s)-forme armoniche.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. AEPPLI: *On the cohomology structure of Stein manifolds.* Proc. of the conf. on Complex Analysis. Minneapolis (1964).

[2] A. ANDREOTTI et H. GRAUERT: *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes.* Bull. Soc. Math. France 90 (1962).

[3] N. BOURBAKI: *Espaces véctoriels topologiques.* Paris: Hermann (1964).

[4] H. CARTAN et J. P. SERRE: *Un théorème de finitude concernant les variétés analytiques compactes.* C. R. Acad. Sci 237 (1953)

[5] J. FRENKEL et F. NORGUET: *Sur la cohomologie à coefficients complexes des variétés de Stein.* C. R. Acad. Sci. 256 (1963).

[6] R. GODEMENT: *Topologie algébrique et théorie des faisceaux.* Paris: Hermann (1958).

[7] J. P. SERRE: *Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein.* C.B.R.M., Liege: G. Thone, et Paris: Masson & Cie (1953).