ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

GIANCARLO POCCI

Trasformazioni termomeccaniche dei continui bidimensionali

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 23, nº 1 (1969), p. 205-222

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1969_3_23_1_205_0>

TRASFORMAZIONI TERMOMECCANICHE DEI CONTINUI BIDIMENSIONALI

GIANCARLO POCCI

Introduzione.

Ci proponiamo con questo lavoro di iniziare lo studio per via deduttiva dei sistemi continui sottili, che possono essere schematizzati come continui bidimensionali dotati di opportune proprietà.

Nella prima parte ricaviamo le equazioni generali della meccanica e della termodinamica di tali continui, equazioni che risultano formalmente identiche a quelle di un continuo polare tridimensionale [1].

In una seconda parte sviluppiamo una prima applicazione, applicando le equazioni trovate ad un caso noto, e forse il più semplice; una lamella liquida soggetta ai fenomeni di tensione superficiale.

1. Premesse.

1. Poichè faremo uso della terminologia e delle notazioni accennate ad esempio in [1] ed applicate più sistematicamente in [2], inseriamo qui per comodità del lettore alcuni richiami essenziali.

I tensori A che considereremo sono individuati da espressioni del tipo

$$A = \Sigma\, a_{rlm} \dots \mathbf{a}_r \otimes \mathbf{b}_l \otimes \mathbf{c}_m \otimes \dots$$

dove $\mathbf{a}_r$, $\mathbf{b}_l$, $\mathbf{c}_m$ sono vettori appartenenti a spazi vettoriali propriamente euclidei a n dimensioni.

Pervenuto alla Redazione il 27 Luglio 1968.

Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca Matematici del C.N.R. per l'anno accademico 1967-68 presso l'Istituto Matematico della Facoltà di Scienze della Università di Pisa.

(1) Vedere anche [7].

Indicheremo con $A \cdot B$ il prodotto scalare fra i due tensori A e B intendendo che questa è una operazione distributiva e che se $A = \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_2 \otimes \ldots \ldots \otimes \mathbf{a}_m$ e $B = \mathbf{b}_1 \otimes \mathbf{b}_2 \otimes \ldots \otimes \mathbf{b}_n$ è:

$$A \cdot B = (\mathbf{a}_m \cdot \mathbf{b}_1)\, \mathbf{a}_1 \otimes \ldots \otimes \mathbf{a}_{m-1} \otimes \mathbf{b}_2 \otimes \ldots \otimes \mathbf{b}_n$$

essendo $\mathbf{a}_m \cdot \mathbf{b}_1$ il prodotto scalare fra i due vettori considerati.

Si osservi che il prodotto scalare fra tensori di ordine non inferiore al secondo è associativo e che questa operazione ammette un elemento unità, che è ovviamente un tensore del secondo ordine, e che indicheremo con I. Per costruirlo prendiamo una base di riferimento, cioè n vettori linearmente indipendenti $\mathbf{g}_i$, e consideriamo i vettori reciproci $\mathbf{g}^r$, che sono definiti in modo che $\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^r = \delta_i^r$.

Se poniamo $g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j$ e $g^{ij} = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j$, sappiamo che le due matrici g_{ij} e g^{ij} sono l'una l'inversa dell'altra e che è $\mathbf{g}_i = g_{ij}\, \mathbf{g}^j$, $\mathbf{g}^i = g^{ij}\, \mathbf{g}_j$. Abbiamo:

$$I = \mathbf{g}_r \otimes \mathbf{g}^r = \mathbf{g}^s \otimes \mathbf{g}_s = g_{ij}\, \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = g^{ij}\, \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j$$

ed I risulta un tensore simmetrico (²).

L'utilità della notazione adottata risulta dal fatto che le componenti, di un certo tipo, del tensore A (ad esempio del terzo ordine) nella base $\mathbf{g}_r$ sono i numeri:

$$A^{ij\cdot}_{\cdot\cdot k} = [(A \cdot \mathbf{g}_k) \cdot \mathbf{g}^j] \cdot \mathbf{g}^i .$$

Infatti moltiplicando tensorialmente prima per $\mathbf{g}_i$ e sommando, poi per $\mathbf{g}_j$ e sommando, e così via abbiamo:

$$A = A^{ij\cdot}_{\cdot\cdot k}\, \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}^k .$$

Risulta anche $A^{ij\cdot}_{\cdot\cdot k} = \mathbf{g}_k \cdot [\mathbf{g}^j \cdot (\mathbf{g}^i \cdot A)]$ e per un tensore del secondo ordine è (ad esempio) $T_{lm} = \mathbf{g}_l \cdot T \cdot \mathbf{g}_m$.

Si noti che l'ordinaria regola di contrazione sugli indici segue allora dall'osservare che:

$$A \cdot B = A \cdot I \cdot B = (A \cdot \mathbf{g}_l) \otimes (\mathbf{g}^l \cdot B) = \ldots .$$

(²) L'operazione di trasposizione A^T di A va intesa come una operazione distributiva così definita:

$$\begin{cases} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^T = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} & \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ vettori qualunque} \\ (A \otimes B)^T = B^T \otimes A^T & A, B \text{ tensori qualunque} \end{cases}$$

Dati ancora due tensori A e B (di ordine non inferiore al secondo la $tr\,\{A \cdot B\}$, *traccia* di $A \cdot B$, è una operazione che gode della proprietà distributiva e che per due tensori A e B del tipo più semplice già considerato è così definita:

$$tr\,\{A \cdot B\} = tr\,(\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{a}_m) \cdot (\mathbf{b}_1 \otimes \mathbf{b}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{b}_n) =$$
$$= (\mathbf{a}_m \cdot \mathbf{b}_1)\,(\mathbf{a}_{m-1} \cdot \mathbf{b}_2)\,(\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{a}_{m-2} \otimes \mathbf{b}_3 \otimes \dots \otimes \mathbf{b}_n).$$

Le considerazioni precedenti sono valide in generale.

Noi opereremo però in uno spazio a tre dimensioni (in $\mathcal{S}_3$ brevemente) ed in questo considereremo anche l'operazione $A \wedge B$ come una operazione distributiva e che per tensori semplici è così definita:

$$(\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{a}_m) \wedge (\mathbf{b}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{b}_n) =$$
$$= \mathbf{a}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{a}_{m-1} \otimes (\mathbf{a}_m \wedge \mathbf{b}_1) \otimes \mathbf{b}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{b}_n\,.$$

Sempre in $\mathcal{S}_3$ ricordiamo che, fissata la base $\mathbf{g}_r$ e considerati i prodotti misti,

$$V = [\mathbf{g}_1\,,\, \mathbf{g}_2\,,\, \mathbf{g}_3] = \mathbf{g}_1 \wedge \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_3 \quad \text{e} \quad V' = [\mathbf{g}^1,\, \mathbf{g}^2,\, \mathbf{g}^3]$$

è:

$$(1.1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathbf{g}^1 &= \frac{\mathbf{g}_2 \wedge \mathbf{g}_3}{V} \\ \mathbf{g}^2 &= \frac{\mathbf{g}_3 \wedge \mathbf{g}_1}{V} \\ \mathbf{g}^3 &= \frac{\mathbf{g}_1 \wedge \mathbf{g}_2}{V} \end{aligned} \right. \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= \frac{\mathbf{g}^2 \wedge \mathbf{g}^3}{V'} \\ \mathbf{g}_2 &= \frac{\mathbf{g}^3 \wedge \mathbf{g}^1}{V'} \\ \mathbf{g}_3 &= \frac{\mathbf{g}^1 \wedge \mathbf{g}^2}{V'}\,. \end{aligned} \right.$$

2. Nello spazio euclideo a tre dimensioni sia ora stabilito un generico riferimento curvilineo $P = P(x^1, x^2, x^3)$. Al punto P venga associato il riferimento naturale [1] di vettori base $\mathbf{g}_\alpha = \dfrac{\partial P}{\partial x^\alpha}$ (3), in modo che un campo tensoriale $T(x^1, x^2, x^3)$, definito in un certo dominio dello spazio euclideo potrà essere individuato dalle componenti di $T(P)$ rispetto al riferimento naturale. A questo punto riportiamo le seguenti relazioni, che coinvolgono

(3) Per comodità ai fini del nostro lavoro converremo d'ora in poi che gli indici greci vanno da 1 a 3 e quelli latini da 1 a 2.

i simboli di Christoffel, e di cui faremo frequente uso:

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{g}_\alpha}{\partial x^\beta} &= \Gamma^\delta_{\alpha\beta}\, \mathbf{g}_\delta\,, \\ \frac{\partial \mathbf{g}^\alpha}{\partial x^\beta} &= -\,\Gamma^\alpha_{\beta\delta}\, \mathbf{g}^\delta,\end{aligned}\right. \tag{1.2}$$

$$\Gamma^\alpha_{\beta\delta} = \Gamma^\alpha_{\delta\beta} \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial x^\alpha} = \Gamma^\delta_{\alpha\delta} \qquad (g = |\, g_{\alpha\beta} \,|). \tag{1.4}$$

Per il campo tensoriale $T(P)$ il tensore $\frac{\partial T}{\partial x^\alpha} \otimes g^\alpha$, *gradiente di T,* sarà indicato con ∇T, e le sue componenti sono le derivate covarianti delle componenti di T. Se $T(P)$ è uno scalare porremo $\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x^\alpha}\, \mathbf{g}^\alpha$, mentre per un vettore $\mathbf{v} = v^\alpha\, \mathbf{g}_\alpha$ risulta:

$$\nabla\, \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^\alpha} \otimes \mathbf{g}^\alpha = \left(\frac{\partial v^\delta}{\partial x^\alpha}\, \mathbf{g}_\delta + v^\delta\, \Gamma^\beta_{\alpha\delta}\, \mathbf{g}_\beta\right) \otimes \mathbf{g}^\alpha .$$

Si noti che $\mathbf{g}^\alpha \otimes \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^\alpha}$ è il trasposto di $\nabla\, \mathbf{v}$.

L'operazione $\operatorname{div} T = \frac{\partial T}{\partial x^\alpha} \cdot \mathbf{g}^\alpha$ ci da invece l'ente ottenuto per contrazione nei due ultimi indici di ∇T. Vale, sotto le opportune condizioni di regolarità, il teorema di Gauss-Green:

$$\iiint_V \operatorname{div} T\, dV = \iint_\Sigma T \cdot \mathbf{n}\, d\Sigma \tag{1.5}$$

dove $\mathbf{n}$ è la normale esterna alla superficie Σ frontiera della regione V.

3. Sia ora Ω una superficie sufficientemente regolare di rappresentazione parametrica $P_\Omega = P_\Omega(x^1, x^2)$. Riferiamo i punti di un dominio dello spazio che comprende Ω al sistema di coordinate definito dalla

$$P\,(x^1\, x^2\, x^3) = P_\Omega\,(x^1\, x^2) + \mathbf{n}\, x^3, \tag{1.6}$$

essendo $\mathbf{n}$ la normale alla superficie [3].

D'ora in poi useremo sempre questo riferimento in modo che per i vettori base su Ω risulta:

$$\begin{cases} \mathbf{g}_l = \dfrac{\partial P}{\partial x^l}, \quad \mathbf{g}_3 = \mathbf{g}^3 = \mathbf{n} \\ g_{3\alpha} = g_{\alpha 3} = 0 \\ g_{33} = 1. \end{cases}$$

Posto $S^2 = | g_{lr} |$ dove $S = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{n}]$ è l'area con segno del parallelogrammo formato con i vettori $\mathbf{g}_1$ e $\mathbf{g}_2$ abbiamo, su Ω:

$$\begin{cases} \mathbf{g}^1 = \dfrac{\mathbf{g}_2 \wedge \mathbf{n}}{S} \\ \mathbf{g}^2 = \dfrac{\mathbf{n} \wedge \mathbf{g}_1}{S} \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{g}_1 = \dfrac{\mathbf{g}^2 \wedge \mathbf{n}}{S'} \\ \mathbf{g}_2 = \dfrac{\mathbf{n} \wedge \mathbf{g}^1}{S'} \end{cases} \qquad SS' = 1.$$

Osserviamo che gli indici latini si trasformano, cambiando x^1 e x^2, come indici tensoriali in uno spazio bidimenzionale e che l'unità si può scrivere $I = \mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{g}^\alpha = \mathbf{g}_l \otimes \mathbf{g}^l + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$, mentre il tensore $A = \mathbf{g}_l \otimes \mathbf{g}^l = \mathbf{g}^l \otimes \mathbf{g}_l$ è, in un punto di Ω, l'unità per i tensori di superficie, cioè nello spazio bidimenzionale ottenuto dalla combinazione lineare di prodotti tensoriali fra i $\mathbf{g}_r$, $\mathbf{g}^s$.

I simboli di Christoffel su Ω si ottengono calcolandoli con le (1.6) in $\mathcal{S}_3$ e ponendo poi $x^3 = 0$ [3]. Si trova ad esempio:

$$(1.7) \qquad \begin{cases} \Gamma^l_{rs} = \dfrac{1}{2}\, \mathbf{g}^l \cdot \mathbf{g}_{r,\,s} \\ \Gamma^l_{s3} = \mathbf{g}^l \cdot \mathbf{g}_{3,\,s} = \mathbf{g}^l \cdot \mathbf{n}_{,\,s} \\ \Gamma^3_{mn} = \mathbf{g}^3 \cdot \mathbf{g}_{m,\,n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{g}_{m,\,n} \\ \Gamma^3_{l3} = \Gamma^l_{33} = \Gamma^3_{33} = 0 \\ \Gamma^l_{ls} = \dfrac{1}{\sqrt{g}} \cdot \dfrac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^s}, \qquad g = | g_{rs} |. \end{cases}$$

Se su Ω è definito un campo tensoriale, *tridimensionale*, $T(P_\Omega)$ le due quantità

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x^l} \otimes \mathbf{g}^l \quad \text{e} \quad \operatorname{div} T = \frac{\partial T}{\partial x_l} \cdot \mathbf{g}^l \text{ (4)}$$

---

(4) div T è sempre la contrazione rispetto ai due ultimi indici di ∇T le cui componenti sono le derivate covarianti superficiali delle componenti di T.

sono formalmente invarianti rispetto ad un cambiamento delle x^l. Si osservi che in base alle (1.7) è $\Gamma^l_{l3} = \operatorname{div} \mathbf{n}$.

Sempre in ipotesi di sufficiente regolarità consideriamo una parte Σ di Ω limitata dal contorno chiuso γ, e sia $\mathbf{n}$ la normale esterna (rispetto a Σ) a γ in ogni suo punto, cioè il vettore tangente ad Ω e normale a γ.

Con questa posizione vale il teorema:

$$\iint_\Sigma \operatorname{div} T \, d\Sigma = \oint_\gamma T \cdot \mathbf{n}_\gamma \, d\gamma + \iint_\Sigma T \cdot \mathbf{n} \Gamma^l_{l3} \, d\Sigma = \oint_\gamma T \cdot \mathbf{n}_\gamma \, d\gamma + \iint_\Sigma T \cdot \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{n} \, d\Sigma \; (^5) \tag{1.8}$$

Essendo, com'è noto:

$$c_m = -\Gamma^l_{l3} = -\operatorname{div} \mathbf{n}, \qquad c_m = \text{curvatura media},$$

la (1.8) può scriversi:

$$\iint_\Sigma \operatorname{div} T \, d\Sigma = \oint_\gamma T \cdot \mathbf{n}_\gamma \, d\gamma - \iint_\Sigma T \cdot \mathbf{n} \, c_m \, d\Sigma.$$

Terminiamo questa prima parte introducendo il *tensore curvatura* nella forma seguente $C = \Gamma^3_{mn} \mathbf{g}^m \otimes \mathbf{g}^n = -\nabla \mathbf{n}$. Per gli scopi del presente lavoro è sufficiente notare che gli autovalori di C sono le curvature principali (cioè la massima e la minima) in ogni punto di Ω.

2. Le equazioni di moto.

1. Le considerazioni precedenti stanno a fondamento degli sviluppi di teorie meccaniche nelle quali è possibile schematizzare un continuo materiale come una superficie, intesa eventualmente come supporto di un certo numero di enti tensoriali. Indichiamo in questo paragrafo proprietà di carattere meccanico di tali continui, specificando naturalmente alcune precise ipotesi. Le prime due ipotesi che accettiamo sono:

(^{5}) Una dimostrazione elementare della (1.8) si può ottenere definendo nella regione dei punti $P = P_\Omega(x^1 x^2) + \mathbf{n} x^3$ con $|x^3| \leq \delta$ il campo $T'(P)$ con $T'(x^1 x^2 x^3) = T_\Omega(x^1 x^2)$, applicando poi a questo campo la (1.5) e passando al limite per $\delta \to 0$.

a) *La massa m di una qualunque porzione Σ di Ω è valutabile come totale di una densità superficiale ϱ:*

$$m(\Sigma) = \iint_{\Sigma} \varrho \, d\Sigma .$$

b) *Istituito su Ω un sistema di coordinate lagrangiane x^i vale l'equazione di continuità:*

$$\varrho \sqrt{g} = \text{cost.}. \tag{2.1}$$

Osserviamo che se $\mathbf{v}(P, t)$ è il campo delle velocità dei punti di Ω poichè, come si verifica facilmente, è $\frac{d}{dt} \log \sqrt{g} = \operatorname{div} \mathbf{v}$ si può dare alla (2.1) la forma classica

$$\frac{d\varrho}{dt} + \varrho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \tag{2.2}$$

Inoltre, se $A(P, t)$ è un qualunque campo tensoriale su Ω, valgono anche i *teoremi del trasporto*

$$\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} A \, d\Sigma = \frac{d}{dt} \iint_{D} A \sqrt{g} \, dx^1 \, dx^2 = \iint_{D} \left(\frac{dA}{dt} \sqrt{g} + A \frac{d\sqrt{g}}{dt} \right) dx^1 \, dx^2 = \tag{2.3}$$
$$= \iint_{\Sigma} \left(\frac{dA}{dt} + A \operatorname{div} \mathbf{v} \right) d\Sigma$$

$$\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \varrho A \, d\Sigma = \iint_{\Sigma} \varrho \frac{dA}{dt} \, d\Sigma . \tag{2.4}$$

In riguardo alle proprietà dinamiche facciamo le seguenti ipotesi:

c) *Se γ è il contorno di Σ le azioni di contatto della parte esterna a γ sull'interno sono completamente rappresentate, al generico istante t, da due vettori $\boldsymbol{\tau}(P, \mathbf{n}_\gamma)$, sforzo risultante specifico (per unità di lunghezza), e $\mathbf{m}(P, \mathbf{n}_\gamma)$, coppia risultante specifica.*

d) *Le azioni esterne sono rappresentate da due campi vettoriali* $\mathbf{f}$ *e* $\mathbf{c}$, *forze e coppie esterne per unità di superficie.*

In base alle ipotesi fatte possiamo scrivere che

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{f} \, d\Sigma + \oint_{\gamma} \boldsymbol{\tau} \, d\gamma = \iint_{\Sigma} \varrho \, \mathbf{a} \, d\Sigma .$$

Ragionando in modo analogo al caso tridimensionale, si vede che una prima conseguenza di questa relazione è la ben nota possibilità di rappresentare $\boldsymbol{\tau}(P, \mathbf{n}_\gamma)$ nel seguente modo; $\boldsymbol{\tau}(P, \mathbf{n}_\gamma) = T(P) \cdot \mathbf{n}_\gamma$, dove per il tensore di stress $T(P)$, anzi $T(P, t)$, vale la definizione usuale che riportiamo nella seguente forma [2]: presi su Ω due versori $\mathbf{n}_l$ ortogonali fra loro (e tangenti alla superficie), si considerano gli sforzi relativi $\mathbf{T}_l$ e si pone $T = \mathbf{T}_l \otimes \mathbf{n}_l$.

Si vede immediatamente che $T \cdot \mathbf{n} = 0$ da cui segue che la (1.8) applicata a T si riduce ad una espressione formalmente identica al classico teorema di Gauss-Green. Da essa si deduce che

$$\varrho\mathbf{a} = \mathbf{f} + \operatorname{div} T. \tag{2.5}$$

La seconda equazione cardinale ci dice che

$$\iint_\Sigma \mathbf{c}\, d\Sigma + \oint_\gamma [(P-0) \wedge \boldsymbol{\tau} + \mathbf{m}]\, d\gamma + \iint_\Sigma (P-0) \wedge \mathbf{f}\, d\Sigma = \iint_\Sigma \varrho\,(P-0) \wedge \mathbf{a}\, d\Sigma \tag{2.6}$$

essendo 0 un punto fisso. Una prima conseguenza della (2.6) è la possibilità di rappresentare anche il vettore $\mathbf{m}$ nella forma $\mathbf{m}(P, \mathbf{n}_\gamma) = M \cdot \mathbf{n}_\gamma$, dove il tensore dei momenti $M(P, t)$ è definito in modo simile a T. Risulta ancora che $M \cdot \mathbf{n} = 0$.

Per trasformare la (2.6) osserviamo adesso che $(P-0) \wedge \boldsymbol{\tau} = (P-0) \wedge (T \cdot \mathbf{n}_\gamma) = [(P-0) \wedge T] \cdot \mathbf{n}_\gamma$. Essendo $[(P-0) \wedge T] \cdot \mathbf{n} = 0$, abbiamo:

$$\oint_\gamma [(P-0) \wedge T] \cdot \mathbf{n}_\gamma\, d\gamma = \iint_\Sigma \operatorname{div}[(P-0) \wedge T]\, d\Sigma = \iint_\Sigma (P-0) \wedge \operatorname{div} T\, d\Sigma + \iint_\Sigma \mathbf{g}_l \wedge T \cdot \mathbf{g}^l\, d\Sigma,$$

avendo tenuto conto che $\operatorname{div}[(P-0) \wedge T] = \dfrac{\partial[(P-0) \wedge T]}{\partial x^l} \cdot \mathbf{g}^l = \dfrac{\partial(P-0)}{\partial x^l} \wedge T \cdot \mathbf{g}^l + (P-0) \wedge \dfrac{\partial T}{\partial x^l} \cdot \mathbf{g}^l = \mathbf{g}_l \wedge T \cdot \mathbf{g}^l + (P-0) \wedge \operatorname{div} T$.

La (2.6) tenuto conto della (2.5) da luogo ora alla seconda equazione indefinita

$$\mathbf{c} + \operatorname{div} M + \mathbf{g}_l \wedge T \cdot \mathbf{g}^l = 0. \quad (2.7)$$

[6]

Se $\mathbf{c} + \operatorname{div} M = 0$ *dalle* (2.7) *si può ricavare che* T *è un tensore di superficie ed è simmetrico.*

3. Considerazioni energetiche.

Premettiamo che se $\mathbf{v}(P)$ è un campo vettoriale (su Ω) e $T(P)$ un campo di tensori del secondo ordine è:

$$\operatorname{div}(\mathbf{v} \cdot T) = \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} T + tr\{T^T \cdot \nabla \mathbf{v}\}.$$

Dalla (2.5) ricaviamo ora che

$$\varrho \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} T = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \operatorname{div}(\mathbf{v} \cdot T) - tr\{T^T \cdot \nabla \mathbf{v}\}$$

e, tenuto conto che $\mathbf{v} \cdot T \cdot \mathbf{n} = 0$, abbiamo che, posto $\mathcal{T} = \iint_\Sigma \frac{1}{2} \varrho v^2 \, d\Sigma$, è:

$$\frac{d\mathcal{T}}{dt} = P^{(f)} + P^{(r)} - P^{(T)}$$

[6] Le (2.5) e (2.7) valgono formalmente non solo in tre dimenzioni (dove l'indice va da 1 a 3) e si ricade nel caso del continuo polare, ma anche in un continuo unidimensionale $P(x, t)$ operando gli opportuni cambiamenti, quali ad esempio:

a) Un riferimento naturale è uno in cui un vettore è $\mathbf{g} = \frac{\partial P}{\partial x}$ e gli altri due sono due versori normali fra loro e alla linea.

b) I tensori di stress e dei momenti in un punto sono definiti da $T = \boldsymbol{\tau} \otimes \mathbf{t}$, $M = \mathbf{m} \otimes \mathbf{t}$ essendo $\mathbf{t}$ il versore tangente alla linea.

Posto $\operatorname{div} T = \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \mathbf{g}' \left(\mathbf{g}' = \frac{\mathbf{g}}{\mathbf{g}^2} \right)$ abbiamo ancora le

$$\varrho \mathbf{a} = \mathbf{f} + \operatorname{div} T, \quad \mathbf{c} + \operatorname{div} M + \mathbf{g} \wedge T \cdot \mathbf{g}' = 0,$$

con $\mathbf{f}$, $\mathbf{c}$ azioni esterne per unità di lunghezza.

con,

$$\begin{cases} P^{(f)} = \displaystyle\iint_{\Sigma} \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\, d\Sigma \\ P^{(\gamma)} = \displaystyle\oint_{\gamma} \mathbf{v}\cdot T\cdot\mathbf{n}_{\gamma}\, d\gamma \\ P^{(T)} = \displaystyle\iint_{\Sigma} tr\,\{T^{T}\cdot \nabla\,\mathbf{v}\}\, d\Sigma\,. \end{cases}$$

Il termine $P^{(T)}$ deve essere ora decomposto in due addendi: uno ci da la potenza delle azioni interne a Σ, e l'altro delle azioni esterne sul contorno γ di Σ.

In proposito va osservato che una tale decomposizione non è, come in un continuo tridimensionale, univocamente determinata dalle circostanze cinematiche.

Noi adotteremo il procedimento seguente:

Osserviamo anzitutto che:

$$\iint_{\Sigma} tr\,\{T^{T}\cdot\nabla\,\mathbf{v}\}\, d\Sigma = \iint_{\Sigma} \mathbf{g}^{l}\cdot T^{T}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x^{l}}\, d\Sigma = \iint_{\Sigma} \mathbf{g}^{l}\cdot T^{T}\cdot\frac{d\mathbf{g}_{l}}{dt}\, d\Sigma\,.$$

Sia K un tensore opportuno, per ora non completamente precisato, tale che $\dfrac{d\mathbf{g}_{l}}{dt} = K\cdot\mathbf{g}_{l}$ e decomponiamolo in un tensore generico D ed in uno antisimmetrico $-\Omega$. Se ω è il vettore associato a Ω dall'osservare che $\Omega\cdot\mathbf{a} = \mathbf{a}\wedge\omega$, segue che:

$$\iint_{\Sigma} tr\,\{T^{T}\cdot\nabla\,\mathbf{v}\}\, d\Sigma = \iint_{\Sigma} \mathbf{g}^{l}\cdot T^{T}\cdot D\cdot\mathbf{g}_{l}\, d\Sigma - \iint_{\Sigma} \mathbf{g}^{l}\cdot T^{T}\cdot(\mathbf{g}_{l}\wedge\omega)\, d\Sigma.$$

Ma:

$$\begin{aligned} -\iint_{\Sigma} \mathbf{g}^{l}\cdot T^{T}\cdot(\mathbf{g}_{l}\wedge\omega)\, d\Sigma &= -\iint_{\Sigma} (\mathbf{g}^{l}\cdot T^{T}\wedge\mathbf{g}_{l})\cdot\omega\, d\Sigma = \\ = \iint_{\Sigma} (\mathbf{g}_{l}\wedge T\cdot\mathbf{g}^{l})\cdot\omega\, d\Sigma &= -\iint_{\Sigma} \mathbf{c}\cdot\omega\, d\Sigma - \iint_{\Sigma} \operatorname{div}\mathbf{M}\cdot\omega\, d\Sigma = \\ = -\iint_{\Sigma} \mathbf{c}\cdot\omega\, d\Sigma &- \iint_{\Sigma} \operatorname{div}(\omega\cdot M)\, d\Sigma + \iint_{\Sigma} tr\,\{M_{T}\cdot\nabla\,\omega\}\, d\Sigma = \\ = -\iint_{\Sigma} \mathbf{c}\cdot\omega\, d\Sigma &- \oint_{\gamma} \omega\cdot M\cdot\mathbf{n}_{\gamma}\, d\gamma + \iint_{\Sigma} tr\,\{M^{T}\cdot\nabla\,\omega\}\, d\Sigma\,. \end{aligned}$$

Poniamo infine:

$$\frac{d\mathcal{T}}{dt} = P^{(f)} + P^{(c)} + P^{(\gamma)} - P^{(i)} \tag{2.8}$$

con

$$\left\{\begin{aligned} P^{(f)} &= \iint_{\Sigma} \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\, d\Sigma \\ P^{(c)} &= \iint_{\Sigma} \mathbf{c}\cdot\boldsymbol{\omega}\, d\Sigma \\ P^{(\gamma)} &= \oint_{\gamma} [\mathbf{v}\cdot T + \boldsymbol{\omega}\cdot M]\cdot \mathbf{n}_{\gamma}\, d\gamma \\ P^{(i)} &= \iint_{\Sigma} \mathbf{g}^{l}\cdot T^{T}\cdot D\cdot \mathbf{g}_{l}\, d\Sigma + \iint_{\Sigma} tr\,\{M^{T}\cdot \nabla\, \boldsymbol{\omega}\}\, d\Sigma . \end{aligned}\right. \tag{2.9}$$

I tensori K e Ω, che non sono completamente individuati dalle due condizioni $\dfrac{d\mathbf{g}_l}{dt} = K\cdot\mathbf{g}_l$, devono soddisfare al requisito che $P^{(c)}$ e $P^{(\gamma)}$ rappresentino effettivamente la potenza delle coppie distribuite e degli sforzi sul contorno γ. Rimandiamo ad un lavoro successivo il problema della specificazione completa di K e Ω nei casi di maggior interesse, e supponiamo qui d'averne scelta la giusta determinazione in modo che i ragionamenti termodinamici seguenti abbiano coerenza e validità fisica.

4. Considerazioni termodinamiche.

Per dare una formulazione analitica dei principî della termodinamica adatta ai nostri scopi introdurremo una energia interna dipendente dalla massa $E = \iint_{\Sigma} \varrho\varepsilon\, d\Sigma$ ed una dipendente dalla superficie $E' = \iint_{\Sigma} \varepsilon'\, d\Sigma$. Introdurremo altresì un flusso di calore $\mathbf{h}$ (vettore di superficie) [7] e delle sorgenti di calore per unità di massa q ed eventualmente per unità di su-

---

[7] L'introduzione nella seconda delle (2.10) di un vettore $\mathbf{h}(P, t)$ per calcolare il flusso di calore attraverso una linea si giustifica applicando alla prima delle (2.10) lo stesso tipo di considerazioni, sempre valide in casi simili, che abbiamo invocato per introdurre i tensori T e M.

perficie s (es. irraggiamento) e porremo che:

$$(2.10)\qquad \begin{cases} \dfrac{d(\mathcal{T}+E+E')}{dt} = P^{(f)} + P^{(c)} + P^{(\gamma)} + Q \\ Q = -\displaystyle\oint_\gamma \mathbf{h}\cdot\mathbf{n}_\gamma\, d\gamma + \iint_\Sigma (\varrho p + s)\, d\Sigma. \end{cases}$$

Sulla configurazione attuale avremo, tenuto conto dei risultati del paragrafo precedente,

$$\varrho\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{d\varepsilon'}{dt} + \varepsilon' \operatorname{div}\mathbf{v} = tr\,\{T^T\cdot D\} + tr\,\{M^T\cdot \nabla\,\omega\} -$$

$$- \operatorname{div}\mathbf{h} + \varrho\, q + s.$$

Introducendo analogamente una entropia per unità di massa η ed una per unità di superficie η' e le corrispondenti energie libere $\mathcal{F} = \varepsilon - \theta\eta$ e $\mathcal{F}' = \varepsilon' - \theta\eta'$. Dalla relazione fondamentale di Clausius-Duhem

$$\frac{d}{dt}\iint_\Sigma (\varrho\eta + \eta')\, d\Sigma \geq -\oint_\gamma \frac{\mathbf{h}\cdot\mathbf{n}_\gamma}{\theta}\, d\gamma + \iint_\Sigma \frac{\varrho q + s}{\theta}\, d\Sigma$$

ricaviamo infine le:

$$(2.12)\qquad \varrho\frac{d\eta}{dt} + \frac{d\eta'}{dt} + \eta' \operatorname{div}\mathbf{v} \geq \operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{h}}{\theta}\right) + \frac{\varrho q + s}{\theta}$$

$$(2.13)\qquad \varrho\frac{d\mathcal{F}}{dt} + \frac{d\mathcal{F}'}{dt} + \mathcal{F}'\cdot\operatorname{div}\mathbf{v} + (\varrho\eta + \eta')\frac{d\theta}{dt} - tr\,\{T^T\cdot D\} -$$

$$- tr\,\{M^T\cdot\nabla\,\omega\} + \frac{\nabla\theta\cdot\mathbf{h}}{\theta} \leq 0.\ (8)$$

5. Applicazione alle lamine liquide.

1. Come prima applicazione dei ragionamenti precedenti consideriamo un continuo costituito da una lamella liquida sottoposta ai fenomeni di tensione superficiale, continuo che schematizziamo come bidimensionale.

---

(8) Essendo $T.\mathbf{n} = 0$, abbiamo che $\mathbf{g}^l.T^T.D.\mathbf{g}_l = \mathbf{g}^l.T^T.D.\mathbf{g}_l + \mathbf{n}.T^T.D.\mathbf{n} = tr\,\{T^T.D\}$.

Per un tale continuo le esperienze mostrano che per spessori sufficientemente piccoli i fenomeni di superficie sono preponderanti rispetto a quelli di massa. Tradurremo questa informazione nella ipotesi che il nostro ideale continuo bidimensionale soddisfi alla proprietà:

a) *Le grandezze per unità di massa* ε, η, $\mathcal{F}$ (9) *ecc. sono nulle.*

Non esiste inoltre per la lamella una configurazione con stress nullo che possa servire da configurazione naturale di riferimento. Lo stress dipende quindi solo dagli elementi che caratterizzano lo stato geometrico, cinematico e termodinamico del sistema nella configurazione attuale. Siccome pensiamo al caso ideale di una lamella costituita da un liquido privo di attriti interni, ammetteremo anche che:

b) *Lo stress in un punto dipende, oltre che da costanti materiali, dalla densità* ϱ (10) *e dagli elementi che caratterizzano lo stato geometrico e termodinamico del sistema.*

L'ultima proprietà:

c) M *è sempre nullo e quindi* (*se anche* $c \equiv 0$) T *è un vettore di superficie ed è simmetrico,*

corrisponde ad immaginare che il nostro continuo sia costituito da un liquido non polare.

Le equazioni fondamentali da tenere presenti sono allora:

$$(4.1) \qquad \begin{cases} \varrho\, \mathbf{a} = \mathbf{f} + \operatorname{div} T \\[2mm] \dfrac{d\varrho}{dt} + \varrho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \\[2mm] \dfrac{d\varepsilon'}{dt} + \varepsilon' \operatorname{div} \mathbf{v} = tr\,\{T \cdot \nabla\, \mathbf{v}\} - \operatorname{div} \mathbf{h} + s \\[2mm] \dfrac{d\mathcal{F}'}{dt} + \mathcal{F}' \operatorname{div} \mathbf{v} + \eta'\, \dot{\theta} - tr\,\{T \cdot \nabla\, \mathbf{v}\} + \dfrac{\mathbf{h} \cdot \nabla \theta}{\theta} \leq 0 \end{cases}$$

ed in queste compaiono tre scalari ε', η', $\mathcal{F}'$, un vettore di superficie $\mathbf{h}$, ed un tensore simmetrico e di superficie T.

---

(9) E q per coerenza.

(10) Benchè le esperienze mostrino che, almeno per spessori non troppo piccoli (dell'ordine di raggio d'azione molecolare), lo stress non dipende dallo spessore della lamina e quindi dalla densità superficiale ϱ, noi non abbiamo escluso a priori tale dipendenza in virtù del principio di equipresenza, perchè il flusso di calore $\mathbf{h}$ dipende dallo spessore e quindi da ϱ.

Noi vogliamo adesso ricavare, con l'uso delle (4.1), dagli assiomi a), b), c), i semplici risultati classici. *In effetti la dimostrazione sarà data nella ulteriore ipotesi che le grandezze che compaiono nelle* (4.1) *siano esprimibili solo in funzione di* ϱ, θ, $\nabla\theta$, A, ∇A. Tale ipotesi corrisponde a ritenere che lo stress in un punto dipenda dalla geometria del sistema fino ad un intorno del secondo ordine del punto stesso.

Per motivi di invarianza le grandezze ε', η', $\mathcal{F}'$, $\mathbf{h}$, T devono essere funzioni isotrope di queste quantità *almeno per cambiamenti operati sulle coordinate* x^l (11).

Il tensore A (di autovalori 1, 1, 0) è l'unità nel sottospazio dei tensori di superficie nel punto considerato, e la sua conoscenza determina solo la giacitura del piano tangente, essendo tale giacitura quella comune a tutte le autodirezioni di A corrispondenti all'autovalore 1.

Consideriamo ∇A.

$$\nabla A = \frac{\partial A}{\partial x^l} \otimes \mathbf{g}^l = \frac{\partial (\mathbf{g}_m \otimes \mathbf{g}^m)}{\partial x^l} \otimes \mathbf{g}^l = \frac{\partial \mathbf{g}_m}{\partial x^l} \otimes \mathbf{g}^m \otimes \mathbf{g}^l +$$

$$+ \mathbf{g}_m \otimes \frac{\partial \mathbf{g}^m}{\partial x^l} \otimes \mathbf{g}^l = \Gamma^{\alpha}_{lm}\, \mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{g}^m \otimes \mathbf{g}^l - \mathbf{g}_m \otimes \Gamma^{m}_{l\alpha}\, \mathbf{g}^\alpha \otimes \mathbf{g}^l =$$

$$= \Gamma^{3}_{lm}\, \mathbf{n} \otimes \mathbf{g}^l \otimes \mathbf{g}^m + \Gamma^{l}_{mn}\, \mathbf{g}_l \otimes \mathbf{g}^m \otimes \mathbf{g}^n - \Gamma^{m}_{l3}\, \mathbf{g}_m \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{g}^l -$$

$$- \Gamma^{l}_{mn}\, \mathbf{g}_l \otimes \mathbf{g}^m \otimes \mathbf{g}^n = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{g}_{l,\,m})\, \mathbf{n} \otimes \mathbf{g}^l \otimes \mathbf{g}^m - (\mathbf{g}^m \cdot \mathbf{n}_{,\,l})\, \mathbf{g}_m \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{g}^l =$$

$$= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{g}_{l,\,m})\, \mathbf{n} \otimes \mathbf{g}^l \otimes \mathbf{g}^m - g^{ms} (\mathbf{g}_s \cdot \mathbf{n}_{,\,l})\, \mathbf{g}_m \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{g}^l =$$

$$= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{g}_{m,\,l})\, \mathbf{n} \otimes \mathbf{g}^l \otimes \mathbf{g}^m + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{g}_{s,\,l})\, \mathbf{g}^s \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{g}^l .$$

Osserviamo adesso che la proprietà di isotropia ha il seguente significato. Si consideri per fissare le idee una rappresentazione completamente covariante delle grandezze in considerazione, allora nel riferimento naturale indotto in ogni punto di Ω dalle coordinate x^l, esistono delle funzioni indipendenti dalla scelta delle x^l, che legano le componenti covarianti delle grandezze dipendenti a quelle delle grandezze indipendenti (le componenti di A essendo le g_{lm}). Nel caso di ∇A queste funzioni devono contenere le variabili $(\nabla A)_{3lm} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{g}_{l,\,m}$ provenienti dal primo addendo di ∇A e le $(\nabla A)_{s3l} =$

(11) È da osservare che è la dipendenza delle grandezze citate dalla sola configurazione attuale che ci assicura tale isotropia delle funzioni in considerazione.

$= \mathbf{n} \cdot \mathbf{g}_{s,l}$ provenienti dal secondo addendo di ∇A; si osservi che le $(\nabla A)_{s3l}$ sono uguali alle precedenti. In altre parole ∇A compare in queste funzioni solo attraverso le quantità $\mathbf{n} \cdot \mathbf{g}_{l,m}$ che si possono considerare come le componenti covarianti del tensore $C = \mathbf{n} \cdot \mathbf{g}_{l,m} \cdot \mathbf{g}^l \otimes \mathbf{g}^m$ già introdotto.

Quindi ε', η', $\mathcal{F}'$, $\mathbf{h}$, T *dipendono solo da* ϱ, θ, $\nabla\theta$, C (*ed* A *sempre sottinteso*).

2. Essendo gli scalari ϱ e θ sempre sottintesi, proponiamoci di vedere quanti invarianti scalari, indipendenti, possiamo formare con le grandezze $\nabla\theta$ e C.

Si tratta di tensori di superficie e il sottospazio dei tensori di superficie nel punto considerato di Ω è un ordinario spazio tensoriale a due dimensioni, $\mathcal{S}_2$. D'altra parte ogni invariante (generale) è anche invariante ortogonale e reciprocamente ogni invariante ortogonale può essere messo in forma di invariante generale. Ora in $\mathcal{S}_2$ un tensore simmetrico (C) ed un vettore ($\nabla\theta$) sono dati assegnando in un prefissato riferimento ortonormale le loro componenti, cioè 5 dati. Quindi il numero massimo di invarianti funzionalmente indipendenti che si possono formare è 5. Di più osserviamo che due insiemi diversi di numeri, rappresentanti le componenti delle stesse grandezze rispetto a due diversi riferimenti, hanno gli stessi invarianti. Quindi gli invarianti che si possono costruire con le grandezze date si ottengono anche dando, in un riferimento in cui C è diagonale, gli autovalori c_1 e c_2 di C e le componenti di $\nabla\theta$, in totale 4 dati. *Il numero massimo di invarianti scalari indipendenti è perciò* 4, *e questo numero è effettivamente raggiunto perchè ad esempio gli invarianti* c_1, c_2, $(\nabla\theta)^2$, $(C \cdot \nabla\theta)^2$ *sono fra loro indipendenti.*

Possiamo ora asserire che:

α) ε', η', $\mathcal{F}'$ sono funzioni di ϱ, θ, c_1, c_2, $(\nabla\theta)^2$, $(C \cdot \nabla\theta)^2$ al più.

β) Il vettore $\mathbf{h}$, applicando un teorema di Noll (vedi ad esempio [**4**]), risulta dalla forma

$$\mathbf{h} = (h_1 A + h_2 C) \cdot \nabla\theta$$

dove gli scalari h_1 e h_2 sono funzioni di ϱ, θ degli invarianti indipendenti scelti.

γ) Infine per il tensore $T = T(\varrho, \theta, \nabla\theta, C)$ ci basta osservare che esso si può mettere nella forma

$$T = \tau(\varrho, \theta) A + T_1(\varrho, \theta, \nabla\theta, C)$$

dove T_1 si annulla per $C = 0$ e $\nabla\theta = 0$, e $\tau(\varrho, \theta) \neq 0$.

Infatti $T(\varrho, \theta, 0, 0)$ corrispondente ad esempio ad una configurazione piana isoterma e con densità costante è necessariamente sferico e non nullo.

3. Osserviamo ora che, seguendo procedimenti noti ([4] e [5]), dati ad arbitrio (con le opportune limitazioni al contorno) $P(x^1 \, x^2 \, t)$ e $\theta(x^1 \, x^2 \, t)$ è sempre possibile con campi $\mathbf{f}$ e s opportuni soddisfare le prime tre equazioni (4.1) tenendo conto delle *equazioni costitutive* enunciate nei punti α), β), γ) del comma precedente. La seconda delle (4.1) può essere soddisfatta dando all'istante t_0 la $\varrho(x^1, x^2, t_0)$ in modo che $\iint_{\Sigma_0} \varrho(x^1 \, x^2 \, t_0) \, d\Sigma_0 = M$ massa totale del continuo. L'insieme di questi campi legati dalle prime tre equazioni (4.1) costituisce un processo termodinamico.

Le $P(x^2 \, x^2 \, t)$ e $\theta(x^1 \, x^2 \, t)$ possono essere supposte sufficientemente derivabili in un punto $(x^1 \, x^2)$ e all'istante t.

È facile convincersi che:

I) Considerate in un punto e in un istante assegnati le grandezze

$$\frac{d\varrho}{dt}, \theta, \frac{d\theta}{dt}, \nabla\theta, \frac{d}{dt}\nabla\theta, C, \frac{d}{dt}C, \nabla\mathbf{V} = \frac{\partial^2 P}{\partial t \, \partial x^l} \otimes \mathbf{g}^l$$

esiste almeno un processo termodinamico con la proprietà che nel punto e nell'istante considerato tali quantità assumono le determinazioni prefissate ad arbitrio ed indipendenti fra loro, nei limiti di certe ulteriori condizioni che fissano « il dominio di libertà » di queste grandezze. Per le grandezze considerate le condizioni da imporre è che esista almeno un vettore $\mathbf{n}$ (la normale alla superficie) tale che sia contemporaneamente $\nabla\theta \cdot \mathbf{n} = 0$, $C \cdot \mathbf{n} = 0$, $\nabla\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$. Inoltre $\theta > 0$ (12).

Esprimeremo questo fatto dicendo che le grandezze considerate formano in un determinato dominio un *insieme di variabili libere,* o che *esse sono libere fra loro* [6].

II) *Le variabili* $\dot{\varrho}, \theta, \dot{\theta}, c_1, c_2, \dot{c}_1, \dot{c}_2, (\nabla\theta)^2, (C \cdot \nabla\theta^2), \frac{d}{dt}(C \cdot \nabla\theta)^2, \frac{d}{dt}(\nabla\theta)^2, \nabla\mathbf{v}$ *sono libere fra loro,* nel dominio di libertà definito dalle condizioni $\theta > 0$, c_1 e c_2 e derivate temporali comprese fra loro $-\infty$ e $+\infty$, $(C \cdot \nabla\theta)^2$ com-

(12) $\frac{d\varrho}{dt}$ e div $\mathbf{v}$ non devono mai avere lo stesso segno.

preso fra $c_1^2 (\nabla\theta)^2$ e $c_2^2 (\nabla\theta)^2, \nabla\theta$ e $\nabla \mathbf{v}$ qualunque purchè esista almeno un versore $\mathbf{n}$ (normale alla superficie) per cui è $\nabla\theta \cdot \mathbf{n} = 0$ e $\nabla\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$, e purchè $\dot{\varrho}$ e div $\mathbf{v}$ non abbiano mai lo stesso segno.

III) *Nelle precedenti proposizioni* I) *e* II) *al posto di* $\nabla\mathbf{v}$ *possiamo sostituire* div $\mathbf{v}$, con un opportuno ritocco del « dominio di libertà » degli insiemi considerati.

I processi termodinamici che esistono per una assegnata scelta dei valori delle variabili considerate nelle proposizioni I), II), III) sono in numero infinito.

È ragionevole allora ammettere che fra questi ne esiste almeno uno che soddisfa all'ultima delle (4.1), *ammettere cioè che la considerazione dell'ultima delle* (4.1) *insieme alle altre tre lascia gli insiemi di variabili considerate ancora libere fra loro.*

4. L'ultima delle (4.1) si può scrivere, essendo $tr\,\{A \cdot \nabla\,\mathbf{v}\} = \operatorname{div} \mathbf{v}$,

$$\frac{d\mathcal{F}'}{dt} + (\mathcal{F}' - \tau) \operatorname{div} \mathbf{v} + \eta'\dot{\theta} - tr\,\{T_1 \cdot \nabla\,\mathbf{v}\} + \frac{\mathbf{h}\cdot\nabla\theta}{\theta} \leq 0.$$

Esplicitando la $\dfrac{d\mathcal{F}'}{dt}$ si vede che $\mathcal{F}' = \mathcal{F}'(\theta)$ al più, che $\dfrac{\partial\mathcal{F}'}{\partial\theta} + \eta' \equiv 0$ e quindi $\eta' = \eta'(\theta)$ al più. Ponendo nella restante relazione $C = 0$ e $\nabla\theta = 0$ si ricava che deve sempre essere $(\mathcal{F}' - \tau) \operatorname{div} \mathbf{v} \leq 0$ e quindi $\mathcal{F}' = \tau$. Disponendo infine dell'arbitrarietà di $\nabla\,\mathbf{v}$ segue che $T_1 \equiv 0$. Rimane infine che deve sempre essere $\dfrac{\mathbf{h}\cdot\nabla\theta}{\theta} \leq 0$. In definitiva:

$$\text{(4.2)} \qquad \begin{cases} T = \tau(\theta)\, A \\ \mathcal{F}'(\theta) = \tau(\theta) \\ \eta' = -\dfrac{\partial\mathcal{F}'}{\partial\theta}\,. \end{cases}$$

Osserviamo ora che $\operatorname{div} A = \dfrac{\partial\,(\mathbf{g}^l \otimes \mathbf{g}_l)}{\partial x^m} \cdot \mathbf{g}^m = \dfrac{\partial \mathbf{g}^l}{\partial x^m} \otimes \mathbf{g}_l \cdot \mathbf{g}^m + \mathbf{g}^l \otimes \dfrac{\partial \mathbf{g}_l}{\partial x^m} \cdot$ $\cdot\, \mathbf{g}^m = - \Gamma^m_{\alpha m}\, \mathbf{g}^\alpha + \mathbf{g}^l \otimes (\Gamma^\beta_{lm}\, \mathbf{g}_\beta) \cdot \mathbf{g}^m = - \Gamma^m_{\alpha m}\, \mathbf{g}^\alpha + \mathbf{g}^l\, \Gamma^m_{lm} = - \Gamma^m_{m3}\, \mathbf{n} = c_m\, \mathbf{n}$: quindi l'equazione di moto diventa

$$\text{(4.3)} \qquad \varrho\, \mathbf{a} = \mathbf{f} + \operatorname{div}(\tau\, A) = \mathbf{f} + c_m\, \mathbf{n} + \frac{d\tau}{d\theta} \nabla\theta$$

e da questa ricaviamo che le condizioni di equilibrio con $\mathbf{f} = \mathrm{p}\,\mathbf{n}$ (posizione che corrisponde al caso fisico di una lamella sottoposta ad una differenza di pressione p fra le due faccie) sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{p}}{\tau} = - c_m \\ \nabla\theta = 0 \text{ e quindi } \theta \text{ e } \tau \text{ costanti su } \Omega. \end{array} \right. \tag{4.4}$$

Queste condizioni ci permettono di identificare τ con il doppio della tensione superficiale caratteristica del liquido costituente la lamina [13].

---

(13) e dipendente più esattamente anche dall'ambiente gassoso in cui è immersa.

BIBLIOGRAFIA

[1] LICHNEROWICZ A., « *Elements de calcul tensoriel* », A. Colin Paris 1950.

[2] SEDOV L. T., « *Foundation of the non-linear mechanics of continua* », Pergamon Press Oxford 1966.

[3] GREEN A. E., ZERNA W., « *Theoretical elasticity* », Claredon Press Oxford 1954.

[4] TRUESDELL C., W. NOLL, « *The non-linear field theories of mechanics* », *in* « *Handbuch der Physik* », Vol. III/3, Springer, 1965, p. 35.

[5] COLEMAN B., W. NOLL, « *The termodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity* », Arch. Rational Mech. Anal., 13-3 (1963), pp. 167-178.

[6] CAPRIZ G., « *Istituzioni di fisica matematica* », Pisa, Anno Accademico 1965-1966.

[7] GREEN A. E., NAGHDI P. M., WAINWRIGHT W. L., « *A general theory of a Cosserat surface* », Arch. Rational Mech. Anal., 20 (1965), pp. 287-308.