

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

KNUT KNORR

**Über den Grauert'schen Kohärenzsatz bei eigentlichen
holomorphen Abbildungen. II**

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 23,
n° 1 (1969), p. 1-74

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1969_3_23_1_1_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÜBER DEN GRAUERTSCHEN KOHÄRENZSATZ BEI EIGENTLICHEN HOLOMORPHEN ABBILDUNGEN II (*)

KNUT KNORR

INHALTSVERZEICHNIS

3. *Calcul des Messüberdeckungen*

3.1 Messatlanten und Messüberdeckungen	Seite	1
3.2 Topologische Vorbereitungen	»	6
3.3 Existenzsätze	»	7
3.4 Grauertnormen	»	15
3.5 Der Leraysche Satz von Grauert	»	17
3.6 Einige Sätze über Messüberdeckungen	»	25

4. *Der Kohärenzsatz von Grauert*

4.1 Formulierung der Hauptsätze	»	32
4.2 Induktionsanfang	»	38
4.3 1-ter Induktionsschritt	»	40
4.4 2-ter Induktionsschritt	»	56
4.5 Die Haupttheoreme von Grauert	»	70
Anhang	»	74
Literaturverzeichnis	»	74

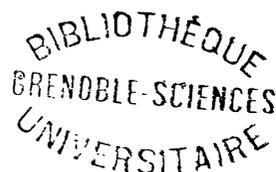
3. Calcul des Messüberdeckungen.

3.1. Messatlanten und Messüberdeckungen

(3.1.1) Bezeichnungen : Sei (X, \mathcal{O}_X) ein komplexer Raum K ein Polyzylinder im \mathbb{C}^m , $\pi : X \rightarrow K$ eine eigentliche holomorphe Abbildung. In den

Pervenuto alla Redazione il 25 Gennaio 1968.

(*) Die Kapitel 1 und 2 sind in diesem Journal Band XXII, (1968), 729-761, erschienen.



Kapiteln 3 und 4 werden ständig folgende Bezeichnungen benutzt:

$$t = (t_1, \dots, t_m) \in \mathbf{C}^m,$$

$$\varrho = (\varrho_1, \dots, \varrho_m) \in \mathbf{R}_+^m,$$

$K(t, \varrho)$ Polyzylinder im \mathbf{C}^m mit Zentrum t und Polyradius ϱ ,

$$X(t, \varrho) = \pi^{-1}(K(t, \varrho)).$$

Wenn $\varrho = 0$ ist, wird speziell $K(t, 0) = K(t) = \{t\}$ und $X(t, 0) = X(t)$ gesetzt; wenn $t = 0$ ist, wird speziell $K(0, \varrho) = K(\varrho)$ und $X(0, \varrho) = X(\varrho)$ gesetzt.

DEFINITION (3.1.2). — Sei $t \in \mathbf{C}^m$ und $\varrho \in \mathbf{R}_+^m$, $\varrho > 0$. Eine Messkarte \mathfrak{W} bezüglich (t, ϱ) ist ein Quartrupel (W, Φ, E, R) mit folgenden Daten:

- (i) W eine offene Menge von X ,
- (ii) E eine Steinsche offene Menge in einem \mathbf{C}^n ,
- (iii) $\Phi: W \rightarrow E \times K(t, \varrho)$ eine holomorphe Abbildung mit $pr_2 \circ \Phi = \pi$, die W biholomorph auf eine analytische Menge von $E \times K(t, \varrho)$ abbildet.
- (iv) R ein Funktor, der jeden kohärenten \mathcal{O} -Modul \mathcal{S} eine Auflösung

$$R(\mathcal{S}): \mathcal{O}^p \xrightarrow{h} \mathcal{O}^q \xrightarrow{\alpha} \Phi_*(\mathcal{S}) \rightarrow 0$$

über $E \times K(t, \varrho)$ zuordnet. ⁽¹⁾

DEFINITION (3.1.3). — Sei $t \in \mathbf{C}^m$ und $\varrho \in \mathbf{R}_+^m$, $\varrho > 0$. Ein Messatlas $\mathfrak{A} = (\mathfrak{W}_k, \lambda_{lk})$ bezüglich (t, ϱ) , der K als Indexmenge hat, besteht aus folgenden Daten:

- (i) K endliche Menge,
- (ii) $(\mathfrak{W}_k)_{k \in K}$ eine Familie von Messkarten $\mathfrak{W}_k = (W_k, \Phi_k, E_k, R_k)$ bezüglich (t, ϱ) , die K als Indexmenge hat.
- (iii) Für jedes Paar (k, l) von Indizes aus K derart, dass $W_k \cap W_l \neq \emptyset$ ist, sei λ_{lk} eine holomorphe Abbildung von $E_k \times K(t, \varrho)$ nach $\mathbf{C}^n \times K(t, \varrho)$. Diese Daten müssen folgende Axiome erfüllen:

$$(A1) \quad \bigcup_{k \in K} W_k = X(t, \varrho)$$

⁽¹⁾ Wenn $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ ein Morphismus zwischen zwei kohärenten \mathcal{O} -Modulen ist, dann soll $R(f) = \Phi_*(f)$ sein.

(A2) Wenn (k, l) ein Paar von Indizes aus K ist mit $W_k \cap W_l \neq \emptyset$, dann ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 W_k \cap W_l & \xrightarrow{\phi_k} & E_k \times \kappa(t, \mathfrak{g}) \\
 & \searrow \phi_l & \downarrow \lambda_{lk} \\
 & & \mathbb{C}^{n_l} \times \kappa(t, \mathfrak{g}) \xrightarrow{\quad} \kappa(t, \mathfrak{g})
 \end{array}$$

kommutativ.

DEFINITION (3.1.4). — Sei $\mathfrak{A} = (\mathfrak{U}_k, \lambda_{lk})$ ein Messatlas bezüglich (t, ϱ_0) , der K als Indexmenge hat. Eine Messüberdeckung $\mathfrak{U} = (U, M, M', F)$ bezüglich \mathfrak{A} besteht aus folgenden Daten:

(i) $U = (U_i)_{i \in I}$ ist eine endliche Steinsche Familie offener Mengen aus X , die für hinreichend kleines $\varrho \in \mathbb{R}_+^m$ die Menge $X(t, \varrho)$ überdeckt.

(ii) M und M' sind Abbildungen von I in die Potenzmengen von K , so dass für jedes $i \in I$ die Beziehung $\emptyset \neq M'(i) \subset M(i)$ gilt.

(iii) Sei A die Menge aller Paare $(k, i) \in K \times I$ mit $k \in M(i)$. $F = (F_{k,i})$ ist eine Familie achsenparalleler Quader $F_{k,i}$ aus E_k , die A als Indexmenge hat.

Diese Daten müssen für hinreichend kleines ϱ folgende Axiome erfüllen:

(M1) Wenn (i_0, \dots, i_p) eine endliche Folge von Indizes aus I ist, dann gilt:

$$U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p} \neq \emptyset \implies M'(i_0) \cap \dots \cap M'(i_p) \neq \emptyset$$

(M2) Wenn $(k, i) \in K \times I$ ist, dann gilt:

$$k \in M(i) \implies U_i \subset W_k$$

$$k \in M(i) \implies pr_1(\Phi_k(U_i)) \subset F_{k,i} \subset E_k$$

(M3) Wenn $j \in I$ und $(k, i) \in K \times I$, dann gilt:

$$k \in M'(j) \text{ und } k \notin M(i) \implies U_i \cap \Phi_k^{-1}(F_{k,j} \times K(t, \varrho)) = \emptyset.$$

DEFINITION (3.1.5). — Sei $\mathfrak{A} = (\mathfrak{U}_k, \lambda_{lk})$ ein Messatlas bezüglich (t, ϱ_0) , der K als Indexmenge hat; $\mathfrak{U} = (U, M, M', F)$ und $\mathfrak{V} = (V, N, N', G)$ seien Messüberdeckungen bezüglich \mathfrak{A} . Die Messüberdeckung \mathfrak{V} heisst zulässige Verfeinerung von \mathfrak{U} mit Verfeinerungsabbildung τ (in Zeichen $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}$), wenn für hinreichend kleines ϱ folgende Axiome erfüllt sind:

(V1) $V = (V_j)_{j \in J}$ Verfeinerung von $U = (U_i)_{i \in I}$ mit der Verfeinerungsabbildung $\tau: J \rightarrow I$.

(V2) Wenn $(k, j) \in K \times J$, dann gilt:

$$k \in M(\tau(j)) \implies G_{k;j} \subset\subset F_{k;\tau(j)}$$

(V3) Wenn $j \in J$, dann ist $N(j) = M(\tau(j))$ und $N'(j) = M'(\tau(j))$

(V4) Wenn $(k, j) \in K \times J$, dann gilt:

$$k \in N'(j) \implies (G_{k;j} \times K(t, \varrho)) \cap \Phi_k(U_{\tau(j)}) = (G_{k;j} \times K(t, \varrho)) \cap \Phi_k(W_k)$$

(V5) Wenn $j \in J$ und $k, l \in K$, dann gilt:

$$k, l \in N(j) \implies \lambda_{lk}(G_{k;j} \times K(t, \varrho)) \subset F_{l;\tau(j)} \times K(t, \varrho).$$

(3.1.6) Sei \mathfrak{A} ein Messatlas bezüglich (t, ϱ_0) und \mathfrak{U} eine Messüberdeckung bezüglich \mathfrak{A} , dann sagen wir kurz: \mathfrak{U} ist eine t -Messüberdeckung (Missverständnisse bezüglich des Messatlas sind dabei nicht zu befürchten, denn für jedes $t \in \mathbb{C}^m$ wird später genau ein Messatlas gewählt).

Seien \mathfrak{U} und \mathfrak{W} zwei t -Messüberdeckungen. $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{W}$ bezeichne eine endliche Familie $\mathfrak{V}_i)_{i \leq n}$ von t -Messüberdeckungen derart, dass

$$\mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}_1 \supset \mathfrak{V}_2 \supset \dots \supset \mathfrak{V}_n \supset \mathfrak{W}$$

gilt. Dabei ist die Zahl n stets aus dem Zusammenhang ersichtlich. $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{W}$ heisst eine (endliche) Kette von t -Messüberdeckungen.

Es ist zweckmässig noch folgende Bezeichnungen einzuführen, die dann in den folgenden Kapiteln ständig benutzt werden:

Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen einer Menge X , s eine natürliche Zahl. Es wird gesetzt:

$$i = (i_0, \dots, i_s) \in I^{s+1},$$

$$U_i = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_s}.$$

Seien J und K Mengen, τ eine Abbildung von I nach J und M eine Abbildung von I in die Potenzmenge von K . Es wird gesetzt:

$$\tau(i) = (\tau(i_0), \dots, \tau(i_s)) \in J^{s+1},$$

$$M(i) = M(i_0) \cap \dots \cap M(i_s).$$

DEFINITION (3.1.7). — Sei $\mathfrak{A} = (\mathfrak{U}_k, \lambda_{ik})$ ein Messatlas bezüglich (t, ϱ_0) , der K als Indexmenge hat, $(\mathcal{S}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine endliche Familie kohärenter \mathcal{H} -Moduln auf X und s eine natürliche Zahl. Ein Paar $(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})$ von Messüberdeckungen bezüglich \mathfrak{A} heisst s -privilegierte Verfeinerung bezüglich $(\mathcal{S}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, wenn für hinreichend kleines ϱ folgende Axiome erfüllt sind:

(PV1) \mathfrak{V} ist zulässige Verfeinerung von \mathfrak{U} mit Verfeinerungsabbildung $\tau: J \rightarrow I$.

(PV2) Es gibt eine Dreiecksmenge $\Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)$ und eine Abbildung $M: \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m) \rightarrow \mathbf{R}_+$ und es gibt zu jedem $j \in J^{s+1}$ und jedem $\chi \in M(j)$ einen n_χ -dimensionalen Polyzylinder $K_{\chi;j}$ so dass gilt:

- 1) $G_{\chi;j} \subset K_{\chi;j} \subset F_{\chi;\tau(j)}$.
- 2) Wenn $\lambda \in \Lambda$, $\varrho \in \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)$ und σ ein Schnitt aus

$$\Gamma(K_{\chi;j} \times K(t, \varrho) \text{ im } h_\lambda) \text{ mit } \|\sigma\|_{K_{\chi;j}e} < \infty,$$

dann gibt es ein $\sigma' \in \Gamma(K_{\chi;j} \times K(t, \varrho), \bar{O}^{p_\lambda})$ mit $h_\lambda(\sigma') = \sigma$ und

$$\|\sigma'\|_{K_{\chi;j}e} \leq M(\varrho) \|\sigma\|_{K_{\chi;j}e}.$$

LEMMA (3.1.8). — Sei \mathfrak{A} ein Messatlas bezüglich (t, ϱ_0) der K als Indexmenge hat; $\mathfrak{U} = ((U_i)_{i \in I}, M, M', F)$ und $\mathfrak{V} = ((V_j)_{j \in J}, N, N', G)$ Messüberdeckungen bezüglich \mathfrak{A} mit $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}$. Sei $(i_0, \chi) \in I \times K$ derart, dass $\chi \in M'(i_0)$ is. Mit J_χ sei die Menge aller $j \in J$ mit $\chi \in N(j)$ bezeichnet.

Behauptung: Für hinreichend kleines ϱ gilt:

- 1) Die Familie $(V_j)_{j \in J_\chi}$ überdeckt $\Phi_\chi^{-1}(F_{\chi;i_0} \times K(t, \varrho))$
- 2) Für alle V_j mit $\chi \notin N(j)$ gilt $\Phi_\chi^{-1}(F_{\chi;i_0} \times K(t, \varrho)) \cap V_j = \emptyset$
- 3) Es gilt $(F_{\chi;i_0} \times K(t, \varrho)) \cap \Phi_\chi(W_\chi) \subset \bigcup_{j \in J} (G_{\chi;j} \times K(t, \varrho))$.

Beweis. 1) — Annahme: Sei $x \in \Phi_\chi^{-1}(F_{\chi;i_0} \times K(t, \varrho))$ mit $x \notin V_j$ für jedes $j \in J_\chi$. Da $V = (V_j)_{j \in J}$ die Menge $X(t, \varrho)$ überdeckt, gibt es ein $j_1 \in J$ mit $x \in V_{j_1}$ und $\chi \notin N(j_1)$. Nach (3.1.5) (V1) folgt $x \in V_{j_1} \subset U_{\tau(j_1)}$ und damit $U_{\tau(j_1)} \cap \Phi_\chi^{-1}(F_{\chi;i_0} \times K(t, \varrho)) \neq \emptyset$. Nach (3.1.4) (M3) folgt jetzt $\chi \in M(\tau(j_1))$ und damit folgt nach (3.1.5) (V3) $\chi \in M(\tau(j_1)) = N(j_1)$, was ein Widerspruch ist.

2) Annahme: Sei $V_j \cap \Phi_\chi^{-1}(F_{\chi;i_0} \times K(t, \varrho)) \neq \emptyset$ und $\chi \notin N(j)$. Nach (3.1.5) (V1) gilt $V_j \subset U_{\tau(j)}$ und damit $U_{\tau(j)} \cap \Phi_\chi^{-1}(F_{\chi;i_0} \times K(t, \varrho)) \neq \emptyset$. Nach (3.1.4) (M3) ist jetzt $\chi \in M(\tau(j))$ und nach (3.1.5) (V3) folgt $\chi \in M(\tau(j)) = N(j)$, was ein Widerspruch ist.

3) Nach (1) gilt: $(F_{\chi \cdot i_0} \times K(t, \varrho)) \cap \Phi_{\chi}(W_{\chi}) \subset \bigcup_{j \in J} \Phi_{\chi}(V_j)$. Nach (3.1.4) (M2) folgt: $\Phi_{\chi}(V_j) \subset G_{\chi; j} \times K(t, \varrho)$, und da J eine endliche Menge ist, gilt $\bigcup_{j \in J} \Phi_{\chi}(V_j) \subset \bigcup_{j \in J} G_{\chi; j} \times K(t, \varrho)$.

3.2. Topologische Vorbereitungen

LEMMA (3.2.1). — Voraussetzung: Sei X ein metrischer Raum, A eine Teilmenge von X versehen mit der Relativmetrik, und A' , A'' Teilmengen von A , so dass bezüglich der Relativtopologie von A die Beziehung gilt: A' offen und $A \supset A' \supset A''$.

Behauptung: Es gibt ein $r > 0$, so dass für jede Teilmenge G von X gilt:

$$d(G) < r, G \cap A'' \neq \emptyset \implies G \cap A' = G \cap A.$$

LEMMA (3.2.2). — Voraussetzungen; Seien X, X' metrische Räume, $\Phi: X \rightarrow X'$ eine gleichmässig stetige Abbildung, F eine Teilmenge von X und U eine offene Teilmenge von X' derart dass $\Phi(F) \subset U$ gilt.

Behauptung: Es gibt ein $\delta > 0$, so dass für jede Teilmenge G von X gilt:

$$d(G) < \delta, G \cap F \neq \emptyset \implies \Phi(G) \subset U.$$

LEMMA (3.2.3). — Voraussetzung: Seien X, X' metrische Räume, $\varrho_0 \in \mathbf{R}_+^m, \varrho_0 > 0$. Die Mengen $X \times K(\varrho_0), X' \times K(\varrho_0)$ seien mit der Produktmetrik versehen. Sei $\Phi: X \times K(\varrho_0) \rightarrow X' \times K(\varrho_0)$ eine gleichmässig stetige Abbildung über $K(\varrho_0)$ (d. h. $p_{r_2} = p_{r'_2} \circ \Phi$), F eine Teilmenge von $X \times \{0\}$ ($0 = \text{Zentrum von } K(\varrho)$), U eine offene Teilmenge von X' derart, dass $\Phi(F) \subset U \times K(\varrho_0)$ gilt.

Behauptung: Es gibt ein $\varrho_1 \in \mathbf{R}_+^m$ mit $0 < \varrho_1 < \varrho_0$ und ein $\delta > 0$, so dass für jedes $\varrho \in \mathbf{R}_+^m$ mit $0 < \varrho < \varrho_1$ und jede Teilmenge G von X gilt:

$$d(G) < \delta, G \cap p_{r_1}(F) \neq \emptyset \implies \Phi(G \times K(\varrho)) \subset U \times K(\varrho).$$

LEMMA (3.2.4) — Voraussetzung: Sei X ein topologischer Raum, $\varrho_0 \in \mathbf{R}_+^m$ mit $\varrho_0 > 0$, $\pi: X \rightarrow K(\varrho_0)$ eine eigentliche Abbildung und U eine Umgebung von $X(0) = \pi^{-1}(\{0\})$.

Behauptung: Es gibt ein $\varrho_1 \in \mathbf{R}_+^m$ mit $0 < \varrho_1 < \varrho_0$, so dass $X(\varrho_1) \subset U$ ist.

AUFFÜLLEMMA (3.2.5). — Voraussetzung: Sei G eine beschränkte Steinsche offene Menge in \mathbf{C}^n , $\varrho \in \mathbf{R}_+^m$, A eine beliebige Teilmenge von $G \times K(\varrho)$ und $(G_r)_{r \in R}$ eine endliche Familie offener Steinscher Mengen $G_r \subset G$ derart, dass die Familie $(G_r \times K(\varrho))_{r \in R}$ die abgeschlossene Hülle \bar{A} überdeckt.

Behauptung: Es gibt eine endliche Familie $(G'_s)_{s \in S}$ Steinscher offener Mengen $G'_s \subset G$ derart, dass gilt:

- 1) Wenn $s \in S$, dann $(G'_s \times K(\varrho)) \cap \bar{A} = \emptyset$.
- 2) Die Familie $((G_r)_{r \in R}, (G'_s)_{s \in S})$ überdeckt G .

Beweis. — Da $\bigcup_{r \in R} G_r \supset pr_1(\bar{A})$ ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass für jedes $\tilde{G} \subset G$ gilt:

$$d(\tilde{G}) < \delta, \tilde{G} \cap pr_1(\bar{A}) \neq \emptyset \implies \tilde{G} \subset \bigcup_{r \in R} G_r.$$

Sei $(G'_s)_{s \in S_0}$ eine endliche Steinsche Überdeckung von G mit $d(G'_s) < \delta$.

Setzen wir $S = \{s \in S_0 : G'_s \cap pr_1(\bar{A}) = \emptyset\}$, dann ist $(G'_s)_{s \in S}$ die gesuchte Familie.

3.3. Existenzsätze.

In dieser Nummer wird die Existenz von Messkarten, Messatlanten, Messüberdeckungen und Messüberdeckungsketten bewiesen. Der bequemeren Schreibweise wegen wird stets $t = 0$ angenommen und es werden die in (3.1.1) dafür vereinbarten Abkürzungen benutzt.

SATZ (3.3.1). — Zu jedem $x \in X(0)$ gibt es für hinreichend kleine $\varrho \in \mathbf{R}_+^m$ eine Messkarte $\mathfrak{M} = (W, \Phi, E, R)$ bezüglich $(0, \varrho)$ derart, dass $x \in W$ ist.

Beweis. — Es gibt eine offene Umgebung W_1 von x , eine analytische Menge A_1 in einem Polyzylinder E_1 des \mathbf{C}^n und eine biholomorphe Abbildung $\Phi_1 : W_1 \rightarrow A_1$. Sei $\varrho_0 \in \mathbf{R}_+^m$ mit $\varrho_0 > 0$, und sei $\Phi : W_1 \rightarrow E_1 \times K(\varrho_0)$ die Abbildung, die durch $x \mapsto (\Phi_1(x), \pi(x))$ definiert ist. Wie man leicht sieht wird W_1 durch Φ biholomorph auf eine analytische Menge $A \subset E_1 \times K(\varrho_0)$ abgebildet. Wählt man einen echt kleineren Polyzylinder $E \subset E_1$ und ein $\varrho < \varrho_0$, so gibt es über $E \times K(\varrho)$ wegen Theorem A zu jedem kokärenten \mathcal{H} -Modul \mathcal{S} eine Auflösung $R(\mathcal{S}) : \mathcal{O}^p \rightarrow \mathcal{O}^q \rightarrow \Phi_*(\mathcal{S}) \rightarrow 0$.

Setzen wir $\Phi^{-1}(E \times K(\varrho)) = W$, so haben wir mit (W, Φ, E, R) eine gesuchte Messkarte.

SATZ (3.3.2) — Für hinreichend kleine $\varrho \in \mathbf{R}_+^m$ gibt es einen Messatlas \mathfrak{A} bezüglich $(0, \varrho)$.

Beweis. — Da $X(0)$ kompakt ist, gibt es nach (3.3.1) eine endliche Familie $(W_i, \Phi_i, E_i, R_i)_{i \in I}$ von Messkarten über $(0, \varrho_0)$, so dass $\bigcup_{i \in I} W_i \supset X(0)$.

Nach (2.3.2) gibt es zu jedem $\iota \in I$ offene Teilmenge $W'_\iota, W''_\iota, W'''_\iota$ von X mit $W_\iota \supset W'_\iota \supset W''_\iota \supset W'''_\iota$, so dass $(W'''_\iota)_{\iota \in I}$ noch $X(0)$ überdeckt.

1) Wenn $(\iota, i) \in I \times I$, dann wenden wir auf $\Phi_\iota(W) \supset \Phi_\iota(W_{\iota, i}) \supset \supset \Phi_\iota(W'_{\iota, i})$. Lemma (3.2.1) an. Es gibt also ein $r > 0$, so dass für jedes $\tilde{G} \subset E_\iota \times K(\varrho_0)$ gilt:

$$d(\tilde{G}) < r, \quad \tilde{G} \cap \Phi_\iota(W'_{\iota, i}) \neq \emptyset \implies \tilde{G} \cap \Phi_\iota(W_i) = \tilde{G} \cap \Phi_\iota(W'_{\iota, i}).$$

2) Es ist $\Phi_\iota(W_i) \supset \Phi_\iota(W'_{\iota, i})$. Es gibt jetzt eine endliche Familie $(U_{\nu}^{\iota, i})_{\nu \in N_{\iota, i}}$ offener Teilmengen von $E_i \times K(\varrho_0)$ mit $d(U_{\nu}^{\iota, i}) < r$, die noch $\overline{\Phi_\iota(W'_{\iota, i})}$ überdeckt und es gibt holomorphe Abbildungen $\lambda_{\nu}^{\iota, i}$ von $U_{\nu}^{\iota, i}$ nach $\mathbb{C}^n \times K(\varrho_0)$ mit $pr_2(\lambda_{\nu}^{\iota, i}(x, t)) = t$, deren Einschränkungen auf $U_{\nu}^{\iota, i} \cap \Phi_\iota(W_i)$ mit $\Phi_\iota \circ \Phi_\iota^{-1}$ übereinstimmen (für $i = \iota$ soll $\lambda_{\nu}^{\iota, i} = id$ sein). Dies sieht man wegen (1) leicht ein. Überdies darf man noch annehmen, dass die $\lambda_{\nu}^{\iota, i}$ gleichmässig stetig sind (durch eine relativkompakte Schrumpfung stets erreichbar!).

3) Auf die Situation $\overline{E_i \times K(\varrho_0)}, \overline{\Phi_\iota(W'_{\iota, i})}, (U_{\nu}^{\iota, i})_{\nu \in N_{\iota, i}}$ wird das Lebesguesche Lemma (2.3.3) angewandt: Es gibt also ein $\lambda > 0$, so dass für jedes $\tilde{G} \subset E_i \times K(\varrho_0)$ gilt:

$$d(\tilde{G}) < \lambda, \quad \tilde{G} \cap \overline{\Phi_\iota(W'_{\iota, i})} \neq \emptyset \implies \text{es gibt ein } \nu \in N_{\iota, i} \text{ mit } \tilde{G} \subset U_{\nu}^{\iota, i}.$$

4) Es wird vorübergehend $F = U_{\nu}^{\iota, i} \cap \Phi_\iota(W_i) = U_{\nu}^{\iota, i} \cap \Phi_\iota(W'_{\iota, i})$ gesetzt; wegen $\Phi_\iota(W_i) \supset \Phi_\iota(W'_{\iota, i})$ gilt $\lambda_{\nu}^{\iota, i}(F) \subset E_i \times K(\varrho_0)$. Auf die Situation $\lambda_{\nu}^{\iota, i}, F, E_i \times K(\varrho_0)$ wird Lemma (3.2.2) angewandt: Es gibt also ein $\delta > 0$, so dass für jedes $\tilde{G} \subset U_{\nu}^{\iota, i}$ gilt:

$$d(\tilde{G}) < \delta, \quad \tilde{G} \cap U_{\nu}^{\iota, i} \cap \Phi_\iota(W_i) \neq \emptyset \implies \lambda_{\nu}^{\iota, i}(\tilde{G}) \subset E_i \times K(\varrho_0).$$

5) Auf die Situation $\Phi_\iota(W_i) \supset \Phi_\iota(W'_i) \supset \Phi_\iota(W''_i)$ wenden wir Lemma (3.2.1) an: Es gibt also ein $r' > 0$, so dass für jedes $\tilde{G} \subset E_i \times K(\varrho_0)$ die Beziehung gilt:

$$d(\tilde{G}) < r', \quad \tilde{G} \cap \Phi_\iota(W''_i) \neq \emptyset \implies \tilde{G} \cap \Phi_\iota(W'_i) = \tilde{G} \cap \Phi_\iota(W_i).$$

6) Es werde $\varepsilon = \inf(\lambda, \delta, r')$ gesetzt. Sei jetzt $(E_{\iota, \mu})_{\mu \in M_\iota}$ eine endliche Familie von offenen achsenparallelen Quadern des \mathbb{C}^n mit $d(E_{\iota, \mu}) < \varepsilon/\sqrt{2}$,

die noch E_i überdeckt. Der Polyradius $\varrho > 0$ wird so gewählt, dass $d(K(\varrho)) < \varepsilon/\sqrt{2}$ ist. Jetzt ist $d(E_{i,\mu} \times K(\varrho)) < \varepsilon$. Wir setzen

$$K = \{\chi = (i, \mu) : (E_{i,\mu} \times K(\varrho)) \cap \Phi_i(W_i''') \neq \emptyset\},$$

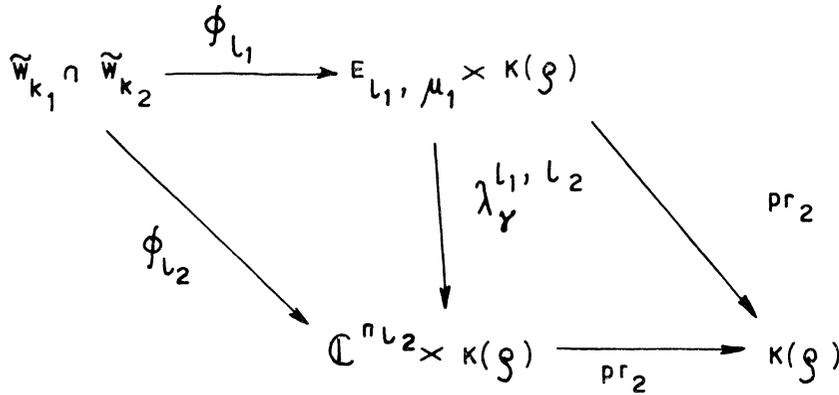
$$\tilde{W}_\chi = \Phi_i^{-1}(E_{i,\mu} \times K(\varrho)).$$

7) Eigenschaften der Familie $(\tilde{W}_\chi)_{\chi \in K}$:

- (i) $\bigcup_{\chi \in K} \tilde{W}_\chi \supset X(0)$
- (ii) Wenn $\chi = (i, \mu) \in K$, dann ist $\tilde{W}_\chi \subset W_i''$.
- (iii) Wenn $\chi_1, \chi_2 \in K$, dann gilt:

$$\tilde{W}_{\chi_1} \cap \tilde{W}_{\chi_2} \neq \emptyset \implies (E_{i_1, \mu_1} \times K(\varrho)) \cap \Phi_{i_1}(W''_{i_1, i_2}) \neq \emptyset$$

und es gibt eine holomorphe Abbildung λ^{i_1, i_2} von $E_{i_1, \mu_1} \times K(\varrho)$ nach $E_{i_2} \times K(\varrho)$, so dass das Diagramm



kommutiert. Denn nach (ii) gilt $\tilde{W}'_{i_1} \supset \tilde{W}_{\chi_1}$, $\tilde{W}'_{i_2} \supset \tilde{W}_{\chi_2}$, somit $\tilde{W}'_{i_1 i_2} \supset \tilde{W}_{\chi_1, \chi_2}$, und nach leichter Rechnung folgt

$$\Phi_{i_1}(W''_{i_1, i_2}) \supset \Phi_{i_1}(\tilde{W}_{\chi_1, \chi_2}) \neq \emptyset.$$

Nach (3) gibt es ein $\nu \in N_{i_1, i_2}$ mit $E_{i_1, \mu_2} \times K(\varrho) \subset U_\nu^{i_1, i_2}$; nach (2) gibt es eine Abbildung λ^{i_1, i_2} von $E_{i_1, \mu_1} \times K(\varrho)$ nach $\mathbb{C}^{n_{i_2}} \times K(\varrho)$, mit den verlangten kommutativen Eigenschaften. Wegen (4) ist $\lambda_\nu^{i_1, i_2}$ schon eine Abbildung von $E_{i_1, \mu_1} \times K(\varrho)$ nach $E_{i_2} \times K(\varrho)$. Jetzt wird

$$\chi = (i, \mu) \in K, \quad \Phi_i | \tilde{W}_\chi = \Phi_\chi, \quad E_{i,\mu} = E_\chi \quad \text{und} \quad R_i | E_\chi \times K(\varrho) = R_\chi$$

gesetzt. Offensichtlich ist $(\tilde{W}_\chi, \Phi_\chi, E_\chi, R_\chi)_{\chi \in K}$ ein gesuchter Messatlas über $(0, \varrho)$.

Im folgenden sei stets ein fester Messatlas $\mathfrak{A} = (W_\chi, \Phi_\chi, E_\chi, R_\chi)_{\chi \in K}$ bezüglich $(0, \varrho_0)$, der K als Indexmenge hat, vorgegeben.

SATZ (3.3.3). — Es gibt Messüberdeckungen bezüglich \mathfrak{A} .

Beweis. — Nach (2.3.2.) gibt es zu jedem $\chi \in K$ offene Teilmengen W'_χ, W''_χ von X mit $W_\chi \supset W'_\chi \supset W''_\chi$, so dass $(W''_\chi)_{\chi \in K}$ noch $X(0)$ überdeckt. Auf die Situation $\Phi_\chi(W_\chi) \supset \Phi_\chi(W'_\chi) \supset \Phi_\chi(W''_\chi)$ wenden wir das Lemma (3.2.1) an: Es gibt also ein $\delta_0 > 0$, so dass für jedes $\tilde{F} \subset E_\chi \times K(\varrho_0)$ gilt:

$$d(\tilde{F}) < \delta_0, \quad \tilde{F} \cap \Phi_\chi(W'') \neq \emptyset \implies \tilde{F} \cap \Phi_\chi(W_\chi) = \tilde{F} \cap \Phi_\chi(W'_\chi)$$

Wir wählen $\delta_0 > 0$ noch so, dass auch noch gilt:

$$d(\tilde{F}) < \delta_0, \quad \tilde{F} \cap \Phi_\chi(W'_\chi) \neq \emptyset \implies pr_1(\tilde{F}) \subset E_\chi$$

Sei $(F_{k,i})_{i \in I'_k}$ eine endliche Familie von offenen achsenparallelen Quadrern des \mathbf{C}^n mit $d(F_{k,i}) < \delta_0/\sqrt{2}$, die noch E_χ überdeckt; überdies sei $\varrho_1 > 0$ klein gewählt, dass $d(K(\varrho_1)) < \delta_0/\sqrt{2}$, dann ist stets $d(F_{k,i} \times K(\varrho_1)) < \delta_0$. Wir setzen

$$I_\chi = \{i \in I'_\chi : (F_{\chi,i} \times K(\varrho_1)) \cap \overline{\Phi_\chi(W'_\chi)} \neq \emptyset\}$$

$$(X(0))'_\chi = \Phi_\chi(X(0) \cap W_\chi) \cap \overline{\Phi_\chi(W'_\chi)}.$$

Offenbar überdeckt $(F_{\chi,i} \times K(\varrho_1))_{i \in I_\chi}$ die kompakte Menge $(X(0))'_\chi$. Auf die Situation $(X(0))'_\chi, (F_{\chi,i} \times K(\varrho_1))_{i \in I_\chi}$ wird das Lebesguesche Lemma (2.3.3) angewandt: Es gibt also ein $\lambda > 0$, so dass für jedes $\tilde{F} \subset E_\chi \times K(\varrho_0)$ gilt:

$$d(\tilde{F}) < \lambda, \quad \tilde{F} \cap (0)'_\chi \neq \emptyset \implies \text{es gibt ein } i \in I_\chi \text{ mit } \tilde{F} \subset E_{\chi,i} \times K(\varrho_1).$$

Wir dürfen ohne Einschränkung annehmen, das $\Phi_\chi: W_\chi \rightarrow E_\chi \times K(\varrho_0)$ gleichmässig stetig ist. Es gibt also ein $\delta_1 > 0$, so dass für jedes $U \subset W_\chi$ gilt:

$$d(U) < \delta_1 \implies d(\Phi_\chi(U)) < \lambda$$

Jetzt lässt sich $\delta_1 > 0$ noch so wählen, das für jedes $U \subset X(\varrho_0)$ gilt:

$$d(U) < \delta_1 \quad \text{und} \quad U \cap \overline{W'_\chi} \neq \emptyset \implies U \subset W'_\chi,$$

$$d(U) < \delta_1 \quad \text{und} \quad U \cap \overline{W'_\chi} \neq \emptyset \implies U \subset W_\chi.$$

Sei jetzt $(U_i)_{i \in I}$ eine endliche Steinsche Überdeckung von $X(0)$ mit $d(U_i) < \delta_1$, dann setzen wir

$$M'(i) = \{ \chi \in K : U_i \cap \overline{W'_\chi} \neq \emptyset \},$$

$$M(i) = \{ \chi \in K : U_i \cap \overline{W_\chi} \neq \emptyset \}.$$

Nach Lemma (3.2.4) gibt es ein $\varrho_2 > 0$, so dass $X(\varrho_2) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Setzen wir $U_i = X(\varrho_2) \cap U_i$ (das ist wieder eine Steinsche Menge), so wird durch die Daten $(U_i)_{i \in I}, M, M', (F_{\chi; i})$ (wobei $\Phi_\chi(U_i) \subset F_{\chi; i} \times K(\varrho_2)$ für $\chi \in M(i)$) eine Messüberdeckung bezüglich \mathfrak{A} definiert.

SATZ (3.3.4). — Wenn \mathfrak{U} eine Messüberdeckung bezüglich \mathfrak{A} ist, dann gibt es eine Messüberdeckung \mathfrak{V} bezüglich \mathfrak{A} , die eine zulässige Verfeinerung von \mathfrak{U} ist.

Beweis. — Sei $\mathfrak{U} = (U, M, M', F)$. Nach (2.3.2) gibt es zu jedem $i \in I$ eine offene Teilmenge U'_i von X mit $U_i \supset U'_i$, so dass $(U'_i)_{i \in I}$ noch $X(0)$ überdeckt. Für $\chi \in M(i)$ gilt somit $\Phi_\chi(U'_i) \subset F_{\chi; i} \times K(\varrho_0)$. Es gibt ein $r_0 > 0$, so dass für alle $\tilde{G} \subset \mathbb{C}^{n \times 1} \times K(\varrho_0)$ gilt:

$$d(\tilde{G}) < r_0, \tilde{G} \cap \Phi_\chi(U'_i) \neq \emptyset \implies \tilde{G} \subset F_{\chi; i} \times K(\varrho_0).$$

Nach (3.1.4) (M2) folgt $W_\chi \supset U_i \supset U'_i$. Auf die Situation $\Phi_\chi(W_\chi) \supset \Phi_\chi(U_i) \supset \Phi_\chi(U'_i)$ wenden wir Lemma (3.2.1) an: Es gibt also ein $r_1 > 0$ so dass für alle $\tilde{G} \subset F_{\chi; i} \times K(\varrho_0)$ gilt:

$$d(\tilde{G}) < r_1, \tilde{G} \cap \overline{\Phi_\chi(U'_i)} \neq \emptyset \implies$$

$$1) \quad \tilde{G} \cap \Phi_\chi(W_\chi) = \tilde{G} \cap \Phi_\chi(U_i)$$

$$2) \quad \tilde{G} \subset F_{\chi; i} \times K(\varrho_0)$$

Sei $\chi_1, \chi_2 \in K$. Es gibt ein $\delta_0 > 0$, so dass für jede Menge \tilde{G} , die im Definitionsbereich λ_{χ_1, χ_2} enthalten ist, gilt:

$$d(\tilde{G}) < \delta_0 \implies d(\lambda_{\chi_1, \chi_2}(\tilde{G})) < r_0$$

Sei $(G_{\chi; i, j})_{j \in J'_{\chi; i}}$ eine endliche Familie von offenen achsenparallelen Quadern des $\mathbb{C}^{n \times 1}$ mit $d(G_{\chi; i, j}) < \inf(r_1, \delta_0) / \sqrt{2}$, die noch $F_{\chi; i}$ überdeckt; überdies

sei $\varrho_1 > 0$ so klein gewählt, dass $d(K(\varrho_1)) < \inf(r_1, \delta_0) / \sqrt{2}$ ist, dann ist stets $d(G_{x; i, j} \times K(\varrho_1)) < \inf(r_1, \delta_0)$. Wir definieren

$$J_{x; i} = \{j \in J'_{x; i} : (G_{x; i, j} \times K(\varrho_1)) \cap \overline{\Phi_x(U'_i)} \neq \emptyset\}.$$

Die Familie $G_{x; i, j} \times K(\varrho_1)_{j \in J_{x; i}}$ überdeckt $\overline{\Phi_x(U'_i \cap X(0))}$ und es gilt $G_{x; i, j} \times K(\varrho_1) \subset \subset F_{x; i} \times K(\varrho_0)$ für $j \in J_{x; i}$. Wenden wir darauf das Lebesguesche Lemma (2.3.3) an: Es gibt also ein $\lambda > 0$, so dass für alle $\tilde{G} \subset F_{x; i} \times K(\varrho_0)$ gilt:

$$d(\tilde{G}) < \lambda \text{ und } \tilde{G} \cap \overline{\Phi_x(U'_i \cap X(0))} \neq \emptyset \implies \exists j \in J_{x; i} \text{ mit } \tilde{G} \subset \subset G_{x; i, j} \times K(\varrho_1).$$

Wir dürfen ohne Einschränkung annehmen, das $\Phi_x: W_x \rightarrow E_x \times K(\varrho_0)$ gleichmässig stetig ist. Es gibt also ein $\delta_1 > 0$, so dass für jedes $V \subset W_x$ gilt:

$$d(V) < \delta_1 \implies d(\Phi_x(V)) < \lambda.$$

Es gibt jetzt ein $r_2 > 0$, so dass für jedes $V \subset X$ gilt:

$$d(V) < r_2, V \cap U'_i \neq \emptyset \implies V \subset U_i.$$

Sei jetzt $(V'_j)_{j \in J}$ eine endliche Steinsche Überdeckung von $X(0)$ mit $d(V'_j) < \inf(r_2, \delta_1)$. Nach Lemma (3.2.4) gibt es ein $\varrho_2 > 0$, so dass $X(\varrho_2) \subset \bigcup_{j \in J} V'_j$.

Wir setzen $V_j = V'_j \cap X(\varrho_2)$, dann ist $V = (V_j)_{j \in J}$ eine Steinsche Überdeckung von $X(\varrho_2)$. Es gibt eine Abbildung $\tau: J \rightarrow I$ mit $V_i \subset U_{\tau(j)}$. Wir setzen $B = \{(\chi, j) \in K \times J; \chi \in M(\tau(j))\}$, $N(j) = M(\tau(j))$, $N'(j) = M'(\tau(j))$. Sei jetzt $j \in J$ und $\chi \in M(\tau(j)) = N(j)$, dann ist $V_j \subset U_{\tau(j)} \subset W_x$. Da jetzt $d(\Phi_x(V_j)) < \lambda$ und $\Phi_x(V_j) \cap \Phi_x(U'_{\tau(j)} \cap X(0)) \neq \emptyset$ ist, gibt es ein $j' \in J_{x; \tau(j)}$ mit $\Phi_x(V_j) \subset \subset G_{x; \tau(j), j'}$. Setzen wir $G_{x; \tau(j), j'} = \tilde{G}_{x; j}$ und $(\tilde{G}_{x; j})_{(\chi, j) \in B}$, dann ist, wie man leicht nachrechnet, (V, N, N', G) eine Messüberdeckung bezüglich \mathfrak{A} , die $\mathfrak{U} = (U, M, M', F)$ zulässig verfeinert.

SATZ (3.3.5). — Sei $(\mathcal{S}_a)_{a \in A}$ eine endliche Familie kohärenter \mathcal{Q} -Moduln, s eine natürliche Zahl. Wenn \mathfrak{U} eine Messüberdeckung bezüglich \mathfrak{A} ist, dann gibt es eine Messüberdeckung \mathfrak{V} bezüglich \mathfrak{A} derart, dass das Paar $(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})$ eine s -privilegierte Verfeinerung bezüglich $(\mathcal{S}_a)_{a \in A}$ ist.

Beweis. — Sei $\mathfrak{U} = (U, M, M', F)$ und sei I die Indexmenge der Familie U . Nach (2.3.2) gibt es zu jedem $i \in I$ eine offene Teilmenge U'_i von X mit $U_i \supset \supset U'_i$, so dass $(U'_i)_{i \in I}$ noch $X(0)$ überdeckt. Wenn $i = (i_0, \dots, i_s)$ ein $(s+1)$ -tupel von Indizes aus I ist, derart, dass $U_i \neq \emptyset$ und wenn

$\chi \in M(i)$ ist, dann ist $\Phi_\chi(U_i) \subset \subset F_{\chi,i} \times K(\varrho_0)$ und es gilt:

1) Es gibt ein $r_0 > 0$, so dass für alle $\tilde{G} \subset \mathbb{C}^{n_\chi} \times K(\varrho_0)$ gilt:

$$d(\tilde{G}) < r_0, \tilde{G} \cap \Phi_\chi(U_i) \neq \emptyset \implies \tilde{G} \subset \subset F_{\chi,i} \times K(\varrho_0).$$

Nach (3.1.4) (M2) folgt $W_\chi \supset U_i \supset \supset U'_i$. Auf die Situation

$$\Phi_\chi(W_\chi) \supset \Phi_\chi(U_i) \supset \supset \Phi_\chi(U'_i)$$

wenden wir Lemma (3.2.1) an:

2) Es gibt ein $r_1 > 0$, so dass für alle $\tilde{G} \subset F_{\chi,i} \times K(\varrho_0)$ gilt:

$$d(\tilde{G}) < r_1, \tilde{G} \cap \overline{\Phi_\chi(U'_i)} \neq \emptyset$$

$$(1) \quad \tilde{G} \cap \Phi_\chi(W_\chi) = \tilde{G} \cap \Phi_\chi(U_i),$$

$$(2) \quad \tilde{G} \supset \supset F_{\chi,i} \times K(\varrho_0)$$

3) Es gibt ein $\delta_0 > 0$, so dass für jede Teilmenge \tilde{G} aus dem Definitionsbereich von λ_{χ_1, χ_2} gilt: $d(\tilde{G}) < \delta_0 \implies d(\lambda_{\chi_1, \chi_2}(\tilde{G})) < r_0$. Wir setzen jetzt $I_\chi = \{i \in I : \chi \in M'(i)\}$, $F_\chi = (F_{\chi,i})_{i \in I}$. Nach (3.1.4) (M2) folgt $\bigcup_{i \in I_\chi} pr_1 \Phi_\chi(U_i) \subset \subset \bigcup_{i \in I_\chi} F_{\chi,i}$. Jetzt ist $F_\chi^{(s)}$ (vergleiche Anfang des Beweises zu (2.3.5)) eine endliche offene Überdeckung von $\bigcup_{i \in I_\chi} F_{\chi,i}$. Auf die Situation

$$\mathbb{C}^{n_\chi} \supset \bigcup_{i \in I_\chi} F_{\chi,i} \supset \supset \bigcup_{i \in I_\chi} pr_1 \Phi_\chi(U_i), F_\chi^{(s)}, h_{\chi,a} : \mathbb{O}^{p_{\chi,a}} \rightarrow \mathbb{O}^{q_{\chi,a}}$$

wird Lemma (2.3.4) angewandt: Es gibt eine endliche Familie $K_\chi = (K_{\chi,i})_{i \in A_\chi}$ von Polyzyklern, die noch $\bigcup_{i \in I} pr_1 \overline{\Phi_\chi(U_i)}$ überdeckt und eine eigentliche Verfeinerung von $F_\chi^{(s)}$ ist und es gibt eine Dreiecksmenge $\Delta(\delta_1^\chi, \dots, \delta_m^\chi)$ und eine Abbildung $M_\chi : \Delta(\delta_1^\chi, \dots, \delta_m^\chi) \rightarrow \mathbb{R}_+$ so dass die Aussage von (2.3.4) bezüglich der Familie $(h_{\chi,a})_{a \in A}$ gilt.

Die Polyzyklern $K_{\chi,i}$ werden noch so klein gewählt, dass $d(K_{\chi,i}) < \inf(r_1, \delta_0) / \sqrt{2}$. $\varrho_1 < \varrho_0$ werde so klein gewählt, dass $d(K(\varrho_1)) < \inf(r_1, \delta_0) / \sqrt{2}$ gilt. Somit gilt $d(K_{\chi,i} \times K(\varrho_1)) < \inf(r_1, \delta_0)$.

Wir machen die Polyradien von $K_{\chi,i}$ echt kleiner, erhalten Polyzyklern $K'_{\chi,i}$ mit $K'_{\chi,i} \subset \subset K_{\chi,i}$, so dass $K'_\chi = (K'_{\chi,i})_{i \in A_\chi}$ noch $\bigcup_{i \in I_\chi} pr_1 \Phi_\chi(U_i)$ überdeckt. Wir setzen jetzt $A_{\chi,i} = \{i \in A_\chi : K'_{\chi,i} \times K(\varrho_1) \cap \overline{\Phi_\chi(U'_i)} \neq \emptyset\}$. Jetzt ist $(K'_{\chi,i} \times K(\varrho_1))_{i \in A_{\chi,i}}$ eine offene Überdeckung von $\overline{\Phi_\chi(U'_i) \cap X(0)}$

und $K_{\chi; i} \times K(\varrho_1) \subset \subset F_{\chi; i} \times K(\varrho_0)$. Auf die Situation $F_{\chi; i} \times K(\varrho_0)$, $\overline{\Phi_\chi(U'_i \cap X(0))}$, $(K'_{\gamma; l} \times K(\varrho_1))_{l \in A_{\gamma; i}}$ wird das Lebesguesche Lemma (2.3.3) angewandt:

4) Es gibt ein $\lambda > 0$, so dass für alle $\tilde{G} \subset F_{\chi; i} \times K(\varrho_0)$ gilt:

$$d(\tilde{G}) < \lambda \text{ und } \tilde{G} \cap \overline{\Phi_\chi(U'_i \cap X(0))} \neq \emptyset \implies \exists l \in A_{\chi; i} \text{ mit } \tilde{G} \subset K'_{\chi; i} \times K(\varrho_1).$$

5) Es gibt ein $\delta' > 0$ (hängt von $K'_{\chi; l} \subset \subset K_{\chi; l}$ ab), so dass für alle $\tilde{G} \subset \mathbb{C}^n$ gilt:

$$d(\tilde{G}) < \delta' \text{ und } \tilde{G} \cap K'_{\chi; l} \neq \emptyset \implies \tilde{G} \subset K_{\chi; l}.$$

Sei $(G_{\chi; t})_{t \in T_\chi}$ eine offene Überdeckung von \mathbb{C}^{n_χ} , gebildet aus achsenparallelen Quedern, so dass $d(G_{\chi; t}) < \delta'$ und $d(G_{\chi; t} \times K(\varrho_1)) < \inf(r_1, \delta_0)$ ist.

Wenn $(\chi, t) \in K \times I$ ist, dann setzen wir $T_{\chi; t} = \{t \in T_\chi : (G_{\chi; t} \times K(\varrho_1)) \cap \overline{\Phi_\chi(U'_i)} \neq \emptyset\}$. Die Familie $(G_{\chi; t} \times K(\varrho_1))_{t \in T_{\chi; t}}$ überdeckt $\overline{\Phi_\chi(U'_i \cap X(0))}$ und es ist $G_{\chi; t} \times K(\varrho_1) \subset \subset F_{\chi; t} \times K(\varrho_0)$ für alle $t \in T_{\chi; t}$. Wir wenden das Lebesguesche Lemma (2.3.3) an:

6) Es gibt ein $\lambda' > 0$, so dass für jedes $\tilde{G} \subset F_{\chi; t} \times K(\varrho_0)$ gilt:

$$d(\tilde{G}) < \lambda' \text{ und } \tilde{G} \cap \overline{\Phi_\chi(U'_i \cap X(0))} \neq \emptyset \implies \exists t \in T_{\chi; t} \text{ mit } \tilde{G} \subset \subset G_{\chi; t} \times K(\varrho_1)$$

7) Es gibt ein $\delta_1 > 0$ so dass für jedes $V \subset W_\chi$ gilt:

$$d(V) < \delta_1 \implies d(\Phi_\chi(V)) < \inf(\lambda, \lambda', r_0).$$

8) Es gibt ein $r_2 > 0$, so dass für jedes $V \subset X$ gilt:

$$d(V) < r_2 \text{ und } V \cap U'_i \neq \emptyset \implies V \subset U'_i.$$

Sei $V = (V_\gamma)_{\gamma \in J}$ eine endliche Steinsche Überdeckung von $X(0)$ mit $d(V_\gamma) < \inf(r_2, \delta_1)$. Es gibt jetzt eine Abbildung $\tau: J \rightarrow I$ mit $V_\gamma \cap U'_{\tau(\gamma)} \neq \emptyset$. Sei $\chi \in M(\tau(\gamma))$. Nach (7) gilt $\Phi_\chi(V_\gamma) < \inf(\lambda, \lambda', r_0)$. Wegen $\emptyset \neq \Phi_\chi(V_\gamma \cap U'_{\tau(\gamma)}) \subset \Phi_\chi(V_\gamma) \cap \Phi_\chi(U'_{\tau(\gamma)})$ folgt aus (1), dass $\Phi_\chi(V_\gamma) \subset \subset F_{\chi; \tau(\gamma)} \times K(\varrho_0)$. Nach (6) gibt es ein $t(\gamma) \in T_{\chi; \tau(\gamma)}$ mit $\Phi_\chi(V_\gamma) \subset \subset G_{\chi; t(\gamma)} \times K(\varrho_1)$, also ist $pr_1(\Phi_\chi(V_\gamma)) \subset \subset G_{\chi; \tau(\gamma)}$. Es ist noch $G_{\gamma; \tau(\gamma)} \subset \subset F_{\chi; \tau(\gamma)}$.

Wir setzen $G_{\chi; \tau(\gamma)} = G'_{\chi; \gamma}$, $N(\gamma) = M(\tau(\gamma))$, $N'(\gamma) = M'(\tau(\gamma))$,

$$B = \{(\chi, \gamma) \in K \times J : \chi \in M(\tau(\gamma))\}, \quad G = (G'_{\chi; \gamma})_{(\chi, \gamma) \in B},$$

dann ist das Paar $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, wobei $\mathfrak{B} = (V, N, N', G)$ ist, eine zulässige s -privilegierte Verfeinerung.

Denn sei $j = (j_0, \dots, j_s)$ ein $(s+1)$ -tupel von Indizes aus J und $\chi \in N'(j)$, dann folgt wegen (8) $pr_1 \Phi_\chi(V_j) \subset G_{\chi;j}$, $d(G_{\chi;j}) < \delta'$. Jetzt gilt $\emptyset \neq \Phi_\gamma V_j \cap U'_{\tau(j)} \subset \Phi_\chi(V_j) \cap \Phi_\gamma(U'_{\tau(j)})$. Nach (1) folgt $\Phi_\chi(V_j) \subset F_{\chi;\tau(j)} \times K(\varrho_0)$ und nach (7) folgt $d(\Phi_\chi(V_j)) < \lambda$. Nach (4) gibt es ein $l \in \Lambda_{\chi;\tau(j)}$ mit $\Phi_\chi(V_j) \subset K'_{\chi;l} \times K(\varrho_1)$, also ist auch $pr_1(\Phi_\chi(V_j)) \subset K'_{\chi;l}$. Nach (5) folgt $pr_1 \Phi_\chi(V_j) \subset G_{\chi;j} \subset K_{\chi;l}$. Da auch $K_{\chi;l} \times K(\varrho_1) \subset F_{\chi;\tau(j)} \times K(\varrho_0)$ gilt, folgt somit $G_{\chi;j} \subset K_{\chi;l} \subset F_{\chi;\tau(j)}$ und $\Delta(\delta_1, \dots, \delta_m) = \bigcap_{\chi \in K} \Delta(\delta_1^\chi, \dots, \delta_m^\chi)$, ist eine verlangte Dreiecksmenge.

3.4. Grauertnormen.

(3.4.1) Seien $\mathfrak{U} = (U, M, M', F)$ und $\mathfrak{V} = (V, N, N', G)$ zwei Messüberdeckungen bezüglich \mathfrak{A} derart, dass \mathfrak{V} eine zulässige Verfeinerung von \mathfrak{U} ist. I beziehungsweise J sei die Indexmenge von U bzw. V und $\tau: J \rightarrow I$ sei die Verfeinerungsabbildung. Wenn $\varrho \in \mathbf{R}_+^m$ ist (stets wird ϱ so klein vorausgesetzt, wie es in den Definition (3.1.4) und (3.1.5) gefordert wird.), dann bezeichne $U(\varrho)$ die Familie $(U_i \cap X(\varrho))_{i \in I}$. Sei p eine natürliche Zahl, $i = (i_0, \dots, i_p)$ ein $(p+1)$ tupel von Indizes aus I . Mit $U_i(\varrho)$ wird die Menge $U_i \cap X(\varrho)$ bezeichnet. Mit $j = (j_0, \dots, j_p)$ sei ein $(p+1)$ -tupel von Indizes aus J bezeichnet derart, dass $\tau(j) = i$ ist.

DEFINITION (3.4.2). — Sei $\varrho \in \mathbf{R}_+^m$, $i \in I^{p+1}$, $\chi \in M(i)$ und $\xi \in \Gamma(U_i(\varrho), \mathcal{O})$. Es wird definiert:

(i) $\chi(\xi)$ bezeichne die Menge aller $\tilde{\xi} \in \Gamma(F_{\chi;i} \times K(\varrho), (\Phi_\chi)_*(\mathcal{O}))$ mit $\tilde{\xi}|_{\Phi_\chi(U_i(\varrho))} = (\Phi_\chi)_*(\xi)$

$$(ii) \quad \|\xi\|_{U_i \varrho} = \sup_{\chi \in M(i)} \inf_{\tilde{\xi} \in \chi(\xi)} \|\tilde{\xi}\|_{F_{\chi;i} \varrho}$$

Anmerkung. — Wenn die Menge $\chi(\xi) = \emptyset$ ist, dann ist $\|\xi\|_{U_i \varrho} = \infty$.

DEFINITION (3.4.3). — Wenn $\xi = (\xi_i) \in C^p(U(\varrho), \mathcal{O})$, dann wird $\|\xi\|_{\mathfrak{U} \varrho} = \sup_{i \in I^{p+1}} \|\xi_i\|_{U_i \varrho}$ gesetzt.

DEFINITION (3.4.4). — Sei $i \in I^{p+1}$, $\chi \in M(i)$ und $\eta \in C^q(U_i \cap V(\varrho), \mathcal{O})$. Jetzt wird definiert:

$$(i) \quad J_\chi = \{\gamma \in J : \chi \in N(\gamma)\}, \quad \Phi_\chi(V) = (\Phi_\chi(V_\gamma))_{\gamma \in J_\chi}.$$

(ii) $\chi(\eta)$ ist die Menge aller

$\tilde{\eta} \in C^q((F_{\chi; i} \cap G_{\gamma; j})_{\gamma \in J_{\chi}} \times K(\varrho), (\Phi_{\chi})_*(\mathcal{S}))$ mit

$$\tilde{\eta} | \Phi_{\chi}(U_i(\varrho)) \cap \Phi_{\chi}(V) = (\Phi_{\chi})_*(\eta).$$

Bemerkung : Wenn $\chi \in M'(i)$, dann überdeckt $\Phi_{\chi}(V)$ die Menge $\Phi_{\chi}(U_i(\varrho))$. (Lemma (3.1.8)).

$$(iii) \quad \|(\Phi_{\chi})_*(\eta)\|_{U_i \mathfrak{U}_{\chi} \varrho} = \inf_{\tilde{\eta} \in \chi(\eta)} \|\tilde{\eta}\|_{(F_{\chi; i} \cap G_{\gamma; j})_{\gamma \in J_{\chi}} \varrho}$$

$$(iv) \quad \|\eta\|_{U_i \mathfrak{U} \varrho} = \sup_{\chi \in M(i)} \|(\Phi_{\chi})_*(\eta)\|_{U_i \mathfrak{U}_{\chi} \varrho}.$$

(3.4.5) — Sei X ein topologischer Raum, $(U_i)_{i \in I}$ und $(V_j)_{j \in J}$ zwei offene Überdeckungen von X , \mathcal{S} eine Garbe von abelschen Gruppen, dann wird $C^{p,q}(U, V, \mathcal{S}) = \prod_{(i,j) \in I^{p+1} \times J^{q+1}} \Gamma(U_i \cap V_j, \mathcal{S})$ gesetzt. Oft schreiben wir nur $C^{p,q}(U, V)$, wenn klar ist in welcher Garbe die Werte liegen. Es gibt zwei Corandoperatoren

$$\partial : C^{p,q}(U, V) \rightarrow C^{p,q+1}(U, V)$$

$$\delta : C^{p,q}(U, V) \rightarrow C^{p+1,q}(U, V)$$

wobei ∂ bzw. δ der übliche Čech'sche Corandoperator bezüglich der Indizes aus J bzw. I ist. Es ist wohlbekannt, dass die Familie $(C^{p,q}(U, V), \partial, \delta)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ ein Doppelkomplex ist.

DEFINITION (3.4.6). — Wenn $\eta = (\eta_{i,j}) \in C^{p,q}(U(\varrho), V(\varrho))$ dann wird definiert :

$$(i) \quad \eta_i = (\eta_{i,j})_{j \in J^{q+1}}$$

$$(ii) \quad \|\eta\|_{\mathfrak{U} \varrho} = \sup_{i \in I^{p+1}} \|\eta_i\|_{U_i \mathfrak{U} \varrho}.$$

DEFINITION (3.4.7). Sei $i \in I^{p+1}$, $j \in J^{q+1}$, $\chi \in M(i) \cap N(j)$ und $\eta \in \Gamma(U_i(\varrho) \cap V_j(\varrho), \mathcal{S})$, dann wird definiert :

(i) $\chi(\eta)$ ist die Menge aller $\tilde{\eta} \in \Gamma((F_{\chi; i} \cap G_{\chi; j}) \times K(\varrho), \mathcal{S})$ mit $\tilde{\eta} | \Phi_{\chi}(U_i(\varrho) \cap V_j(\varrho)) = (\Phi_{\chi})_*(\eta)$.

$$(ii) \quad \|\eta\|_{U_i V_j \varrho} = \sup_{\chi \in M(i) \cap N(j)} \inf_{\tilde{\eta} \in \chi(\eta)} \|\tilde{\eta}\|_{(F_{\chi; i} \cap G_{\chi; j}) \varrho}.$$

SATZ (3.4.8). — (i) Für jedes $\eta \in C^q(U_i \cap V(\varrho), \mathcal{O})$ gilt :

$$\|\eta\|_{U_i \mathfrak{V} \varrho} = \sup_{j \in J^{q+1}} \|\eta_j\|_{U_i \nu_j \varrho}$$

(ii) Für jedes $\eta \in C^{p,q}(U(\varrho), V(\varrho), \mathcal{O})$ gilt :

$$\|\eta\|_{\mathfrak{U} \mathfrak{V} \varrho} = \sup_{i \in I^{p+1}} \sup_{j \in J^{q+1}} \|\eta_{i,j}\|_{U_i \nu_j \varrho}.$$

Beweis. — (i) folgt sofort aus den Definitionen (3.4.4) und (3.4.7) und (ii) folgt unmittelbar aus (i).

SATZ (3.4.9). — Wenn $\eta \in C^p(U(\varrho), \mathcal{O})$, dann $\|\eta\|_{\mathfrak{U} \varrho} \geq \|\eta\|_{\mathfrak{V} \varrho}$.

Beweis. — Die Behauptung folgt sofort aus den Definition (3.1.6) und (3.4.2).

3.5 Der Leraysche Satz von Grauert.

Wie in den vorhergehenden Nummern werden der Bequemlichkeit halber alle Sätze bezüglich $t = 0$ formuliert und bewiesen. Für die folgenden Betrachtungen sei \mathfrak{A} ein fest vorgegebener Messatlas bezüglich $(0, \varrho_0)$. Alle Messüberdeckungen dieser Nummer sind Messüberdeckungen bezüglich \mathfrak{A} . \mathcal{O} sei eine fest vorgegebene kohärente Garbe auf X .

(3.5.1) Sei $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{U}_\mu \supset \mathfrak{U}' \supset \mathfrak{V} \supset \mathfrak{V}_\nu \supset \mathfrak{V}'$ eine Kette von Messüberdeckungen :

$$\mathfrak{U} = (U, M, M', F), \quad \mathfrak{U}_\mu = (U^{(\mu)}, M, M', F^{(\mu)}), \quad \mathfrak{U}' = (U', M, M', F')$$

$$\mathfrak{V} = (V, N, N', G), \quad \mathfrak{V}_\nu = (V^{(\nu)}, N, N', G^{(\nu)}), \quad \mathfrak{V}' = (V', N, N', G')$$

Wir benutzen für die in (3.1.4) (ii) geforderten Abbildungen der Messüberdeckungen $\mathfrak{U}, \mathfrak{U}_\mu, \mathfrak{U}'$ (bzw. $\mathfrak{V}, \mathfrak{V}_\nu, \mathfrak{V}'$) stets die Buchstaben M und M' (bzw. N und N'). Wegen (3.1.5) (V3) entstehen dadurch keine Missverständnisse. Die Familien $U = (U_i), U^{(\mu)} = (U_i^{(\mu)}), U' = (U'_i), V = (V_j), V^{(\nu)} = (V_j^{(\nu)}), V' = (V'_j)$ haben der Reihe nach die Indexmenge, $I, I^{(\mu)}, I', J, J^{(\nu)}$ und J' . Die Verfeinerungsabbildungen werden stets mit τ bezeichnet. Es wird noch folgende Vereinbarung getroffen : Wenn i eine endliche Familie von Indizes aus I' oder $I^{(\mu)}$ ist, dann wird $\tau(i)$ wieder mit i bezeichnet.

SATZ (3.5.2): — Voraussetzung: Sei $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{U}' \supset \mathfrak{V} \supset \mathfrak{V}'$ eine Kette von Messüberdeckungen, p, q seien natürliche Zahlen; $i = (i'_0, \dots, i'_p)$ ein $(p+1)$ -tupel von Indizes aus I' .

Behauptung: Es gibt eine Dreiecksmenge $\Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)$ und eine Abbildung $M: \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m) \rightarrow \mathbf{R}_+$, so dass für jedes hinreichend kleine $\varrho \in \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)$ die Aussage gilt:

(i) Wenn $q = 0$, dann gilt für jedes $\xi \in Z^0(U_i(\varrho) \cap V, \mathcal{O})$ mit $\|\xi\|_{U_i \mathfrak{V} \varrho} < \infty$ die Ungleichung

$$\|\xi|_{U'_i(\varrho)}\|_{U'_i \varrho} \leq M(\varrho) \|\xi\|_{U_i \mathfrak{V} \varrho}$$

(ii) Wenn $q > 0$, dann gibt es zu jedem $\xi \in Z^q(U_i(\varrho) \cap V, \mathcal{O})$ mit $\|\xi\|_{U_i \mathfrak{V} \varrho} < \infty$ ein $\eta \in C^{q-1}(U'_i(\varrho) \cap V', \mathcal{O})$, derart, dass $\delta \eta = \xi|_{U'_i(\varrho) \cap V'}$ und $\|\eta\|_{U'_i \mathfrak{V}' \varrho} \leq M(\varrho) \|\xi\|_{U_i \mathfrak{V} \varrho}$ ist.

Zusatz: Wenn \mathcal{O} t_1 -torsionsrecht ist, dann kann M von ϱ_1 unabhängig gewählt werden.

Beweis. — Sei $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{U}_1 \supset \mathfrak{U}_2 \supset \mathfrak{U}' \supset \mathfrak{V} \supset \mathfrak{V}_1 \supset \mathfrak{V}_2 \supset \mathfrak{V}'$ die vorausgesetzte Kette von Messüberdeckungen. Wir setzen $U_i(\varrho) \neq \emptyset$ voraus, dann gibt es nach (3.1.4) (M1) ein $k \in M'(i)$. Lemma (3.1.8) auf die Situation $\mathfrak{U}_1 \supset \mathfrak{V}_1$, i, χ angewandt, ergibt: $(F_{\chi; i}^{(1)} \times K(\varrho)) \cap \Phi_{\chi}(W_k) \subset \bigcup_{\gamma \in J_{\chi}^{(1)}} (G_{\chi; \gamma}^{(1)} \times K(\varrho))$. Auf

die Situation $F_{\chi; i}^{(1)}, (F_{\chi; i}^{(1)} \times K(\varrho)) \cap \Phi_{\chi}(W_{\chi}), (G_{\chi; \gamma}^{(1)} \times K(\varrho))_{\gamma \in J_{\chi}^{(1)}}$ das Auffülllemma (3.2.5) angewandt, liefert eine Überdeckung $(\tilde{G}_{\chi; \gamma} \times K(\varrho))_{\gamma \in \tilde{J}_{\chi}}$ mit den in (3.2.5) genannten Eigenschaften. Auf die Situation $E_{\chi} \supset F_{\chi; i}^{(1)} \supset F_{\chi; i}^{(2)}, (\tilde{G}_{\chi; \gamma})_{\gamma \in \tilde{J}_{\chi}}, (\Phi_{\chi})_*(\mathcal{O})$ wird Theorem (2.4.1) angewandt. Seien $(V_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda}, \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m), M_q: \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m) \rightarrow \mathbf{R}_+$ die in (2.4.1) versprochenen Daten. Vorübergehend werden folgende Bezeichnungen eingeführt: Die Familie $(F_{\chi; i}^{(n)} \cap G_{\chi; \gamma}^{(n)})_{\gamma \in J(n)}$ bezüglich der Messüberdeckungen $\mathfrak{U}_n, \mathfrak{V}_n$ und bezüglich $i \in I_n^{p+1}$ wird mit $(H_{\chi; \gamma}^{(n)})$ bezeichnet. Analogerweise bezeichnet $(\tilde{H}_{\chi; \gamma}^{(n)})$ die Familie $(F_{\chi; i}^{(n)} \cap \tilde{G}_{\chi; \gamma})_{\gamma \in \tilde{J}_{\chi}}$. An die Messüberdeckung \mathfrak{V}_2 werde noch die Anforderung gestellt, dass die Familie $(H_{\chi; \gamma}^{(2)})$ eine Verfeinerung von $(V_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$ ist. Sei jetzt $\varrho \in \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)$ und $\xi \in Z^q(U_i(\varrho) \cap V, \mathcal{O})$ mit $\|\xi\|_{U_i \mathfrak{V} \varrho} < \infty$. Es ist $\|(\Phi_{\chi})_*(\xi)\|_{U_i \mathfrak{V} \chi \varrho} < \infty$ (3.4.4) und nach Definition von $\chi(\xi)$ (3.4.4) gibt es ein $\tilde{\xi} \in C^q((H_{\chi; \gamma}) \times K(\varrho), (\Phi_{\chi})_*(\mathcal{O}))$ mit $\tilde{\xi}|_{\Phi_{\chi} U_i(\varrho) \cap \Phi_{\chi}(V)} = (\Phi_{\chi})_*(\xi)$ und $\|\tilde{\xi}\|_{(H_{\chi; \gamma}) \varrho} \leq 2 \|(\Phi_{\chi})_*(\xi)\|_{U_i \mathfrak{V} \chi \varrho}$.

1. Verfeinerung (Beschränkung zum Cozyklus): Um wieder einen Cozyklus zu erhalten, gehen wir zu den feineren Messüberdeckungen $\mathfrak{A}_1 \supset \mathfrak{V}_1$ über.

Es wird $\tilde{\xi}_1 = \tilde{\xi} | (H_{\chi;\gamma}^{(1)}) \times K(\varrho)$ gesetzt und es ist $\|\tilde{\xi}_1\|_{(H_{\chi;\gamma}^{(1)})e} \leq \|\tilde{\xi}\|_{(H_{\chi;\gamma})e}$.

Wegen (3.1.5) (V 4) gilt: $\xi_1 \in Z^q((H_{\chi;\gamma}^{(1)}) \times K(\varrho), (\Phi_{\chi})_*(\mathcal{D}))$.

Bemerkung: Die Familie $(G_{\chi;\gamma}^{(1)} \times K(\varrho))_{\gamma \in J_{\chi}^{(1)}}$ überdeckt nicht notwendigerweise $F_{\chi;i}^{(1)} \times K(\varrho)$. Wegen dem Auffüllemma (3.2.5) lässt sich ξ_1 als Cozyklus aus $Z^q((H_{\chi;\gamma}^{(1)}) \times K(\varrho), (\Phi_{\chi})_*(\mathcal{D}))$ auffassen, und es ist

$$\|\xi_1\|_{(H_{\chi;\gamma}^{(1)})e} = \|\xi_1\|_{(\tilde{H}_{\chi;\gamma}^{(1)})e}.$$

2. Verfeinerung: Um Theorem (2.4.1) anwenden zu können, benutzen wir die Messüberdeckungskette $\mathfrak{A}_1 \supset \mathfrak{A}_2 \supset \mathfrak{V}_1 \supset \mathfrak{V}_2$.

Nach Theorem (2.4.1) folgt jetzt:

(i) Für $q = 0$ gilt: $\|\xi_1 | D_2 \times K(\varrho)\|_{D_2e} \leq M(\varrho) \|\xi_1\|_{(\tilde{H}_{\chi;\gamma}^{(1)})e}$ dabei wurde $\bigcup_{\gamma} H_{\chi;\gamma}^{(2)} = D_2$ gesetzt.

(ii) Für $q > 0$ gilt: Es gibt ein $\tilde{\eta} \in C^{q-1}((H_{\chi;\gamma}^{(2)}) \times K(\varrho), (\Phi_{\chi})_*(\mathcal{D}))$ mit $\delta \tilde{\eta} = \xi_1 | (H_{\chi;\gamma}^{(2)}) \times K(\varrho)$ und $\|\tilde{\eta}\|_{(H_{\chi;\gamma}^{(2)})e} \leq M(\varrho) \|\xi_1\|_{(H_{\chi;\gamma}^{(1)})e}$.

Lemma (3.1.8) auf die Situation $\mathfrak{V}_2 \subset \mathfrak{A}_2$, i, χ angewandt ergibt: Für alle $\gamma \in J$ mit $\chi \notin N(\gamma) \implies U_i^{(2)}(\varrho) \cap V_{\gamma}^{(2)} = \emptyset$

(i) Für $q = 0$ gilt deswegen: Der Schnitt $\xi_1 | D_2 \times K(\varrho)$ definiert einen Schnitt $\xi^* \in \Gamma(U_i^{(2)}(\varrho), \mathcal{D})$. Offensichtlich ist $\xi^* | U_i'(\varrho) = \xi | U_i'(\varrho)$. Damit haben wir die Abschätzung:

$$\|\xi_1 | D_2 \times K(\varrho)\|_{D_2e} \leq 2M(\varrho) \|\xi\|_{\sigma_i \mathfrak{V} e}.$$

(ii) Für $q > 0$ gilt deswegen: Die Cokette $\tilde{\eta}$ definiert eine Cokette $\eta^* \in C^{q-1}(U_i^{(2)}(\varrho) \cap V^{(2)}, \mathcal{D})$. Es wird jetzt $\eta = \eta^* | U_i'(\varrho) \cap V'$ gesetzt. Damit haben wir die Abschätzung:

$$\|\tilde{\eta}\|_{(H_{\chi;\gamma}^{(2)})e} \leq 2M(\varrho) \|\xi\|_{\sigma_i \mathfrak{V} e}.$$

3. Verfeinerung: Um das Corollar (1.1.10) anwenden zu können, benutzen wir die Messüberdeckungskette $\mathfrak{A}_2 \supset \mathfrak{A}' \supset \mathfrak{V}_2 \supset \mathfrak{V}'$.

Sei jetzt $\chi_1 \in M'(i)$. Nach (3.1.5) (V5) und (3.1.4) (M2) folgt:

(i) Für $q = 0$: $\lambda_{\chi, \chi_1}(D' \times K(\varrho)) \subset D_2 \times K(\varrho) \subset E_\chi \times K(\varrho_0)$. Dabei wurde $\bigcup_{\gamma} H'_{\chi; \gamma} = D'$ gesetzt.

Nach Corollar (1.1.10) gibt es ein $c > 0$ mit

$$\|(\Phi_{\chi_1})_*(\xi^* | U'(\varrho))\|_{U'_i \chi_1 \varrho} \leq c \|\xi_1 | D_2 \times K(\varrho)\|_{D_2 \varrho}$$

und insgesamt hat man also

$$\|\xi^* | U'_i(\varrho)\|_{U'_i \varrho} \leq 2cM(\varrho) \|\xi\|_{U_i \mathfrak{V} \varrho}.$$

(ii) Für $q > 0$: Sei j ein q -tupel von Indizes aus J' . Die Menge $F_{\chi; i}^{(n)} \cap G_{\chi; j}^{(n)}$ wird mit $H'_{\chi; j}$ bezeichnet. Damit gilt:

$$\lambda_{\chi, \chi_1}(H'_{\chi; j} \times K(\varrho)) \subset H_{\chi; j}^{(2)} \times K(\varrho) \subset E_\chi \times K(\varrho_0).$$

Nach Corollar (1.1.10) gibt es ein $c > 0$ mit $\|(\Phi_{\chi_1})_*(\eta)\|_{U'_i \mathfrak{V}'_{\chi_1} \varrho} \leq c \|\eta\|_{(H_{\chi; j}^{(2)}) \varrho}$ und insgesamt hat man also $\|\eta\|_{U'_i \mathfrak{V} \varrho} \leq 2cM(\varrho) \|\xi\|_{U_i \mathfrak{V} \varrho}$.

THEOREM (3.5.3) (Leray-Grauert). — Voraussetzung:

$$\mathfrak{W}' \subset \mathfrak{V} \subset \mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U} \text{ Messüberdeckungskette}$$

Behauptung: zu jeder natürlichen Zahl p gibt es eine Dreiecksmenge $\Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)$ und zwei Abbildungen $M: \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m) \rightarrow \mathbf{R}_+$, $N: \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m) \rightarrow \mathbf{R}^+$, so dass für jedes hinreichend kleine $\varrho \in \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)$ die Aussage gilt:

Für jedes $\xi \in Z^p(V(\varrho), \mathcal{O})$ mit $\|\xi\|_{\mathfrak{V} \varrho} < \infty$ gibt es ein $\xi' \in Z^p(U'(\varrho), \mathcal{O})$ und ein $\eta \in C^{p-1}(V'(\varrho), \mathcal{O})$ mit $\xi' = \xi + \delta\eta$ auf V' , $\|\xi'\|_{\mathfrak{U}' \varrho} \leq M(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{V} \varrho}$ und $\|\eta\|_{\mathfrak{W}' \varrho} \leq N(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{V} \varrho}$.

Zusatz: Wenn \mathcal{O} t_1 -torsionsrecht ist, dann kann M von ϱ_1 unabhängig gewählt werden.

Beweis. — Aus Satz (3.5.2) erhält man sofort

LEMMA (*). — Voraussetzung:

$$\mathfrak{W}' \subset \mathfrak{V} \subset \mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U} \text{ Messüberdeckungskette}$$

Behauptung: Zu jedem Paar natürlicher Zahlen (p, q) gibt es eine Dreiecksmenge $\Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)$ und eine von ϱ_1 unabhängige Abbildung $M: \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m) \rightarrow \mathbf{R}_+$ so dass für jedes hinreichend kleine $\varrho \in \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)$ die Aussagen gelten:

(i) Für $q = 0$ gilt: Jedes $\xi \in C^{p,0}(U(\varrho), V(\varrho))$ mit $\partial\xi = 0$, $\|\xi\|_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}\varrho} < \infty$ lässt sich das Element aus $C^p(U'(\varrho), \mathcal{D})$ auffassen und es gilt

$$\|\xi\|_{\mathfrak{U}'\varrho} \leq M(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}\varrho}$$

(ii) Für $q > 0$ gilt: Zu jedem $\xi \in C^{p,q}(U(\varrho), V(\varrho))$ mit $\partial\xi = 0$ und $\|\xi\|_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}\varrho} < \infty$ gibt es ein $\eta \in C^{p,q-1}(U'(\varrho), V'(\varrho))$ so, dass $\partial\eta = \xi$ in $C^{p,q}(U'(\varrho), V'(\varrho))$ und $\|\eta\|_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}'\varrho} \leq M(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}\varrho}$ gilt.

Beweis zu Lemma (*). — Nach Satz (3.5.2) gibt es zu jedem $i \in I^{p+1}$ eine Dreiecksmenge Δ_i und eine von ϱ_1 unabhängige Abbildung $M_i: \Delta_i \rightarrow \mathbf{R}_+$, so dass die Aussage von (3.5.2) gilt. Es wird $\Delta = \bigcap_{i \in I^{p+1}} \Delta_i$ und $M = \sup_{i \in I^{p+1}} M_i$ gesetzt.

Sei jetzt $\varrho \in \Delta$ (ϱ hinreichend klein) und $\xi = (\xi_{i,j}) \in C^{p,q}(U(\varrho), V(\varrho))$ mit $\partial\xi = 0$ und $\|\xi\|_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}\varrho} < \infty$. Setzen wir $\xi_i = (\xi_{i,j})_{j \in J^{q+1}}$, dann ist $\xi_i \in Z^q(U_i(\varrho) \cap V, \mathcal{D})$ und $\|\xi_i\|_{U_i\mathfrak{V}\varrho} \leq \|\xi\|_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}\varrho}$. Nach Sat (3.5.2) folgt:

(i) Für $q = 0$ gilt $\|\xi_i\|_{U'_i(\varrho)} \leq M(\varrho) \|\xi_i\|_{U_i\mathfrak{V}\varrho}$

(ii) Für $q > 0$ gilt: Es gibt ein $\eta_i \in C^{q-1}(U'_i(\varrho) \cap V', \mathcal{D})$ mit $\partial\eta_i = \xi_i|_{U'_i(\varrho) \cap V'}$ und $\|\eta_i\|_{U'_i\mathfrak{V}'\varrho} \leq M(\varrho) \|\xi_i\|_{U_i\mathfrak{V}\varrho}$.

Setzen wir noch $\eta = (\eta_i)_{i \in I^{p+1}}$, so folgt aus (i) und (ii) sofort das Lemma (*).

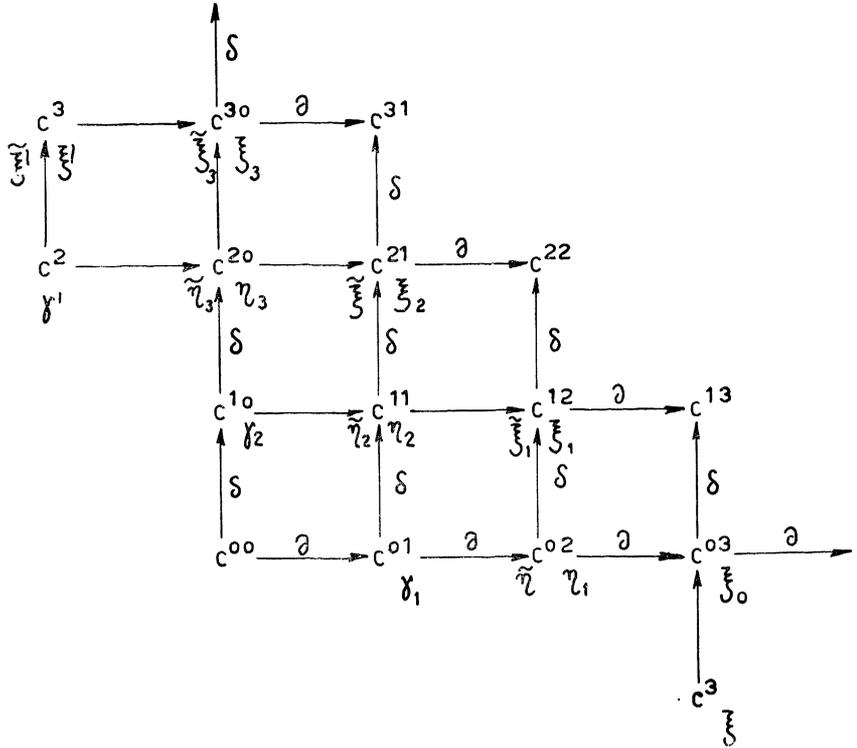
Nun zum Beweis von (3.5.3). Es sei

$$\mathfrak{U}' \subset \mathfrak{V}_p \subset \mathfrak{V}_{p-1} \subset \dots \subset \mathfrak{V}_1 \subset \mathfrak{V}_0 \subset \mathfrak{V} \subset$$

$$\subset \mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}_p \subset \mathfrak{U}_{p-1} \subset \dots \subset \mathfrak{U}_1 \subset \mathfrak{U}$$

die vorausgesetzte Messüberdeckungskette. Lemma (*) wird jetzt endlich oft mal angewandt. Für diese endlich vielen Anwendungen gibt es simultan eine Dreiecksmenge Δ und eine Abbildung $P: \Delta \rightarrow \mathbf{R}_+$, wie sie in Lemma (*) behauptet sind.

Es ist zweckmässig, den Gang des Beweises am folgende Diagramm für den Fall $p = 3$ zu verfolgen:



Sei $\varrho \in \Delta$, und sei $\xi = (\xi_{j_0 \dots j_p}) \in Z^p(V(\varrho), \mathcal{D})$ mit $\|\xi\|_{\mathfrak{V}\varrho} < \infty$. Es wird jetzt

$$\xi_0 \in C^{0,p}(U(\varrho), V(\varrho)),$$

$$\xi_\nu \in C^{\nu, p-\nu}(U_\nu(\varrho), V_\nu(\varrho)), \quad 1 \leq \nu \leq p$$

$$\eta_\nu \in C^{\nu-1, p-\nu}(U_\nu(\varrho), V_\nu(\varrho)), \quad 1 \leq \nu \leq p$$

$$M_\nu : \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m) \rightarrow \mathbf{R}_+, \quad 0 \leq \nu \leq p$$

$$M'_\nu : \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m) \rightarrow \mathbf{R}_+, \quad 1 \leq \nu \leq p$$

induktiv definiert, derart $\partial \eta_\nu = \xi_{\nu-1}$, $\|\xi_\nu\|_{\mathfrak{U}_\nu, \mathfrak{V}_\nu, \varrho} \leq M_\nu(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{V}\varrho}$ und $\|\eta_\nu\|_{\mathfrak{U}_\nu, \mathfrak{V}_\nu, \varrho} \leq M'_\nu(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{V}\varrho}$ gilt.

Induktionsanfang: Es wird $\xi_0 = (\xi_{i_0 j_0 \dots j_p})$ mit $\xi_{i_0 j_0 \dots j_p} = \xi_{i_0 j_0 \dots j_p} | U_{i_0} \cap \cap V_{j_0 \dots j_p}$ gesetzt. Jetzt ist $\|\xi_0\|_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}\varrho} \leq \|\xi\|_{\mathfrak{V}\varrho}$, somit kann $M_0 = 1$ gesetzt werden. Offensichtlich gilt $\partial \xi_0 = 0$. Nach Lemma (*), angewandt auf $\mathfrak{V}_1 \subset \subset \mathfrak{V} \subset \mathfrak{U}_1 \subset \subset \mathfrak{U}$, gibt es ein $\eta_1 \in C^{0, p-1}(U_1(\varrho), V_1(\varrho))$ mit

$\partial\eta_1 = \xi_0$ und $\|\eta_1\|_{\mathfrak{U}_1 \mathfrak{V}_1 \varrho} \leq P_1(\varrho) \|\xi_0\|_{\mathfrak{U} \mathfrak{V} \varrho}$. Somit gilt $\|\eta_1\|_{\mathfrak{U}_1 \mathfrak{V}_1 \varrho} \leq P(\varrho) M_0(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{U} \mathfrak{V} \varrho}$ und es wird $M'_1(\varrho) = P(\varrho) M_0(\varrho)$ gesetzt.

Induktionsschritt: Für $\nu > 1$ sei bereits $\eta_{\nu-1}, \xi_{\nu-2}, M_{\nu-2}, M'_{\nu-1}$ definiert. Dann wird $\xi_{\nu-1} = \partial\eta_{\nu-1}$ gesetzt. Offensichtlich gilt $\|\xi_{\nu-1}\|_{\mathfrak{U}_{\nu-1} \mathfrak{V}_{\nu-1} \varrho} \leq (\nu-1) \|\eta_{\nu-1}\|_{\mathfrak{U}_{\nu-1} \mathfrak{V}_{\nu-1} \varrho}$ und $\partial\xi_{\nu-1} = 0$. Damit gilt $\|\xi_{\nu-1}\|_{\mathfrak{U}_{\nu-1} \mathfrak{V}_{\nu-1} \varrho} \leq (\nu-1) M'_{\nu-1}(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{U} \mathfrak{V} \varrho}$ und es wird $M_{\nu-1}(\varrho) = (\nu-1) M'_{\nu-1}(\varrho)$ gesetzt. Nach Lemma (*), angewandt auf $\mathfrak{V}_\nu \subset \mathfrak{V}_{\nu-1} \subset \mathfrak{U}_\nu \subset \mathfrak{U}_{\nu-1}$, gibt es ein $\eta_\nu \in C^{\nu-1, p-\nu}(U_\nu(\varrho), V_\nu(\varrho))$ mit $\partial\eta_\nu = \xi_{\nu-1}$ und

$$\|\eta_\nu\|_{\mathfrak{U}_\nu \mathfrak{V}_\nu \varrho} \leq P(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{U}_{\nu-1} \mathfrak{V}_{\nu-1} \varrho}.$$

Somit gilt $\|\eta_\nu\|_{\mathfrak{U}_\nu \mathfrak{V}_\nu \varrho} \leq P(\varrho) M_{\nu-1}(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{U} \mathfrak{V} \varrho}$ und es wird $M'_\nu(\varrho) = P(\varrho) M_{\nu-1}(\varrho)$ gesetzt. Für $\nu = p$ gilt offensichtlich $\partial\xi_p = 0$ und $\delta\xi_p = 0$. Nach Lemma (*), angewandt auf $\mathfrak{V}' \subset \mathfrak{V}_p \subset \mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}_p$, folgt: ξ_p lässt sich als Cozyklus ξ' aus $Z^p(U'(\varrho), \mathcal{D})$ auffassen und es gilt die Ungleichung

$$\|\xi'\|_{\mathfrak{U}' \varrho} \leq P(\varrho) \|\xi_p\|_{\mathfrak{U}_p \mathfrak{V}_p \varrho}.$$

Somit gilt $\|\xi'\|_{\mathfrak{U}' \varrho} \leq P(\varrho) M_p(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{U} \mathfrak{V} \varrho}$ und es wird $M(\varrho) = P(\varrho) M_p(\varrho)$ gesetzt.

Es werden folgende Zahlen induktiv definiert: $\sigma_1 = +1$ und $\sigma_\nu = \sigma_{\nu-1}(-1)^{\nu-1}$ für $2 \leq \nu \leq p$. Jetzt wird

$$\tilde{\eta}_\nu = \sigma_\nu (\xi_{i_0 \dots i_{\nu-1} j_0 \dots j_{p-\nu}}) \text{ aus } C^{\nu-1, p-\nu}(V(\varrho), V(\varrho)) \quad 1 \leq \nu \leq p$$

gesetzt. Damit gilt $\partial\tilde{\eta}_1 = \xi_0$ und $\partial\tilde{\eta}_\nu = \delta\tilde{\eta}_{\nu-1}$, $2 \leq \nu \leq p$. Denn:

$$\begin{aligned} (\partial\tilde{\eta}_1)_{i_0 j_0 \dots j_p} &= \sum_{\chi=0}^p (-1)^\chi \xi_{i_0 j_0 \dots \hat{j}_\chi \dots j_p} \\ &= \xi_{i_0 j_0 \dots j_p} - \left(\xi_{i_0 j_0 \dots j_p} + \sum_{\chi=0}^p (-1)^{\chi+1} \xi_{i_0 j_0 \dots \hat{j}_\chi \dots j_p} \right) \\ &= \xi_{j_0 \dots j_p} | V_{i_0} \cap V_{j_0 \dots j_p} \\ (\delta\tilde{\eta}_{\nu-1} - \partial\tilde{\eta}_\nu)_{i_0 \dots i_{\nu-1} j_0 \dots j_{p-\nu+1}} &= \\ &= \sigma_{\nu-1} \sum_{\chi=0}^{\nu-1} (-1)^\chi \xi_{i_0 \dots \hat{i}_\chi \dots i_{\nu-1} j_0 \dots j_{p-\nu+1}} \\ &\quad - \sigma_\nu \sum_{\nu=0}^{p-\nu+1} (-1)^{\chi+\nu} \xi_{i_0 \dots i_{\nu-1} j_0 \dots \hat{j}_\chi \dots j_{p-\nu+1}} \\ &= \sigma_{\nu-1} \left(\sum_{\chi=0}^{\nu-1} (-1)^\chi \xi_{i_0 \dots \hat{i}_\chi \dots i_{\nu-1} \dots j_{p-\nu+1}} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\chi=0}^{p-\nu+1} (-1)^{\chi+\nu} \xi_{i_0 \dots i_{\nu-1} j_0 \dots \hat{j}_\chi \dots j_{p-\nu+1}} \right) = 0. \end{aligned}$$

Jetzt wird $\delta \tilde{\eta}_\nu = \tilde{\xi}$, $1 \leq \nu \leq p$ gesetzt. Wegen

$$\begin{aligned} (\delta \tilde{\eta}_p)_{i_0 \dots i_p j_0} &= \sigma_p \sum_{\chi=0}^p (-1)^\chi \xi_{i_0 \dots i_\chi \dots i_p j_0} \\ &= \sigma_p \left(\sum_{\chi=0}^p (-1)^\chi \xi_{i_0 \dots i_\chi \dots i_p j_0} + (-1)^p \xi_{i_0 \dots i_p j_0} \right) + \\ &+ \sigma_p (-1)^{p+1} \xi_{i_0 \dots i_p j_0} \\ &= \sigma_p (-1)^{p+1} \xi_{i_0 \dots i_p} | V_{j_0} \cap V_{i_0 \dots i_p} \end{aligned}$$

folgt $\tilde{\xi}_p = \sigma_p (-1)^{p+1} \xi_0$ in $C^{p,0}(V(\varrho), V(\varrho))$, $\tilde{\xi}_p$ lässt sich als Cozyklus $\tilde{\xi}'$ in $C^p(V(\varrho), \mathcal{O})$ auffassen, und damit hat man $\tilde{\xi}' = \sigma_p (-1)^{p+1} \xi$ in $C^p(V(\varrho), \mathcal{O})$. Jetzt werden die $\tilde{\eta}_\nu$ so beschränkt, dass $\tilde{\eta}_1 \in C^{0,p-1}(V(\varrho), V_1(\varrho))$ und $\tilde{\eta}_\nu \in C^{\nu-1,p-\nu}(V_{\nu-2}(\varrho), V_\nu(\varrho))$, $2 \leq \nu \leq p$ ist. Jetzt gilt offensichtlich $\|\tilde{\eta}_1\|_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1 \varrho} \leq \|\xi\|_{\mathfrak{B} \varrho}$ und $\|\tilde{\eta}_\nu\|_{\mathfrak{B}_{\nu-2} \mathfrak{B}_\nu \varrho} \leq \|\xi\|_{\mathfrak{B} \varrho}$, $2 \leq \nu \leq p$. Es wird jetzt

$$\gamma_\nu \in C^{\nu-1,p-\nu-1}(V_{\nu-1}(\varrho), V_{\nu+1}(\varrho)), \quad 1 \leq \nu \leq p-1$$

$$N_\nu : \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m) \rightarrow \mathbf{R}_+, \quad 1 \leq \nu \leq p-1$$

$$N'_\nu : \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m) \rightarrow \mathbf{R}_+, \quad 1 \leq \nu \leq p$$

induktiv definiert, derart dass

$$\delta \gamma_1 = \tilde{\eta}_1 = \eta_1,$$

$$\delta \gamma_\nu = \tilde{\eta}_\nu - \eta_\nu - \delta \gamma_{\nu-1} \quad \text{für } 2 \leq \nu \leq p-1,$$

$$\|\gamma_\nu\|_{\mathfrak{B}_{\nu-1} \mathfrak{B}_{\nu+1} \varrho} \leq N_\nu(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{B} \varrho},$$

$$\|\tilde{\eta}_1 - \eta_1\|_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1 \varrho} \leq N'_1(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{B} \varrho},$$

$$\|\tilde{\eta}_\nu - \eta_\nu - \delta \gamma_{\nu-1}\|_{\mathfrak{B}_{\nu-2} \mathfrak{B}_\nu \varrho} \leq N'_\nu(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{B} \varrho} \quad \text{für } 2 \leq \nu \leq p-1.$$

Induktionsanfang: Es gilt jetzt $\partial(\tilde{\eta}_1 - \eta_1) = 0$, $\|\eta_1 - \eta_1\|_{\mathfrak{V}\mathfrak{V}_1\mathfrak{e}} \leq (1 + M'_1(\varrho)) \|\xi\|_{\mathfrak{V}\mathfrak{e}}$ und es wird $N'_1(\varrho) = 1 + M'_1(\varrho)$ gesetzt. Nach Lemma (*), angewandt auf $\mathfrak{V}_2 \subset \mathfrak{V}_1 \subset \mathfrak{V}_0 \subset \mathfrak{V}$, gibt es ein $\gamma_1 \in C^{0,p-2}(V_0(\varrho), V_2(\varrho))$ mit $\partial\gamma_1 = \tilde{\eta}_1 - \eta_1$ und $\|\gamma_1\|_{\mathfrak{V}_0\mathfrak{V}_2\mathfrak{e}} \leq P(\varrho) \|\tilde{\eta}_1 - \eta_1\|_{\mathfrak{V}\mathfrak{V}_1\mathfrak{e}}$. Somit gilt

$$\|\gamma_1\|_{\mathfrak{V}_0\mathfrak{V}_2\mathfrak{e}} \leq P(\varrho) N'_1(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{V}\mathfrak{e}}$$

und es wird $N_1(\varrho) = P(\varrho) N'_1(\varrho)$ gesetzt.

Induktionsschritt: Für $\nu \geq 2$ sei bereits $\gamma_{\nu-1}, N_{\nu-1}, N'_{\nu-1}$ definiert. Jetzt gilt $\partial(\tilde{\eta}_\nu - \eta_\nu - \delta\gamma_{\nu-1}) = 0$,

$$\|\tilde{\eta}_\nu - \eta_\nu - \delta\gamma_{\nu-1}\|_{\mathfrak{V}_{\nu-2}\mathfrak{V}_\nu\mathfrak{e}} \leq (1 + M'_\nu(\varrho) + (\nu - 1)N_{\nu-1}(\varrho)) \|\xi\|_{\mathfrak{V}\mathfrak{e}}.$$

Es wird $N'_\nu(\varrho) = 1 + M'_\nu(\varrho) + (\nu - 1)N_{\nu-1}(\varrho)$ gesetzt.

Nach Lemma (*), angewandt auf $\mathfrak{V}_{\nu+1} \subset \mathfrak{V}_\nu \subset \mathfrak{V}_{\nu-1} \subset \mathfrak{V}_{\nu-2}$, gibt es ein $\gamma_\nu \in C^{\nu-1,p-\nu-1}(V_{\nu-1}(\varrho), V_{\nu+1}(\varrho))$ mit $\delta\gamma_\nu = \tilde{\eta}_\nu - \eta_\nu - \delta\gamma_{\nu-1}$ und

$$\|\gamma_\nu\|_{\mathfrak{V}_{\nu-1}\mathfrak{V}_{\nu+1}\mathfrak{e}} \leq P(\varrho) \|\tilde{\eta}_\nu - \eta_\nu - \delta\gamma_{\nu-1}\|_{\mathfrak{V}_{\nu-2}\mathfrak{V}_\nu\mathfrak{e}}.$$

Somit gilt $\|\gamma_\nu\|_{\mathfrak{V}_{\nu-1}\mathfrak{V}_{\nu+1}\mathfrak{e}} \leq P(\varrho) N'_\nu(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{V}\mathfrak{e}}$ und es wird $N_\nu(\varrho) = P(\varrho) N'_\nu(\varrho)$ gesetzt.

Für $\nu = p$ hat man insbesondere $\partial(\tilde{\eta}_p - \eta_p - \delta\gamma_{p-1}) = 0$ und

$$\|\tilde{\eta}_p - \eta_p - \delta\gamma_{p-1}\|_{\mathfrak{V}_{p-2}\mathfrak{V}_p\mathfrak{e}} \leq N'_p(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{V}\mathfrak{e}}.$$

Nach Lemma (*), angewandt auf $\mathfrak{V}' \subset \mathfrak{V}_p \subset \mathfrak{V}_{p-1} \subset \mathfrak{V}_{p-2}$, folgt: $\tilde{\eta}_p - \eta_p - \delta\gamma_{p-1}$ lässt sich als Cokette γ' in $C^{p-1}(V'(\varrho), \mathcal{S})$ auffassen und es gilt:

$$\|\gamma'\|_{\mathfrak{V}'\mathfrak{e}} \leq P(\varrho) \|\tilde{\eta}_p - \eta_p - \delta\gamma_{p-1}\|_{\mathfrak{V}_{p-2}\mathfrak{V}_p\mathfrak{e}}.$$

Somit gilt die Ungleichung $\|\gamma'\|_{\mathfrak{V}'\mathfrak{e}} \leq P(\varrho) N'_p(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{V}\mathfrak{e}}$. Es wird $N(\varrho) = P(\varrho) N'_p(\varrho)$ gesetzt.

Jetzt gilt $\delta(\tilde{\eta}_p - \eta_p - \delta\gamma_{p-1}) = \tilde{\xi}_p - \xi_p$, also gilt auch $\delta\gamma' = \tilde{\xi}' - \xi'$ und somit $\delta\gamma' = \sigma_p(-1)^{p+1}\xi - \xi'$. Damit ist der Beweis vollständig erbracht.

3.6 Einige Sätze über Messüberdeckungen

(3.6.1) Bezeichnungen: Mit t_1 wird die Abbildung von \mathbf{C}^m nach \mathbf{C} bezeichnet, die jedem $z = (z_1, \dots, z_m)$ aus \mathbf{C}^m die komplexe Zahl z_1 zuordnet. Die Komposition $t_1 \circ \pi$ wird wieder mit t_1 bezeichnet (Verwechslungen sind dabei nicht zu befürchten). Sei \mathcal{S} ein kohärenter \mathcal{H} -Modul und d eine natürliche Zahl. Mit $p(d)$ wird der Garbenmorphismus von \mathcal{S} nach \mathcal{S} bezeichnet,

der jeden Schnitt s von \mathcal{S} den Schnitt $t_1^d s$ zuordnet. Die Untergarbe *im* $p(d)$ von \mathcal{S} wird mit \mathcal{S}^d , der Quotient $\mathcal{S}/\mathcal{S}^d$ mit \mathcal{S}_d und die kanonische Surjektion $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}_d$ mit $q(d)$ bezeichnet. Sei $\mathfrak{A} = (W_\chi, \Phi_\chi, E_\chi, R_\chi)_{\chi \in K}$ ein Messatlas bezüglich $(0, \varrho_0)$, der K als Indexmenge hat. Der Bequemlichkeit halber wird von den Funktoren R_χ folgendes vorausgesetzt: Wenn $R_\chi(\mathcal{S})$ die Auflösung $\mathcal{O}^p \xrightarrow{h} \mathcal{O}^q \xrightarrow{\alpha} (\Phi_\chi)_*(\mathcal{S}) \rightarrow 0$ ist, dann ist $R_\chi(\mathcal{S}_d)$ die Auflösung $\mathcal{O}^p \xrightarrow{h} \mathcal{O}^q \xrightarrow{(q_\chi(d)) \circ \alpha} (\Phi_\chi)_*(\mathcal{S}_d) \rightarrow 0$. Dabei wurde $(\Phi_\chi)_*(q(d)) = q_\chi(d)$ gesetzt.

SATZ (3.6.2). — Voraussetzung: $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}$ Messüberdeckungskette

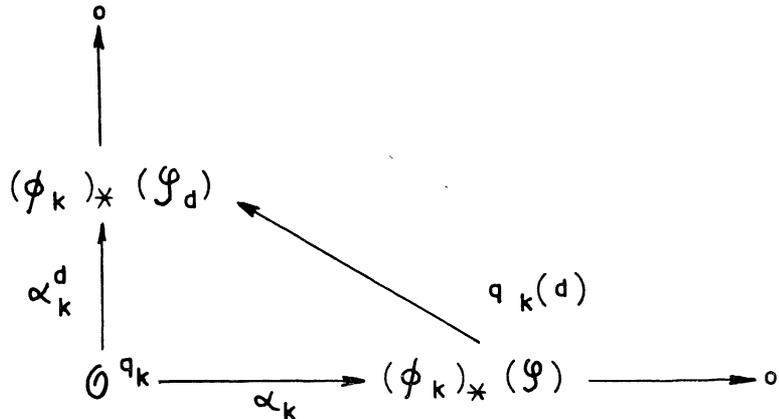
Behauptung: (i) Für jedes $\xi \in C^p(U(\varrho), \mathcal{S})$ gilt: $\|\xi\|_{\mathfrak{V}_\varrho} \geq \|(q(d))(\xi)\|_{\mathfrak{V}_\varrho}$. (ii) Es gibt eine (von ϱ unabhängige) Konstante $c > 0$, so dass gilt: Zu jedem $\xi' \in C^p(U(\varrho), \mathcal{S}_d)$ mit $\|\xi'\|_{\mathfrak{V}_\varrho} < \infty$ gibt es ein $\xi \in C^p(U(\varrho), \mathcal{S})$ mit $(q(d))(\xi) = \xi'$ und $\|\xi\|_{\mathfrak{V}_\varrho} \leq c \|\xi'\|_{\mathfrak{V}_\varrho}$.

Beweis. — (i) Sei $\xi = (\xi_i) \in C^p(U(\varrho), \mathcal{S})$. Nach Definition (3.4.2) gilt:

$$\|\xi_i\|_{U_i\varrho} = \sup_{\chi \in M(i)} \inf_{\tilde{\xi} \in \chi(\xi_i)} \|\tilde{\xi}\|_{F_{\chi,i}\varrho}$$

$$\|(q(d))(\xi_i)\|_{U_i\varrho} = \sup_{\chi \in M(i)} \inf_{\tilde{\xi} \in \chi(q(d))(\xi_i)} \|\tilde{\xi}\|_{F_{\chi,i}\varrho}$$

Da aber $\chi(q(d))(\xi_i) \supset \chi(\xi_i)$ ist, folgt $\|\xi_i\|_{U_i\varrho} \geq \|(q(d))(\xi_i)\|_{U_i\varrho}$. (ii) Sei $\xi' = (\xi'_i) \in C^p(U(\varrho), \mathcal{S}_d)$. Nach Definition (3.4.3) gilt: $\|\xi'_i\|_{U_i\varrho} < \infty$ und nach (3.4.2) ist $\|\xi'_i\|_{U_i\varrho} = \sup_{\chi \in M(i)} \inf_{\tilde{\xi} \in \chi(\xi'_i)} \|\tilde{\xi}\|_{F_{\chi,i}\varrho}$. Über $F_{\chi,i} \times K(\varrho)$ hat man folgendes kommutatives Diagramm



Zunächst gibt es ein $\tilde{\xi} \in \chi(\xi'_i)$ mit $\|\tilde{\xi}\|_{F_{\chi,i}\varrho} \leq 2 \|\xi'_i\|_{U_i\varrho}$.

Jetzt gibt es ein $f \in \Gamma(F_{\chi, i} \times K(\varrho), \mathcal{O}^{q\gamma})$ mit $\alpha_\chi^d(f) = \tilde{\xi}$ und $\|f\|_{F_{\chi, i} e} \leq 2 \|\tilde{\xi}\|_{F_{\chi, i} e}$. Es wird $\alpha_\chi(f) = \tilde{\xi} \in \Gamma(F_{\chi, i} \times K(\varrho), (\Phi_\chi)_*(\mathcal{O}))$ gesetzt und es ist $\|\tilde{\xi}\|_{F_{\chi, i} e} \leq \|f\|_{F_{\chi, i} e}$. Jetzt definiert $\tilde{\xi}$ einen Schnitt $\xi_i \in \Gamma(U_i(\varrho), \mathcal{O})$; es ist also $\tilde{\xi} \in \chi(\xi_i)$. Weiterhin ist $\|\tilde{\xi}\|_{F_{\chi, i} e} \leq 4 \|\xi_i'\|_{U_i e}$. Beschränken wir ξ_i auf $V_i(\varrho)$, so gibt es wegen (3.1.6) (V5) und (1.1.10) eine Konstante $c > 0$ mit $\|\xi_i\|_{V_i} \leq c \|\xi_i'\|_{U_i e}$.

SATZ (3.6.3). — Voraussetzung: $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}$ Messüberdeckungskette

Behauptung: Für jedes $\xi \in \mathcal{O}^l(U(\varrho), \mathcal{O})$ und jedes echt kleinere $\varrho' < \varrho$ ist $\|\xi|V(\varrho')\|_{\mathfrak{V}\varrho'} < \infty$.

Beweis. — Es wird eine Messüberdeckungskette $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{U}_1 \supset \mathfrak{U}_2 \supset \mathfrak{V}$ gewählt. Sei $\chi: J^{l+1} \rightarrow K$ eine Abbildung mit $\chi(j) \in N'(j)$, wenn $V_j(\varrho) \neq \emptyset$. Sei $\tau: J \rightarrow I$ die Verfeinerungsabbildung $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}$, und sei $i = \tau(j)$, dann wird $\chi(i) = \chi(j)$ gesetzt. Nach (3.1.5) (V3) gilt $\chi(i) \in M'(i)$. Sei jetzt $\xi = (\xi_i) \in \mathcal{O}^l(U(\varrho), \mathcal{O})$, dann ist $(\Phi_{\chi(i)})_*(\xi_i) \in \Gamma(\Phi_{\chi(i)}(U_i(\varrho)), (\Phi_{\chi(i)})_*(\mathcal{O}))$. Nach (3.1.5) (V4) lässt sich $(\Phi_{\chi(i)})_*(\xi_i)$ auf $F_{\chi(i); i}^{(i)} \times K(\varrho)$ beschränken; damit erhält man einen Schnitt $\gamma_i \in \Gamma(F_{\chi(i); i}^{(i)} \times K(\varrho), (\Phi_{\chi(i)})_*(\mathcal{O}))$. Nach Theorem B gibt es ein $\tilde{\gamma}_i \in \Gamma(F_{\chi(i); i}^{(1)} \times K(\varrho), \mathcal{O}^{q\chi(i)})$ mit $\alpha_{\chi(i)}(\tilde{\gamma}_i) = \gamma_i$. Jetzt wird γ_i auf $F_{\chi(i); i}^{(2)} \times K(\varrho')$ beschränkt.

Wegen (3.1.5) (V2) und (1.1.4) (ii) folgt $\|\tilde{\gamma}_i\|_{F_{\chi(i); i}^{(2)} e'} < \infty$; somit ist auch $\|\gamma_i\|_{F_{\chi(i); i}^{(2)} e} < \infty$. Beschränkt man jetzt ξ auf $V(\varrho')$, so ist $(\Phi_{\chi(j)})_*(\xi_j) = \gamma_j$, wobei $\xi_j = \xi_i|V_j$ und $\gamma_j = \gamma_i|G_{\chi(j); j} \times K(\varrho')$ ist. Wegen (3.1.5) (V5) und (1.1.10) gilt $\|\xi\|_{\mathfrak{V}\varrho'} < \infty$ (vergleiche dazu den Beweis von (3.5.1)).

Corollar (3.6.4). — Voraussetzung: Sei $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}$ eine Messüberdeckungskette, und sei $\varrho \in \mathbf{R}_+^m$ (hinreichend klein).

Behauptung: Für jedes $\xi \in H^l(X(\varrho), \mathcal{O})$ und jedes echt kleinere $\varrho' < \varrho$ gibt es einen Cozyklus $\xi' \in Z^l(V(\varrho'), \mathcal{O})$ mit $\|\xi'\|_{\mathfrak{V}\varrho'} < \infty$ der $\xi|V(\varrho')$ repräsentiert.

Beweis. — Da $U(\varrho)$ eine Steinsche Überdeckung ist, gibt es einen Zyklus $\tilde{\xi} \in Z^l(U(\varrho), \mathcal{O})$ der ξ repräsentiert. Aus (3.6.3) folgt jetzt sofort das Corollar.

COROLLAR (3.6.5). — Voraussetzung: Sei $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}$ eine Messüberdeckungskette, \mathcal{O} ein kohärenter \mathcal{H} -Modul, d eine natürliche Zahl und sei $0 \rightarrow \mathcal{O}^d \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_d \rightarrow 0$ die kanonische exakte Sequenz.

Behauptung: Wenn $\xi \in Z^l(U(\varrho), \mathcal{O}_d)$ und ξ in $H^{l+1}(U(\varrho), \mathcal{O}^d)$ Null ist, dann gibt es zu jedem echt kleineren $\varrho' < \varrho$ ein $\tilde{\xi} \in Z^l(V(\varrho'), \mathcal{O})$ mit $(q(d))(\tilde{\xi}) = \xi|V(\varrho')$ und $\|\tilde{\xi}\|_{\mathfrak{V}\varrho'} < \infty$.

Beweis. — Das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 \circ & \longrightarrow & c^{l+1}(U(\varrho), \mathcal{F}^d) & \xrightarrow{p(d)} & c^{l+1}(U(\varrho), \mathcal{F}) & \xrightarrow{q(d)} & c^{l+1}(U(\varrho), \mathcal{F}_d) \longrightarrow \circ \\
 & & \uparrow \vartheta & & \uparrow \vartheta & & \uparrow \vartheta \\
 \circ & \longrightarrow & c^l(U(\varrho), \mathcal{F}^d) & \xrightarrow{p(d)} & c^l(U(\varrho), \mathcal{F}) & \xrightarrow{q(d)} & c^l(U(\varrho), \mathcal{F}_d) \longrightarrow \circ
 \end{array}$$

hat exakte Zeilen, da $U(\varrho)$ eine Steinsche Überdeckung ist.

Sei $\xi \in Z^l(U(\varrho), \mathcal{S}_d)$ und bezeichne $\bar{\xi} \in H^l(U(\varrho), \mathcal{S}_d)$ die Cohomologiekategorie, die durch ξ repräsentiert wird. Nach Voraussetzung ist $\delta(\bar{\xi}) = 0$ in $H^{l+1}(U(\varrho), \mathcal{S}^d)$. Aus dem obigen Diagramm folgt: Es gibt ein $\zeta \in C^l(U(\varrho), \mathcal{S})$ mit $(q(d))(\zeta) = \xi$. Somit gilt $(q(d))(\delta(\zeta)) = 0$. Es gibt also ein $\eta \in C^{l+1}(U(\varrho), \mathcal{S}^d)$ mit $(p(d))(\eta) = \delta(\zeta)$. Da $p(d)$ injektiv ist, gilt sogar $\eta \in Z^{l+1}(U(\varrho), \mathcal{S}^d)$. Da $\delta(\bar{\xi}) = 0$ ist, heisst das aber: Es gibt ein $\eta_1 \in C^l(U(\varrho), \mathcal{S}^d)$ mit $\delta(\eta_1) = \eta$. Jetzt ist $\zeta - (p(d))(\eta_1) \in Z^l(U(\varrho), \mathcal{S})$ und $(q(d))(\zeta - (p(d))(\eta_1)) = \xi$. Nach (3.6.4) folgt jetzt sofort die Behauptung.

SATZ (3.6.6). — Voraussetzung: Sei $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}$ Messüberdeckungskette und l eine natürliche Zahl.

Behauptung: Es gibt eine Dreiecksmenge $\Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)$ und eine Abbildung $M: \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m) \rightarrow \mathbf{R}_+$, so dass für jede natürliche Zahl d und jedes hinreichend kleine $\varrho \in \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)$ die Aussage gilt: Zu jedem $\eta \in C^l(U(\varrho), \mathcal{S}^d)$ mit $\|\eta\|_{\mathfrak{U}_\varrho} < \infty$ (1) gibt es ein $\tilde{\eta} \in C^l(V(\varrho), \mathcal{S})$ derart, dass $\left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^d \tilde{\eta} = \eta$ in $C^l(V(\varrho), \mathcal{S})$ und $\|\tilde{\eta}\|_{\mathfrak{V}_\varrho} \leq M(\varrho) \|\eta\|_{\mathfrak{U}_\varrho}$ gilt.

Beweis. — Es wird eine Messüberdeckungskette $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}_1 \supset \mathfrak{V}$ gewählt, wobei $(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}_1)$ eine l -privilegierte Verfeinerung ist. Sei $\Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)$ eine Dreiecksmenge und $M: \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m) \rightarrow \mathbf{R}_+$ eine Abbildung wie sie in (3.1.7) für $(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}_1)$ gefordert wird. Sei $\chi: J^{l+1} \rightarrow K$ eine Abbildung mit $\chi(j) \in N'(j)$ wenn $V_j \neq \emptyset$. Sei $\tau: J_1 \rightarrow I$ die Verfeinerungsabbildung von $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}_1$, und sei $i = \tau(j)$, dann wird $\chi(i) = \chi(j)$ gesetzt. Nach (3.1.5) (V3) gilt $\chi(i) \in M'(i)$.

Sei $\varrho \in \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)$ hinreichend klein, und sei $\eta = (\eta_i) \in C^l(U(\varrho), \mathcal{S}^d)$ mit $\|\eta\|_{\mathfrak{U}_\varrho} < \infty$. Nach (3.4.2) und (3.4.3) gilt jetzt $\|\eta\|_{\mathfrak{U}_\varrho} \geq \|\eta_i\|_{\sigma_{ie}} \geq \inf_{\tilde{\eta} \in (\chi(i))(\eta_i)} \|\tilde{\eta}\|_{F_{\chi(i); i, \varrho}}$.

(1) η wird als Cozyklus mit Werten in \mathcal{S} angefasst; die Norm $\|\eta\|_{\mathfrak{V}_\varrho}$ ist bezüglich \mathcal{S} gemeint.

Es gibt ein $\tilde{\eta}_i \in (\chi(i))(\eta_i)$, so dass $2 \|\eta\|_{\mathfrak{U}_\varrho} \geq \|\tilde{\eta}_i\|_{F_{\chi(i); i} e}$ gilt. Über $F_{\chi(i)} \times K(\varrho_0)$ hat man folgendes kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathcal{O}^{p_{k(i)}} & \xrightarrow{h_{k(i)}} & \mathcal{O}^{q_{k(i)}} & \xrightarrow{\alpha_{k(i)}} & (\phi_{k(i)})_* (\mathcal{Y}) & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow q_2 & & \downarrow q_1 & & \downarrow q_0 & & \\
 \mathcal{O}^{p_{k(i)}}/t_i^d \mathcal{O}^{p_{k(i)}} & \xrightarrow{h_{k(i)}^d} & \mathcal{O}^{q_{k(i)}}/t_i^d \mathcal{O}^{q_{k(i)}} & \xrightarrow{\alpha_{k(i)}^d} & (\phi_{k(i)})_* (\mathcal{Y}_d) & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Es ist $\tilde{\eta}_i \in \Gamma(F_{\chi(i); i} \times K(\varrho), (\Phi_{\chi(i)})_* (\mathcal{S}^d)) \subset \Gamma(F_{\chi(i); i} \times K(\varrho), (\Phi_{\chi(i)})_* (\mathcal{S}))$ ⁽⁴⁾. Es gibt jetzt ein

$$f_i \in \Gamma(F_{\chi(i); i} \times K(\varrho), \mathcal{O}^{q_{\chi(i)}}) \text{ mit } \|f_i\|_{F_{\chi(i); i} e} \leq 2 \|\eta_i\|_{F_{\chi(i); i} e}.$$

Nach (3.1.7) gibt es jetzt ein $K_{\chi(j); j}$ mit $G_{\chi(j); j} \subset K_{\chi(j); j} \subset F_{\chi(j); i}$. Jetzt ist aber $\alpha_{\chi(j)}^d(q_1(f_i)) = 0$ (siehe obiges Diagramm), nach Theorem (1.4.4) gibt es ein $g_j \in \Gamma(K_{\chi(j); j} \times K(\varrho), \mathcal{O}^{p_{\chi(j)}}/t_1^d \mathcal{O}^{p_{\chi(j)}})$ mit $h_{\chi(j)}^d(g_j) = q_1(f_i)|_{K_{\chi(j); j}}$ und $\|g_j\|_{G_{\chi(j); j} e} \leq M(\varrho) \|f_i\|_{F_{\chi(j); j} e}$. Nach (1.1.11) gibt es eine Konstante $c > 0$ mit $\|h_{\chi(j)}^d(g_j)\|_{G_{\chi(j); j} e} \leq c \|g_j\|_{G_{\chi(j); j} e}$.

Jetzt ist aber $q_1(f_i - h_{\chi(j)}(g_j)) = 0$ in $\Gamma(G_{\chi(j); j} \times K(\varrho), \mathcal{O}^{q_{\chi(j)}}/t_1^d \mathcal{O}^{q_{\chi(j)}})$ (siehe obiges Diagramm) und es gilt $\|f_i - h_{\chi(j)}(g_j)\|_{G_{\chi(j); j} e} \leq 4(1 + cM(\varrho)) \|\eta\|_{\mathfrak{U}_\varrho}$.

Mann kann daher schreiben: $f_i - h_{\chi(j)}(g_j) = \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^d \tilde{f}_j$ wobei $\tilde{f}_j \in \Gamma(G_{\chi(j); j} \times K(\varrho), \mathcal{O}^{q_{\chi(j)}})$ und $\|\tilde{f}_j\|_{G_{\chi(j); j} e} \leq 4(1 + cM(\varrho)) \|\eta\|_{\mathfrak{U}_\varrho}$.

Jetzt wird $\eta'_j = (\alpha_{\chi(j)})(\tilde{f}_j)$ gesetzt, und es gilt: $\|\eta'_j\|_{G_{\chi(j); j} e} \leq 4(1 + cM(\varrho)) \|\eta\|_{\mathfrak{U}_\varrho}$. Offensichtlich gilt auf $G_{\chi(j); j} \times K(\varrho)$ die Beziehung $\left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^d \eta'_j = \eta_i$. Die η'_j definieren eine Cokette $\tilde{\eta} = (\tilde{\eta}_j) \in \mathcal{O}^l(V(\varrho), \mathcal{S})$ mit $(\Phi_{\chi(j)})_* (\tilde{\eta}_j) = \eta'_j|_{G_{\chi(j); j} \times K(\varrho)}$. Somit gilt auf $V(\varrho)$ die Beziehung $\left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^d \tilde{\eta} = \eta$.

⁽⁴⁾ Hier muss genauer noch eine Überdeckung \mathfrak{U}_1 zwischen \mathfrak{U} und \mathfrak{V}_1 eingeschoben werden.

Wegen (3.1.5) (V5) und (1.1.10) gibt es eine Konstante $c' > 0$, so dass $\|\tilde{\eta}\|_{\mathfrak{U}_\varrho} \leq 4c'(1 + cM(\varrho))\|\eta\|_{\mathfrak{U}_\varrho}$ gilt.

SATZ (3.6.7). — Voraussetzung: Sei $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}$ eine Messüberdeckungskette, und sei ϱ_1^* eine hinreichend kleine positive Zahl.

Behauptung: Es gibt eine Konstante $c > 0$ so dass für hinreichend kleines $\varrho = (\varrho_1, \dots, \varrho_m)$ aus \mathbf{R}_+^m gilt: Für jedes $\eta \in \mathcal{O}^l(U(\varrho), \mathcal{D})$ mit $\|\eta\|_{\mathfrak{U}_\varrho} < \infty$ gibt es eine Familie $(\eta_\nu)_{\nu \in \mathbf{N}}$ von Coketten $\eta_\nu \in \mathcal{O}^l(V(\varrho^*), \mathcal{D})$, $\varrho^* = (\varrho_1^*, \varrho_2, \dots, \varrho_m)$ derart, dass $\eta = \sum_{\nu \geq 0} \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\nu \eta_\nu$ und $\|\eta_\nu\|_{\mathfrak{V}_{\varrho^*}} \leq c \|\eta\|_{\mathfrak{U}_\varrho}$ gilt.

Die Formel $\eta = \sum_{\nu \geq 0} \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\nu \eta_\nu$ bedeutet folgendes: Für jedes $\varrho' = (\varrho'_1, \varrho_2, \dots, \varrho_m)$ mit $\varrho'_1 < \varrho_1$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \eta - \sum_{\nu=0}^n \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\nu \eta_\nu \right\|_{\mathfrak{V}_{\varrho'}} = 0$.

Beweis. — Sei $\chi: J^{l+1} \rightarrow K$ eine Abbildung mit $\chi(j) \in N'(j)$ wenn $V_j \neq \emptyset$. Es wird wieder $i = \tau(j)$ und $\chi(i) = \chi(j)$ gesetzt, wobei $\tau: J \rightarrow I$ die Verfeinerungsabbildung von $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}$ ist. Über $E_{\chi(i)} \times K(\varrho_0)$ hat man die exakte Sequenz $\mathcal{O}^{q_\chi(i)} \xrightarrow{\alpha_\chi(i)} (\Phi_{\chi(i)})_*(\mathcal{D}) \rightarrow 0$.

Sei $\eta = (\eta_i) \in \mathcal{O}^l(U(\varrho), \mathcal{D})$ mit $\|\eta\|_{\mathfrak{U}_\varrho} < \infty$. Es gibt jetzt ein

$$\tilde{\eta}_i \in \Gamma(F_{\chi(i); i} \times K(\varrho), (\Phi_{\chi(i)})_*(\mathcal{D})) \text{ mit } \tilde{\eta}_i | \Phi_{\chi(i)}(U_i(\varrho)) = (\Phi_{\chi(i)})_*(\eta_i)$$

und $\|\tilde{\eta}_i\|_{F_{\chi(i); i} e} \leq 2 \|\eta\|_{\mathfrak{U}_\varrho}$. Es gibt jetzt ein $\xi_i \in \Gamma(F_{\chi(i); i} \times K(\varrho), \mathcal{O}^{q_\chi(i)})$ mit $\alpha_{\chi(i)}(\xi_i) = \tilde{\eta}_i$ und $\|\xi_i\|_{F_{\chi(i); i} e} \leq 2 \|\tilde{\eta}_i\|_{F_{\chi(i); i} e}$.

Insgesamt hat man also $\|\xi_i\|_{F_{\chi(i); i} e} \leq 4 \|\eta\|_{\mathfrak{U}_\varrho}$.

Jetzt lässt sich ξ_i nach t_1/ϱ_1 in eine kompakt konvergente Potenzreihe $\xi_i = \sum_{\nu \geq 0} \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\nu \xi_i^{(\nu)}$ entwickeln, und es gilt $\|\xi_i^{(\nu)}\|_{F_{\chi(i); i} e} \leq \|\xi_i\|_{F_{\chi(i); i} e}$, da ja $\xi_i^{(\nu)}$ nicht mehr von t_1 abhängt. Insgesamt hat man also $\|\xi_i^{(\nu)}\|_{F_{\chi(i); i} e^*} \leq 4 \|\eta\|_{\mathfrak{U}_\varrho}$.

Wir fassen $\xi_i^{(\nu)}$ als Schnitt aus $\Gamma(F_{\chi(i); i} \times K(\varrho^*), \mathcal{O}^{q_\chi(i)})$ auf und setzen $\eta_i^{(\nu)} = \alpha_{\chi(i)}(\xi_i^{(\nu)})$. Es gilt: $\|\tilde{\eta}_i^{(\nu)}\|_{F_{\chi(i); i} e^*} \leq 4 \|\eta\|_{\mathfrak{U}_\varrho}$. Jetzt definiert $\tilde{\eta}_i^{(\nu)}$ einen Schnitt $\eta_i^{(\nu)} \in \Gamma(U_i(\varrho^*), \mathcal{D})$. Nach (3.1.5) (V5) und (1.1.10) gibt es eine Konstante $c > 0$ (unabhängig von ϱ), so dass $\|\eta_i^{(\nu)}\|_{V_i e^*} \leq 4c \|\eta\|_{\mathfrak{U}_\varrho}$ gilt. Jetzt gilt

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \xi_i - \sum_{\nu=0}^n \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\nu \xi_i^{(\nu)} \right\|_{F_{\chi(i); i} e} = 0$. Für jedes $\varrho' = (\varrho'_1, \varrho_2, \dots, \varrho_m)$ mit $\varrho'_1 < \varrho_1$.

Weiter gilt noch $\left\| \tilde{\eta}_i - \sum_{\nu=0}^n \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\nu \tilde{\eta}_i^{(\nu)} \right\|_{F_{\chi(i); i} e'} \leq \left\| \xi_i - \sum_{\nu=0}^n \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\nu \xi_i^{(\nu)} \right\|_{F_{\chi(i); i} e'}$. Nach

(3.1.5) (V5) gibt es eine Konstante $c > 0$ so dass $\left\| \eta_i - \sum_{\nu=0}^n \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\nu \eta_i^{(\nu)} \right\|_{V_i e'} \leq$

$\leq c \left\| \eta_i - \sum_{\nu=0}^n \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\nu \eta_i^{(\nu)} \right\|_{F_{\chi(i); i} e'}$, gilt. Damit ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \eta_i - \sum_{\nu=0}^n \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\nu \eta_i^{(\nu)} \right\|_{V_i e'} = 0$,

womit dann alles bewiesen ist.

SATZ (3.6.8). Voraussetzung: Sei $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}$ eine Messüberdeckungskette, $\varrho \in \mathbf{R}_+^m$ hinreichend klein, $s = \sum_{\nu \geq 0} \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\nu s_\nu$ eine p -Cokette mit $s_\nu = (s_i^{(\nu)}) \in C^p(U(\varrho), \mathcal{O})$. Sei $M \in \mathbf{R}_+$ derart, dass $\|s_\nu\|_{\mathfrak{U}_\varrho} \leq M$ für alle $\nu \in \mathbf{N}$. Sei χ eine Abbildung von I^{p+1} nach K derart, dass $\chi(i) \in M(i)$ gilt, wenn $U_i \neq \emptyset$ ist. Sei $c' \in \mathbf{R}_+$ und sei zu jedem $(\nu, i) \in \mathbf{N} \times I^{p+1}$ ein Schnitt $f_i^{(\nu)} \in \Gamma(F_{\chi(i); i} \times \times K(\varrho), \mathcal{O}^{\varrho \chi(i)})$ gegeben, derart, dass gilt:

- 1) $\alpha_{\chi(i)}(f_i^{(\nu)}) | \Phi_{\chi(i)}(U_i) = (\Phi_{\chi(i)})_*(s_i^{(\nu)})$,
- 2) $f_i^{(\nu)}$ unabhängig von t_1 ,
- 3) $\|f_i^{(\nu)}\|_{F_{\chi(i); i}} \leq c' M$.

Behauptung: Es gibt eine Konstante $c > 0$ (unabhängig von ϱ) derart, dass $\|s\|_{\mathfrak{V}_\varrho} \leq cc' M$ ist.

Beweis. — Sei $j \in J^{p+1}$ und sei $i = \tau(j)$ gesetzt. Wegen (3) kann man $f_i = \sum_{\nu \geq 0} \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\nu f_i^{(\nu)}$ schreiben. Jetzt gilt offensichtlich

$$\alpha_{\chi(i)}(f_i) | \Phi_{\chi(i)}(U_i(\varrho)) = (\Phi_{\chi(i)})_*(s_i) \quad \text{und} \quad \|f_i\|_{F_{\chi(i); i}} \leq \sup_{\nu} \|f_i^{(\nu)}\|_{F_{\chi(i); i}} \leq c' M.$$

Nach Corollar (1.1.10) und Definition (3.1.6) gibt es eine Konstante $c > 0$, so dass gilt $\|s_j\|_{V_j \varrho} \leq cc' M$ und damit hat man $\|s\|_{\mathfrak{V}_\varrho} \leq cc' M$.

SATZ (3.6.9). Voraussetzung: Seien \mathcal{O}_1 und \mathcal{O}_2 zwei kohärente \mathcal{H} -Moduln, $\psi: \mathcal{O}_1 \rightarrow \mathcal{O}_2$ ein analytischer Homomorphismus und $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}$ eine Messüberdeckungskette.

Behauptung: Er gibt ein $c > 0$ (unabhängig von ϱ) derart, dass für jedes $\xi \in \mathcal{O}^l(U(\varrho), \mathcal{O}_1)$ mit $\|\xi\|_{\mathfrak{U}_\varrho} < \infty$ die Ungleichung $\|\psi(\xi)\|_{\mathfrak{V}_\varrho} \leq c \|\xi\|_{\mathfrak{U}_\varrho}$ gilt.

Beweis. — Der Satz folgt sofort aus den Definitionen (3.1.5) und (3.1.6) unter Anwendung von Corollar (1.1.10).

SATZ (3.6.10). Voraussetzung: Sei \mathcal{O} ein kohärenter \mathcal{H} -Modul und $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}$ eine Messüberdeckungskette. Sei $\xi \in C^p(U(\varrho_1), \mathcal{O})$ mit $\|\xi\|_{\mathfrak{U}_{\varrho_1}} < \infty$.

Behauptung: Zu jedem $\tilde{\varrho} < \varrho_1$ gibt es eine Konstante $c > 0$, so dass für jedem $\varrho < \tilde{\varrho}$ und jedes $a \in \Gamma(K(\varrho), \mathcal{O})$ die Ungleichung $\|a\xi\|_{\mathfrak{V}_\varrho} \leq c \|a\|_\varrho \|\xi\|_{\mathfrak{U}_{\varrho_1}}$ gilt.

Beweis. — Der Satz folgt leicht aus Corollar (1.1.16) unter Verwendung von Corollar (1.1.10) und Definition (3.1.6).

4. Der Kohärenzsatz von Grauert

4.1 Formulierung der Hauptsätze

(4.1.1) Für die Nummern (4.1) bis (4.4) werden folgende generelle Voraussetzungen gemacht :

(X, \mathcal{H}) sei ein komplexer Raum,

m^* sei eine natürliche Zahl, $K = K_1 \times \dots \times K_{m^*}$ ein Polyzylinder mit 0 als Zentrum in \mathbf{C}^{m^*} ,

$\pi : X \rightarrow K$ sei eine eigentliche holomorphe Abbildung,

W sei eine endliche Steinsche Überdeckung von X ,

$(\varrho_t)_{t \in \mathbf{C}^{m^*}}$, $(\mathfrak{A}_t)_{t \in \mathbf{C}^{m^*}}$ seien zwei Familien derart, dass $\varrho_t \in \mathbf{R}_+^{m^*}$ mit $\varrho_t > 0$ und \mathfrak{A}_t Messatlas bezüglich (t, ϱ_t) ist.

(4.1.2) Bezeichnung. — Sei m eine natürliche Zahl mit $0 \leq m \leq m^*$ und $t_0 = (t_1^{(0)}, \dots, t_{m^*}^{(0)})$ ein Punkt aus K . Wir setzen :

$$X_{t_0, m} = \pi^{-1}(\mathbf{C}^m \times \{(t_{m+1}^{(0)}, \dots, t_{m^*}^{(0)})\}) \quad \text{für } m \neq 0,$$

$$X_{t_0, m} = X_{t_0} = \pi^{-1}(t_0) \quad \text{für } m = 0,$$

$$K_{t_0, m} = K \cap \{(t_{m+1}^{(0)}, \dots, t_{m^*}^{(0)})\}, \quad K_m = K_0, m$$

Die von π induzierte Abbildung

$$X_{t_0, m} \rightarrow K_{t_0, m} \quad \text{für } m \neq 0,$$

$$X_{t_0} \rightarrow \{t_1^{(0)}\} \quad \text{für } m = 0$$

wird wieder mit π bezeichnet.

Mit $t_i : \mathbf{C}^{m^*} \rightarrow \mathbf{C}$ wird, die durch die Zuordnung $z = (z_1, \dots, z_i, \dots, z_m) \mapsto z$ definierte holomorphe Funktion bezeichnet. Die durch π geliftete holomorphe Funktion $t_i \circ \pi$ wird wieder mit t_i bezeichnet. Weiter wird gesetzt :

$$\mathcal{H}^{(t_0, m)} = (t_1 - t_1^{(0)}) \mathcal{H} + \dots + (t_{m-m^*} - t_{m-m^*}^{(0)}) \mathcal{H},$$

$$\mathcal{H}_{(t_0, m)} = \mathcal{H} / \mathcal{H}^{(t_0, m)},$$

$$W_{t_0, m} = W \cap X_{t_0, m}.$$

Offensichtlich ist $(X_{t_0, m}, \mathcal{H}_{(t_0, m)})$ ein komplexer Raum, $\pi: X_{t_0, m} \rightarrow \mathbb{C}^m$ eine eigentliche holomorphe Abbildung und $W_{t_0, m}$ eine endliche Steinsche Überdeckung von $X_{t_0, m}$.

Sei l eine natürliche Zahl. Der l -te Bildgarbenfunktorkomplex $R^l \pi_*$ wird mit π_l bezeichnet.

Sei \mathcal{S} ein kohärenter $\mathcal{H}_{(t_0, m)}$ -Modul und $e = (e_1, \dots, e_m)$ ein m -tupel natürlicher Zahlen. Wir setzen

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{t_0, e} &= (t_1 - t_1^{(0)})^{e_1} \mathcal{S} + \dots + (t_m - t_m^{(0)})^{e_m} \mathcal{S}, \\ \mathcal{S}_{t_0, e} &= \mathcal{S} / \mathcal{S}^{t_0, e} \end{aligned}$$

und es bezeichne $p(t_0, e): \mathcal{S}^{t_0, e} \rightarrow \mathcal{S}$, $q(t_0, e): \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}_{t_0, e}$ die kanonischen Abbildungen. Wenn t_0 speziell der Nullpunkt ist, so führen wir für $\mathcal{S}^{t_0, e}$, $\mathcal{S}_{t_0, e}$, $p(t_0, e)$, $q(t_0, e)$ der Reihe nach die bequemereren Bezeichnungen \mathcal{S}^e , \mathcal{S}_e , $p(e)$, $q(e)$ ein.

Mit \mathcal{O} werde stets die kanonische Strukturgarbe des \mathbb{C}^m bezeichnet. $\mathcal{I}(t_0, e)$ bezeichne die Idealgarbe $(t_1 - t_1^{(0)})^{e_1} \mathcal{O} + \dots + (t_m - t_m^{(0)})^{e_m} \mathcal{O}$. Wenn $t_0 = \mathbf{0}$ ist, dann wird anstelle von $\mathcal{I}(t_0, e)$ die bequemere Bezeichnung $\mathcal{I}(e)$ benutzt.

Sei $\mathfrak{U} = (U, M, M', F)$ eine Messüberdeckung bezüglich \mathfrak{A}_{t_0} . Wenn $\varrho \in \mathbb{R}_+^m$ ist, dann wird gesetzt:

$$\begin{aligned} K(t_0, \varrho) &\text{ Polyzylinder mit Zentrum } (t_1^{(0)}, \dots, t_m^{(0)}) \text{ und Radius } \varrho, \\ X(t_0, \varrho) &= \pi^{-1}(K(t_0, \varrho)), \\ U(t_0, \varrho) &= U \cap X(t_0, \varrho). \end{aligned}$$

Wenn t_0 der Nullpunkt des \mathbb{C}^{m*} ist, dann wird für $K(t_0, \varrho)$, $X(t_0, \varrho)$, $U(t_0, \varrho)$ der Reihe nach die bequemere Schreibweise $K(\varrho)$, $X(\varrho)$, $U(\varrho)$ benutzt.

(4.1.3) Jetzt lassen sich die Haupttheoreme formulieren:

Theorem I_{l, m}. — Voraussetzung: Sei t_0 ein Punkt aus K und \mathcal{S} eine kohärente analytische Garbe auf $X_{t_0, m}$.

Behauptung: Für alle $\lambda \geq l$ sind die Bildgarben $\pi_\lambda(\mathcal{S})$ kohärente \mathcal{O} -Moduln.

Theorem II_{l, m}. — Voraussetzung: Sei t_0 ein Punkt aus K , \mathcal{S} eine kohärente analytische Garbe auf $X_{t_0, m}$, $\mathfrak{V} \subset \subset \mathfrak{U} \subset \subset \mathfrak{U}_0$ eine Messüberdeckungskette bezüglich \mathfrak{A}_{t_0} .

Behauptung: Es gibt

- 1) ein $\varrho_1 \in \mathbf{R}_+^m$, $\varrho_1 > 0$ (unabhängig von \mathcal{O}),
- 2) $\xi_1, \dots, \xi_s \in Z^l(U(t_0, \varrho_1), \mathcal{O})$,
- 3) zu jedem $e \in \mathbf{N}^m$ eine m -dimensionale Dreiecksmenge Δ_e ,
- 4) zu jedem $e \in \mathbf{N}^m$ zwei Abbildungen M_e und N_e von Δ_e nach \mathbf{R}_+ ,
- 5) eine Abbildung $F: \mathbf{N}^m \rightarrow \mathbf{N}^m$ mit $\lim_{e \rightarrow \infty} F(e) = \infty$,

so dass für jedes $e \in \mathbf{N}^m$ und für hinreichend kleines $\varrho \in \Delta_e$ gilt:

Zu jedem $\xi \in Z^l(U(t_0, \varrho), \mathcal{O})$ mit $\|\xi\|_{\mathfrak{A}_\varrho} < \infty$ und $q(t_0, e)(\xi) = 0$ gibt es $a_1, \dots, a_s \in \Gamma(K(t_0, \varrho), \mathcal{I}(t_0, F(e)))$ und ein $\eta \in \mathcal{O}^{l-1}(V(t_0, \varrho), \mathcal{O})$, so dass gilt:

$$\xi = a_1 \xi_1 + \dots + a_s \xi_s + \delta \eta \quad \text{auf } V(t_0, \varrho)$$

$$\|a_j\|_e \leq M_e(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{A}_\varrho}, \quad 1 \leq j \leq s,$$

$$\|\eta\|_{\mathfrak{B}_\varrho} \leq N_e(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{A}_\varrho}.$$

Ersetzen wir in Theorem II_{*l, m*} die Menge \mathbf{N}^m durch die einpunktige Menge $\{0: 0 \in \mathbf{N}^m\}$, so erhalten wir ein Theorem, das wir mit Theorem II'_{*l, m*} bezeichnen.

(4.1.4) Aus Theorem II_{*l, m*} wird ein etwas allgemeineres Theorem hergeleitet. Dazu werden noch folgende Bezeichnungen eingeführt:

\bar{Q} sei eine kohärente \mathcal{O} -Garbe auf $K_{t_0, m}$, $\lambda: \pi_l(\mathcal{O}) \rightarrow \bar{Q}$ sei ein \mathcal{O} -Garbenhomomorphismus.

Mit $\pi_l: H^l(X(t_0, \varrho), \mathcal{O}) \rightarrow \Gamma(K(t_0, \varrho), \pi_l(\mathcal{O}))$ werde der kanonische Homomorphismus bezeichnet. Wir setzen:

$$H_\lambda^l(X(t_0, \varrho), \mathcal{O}) = \pi_l^{-1}(\Gamma(K(t_0, \varrho), \ker \lambda)).$$

Sei $U(t_0, \varrho)$ ein Steinsche Überdeckung von $X(t_0, \varrho)$ und bezeichne

$$q: Z^l(U(t_0, \varrho), \mathcal{O}) \rightarrow H^l(X(t_0, \varrho), \mathcal{O})$$

den kanonischen Homomorphismus, dann wird gesetzt:

$$Z_\lambda^l(U(t_0, \varrho), \mathcal{O}) = q^{-1}(H_\lambda^l(X(t_0, \varrho), \mathcal{O})).$$

Jetzt können wir ein dem Theorem II_{*l, m*} gleichwertiges Theorem hinschreiben:

Theorem III_{l,m}. — Voraussetzung: Sei t_0 ein Punkt aus K , \mathcal{O} eine kohärente analytische Garbe auf $X_{t_0,m}$, \mathcal{Q} eine kohärente analytische Garbe auf $K_{t_0,m}$, $\lambda: \pi_l(\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{Q}$ ein \mathcal{O} -Garbenhomomorphismus, $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{U} \subset \mathfrak{U}_0$ eine Messüberdeckungskette bezüglich \mathfrak{A}_{t_0} .

Behauptung: Es gibt

- 1) ein $\varrho_1 \in \mathbf{R}_+^m$, $\varrho_1 > 0$ (unabhängig von \mathcal{O}),
- 2) $\xi_1, \dots, \xi_s \in Z_\lambda^l(U(t_0, \varrho_1), \mathcal{O})$,
- 3) zu jedem $e \in \mathbf{N}^m$ eine m dimensionale Dreiecksmenge Δ_e ,
- 4) zu jedem $e \in \mathbf{N}^m$ zwei Abbildungen M_e und N_e von Δ_e nach \mathbf{R}_+ ,
- 5) eine Abbildung $F: \mathbf{N}^m \rightarrow \mathbf{N}^m$ mit $\lim_{e \rightarrow \infty} F(e) = \infty$, so dass für jedes $e \in \mathbf{N}^m$ und für hinreichend kleines $\varrho \in \Delta_e$ gilt:

Zu jedem $\xi \in Z_\lambda^l(U(t_0, \varrho), \mathcal{O})$ mit $\|\xi\|_{\mathfrak{U}_\varrho} < \infty$ und $q(t_0, e)(\xi) = 0$ gibt es $a_1, \dots, a_s \in \Gamma(K(t_0, \varrho), \mathcal{J}(t_0, F(e)))$ und ein $\eta \in C^{l-1}(V(t_0, \varrho), \mathcal{O})$ so dass gilt:

$$\xi = a_1 \xi_1 + \dots + a_s \xi_s + \delta \eta \text{ auf } V(t_0, \varrho),$$

$$\|a_j\|_\varrho \leq M_e(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{U}_\varrho},$$

$$\|\eta\|_{\mathfrak{V}_\varrho} \leq N_e(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{U}_\varrho}.$$

Ersetzen wir in Theorem III_{l,m} die Menge \mathbf{N}^m durch die einpunktige Menge $\{0: 0 \in \mathbf{N}^m\}$, so erhalten wir ein Theorem, das wir mit Theorem III'_{l,m} bezeichnen.

(4.1.5) Aus Theorem III_{l,m} folgt ein für uns wichtiges

COROLLAR IV_{l,m}. — Voraussetzung: Sei t_0 ein Punkt aus K , \mathcal{O} eine kohärente analytische Garbe auf $X_{t_0,m}$, $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{U} \subset \mathfrak{U}_0$ eine Messüberdeckungskette bezüglich \mathfrak{A}_{t_0} , $\pi_l(\mathcal{O})$ soll eine kohärente analytische Garbe auf \mathbf{C}^m sein.

Behauptung: Es gibt

- 1) eine m -dimensionale Dreiecksmenge $\Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)$,
- 2) eine Abbildung $N: \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m) \rightarrow \mathbf{R}_+$, so dass für hinreichend kleines $\varrho \in \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)$ gilt:

Zu jedem $\xi \in Z^l(U(t_0, \varrho), \mathcal{O})$ mit $\|\xi\|_{\mathfrak{U}_\varrho} < \infty$ und $\pi_l(\xi) = 0$ gibt es ein $\eta \in C^{l-1}(V(t_0, \varrho), \mathcal{O})$ mit $\delta \eta = \xi$ auf $V(t_0, \varrho)$ und $\|\eta\|_{\mathfrak{V}_\varrho} \leq N(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{U}_\varrho}$.

SATZ (4.1.4). — Theorem III'_{i,m} \implies Corollar IV_{i,m}.

Beweis. — Der bequemeren Schreibweise wegen nehmen wir t_0 als den Nullpunkt des \mathbf{C}^{m^*} an. Sei dann $\mathfrak{U}_0 \supset \mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}$ eine Messüberdeckungskette bezüglich \mathfrak{A}_0 . Theorem III'_{i,m} wird auf die Situation $\mathfrak{U}_0 \supset \mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}$, $\lambda: \pi_l(\mathcal{O}) \rightarrow \pi_l(\mathcal{O})$, $\lambda = id$ angewandt. Seien $\varrho'_1; \xi_1, \dots, \xi_s \in Z'_\lambda(U(\varrho'_1), \mathcal{O})$, Δ der Reihe nach die in III'_{i,m} (1), (2), (3) versprochenen Daten. Wegen der speziellen Wahl von λ gilt offensichtlich $\pi_l(\xi_\nu) = 0$, $1 \leq \nu \leq s$. Es gibt daher ein $\varrho'_1 \leq \varrho_1$ und es gibt Coketten $\eta_\nu \in C^{l-1}(U(\varrho'_1), \mathcal{O})$ mit $\xi_\nu = \delta\eta_\nu$ auf $U(\varrho'_1)$, $1 \leq \nu \leq s$. Jetzt wird $\varrho_1 < \inf(\varrho_1, \varrho'_1)$ gewählt.

Sei $\varrho \in \Delta$, $\varrho < \varrho_1$ und sei $\xi \in Z^l(U(\varrho), \mathcal{O})$ mit $\|\xi\|_{\mathfrak{U}_\varrho} < \infty$ und $\pi_l(\xi) = 0$. Es ist also $\xi \in Z'_\lambda(U(\varrho), \mathcal{O})$. Nach Theorem III'_{i,m} gilt daher auf $V(\varrho)$ die Beziehung $\xi = a_1 \xi_1 + \dots + a_s \xi_s + \delta\eta^*$, ($a_\nu \in \Gamma(K(\varrho), \mathcal{O})$ und $\eta^* \in C^l(V(\varrho), \mathcal{O})$), $\|a_\nu\|_\varrho \leq M(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{U}_\varrho}$ und $\|\eta^*\|_{\mathfrak{V}_\varrho} \leq N(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{U}_\varrho}$.

Nach Satz (3.6.3), angewandt auf $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}$, gibt es eine Konstante $c > 0$, so dass auf $V(\varrho)$ die Beziehung $\|\eta_\nu\|_{\mathfrak{V}_\varrho} \leq c \|\xi\|_{\mathfrak{U}_\varrho}$ für $1 \leq \nu \leq s$ gilt. Auf $V(\varrho)$ gilt nach Satz (3.6.10) jetzt $\xi = \delta(a_1 \eta_1 + \dots + a_s \eta_s + \eta^*)$ und $\|a_1 \eta_1 + \dots + a_s \eta_s + \eta^*\|_{\mathfrak{V}_\varrho} \leq (scM(\varrho) + N(\varrho)) \|\xi\|_{\mathfrak{U}_\varrho}$.

SATZ (4.1.5). — Theorem II_{i,m} \iff Theorem III_{i,m}.

Offensichtlich braucht nur die Richtung Theorem II_{i,m} \implies Theorem III_{i,m} bewiesen werden. Der einfacheren Schreibweise wegen sei t_0 wieder Nullpunkt des \mathbf{C}^{m^*} . Sei $\mathfrak{U}_0 \supset \mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}$ eine Messüberdeckungskette bezüglich \mathfrak{A}_0 . Theorem II_{i,m} wird auf $\mathfrak{U}_0 \supset \mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}$ angewandt. Die in II_{i,m} (1), (3) versprochenen Daten sind der Reihe nach ϱ'_1 und Δ' .

Sei \mathcal{Q} eine kohärente Garbe auf $K_{t_0, m}$ und $\lambda: \pi_l(\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{Q}$ ein \mathcal{O} -Garbenhomomorphismus. $\xi_1, \dots, \xi_s \in Z^l(U(\varrho'_1), \mathcal{O})$ seien die in Theorem II_{i,m} versprochenen Cozyklen. $\gamma: \mathcal{O}^s \rightarrow \pi_l(\mathcal{O})$ sei der durch die Zuordnung $(a_1, \dots, a_s) \mapsto a_1 \pi_l(\xi_1) + \dots + a_s \pi_l(\xi_s)$ definierte Homomorphismus. Jetzt ist $(\lambda \circ \gamma)$ kohärent. Für hinreichend kleines ϱ' gibt es eine exakte Sequenz $\mathcal{O}^r \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}^s \xrightarrow{\lambda \circ \gamma} \mathcal{Q}$ über $K(\varrho')$. β wird durch Schnitte $b_i = (b_{i1}, \dots, b_{is}) \in \Gamma(K(\varrho'), \ker(\lambda \circ \gamma))$, $1 \leq i \leq r$ definiert. Auf β wird Theorem (1.4.4) angewandt, Δ'' sei die dort versprochene Dreiecksmenge. Wir setzen:

$$\varrho_1 \leq \inf(\varrho'_1, \varrho')$$

$$\Delta = \Delta' \cap \Delta''$$

und

$$\tilde{\xi}_i = b_{i1} \xi_1 + \dots + b_{is} \xi_s, \quad 1 \leq i \leq r.$$

Behauptung: $\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_r \in Z_\lambda^l(U(\varrho), \mathcal{O})$ sind Cozyklen, wie sie in Theorem III_{l, m} verlangt werden.

Sei $\varrho \in \Delta$ hinreichend klein und $\xi \in Z_\lambda^l(U(\varrho), \mathcal{O})$ mit $\|\xi\|_{\mathfrak{U}_\varrho} < \infty$.

Nach Theorem II_{l, m} gilt auf $V(\varrho)$:

$$\xi = a_1 \xi_1 + \dots + a_s \xi_s + \delta\eta$$

wobei $a_\nu \in \Gamma(K(\varrho), \mathcal{O})$ und $\eta \in C^{l-1}(V(\varrho), \mathcal{O})$ sind, und es gilt:

$$\|a_\nu\|_e \leq M(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{U}_\varrho}$$

$$\|\eta\|_{\mathfrak{V}_\varrho} \leq N(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{U}_\varrho}.$$

Offensichtlich $(a_1, \dots, a_s) \in \Gamma(K(\varrho), \ker(\lambda \circ \gamma))$. Nach Theorem (1.4.4) gilt:

Es gibt ein $(c_1, \dots, c_r) \in \Gamma(K(\varrho), \mathcal{O}^r)$ mit

$$c_1 b_1 + \dots + c_r b_r = (a_1, \dots, a_s) \quad \text{und}$$

$$\|(c_1, \dots, c_r)\|_e \leq C(\varrho) \|(a_1, \dots, a_s)\|_e.$$

Somit hat man $\xi = c_1 \tilde{\xi}_1 + \dots + c_r \tilde{\xi}_r + \delta\eta$ und

$$\|c_\nu\|_e \leq s C(\varrho) M(\varrho)$$

Gilt für ξ zusätzlich noch $q(e)(\xi) = 0$, dann lassen sich nach Theorem II_{l, m} die a_ν sogar aus $\Gamma(K(\varrho), \mathcal{J}(F(e)))$ wählen. Nach Theorem (1.4.4) II lassen sich jetzt die c_ν aus $\Gamma(K(\varrho), \mathcal{J}(\widehat{F} \circ F(e)))$ wählen, wobei \widehat{F} die in (1.4.4) II versprochene Funktion ist. Damit ist Theorem III_{l, m} vollständig bewiesen.

(4.1.6) Die Theoreme I_{l, m} und II_{l, m} werden durch eine Doppelinduktion nach folgendem Schema bewiesen:

Induktionsanfang:

I_{l, 0} und II_{l, 0} für alle $l \in \mathbb{N}$

I_{l*, m} und II_{l*, m} für alle m mit $0 \leq m \leq m^*$

dabei ist $l^* = \dim W$ (Überdeckungsdimension der Überdeckung W).

1. Induktionsschritt :

$$I_{l+1, m} \text{ und } II_{l, m-1} \text{ und } III_{l+1, m} \implies II_{l, m}$$

2. Induktionsschritt

$$I_{0, m-1}, I_{l+1, m}, II_{l, m}, III_{l+1, m} \implies I_{l, m}$$

4.2 Induktionsanfang

(4.2.1) Wir schreiben noch einmal die Theoreme $I_{l, 0}$ und $II_{l, 0}$ hin :

Theorem $I_{l, 0}$. — Voraussetzung: Sei t_0 ein Punkt aus dem K , \mathcal{O} eine kohärente analytische Garbe auf X_{t_0} .

Behauptung: Für alle $\lambda \geq 1$ sind $H^\lambda(X_{t_0}, \mathcal{O})$ endlichdimensionale Vektorräume über \mathbf{C} .

Beweis. — Da X_{t_0} kompakt ist, ist $I_{l, 0}$ nichts anderes als der wohlbekannte Endlichkeitssatz von Cartan-Serre.

Theorem $II_{l, 0}$. — Voraussetzung: Sei t_0 ein Punkt aus K , \mathcal{O} eine kohärente analytische Garbe auf X_{t_0} , $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}$ eine Messüberdeckungskette bezüglich \mathfrak{A}_{t_0} .

Behauptung: Es $\xi_1, \dots, \xi_s \in Z^1(U \cap X_{t_0}, \mathcal{O})$ und eine Konstante $c > 0$, so dass gilt:

Zu jedem $\xi \in Z^1(U \cap X_{t_0}, \mathcal{O})$ mit $\|\xi\|_{\mathfrak{U}} < \infty$ gibt es komplexe Zahlen $a_1, \dots, a_s \in \mathbf{C}$ und eine Cokette $\eta \in \mathcal{O}^{l-1}(V \cap X_{t_0}, \mathcal{O})$ mit

$$\xi = a_1 \xi_1 + \dots + a_s \xi_s + \delta\eta \text{ auf } V \cap X_{t_0},$$

$$|a_s| \leq M \|\xi\|_{\mathfrak{U}} \text{ und}$$

$$\|\eta\|_{\mathfrak{V}} \leq N \|\xi\|_{\mathfrak{U}}.$$

Dabei haben wir folgende Bezeichnung benutzt: Wenn $m = 0$ ist, d.h. $\varrho \in \mathbf{R}_+^0$ ist, dann schreiben wir $\|\xi\|_{\mathfrak{U}}$ für $\|\xi\|_{\mathfrak{U}_\varrho}$.

Beweis. — Sei weiter $t_0 = 0$ gesetzt. $U \cap X_0$ ist eine Steinsche Überdeckung von X_0 , also gilt $H^1(X_0, \mathcal{O}) = H^1(U \cap X_0, \mathcal{O})$. Nach Cartan-Serre gibt es Cozyklen $\xi_1, \dots, \xi_s \in Z^1(U \cap X_0, \mathcal{O})$, die den \mathbf{C} -Vektorraum $H^1(X_0, \mathcal{O})$ erzeugen.

Somit ist also die Abbildung

$$\mathbb{C}^s \times C^{l-1}(U \cap X_0, \mathcal{O}) \rightarrow Z^l(U \cap X_0, \mathcal{O}), \text{ definiert durch}$$

$$(a_1, \dots, a_s, \eta) \rightarrow a_1 \xi_1 + \dots + a_s \xi_s + \delta\eta, \text{ surjektiv.}$$

In $\mathbb{C}^s \times C^{l-1}(U \cap X_0, \mathcal{O})$ haben wir die Pseudonorm

$$\|(a_1, \dots, a_s, \eta)\| = \sup(|a_1|, \dots, |a_s|, \|\eta\|_{\mathfrak{V}}).$$

Jetzt ist $\|\cdot\|$ eine s -Norm und $\|\cdot\|_{\mathfrak{U}}$ eine 0-Norm (2.1.2). Nach Lemma (2.1.3) gibt es eine Konstante $c > 0$, so dass gilt: Zu jedem $\xi \in Z^l(U \cap X_0, \mathcal{O})$ gibt es ein (a_1, \dots, a_s, η) mit $\xi = a_1 \xi_1 + \dots + a_s \xi_s + \delta\eta$, $|a_\nu| \leq c \|\xi\|_{\mathfrak{U}}$ und $\|\eta\|_{\mathfrak{V}} \leq c \|\xi\|_{\mathfrak{U}}$.

(4.2.2) Wir schreiben noch einmal die Theoreme $I_{l^*, m}$ und $II_{l^*, m}$ hin:

THEOREM $I_{l^*, m}$. — Voraussetzung: Sei t_0 ein Punkt aus K , \mathcal{O} eine kohärente analytische Garbe auf $X_{t_0, m}$.

Behauptung: Für alle $\lambda \geq l^*$ gilt: $\pi_\lambda(\mathcal{O}) = 0$.

Beweis. — $W_{t_0, m}$ ist eine endliche Steinsche Überdeckung von $X_{t_0, m}$ mit der Überdeckungsdimension $\dim W_{t_0, m} \leq l^*$. Sei $V = (V_j)_{j \in J}$ ein fundamentales Überdeckungssystem von Steinschen Mengen eines Punktes $t \in K_m$; für jedes $j \in J$ gilt: $0 = H^\lambda(W_{t_0, m} \cap \pi^{-1}(V_j), \mathcal{O}) = H^\lambda(\pi^{-1}(V_j), \mathcal{O})$.

Somit folgt für den Halm.

$$(\pi_\lambda(\mathcal{O}))_t = \lim_{\substack{\rightarrow \\ j \in J}} H^\lambda(\pi^{-1}(V_j), \mathcal{O}) = 0.$$

Damit ist auch $\pi^\lambda(\mathcal{O}) = 0$.

THEOREM $II_{l^*, m}$. — Voraussetzung: Sei t_0 ein Punkt aus K , \mathcal{O} eine kohärente analytische Garbe auf $X_{t_0, m}$, $\mathfrak{V} \supset \mathfrak{U}$ eine Messüberdeckungskette bezüglich \mathfrak{A}_{t_0} .

Behauptung: Zu jedem $\varrho > 0$ gibt es eine Konstante $N(\varrho) > 0$, so dass gilt:

Zu jedem $\xi \in Z^{l^*}(U(t_0, \varrho), \mathcal{O})$ mit $\|\xi\|_{\mathfrak{U}_\varrho} < \infty$ gibt es ein

$$\eta \in C^{l^*-1}(V(t_0, \varrho), \mathcal{O}) \text{ mit}$$

$$\delta\eta = \xi \text{ auf } V(t_0, \varrho)$$

$$\|\eta\|_{\mathfrak{V}_\varrho} \leq N(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{U}_\varrho}.$$

Der Beweis von Theorem $\text{II}_{l^*,m}$ ist trivial, wenn man sich von vorne herein nur auf alternierende Koketten beschränkt. Offensichtlich lassen sich alle Sätze dieser Arbeit auf dem Niveau alternierender Koketten beweisen. Beschränkt man sich nicht auf alternierende Koketten, so wird der Beweis an dieser Stelle etwas komplizierter.

4.3 1. Induktionsschritt

(4.3.1) Ersetzen wir in Theorem $\text{II}'_{l,m}$ die Voraussetzung « \mathcal{S} kohärente analytische Garbe auf $X_{t_0,m}$ » durch « \mathcal{S} $(t_1 - t_1^{(0)})$ -torsionsrechte kohärente analytische Garbe auf $X_{t_0,m}$ », so erhalten wir ein Theorem, das wir mit Theorem $\text{II}''_{l,m}$ bezeichnen.

In allen Beweisen der Nummer 4.3 wird, der bequemeren Schreibweise wegen, t_0 als der Nullpunkt des \mathbb{C}^{m^*} angenommen. Wir setzen dann dort auch anstelle von $X_{t_0,m}$, $\mathcal{H}^{(t_0,m)}$, $\mathcal{H}_{(t_0,m)}$ der Reihe nach X_m , $\mathcal{H}^{(m)}$, $\mathcal{H}_{(m)}$.

Satz (4.3.2). — Voraussetzung: $\text{II}_{l+1,m}$, $\text{II}_{l,m-1}$.

Behauptung: $\text{II}''_{l,m} \implies \text{II}'_{l,m}$.

Beweis. — \mathcal{S} eine kohärente analytische Garbe auf X_m . Es wird ein $d \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass \mathcal{S}^d t_1 -torsionsrecht ist. Bezüglich \mathfrak{A}_0 wird eine Messüberdeckungskette

$$\mathfrak{U}_0 \supset \mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}_1 \supset \mathfrak{V}_2 \supset \mathfrak{V}_3 \supset \mathfrak{V}_4 \supset \mathfrak{V}$$

gewählt. Auf X_m haben wir folgende kanonische exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{S}^d \rightarrow \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}_d \rightarrow 0$$

Jetzt lässt sich \mathcal{S}_d als kohärente Garbe auf X_{m-1} auffassen.

Auf $\mathfrak{U}_0 \supset \mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}_1$ wird Theorem $\text{III}'_{l,m-1}$ angewandt, ϱ_1'' sei ein in $\text{III}_{l,m-1}$ (1) und \mathcal{A}'' sei ein in $\text{III}_{l,m-1}$ (3) versprochenes Objekt. Auf $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}_1$ wird Corollar (3.6.5) angewandt, $\tilde{\varrho}_1$ sei ein dort verlangter Polyradius. Auf $\mathfrak{U}_0 \supset \mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}_3 \supset \mathfrak{V}_4$ wird der Grauert-Leraysche Satz angewandt, \mathcal{A}_L sei eine dort versprochene Dreiecksmenge. Auf $\mathfrak{U}_0 \supset \mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}_4$ wird Theorem $\text{II}''_{l,m}$ angewandt, ϱ_1' sei ein in $\text{II}''_{l,m}$ (1) und \mathcal{A}' sei ein in $\text{II}''_{l,m}$ (3) versprochenes Objekt. Theorem $\text{II}'_{l,m}$ wird für die Messüberdeckungskette $\mathfrak{U}_0 \supset \mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}$ bewiesen. ϱ_1 und \mathcal{A} sind Objekte, wie sie in $\text{II}'_{l,m}$ (1), (3) verlangt werden. Sie sind folgendermassen konstruiert: Wir wählen $\tilde{\varrho}_1 = (\tilde{\varrho}_1^{(1)}, \dots, \tilde{\varrho}_1^{(m)})$ so,

dass $(\tilde{\varrho}_1^{(2)}, \dots, \tilde{\varrho}_1^{(m)}) \leq \varrho_1''$ ist und ein ϱ_1 mit $\varrho_1 < \inf(\tilde{\varrho}_1, \varrho_1')$; als Dreiecks-
menge Δ nehmen wir $(\mathbf{R}_+ \cap \Delta'') \cap \Delta_L \cap \Delta'$.

Sei $\varrho \in \Delta$ und $\xi \in Z^l(U(\varrho), \mathcal{O})$ mit $\|\xi\|_{\mathfrak{A}_\varrho} < \infty$. Dann ist $q(d)(\xi) \in$
 $Z_\delta^l(U(\varrho), \mathcal{O}_\delta)$, wobei $\delta: \pi_l(\mathcal{O}_\delta) \rightarrow \pi_{l+1}(\mathcal{O}^\delta)$ der kanonische Zusammenhangs-
homomorphismus ist.

Nach (3.6.2) (i) gilt: $\|q(d)(\xi)\|_{\mathfrak{A}_\varrho} \leq \|\xi\|_{\mathfrak{A}_\varrho}$.

Seien $\xi_1', \dots, \xi_q' \in Z_\delta^l(U(\varrho_1'), \mathcal{O}_\delta)$ die in Theorem III $'_{l,m-1}$ versprochenen
Cozyklen.

Nach Theorem III $'_{l,m-1}$ gibt es:

$$a_1, \dots, a_q \in \Gamma(K(\varrho), \mathcal{O}),$$

und ein

$$\eta'' \in C^{l-1}(V_1(\varrho), \mathcal{O}_\delta),$$

so dass gilt:

$$q(d)(\xi) = a_1 \xi_1' + \dots + a_q \xi_q' + \delta \eta'' \quad \text{auf } V_1(\varrho),$$

$$\|a_\nu\|_\varrho \leq M''(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{A}_\varrho},$$

$$\|\eta''\|_{\mathfrak{B}_1 \varrho} \leq N''(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{A}_\varrho}.$$

Nach Satz (3.6.5), angewandt auf $\mathfrak{V}_1 \Rightarrow \mathfrak{V}_2$, gilt:

es gibt $\xi_1, \dots, \xi_q \in Z^l(V_1(\tilde{\varrho}_1), \mathcal{O})$ mit

$$q(d)(\xi_\nu) = \xi_\nu'' \quad \text{auf } V_1(\tilde{\varrho}_1), \quad 1 \leq \nu \leq q,$$

$$\|\xi_\nu\|_{\mathfrak{B}_1 \tilde{\varrho}_1} \leq c_0 < \infty, \quad 1 \leq \nu \leq q$$

Nach (3.6.2) (ii) gilt:

es gibt ein $\eta_2 \in C^{l-1}(V_2(\varrho), \mathcal{O})$ mit

$$q(d)(\eta_2) = \eta'' \quad \text{auf } V_2(\varrho)$$

$$\|\eta_2\|_{\mathfrak{B}_2 \varrho} \leq c \|\eta''\|_{\mathfrak{B}_1 \varrho}$$

Jetzt wird gesetzt:

$$\xi^* = \xi - (a_1 \xi_1 + \dots + a_q \xi_q + \delta \eta_2) \quad \text{auf } V_2(\varrho).$$

Offensichtlich gilt jetzt nach Satz (3.6.10) die Beziehung

$$\|\xi^*\|_{\mathfrak{V}_2\varrho} \leq \tilde{M}(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{U}\varrho},$$

wobei \tilde{M} eine Abbildung ist, die aus dem Hintereinanderschalten obiger Ungleichungen resultiert.

Da $q(d)(\xi^*) = 0$ ist, folgt $\xi^* \in Z^l(V_2(\varrho), \mathcal{S}^d)$.

Die Normen bezüglich der Garbe \mathcal{S}^d bezeichnen wir mit $\|\cdot\|^+$.

Nach Satz (3.6.6), angewandt auf $\mathfrak{V}_2 \supset \mathfrak{V}_3$, gilt:

$$\|\xi^*\|_{\mathfrak{V}_3\varrho}^+ \leq c_1(\varrho) \|\xi^*\|_{\mathfrak{V}_2\varrho}.$$

Nach Grauert-Leray (3.5.3) gibt es:

$$\text{ein } \xi^{**} \in Z^l(U(\varrho), \mathcal{S}^d),$$

$$\text{und ein } \eta_1^* \in C^{l-1}(V_4(\varrho), \mathcal{S}^d),$$

so dass gilt:

$$\xi^* = \xi^{**} + \delta \eta_1^* \quad \text{auf } V_4(\varrho),$$

$$\|\xi^{**}\|_{\mathfrak{U}\varrho}^+ \leq L_1(\varrho) \|\xi^*\|_{\mathfrak{V}_3\varrho}^+,$$

$$\|\eta_1^*\|_{\mathfrak{V}_4\varrho}^+ \leq L_2(\varrho) \|\xi^*\|_{\mathfrak{V}_3\varrho}^+.$$

Seien $\xi'_1, \dots, \xi'_p \in Z^l(U_1(\varrho_1), \mathcal{S}^d)$ die in Theorem II'_{l,m} versprochenen Cozyklen.

Nach Theorem II'_{l,m} gibt es:

$$b_1, \dots, b_p \in \Gamma(K(\varrho), \bar{O})$$

$$\text{und ein } \eta' \in C^{l-1}(V_4(\varrho), \mathcal{S}^d)$$

so dass gilt:

$$\xi^{**} = b_1 \xi'_1 + \dots + b_p \xi'_p + \eta \delta' \quad \text{auf } V_4(\varrho),$$

$$\|b_\nu\|_{\mathfrak{e}} \leq M'(\varrho) \|\xi^{**}\|_{\mathfrak{U}\varrho}^+,$$

$$\|\eta'\|_{\mathfrak{V}_4\varrho}^+ \leq N'(\varrho) \|\xi^{**}\|_{\mathfrak{U}\varrho}.$$

Nach Satz (3.6.9), angewandt auf $\mathfrak{V}_4 \supset \mathfrak{V}$, gilt:

$$\|\eta_1^*\|_{\mathfrak{V}_\varrho} \leq c_2 \|\eta_1\|_{\mathfrak{V}_4 \varrho}^+,$$

$$\|\eta'\|_{\mathfrak{V}_\varrho} \leq c_2 \|\eta'\|_{\mathfrak{V}_4 \varrho}^+.$$

Auf $V(\varrho)$ gilt jetzt:

$$\xi = a_1 \xi_1 + \dots + a_q \xi_q + b_1 \xi'_1 + \dots + b_p \xi'_p + \delta(\eta_2 + \eta_1^* + \eta'),$$

und es gelten die Ungleichungen:

$$\|a_\nu\|_\varrho \leq L(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{A}_\varrho}, \quad 1 \leq \nu \leq q, \quad \|b_\nu\|_\varrho \leq M(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{A}_\varrho}, \quad 1 \leq \nu \leq p,$$

$\|\eta_2 + \eta_1 + \eta'\|_{\mathfrak{V}_\varrho} \leq N(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{A}_\varrho}$, wobei die Funktionen L , M und N aus dem Hintereinanderschalten der obigen Ungleichungen resultieren.

Satz (4.3.3). — Voraussetzung: $I_{l+1, m}$, $II_{l+1, m}$, t_0 sei ein Punkt aus K , \mathcal{O} sei eine $(t_1 - t_1^{(0)})$ -torsionsrechte kohärente analytische Garbe auf $X_{t_0, m}$, $\mathfrak{A}_0 \supset \mathfrak{A} \supset \mathfrak{V}_1 \supset \mathfrak{V}$ sei eine Messüberdeckungskette bezüglich \mathfrak{A}_{t_0} , c sei eine positive reelle Zahl.

Behauptung: Es gibt eine Dreiecksmenge $\Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)$ und von ϱ_1 unabhängige Abbildungen M und N von $\Delta(1/2 \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m)$ nach \mathbf{R}_+ derart, dass für jedes $\varrho \in \Delta(1/2 \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m)$ gilt:

Zu jedem $\xi \in Z^l(U(t_0, \varrho), \mathcal{O})$ mit $\|\xi\|_{\mathfrak{A}_\varrho} < \infty$, $\xi = \sum_{\nu \geq 0} ((t_1 - t_1^{(0)})^\nu / \varrho_1^\nu) \xi'_\nu$, wobei $\xi'_\nu \in \mathcal{O}^l(V_1(t_0, \varrho^*), \mathcal{O})$, $\varrho^* = (3/4 \delta_1(\varrho_m, \dots, \varrho_2), \varrho_2, \dots, \varrho_m)$ und $\|\xi'_\nu\|_{\mathfrak{V}_1 \varrho^*} \leq c \|\xi\|_{\mathfrak{A}_\varrho}$ ist, gibt es eine Folge $(\sigma_\nu)_{\nu \in \mathbf{N}}$ von Coketten $\sigma_\nu \in \mathcal{O}^l(V(t_0, \varrho^*), \mathcal{O})$, so dass, wenn man $\xi_0 = \xi'_0 + ((t_1 - t_1^{(0)}) / \varrho_1^*) \sigma_1$ und $\xi_\nu = \xi'_\nu + (\varrho_1 / \varrho_1^*) \sigma_\nu + ((t_1 - t_1^{(0)}) / \varrho_1^*) \sigma_{\nu+1}$, $\nu > 0$ setzt, gilt:

$$(i) \quad \xi = \sum_{\nu \geq 0} ((t_1 - t_1^{(0)})^\nu / \varrho_1^\nu) \xi_\nu,$$

$$(ii) \quad \xi_\nu \in Z^l(V(t_0, \varrho^*), \mathcal{O}),$$

$$(iii) \quad \|\xi_\nu\|_{\mathfrak{V}_\varrho^*} \leq M(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{A}_\varrho},$$

$$\|\sigma_\nu\|_{\mathfrak{V}_\varrho^*} \leq N(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{A}_\varrho}.$$

Beweis. — Wir wählen ein Messüberdeckungskette $\mathfrak{A}_0 \supset \mathfrak{A} \supset \mathfrak{V}_1 \supset \mathfrak{V}_2 \supset \mathfrak{V}$ bezüglich \mathfrak{A}_0 .

Auf $\mathfrak{V}_1 \supset \mathfrak{V}_2$ wird Satz (3.6.6) angewandt, Δ' sei eine dort versprochene Dreiecksmenge. Corollar (1.4.7) liefert eine Dreiecksmenge Δ'' . Auf $\mathfrak{U}_0 \supset \supset \mathfrak{V}_2 \supset \mathfrak{V}$ wird Corollar IV $_{l+1, m}$ angewandt und Δ''' sei eine dort versprochene Dreiecksmenge.

Der Satz (4.3.3) wird für die Messüberdeckungskette $\mathfrak{U}_0 \supset \mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}$ bewiesen. Für die dort verlangte Dreiecksmenge nehmen wir $\Delta(\delta_1, \dots, \delta_m) = \Delta' \cap \Delta'' \cap \Delta'''$. Sei jetzt $\varrho \in \Delta(1/2\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m)$ hinreichend klein, dann ist $\varrho^* \in \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)$. Sei jetzt $\xi \in Z^l(U(\varrho), \mathcal{O})$ und $\|\xi'_\mu\|_{\mathfrak{V}_1 \varrho^*} \leq c \|\xi\|_{\mathfrak{V}_\varrho}$. Wir schreiben jetzt $\xi = \sum_{\mu=0}^{v-1} \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\mu \xi'_\mu + \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^v \sum_{\mu \geq 0} \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\mu \xi'_{\mu+v}$ und setzen $\eta_v = \sum_{\mu \geq 0} \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\mu \xi'_{v+\mu} \in C^l(V_1(\varrho), \mathcal{O})$,

$$\gamma_v = - \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_1^*}\right)^{v+1} \partial \sum_{\mu=0}^{v-1} \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\mu \xi'_\mu \in Z^{l+1}(V_1(\varrho^*), \mathcal{O}).$$

Offensichtlich gilt $\|\gamma_v\|_{\mathfrak{V}_\varrho^*} \leq (l+1)c \|\xi\|_{\mathfrak{U}_\varrho}$.

Da ξ ein Cozyklus ist, gilt auf $V_1(\varrho)$:

$$\gamma_v = \frac{\varrho_1^*}{\varrho_1} \left(\frac{t_1}{\varrho_1^*}\right)^v \partial \eta_v.$$

Es gilt sogar $\gamma_v \in Z^{l+1}(V_1(\varrho^*), \mathcal{O}^v)$. Nach Satz (3.6.6) folgt:

Es gibt ein $\tilde{\gamma}_v \in C^{l+1}(V_2(\varrho^*), \mathcal{O})$ mit

$$\left(\frac{t_1}{\varrho_1^*}\right)^v \tilde{\gamma}_v = \gamma_v \quad \text{auf } V_2(\varrho^*) \text{ und}$$

$$\|\tilde{\gamma}_v\|_{\mathfrak{V}_2 \varrho^*} \leq M(\varrho^*) \|\gamma_v\|_{\mathfrak{V}_1 \varrho^*}.$$

Da \mathcal{O} t_1 -torsionsrecht ist, gilt sogar

$$\tilde{\gamma}_v \in Z^{l+1}(V_2(\varrho^*), \mathcal{O})$$

und auf $V_2(\varrho)$ gilt:

$$\tilde{\gamma}_v = \frac{\varrho_1^*}{\varrho_1} \partial \eta_v$$

Somit gilt also

$$\pi_{l+1}(\tilde{\gamma}_v) = 0 \text{ in } \Gamma(K(\varrho), \pi_{l+1}(\mathcal{O})).$$

Wegen Theorem $I_{l+1, m}$ gilt nach Corollar (1.4.7) sogar

$$\pi_{l+1}(\tilde{\gamma}_\nu) = 0 \text{ in } \Gamma(K(\varrho^*), \pi_{l+1}(\mathcal{S})).$$

Nach Corollar $II_{l+1, m}$ gilt :
es gibt ein $\sigma_\nu \in C^l(V(\varrho^*), \mathcal{S})$ mit

$$\partial \sigma_\nu = \tilde{\gamma}_\nu \text{ auf } V(\varrho^*) \text{ und}$$

$$\|\sigma_\nu\|_{\mathfrak{V}\varrho^*} \leq N(\varrho^*) \|\tilde{\gamma}_\nu\|_{\mathfrak{V}_2\varrho^*}$$

Insbesondere gilt :

$$\|\sigma_\nu\|_{\mathfrak{V}\varrho^*} \leq N(\varrho^*) M(\varrho^*) (l+1) c \|\xi\|_{\mathfrak{A}\varrho}$$

Jetzt wird gesetzt :

$$\xi_0 = \xi'_0 + \frac{t_1}{\varrho_1^*} \sigma_1$$

$$\xi_\nu = \xi'_\nu - \frac{\varrho_1}{\varrho_1^*} \sigma_\nu + \frac{t_1}{\varrho_1^*} \sigma_{\nu+1}, \quad \nu > 0.$$

Eine elementare Rechnung zeigt

$$\left(\frac{t_1/\varrho_1^*}{\varrho_1/\varrho_1^*}\right)^\nu \partial \xi_\nu = 0, \quad \nu \geq 0.$$

Da \mathcal{S} t_1 -torsionsrecht ist, folgt sogar

$$\xi_\nu \in Z^l(V(\varrho^*), \mathcal{S})$$

weiter gilt noch $\xi = \sum_{\nu \geq 0} \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\nu \xi_\nu$ und $\|\xi_\nu\|_{\mathfrak{V}\varrho^*} \leq L(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{A}\varrho}$, wobei die Funktion L aus dem Hintereinanderschalten obiger Ungleichungen resultiert.

SATZ (4.3.4). — Voraussetzung : $I_{l+1, m}$, $II_{l+1, m}$, $II_{l, m-1}$, t_0 sei ein Punkt aus K , \mathcal{S} sei eine $(t_1 - t_1^{(0)})$ -torsionrechte, kohärente analytische Garbe auf $X_{t_0, m}$, $\mathfrak{A}_0 \supset \mathfrak{A} \supset \mathfrak{V}$ sei eine Messüberdeckungskette bezüglich \mathfrak{A}_{t_0} .

Behauptung : Es gibt

- 1) ein $\varrho_0 \in \mathbf{R}_+^m$, $\varrho_0 > 0$ (unabhängig von \mathcal{S}),
- 2) eine Dreiecksmenge $\Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)$,
- 3) $\xi_1, \dots, \xi_s \in Z^l(U(t_0, \varrho_0), \mathcal{S})$,

4) von ϱ_1 unabhängige Abbildungen L, M, N von $\Delta(1/2 \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m)$ nach \mathbf{R}_+ , so dass für jedes hinreichend kleine $\varrho \in \Delta(1/2 \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m)$ gilt:

Zu jedem $\xi \in Z^l(U(t_0, \varrho), \mathcal{O})$ mit $\|\xi\|_{\mathfrak{A}_\varrho} < \infty$ gibt es a_1, \dots, a_s aus $\Gamma(K(t_0, \varrho), \mathcal{O})$, ein $\eta \in C^{l-1}(V(t_0, \varrho), \mathcal{O})$ und ein $\tilde{\xi} \in Z^l(V(t_0, \varrho), \mathcal{O})$ derart, dass

$$\xi = a_1 \xi_1 + \dots + a_s \xi_s + \delta\eta + \frac{\varrho_1}{\varrho_1^*} \tilde{\xi} \text{ auf } V(\varrho),$$

$$\|a_j\|_\varrho \leq L(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{A}_\varrho}, \quad 1 \leq j \leq s,$$

$$\|\eta\|_{\mathfrak{B}_\varrho} \leq M(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{A}_\varrho},$$

$$\|\tilde{\xi}\|_{\mathfrak{B}_\varrho} \leq N(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{A}_\varrho} \text{ gilt.}$$

Wir wählen eine Messüberdeckungskette

$$\mathfrak{A}_0 \supset \mathfrak{A} \supset \mathfrak{V}' \supset \mathfrak{V}_1 \supset \mathfrak{V}_2 \supset \mathfrak{V}_3 \supset \mathfrak{V}$$

bezüglich \mathfrak{A}_0 .

Auf $\mathfrak{A}_0 \supset \mathfrak{A} \supset \mathfrak{V}' \supset \mathfrak{V}_1$ wird Satz (4.3.3) angewandt Δ' sei die dort versprochene Dreiecksmenge. Auf $\mathfrak{A}_0 \supset \mathfrak{V}_1 \supset \mathfrak{V}_2$ wird Theorem III _{$l, m-1$} angewandt, ϱ_1'' und Δ'' seien die in III _{$l, m-1$} (1) und (2) versprochenen Objekte. Auf $\mathfrak{V}_3 \supset \mathfrak{V}$ wird Satz (3.6.6) angewandt, Δ''' sei die dort versprochene Dreiecksmenge. Auf $\mathfrak{A}_0 \supset \mathfrak{A} \supset \mathfrak{V}_2 \supset \mathfrak{V}$ wird der Grauert-Leraysche Satz (3.5.3) angewandt, Δ_L sei die dort versprochene Dreiecksmenge. Es werden m -tupel $\varrho_1^{**}, \tilde{\varrho}_1, \varrho_0$ aus \mathbf{R}_+^m so gewählt, dass $\varrho_0 < \varrho_1 \leq (\tilde{\varrho}_1^{(1)}, \varrho_1'') < \varrho_1^{**}$ und $\varrho_0 \in \Delta_L$ gilt.

Satz (4.3.4) wird für die Messüberdeckungskette $\mathfrak{A}_0 \supset \mathfrak{A} \supset \mathfrak{V}$ bewiesen. ϱ_0 und Δ sind die in (4.3.4) (1) und (2) verlangten Objekte, dabei wurde $\Delta = \Delta' \cap (\mathbf{R}_+ \times \Delta'') \cap \Delta''' \cap \Delta_L$ gesetzt. Sei jetzt $\varrho \in \Delta(1/2 \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m)$, dann ist

$$\varrho^* = (3/4 \delta_1(\varrho_m, \dots, \varrho_2), \varrho_2, \dots, \varrho_m) \in \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m).$$

Sei jetzt $\xi \in Z^l(U(\varrho), \mathcal{O})$ mit $\|\xi\|_{\mathfrak{A}_\varrho} < \infty$.

Nach Satz (3.6.7) gilt:

$$\xi = \sum_{r \geq 0} \left(\frac{t_1}{\varrho_1} \right)^r \xi'_r \text{ auf } V'(\varrho)$$

$$\xi'_r \in C^l(V'(\varrho^*), \mathcal{O})$$

$$\|\xi'_r\|_{\mathfrak{B}_1 \varrho^*} \leq c \|\xi\|_{\mathfrak{A}_\varrho}.$$

Nach Satz (4.3.3) gibt es eine Familie $(\sigma_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$, $\sigma_\nu \in \mathcal{O}^l(V_1(\varrho^*), \mathcal{O})$ so dass, wenn man noch

$$\xi_0 = \xi'_0 + \frac{t_1}{\varrho_1^*} \sigma_1$$

$$\xi_\nu = \xi'_\nu - \frac{\varrho_1}{\varrho_1^*} \sigma_\nu + \frac{t_1}{\varrho_1^*} \sigma_{\nu+1}, \quad \nu > 0, \text{ setzt, gilt:}$$

$$\xi = \sum_{\nu \geq 0} \left(\frac{t_1}{\varrho_1} \right)^\nu \xi_\nu \text{ auf } V_1(\varrho),$$

$$\xi_\nu \in Z^l(V_1(\varrho_*), \mathcal{O}),$$

$$\|\xi_\nu\|_{\mathfrak{W}_1 \varrho^*} \leq M(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{W} \varrho},$$

$$\|\sigma_\nu\|_{\mathfrak{W}_1 \varrho^*} \leq N(\delta) \|\xi\|_{\mathfrak{W} \varrho}.$$

Auf $X_{t_0, m}$ hat man die kanonische kurze exakte Sequenz:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}^1 \rightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{q(1)} \mathcal{O}_1 \rightarrow 0$$

\mathcal{O}_1 kann als kohärente analytische Garbe auf $X_{t_0, m-1}$ aufgefasst werden. Man hat noch den kanonischen Homomorphismus $\delta: \pi_l(\mathcal{O}_1) \rightarrow \pi_{l+1}(\mathcal{O}^1)$.

Jetzt gilt:

$$q(1)(\xi_0) = q(1)(\xi'_0) \in Z_\delta^l(V_1(\varrho^*), \mathcal{O}_1),$$

$$q(1)(\xi_\nu) = q(1)\left(\xi'_\nu - \frac{1}{\varrho_1^*} \sigma_\nu\right) \in Z_\delta^l(V_1(\varrho^*), \mathcal{O}_1), \quad \nu > 0.$$

Nach Satz (3.6.2) (i) gilt:

$$\|q(1)(\xi_\nu)\|_{\mathfrak{W}_1 \varrho^*} \leq \|\xi_\nu\|_{\mathfrak{W}_1 \varrho^*}$$

Seien $\widehat{\xi}_1, \dots, \widehat{\xi}_s \in Z_\delta^l(V_1(\varrho''), \mathcal{O}_1)$ die in Theorem III_{l, m-1} versprochenen Cozyklen.

Nach Theorem III_{l, m-1} gibt es:

$$a_{\nu s}, \dots, a_{\nu 1} \in \Gamma(K(\varrho^*), \mathcal{O})$$

$$\text{und ein } \widehat{\omega}_\nu \in \mathcal{O}^{l-1}(V_2(\varrho^*), \mathcal{O}_1)$$

so dass gilt :

$$q(1)(\xi_\nu) = a_{\nu 1} \widehat{\xi}_1 + \dots + a_{\nu s} \widehat{\xi}_s + \delta \widehat{\omega}_\nu \quad \text{auf } V_2(\varrho^*)$$

$$\|a_{\nu j}\|_{\varrho^*} \leq M'(\varrho^*) \|\xi_\nu\|_{\mathfrak{V}_1 \varrho^*}, \quad 1 \leq j \leq s$$

$$\|\widehat{\omega}_\nu\|_{\mathfrak{V}_2 \varrho^*} \leq N'(\varrho^*) \|\xi_\nu\|_{\mathfrak{V}_1 \varrho^*}$$

Nach Corollar (3.6.5), angewandt auf $\mathfrak{V}_1 \subset \subset \mathfrak{V}_2$, gilt :

$$\text{es gibt } \check{\xi}_1, \dots, \check{\xi}_s \in Z^l(V_2(\check{\varrho}_1), \mathcal{O}) \quad \text{mit}$$

$$q(1)(\check{\xi}_j) = \widehat{\xi}_j \quad \text{auf } V_2(\check{\varrho}_1), \quad 1 \leq j \leq s$$

$$\|\check{\xi}_j\|_{\mathfrak{V}_2 \check{\varrho}_1} \leq c_0 < \infty, \quad 1 \leq j \leq s$$

Nach Satz (3.6.2) (ii), angewandt auf $\mathfrak{V}_2 \supset \supset \mathfrak{V}_3$, gilt :

$$\text{es gibt ein } \check{\omega}_\nu \in C^{l-1}(V_3(\varrho^*), \mathcal{O}) \quad \text{mit}$$

$$q(1)(\check{\omega}_\nu) = \widehat{\omega}_\nu \quad \text{auf } V_3(\varrho^*)$$

$$\|\check{\omega}_\nu\|_{\mathfrak{V}_3 \varrho^*} \leq c \|\widehat{\omega}_\nu\|_{\mathfrak{V}_2 \varrho^*}$$

Jetzt wird gesetzt :

$$\xi_0^* = \xi'_0 - (a_{01} \check{\xi}_1 + \dots + a_{0s} \check{\xi}_s + \delta \check{\omega}_0) \quad \text{auf } V_3(\varrho^*)$$

$$\xi_\nu^* = \xi'_\nu - \frac{\varrho_1}{\varrho_1^*} \sigma_\nu - (a_{\nu 1} \check{\xi}_1 + \dots + a_{\nu s} \check{\xi}_s + \delta \check{\omega}_\nu) \quad \text{auf } V_3(\varrho^*), \quad \nu \geq 1$$

Nach Satz (3.6.10) gilt jetzt

$$\|\xi^*\|_{\mathfrak{V}_3 \varrho^*} \leq \widetilde{M}(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{V}_2 \varrho}$$

dabei wurde

$$\widetilde{M}(\varrho) = M(\varrho) (1 + sM'(\varrho^*)c_0 + lcN'(\varrho^*))$$

gesetzt. Man beachte, dass \widetilde{M} eine von ϱ_1 unabhängige Funktion ist!
Da $q(1)(\xi_\nu^*) = 0$ ist, folgt $\xi_\nu^* \in Z^l(V_3(\varrho^*), \mathcal{O}^1)$

Nach Satz (3.6.6) gilt:

es gibt ein $\tilde{\xi}_v^* \in \mathcal{O}^l(V(\varrho^*), \mathcal{D})$ mit

$$\frac{t_1}{\varrho_1^*} \tilde{\xi}_v^* = \xi_v^* \text{ auf } V(\varrho^*)$$

$$\|\tilde{\xi}_v^*\|_{\mathfrak{U}_{\varrho^*}} \leq M''(\varrho^*) \|\xi_v^*\|_{\mathfrak{U}_s \varrho^*}$$

Auf $V(\varrho^*)$ gilt somit:

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_1^*} \left(\frac{t_1}{\varrho_1} \tilde{\xi}_v^* + \sigma_v \right) = \xi_v' - (a_{v1} \check{\xi}_1 + \dots + a_{vs} \check{\xi}_s + \delta \check{\omega}_v)$$

Jetzt wird gesetzt:

$$a_j = \sum_{v \geq 0} \left(\frac{t_1}{\varrho_1} \right)^v a_{vj}, \quad 1 \leq j \leq s$$

$$\check{\omega} = \sum_{v \geq 0} \left(\frac{t_1}{\varrho_1} \right)^v \check{\omega}_v$$

$$\check{\xi} = \sum_{v \geq 0} \left(\frac{t_1}{\varrho_1} \right)^v \left(\frac{t_1}{\varrho_1} \tilde{\xi}_v^* + \sigma_v \right)$$

Insgesamt gibt es nach Anwendung von Satz (3.6.8) Funktionen L^*, M^*, N^* von Δ nach \mathbf{R}_+ derart, dass die Ungleichungen $\|a_j\|_{\varrho} \leq L^*(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{U}_{\varrho}}$, $\|\check{\omega}\|_{\mathfrak{U}_{\varrho}} \leq M^*(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{U}_{\varrho}}$, $\|\check{\xi}\|_{\mathfrak{U}_{\varrho}} \leq N^*(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{U}_{\varrho}}$ gelten.

Auf $V(\varrho)$ gilt jetzt:

$$\xi = a_1 \check{\xi}_1 + \dots + a_s \check{\xi}_s \delta \check{\omega} + \frac{\varrho_1}{\varrho_1^*} \check{\xi}$$

Nach Grauert-Laray (3.5.3) gibt es

$$\xi_1, \dots, \xi_s \in Z^l(U(\varrho_0), \mathcal{D}),$$

$$\eta_1, \dots, \eta_s \in \mathcal{O}^{l-1}(V(\varrho_0), \mathcal{D}),$$

so dass auf $V(\varrho)$ gilt:

$$\check{\xi}_j = \xi_j + \delta \eta_j, \quad 1 \leq j \leq s$$

$$\|\eta_j\|_{\mathfrak{U}_{\varrho_0}} \leq L_2(\varrho_1) \|\xi_j\|_{\mathfrak{U}_2 \varrho_0}$$

Somit gilt jetzt auf $V(\varrho)$:

$$\xi = \sum_{j=1}^s a_j \xi_j + \delta \left(\widetilde{\omega} + \sum_{j=1}^s a_j \eta_j \right) + \frac{\varrho_1}{\varrho_1^*} \widetilde{\xi}$$

Und es gibt nach Anwendung von Satz (3.6.10) eine Funktion M^{**} von Δ nach \mathbf{R}_+ derart, dass

$$\| \widetilde{\omega} + \sum_{j=1}^s a_j \eta_j \|_{\mathfrak{V}_\varrho} \leq M^{**}(\varrho) \| \xi \|_{\mathfrak{U}_\varrho} \quad \text{gilt.}$$

SATZ (4.3.5). — $\mathfrak{I}_{l+1, m}$ und $\mathfrak{II}_{l+1, m}$ und $\mathfrak{II}_{l, m-1} \implies \mathfrak{II}'_{l, m}$.

Beweis. — Wir wählen eine Messüberdeckungskette

$$\mathfrak{U}_0 \supset \mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}_1 \supset \mathfrak{V} \quad \text{bezüglich } \mathfrak{A}_0.$$

Auf $\mathfrak{U}_0 \supset \mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}_1$ wird Satz (4.3.4) angewandt, $\varrho_0, A'', \xi_1, \dots, \xi_s \in Z^l(U(\varrho_1), \mathcal{O})$ und L, M, N seien die in (4.3.4) (1) bis (4) versprochenen Objekte. Auf $\mathfrak{U}_0 \supset \mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}_1 \supset \mathfrak{V}$ wird der Grauert-Leraysche Satz (3.5.3) angewandt, Δ_L, L_1 und L_2 seien die dort versprochenen Objekte. Der Satz (4.3.5) wird für die Messüberdeckungskette $\mathfrak{U}_0 \supset \mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}$ bewiesen. ϱ_0 ist das in $\mathfrak{II}'_{l, m}$ versprochene m -tupel. Die in $\mathfrak{II}'_{l, m}$ versprochene Dreiecksmenge Δ wird fongendermassen konstruiert:

Es wird gesetzt:

$$A''(\delta_1, \dots, \delta_m) = A' \cap \Delta_L,$$

$$\varrho_1^* = 3/4 \delta_1(\varrho_2, \dots, \varrho_m)$$

$$\widehat{\delta}_1 = \inf \left(1/2 \delta_1, \frac{\varrho_1^*}{2L_1 N} \right)$$

$$\Delta = (\widehat{\delta}_1, \delta_2, \dots, \delta_m)$$

Man beachte, dass L_1, N, ϱ_1^* von ϱ_1 unabhängige Funktionen sind!

Sei jetzt $\varrho \in \Delta$ und $\xi \in Z^l(U(\varrho), \mathcal{O})$ mit $\| \xi \|_{\mathfrak{U}_\varrho} < \infty$ Vermöge Satz (4.3.4) und Satz (3.5.2) werden Folgen

$$(\xi_\nu)_{\nu \in \mathbf{N}} \quad \xi_\nu \in Z^l(U(\varrho), \mathcal{O})$$

$$(\xi'_\nu)_{\nu \in \mathbf{N}} \quad \xi'_\nu \in Z^l(V_1(\varrho), \mathcal{O})$$

$$(\eta'_\nu)_{\nu \in \mathbf{N}} \quad \eta'_\nu \in \mathcal{O}^{l-1}(V_1(\varrho), \mathcal{O})$$

$$(\eta_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \quad \eta_\nu \in C^{l-1}(V(\varrho), \mathcal{O})$$

$$(a_{\nu j})_{\nu \in \mathbb{N}} \quad a_{\nu j} \in \Gamma(K(\varrho), \bar{O})$$

$$1 \leq j \leq s$$

induktiv definiert, so dass gilt:

$$\xi_0 = \xi, \xi'_0 = 0$$

$$\xi_\nu = a_{\nu 1} \xi_1 + \dots + a_{\nu s} \xi_s + \delta \eta'_\nu + \xi'_{\nu+1}$$

$$\xi'_{\nu+1} = \xi_{\nu+1} + \delta \eta_\nu$$

$$\|a_{\nu j}\|_{\mathfrak{Q}} \leq L(\varrho) \|\xi_\nu\|_{\mathfrak{A}_\varrho}$$

$$\|\eta'_\nu\|_{\mathfrak{B}_1 \varrho} \leq M(\varrho) \|\xi_\nu\|_{\mathfrak{A}_\varrho}$$

$$\|\xi_{\nu+1}\|_{\mathfrak{B}_1 \varrho} \leq \frac{\varrho_1}{\varrho_1^*} N(\varrho) \|\xi_\nu\|_{\mathfrak{A}_\varrho}$$

$$\|\xi_{\nu+1}\|_{\mathfrak{A}_\varrho} \leq L_1(\varrho) \|\xi'_{\nu+1}\|_{\mathfrak{B}_1 \varrho}$$

$$\|\eta_\nu\|_{\mathfrak{B}_\varrho} \leq L_2(\varrho) \|\xi_{\nu+1}\|_{\mathfrak{B}_1 \varrho}$$

Setzen wir jetzt

$$\omega_\nu = \eta'_\nu + \eta_\nu \quad \text{auf } V(\varrho)$$

dann gilt offensichtlich:

$$\xi_\nu = a_{\nu 1} \xi_1 + \dots + a_{\nu s} \xi_s + \omega_\nu + \xi_{\nu+1}$$

$$\|\omega_\nu\|_{\mathfrak{B}_\varrho} \leq \tilde{M}(\varrho) \|\xi_\nu\|_{\mathfrak{A}_\varrho}$$

$$\|\xi_{\nu+1}\|_{\mathfrak{A}_\varrho} \leq \frac{\varrho_1}{\varrho_1^*} L_1(\varrho) N(\varrho) \|\xi_\nu\|_{\mathfrak{A}_\varrho}$$

dabei wurde

$$\tilde{M}(\varrho) = M(\varrho) + \frac{\varrho_1}{\varrho_1^*} L_2(\varrho) N(\varrho)$$

gesetzt.

Aus der letzten Ungleichung folgt durch Iteration

$$\|\xi_\nu\|_{\mathfrak{A}_\varrho} \leq \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_1^*}\right)^\nu (L_1(\varrho) N(\varrho))^\nu \|\xi\|_{\mathfrak{A}_\varrho}$$

Da aber $\frac{\varrho_1}{\varrho_1^*} L_1(\varrho) N(\varrho) \leq 1/2$ ist folgt:

$$\|\xi_\nu\|_{\mathfrak{A}_\varrho} \leq \frac{1}{2^\nu} \|\xi\|_{\mathfrak{A}_\varrho}$$

$$\|a_{\nu j}\|_\varrho \leq \frac{1}{2^\nu} L(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{A}_\varrho}, \quad 1 \leq j \leq s$$

$$\|\omega_\nu\|_{\mathfrak{B}_\varrho} \leq \frac{1}{2^\nu} \tilde{M}(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{A}_\varrho}$$

Jetzt wird gesetzt:

$$a_j = \sum_{\nu \geq 0} a_{\nu j}, \quad 1 \leq j \leq s$$

$$\omega = \sum_{\nu \geq 0} \omega_\nu$$

dann gilt

$$\xi = a_1 \xi_1 + \dots + a_s \xi_s + \delta \omega \quad \text{auf } V(\varrho)$$

$$\|a_j\|_\varrho \leq 2L(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{A}_\varrho},$$

$$\|\omega_\nu\|_{\mathfrak{B}_\varrho} \leq 2\tilde{M}(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{A}_\varrho}.$$

SATZ (4.3.6). — Voraussetzung: $I_{l+1, m}$, $II_{l+1, m}$, $II_{l, m-1}$.

Behauptung: $II'_{l, m} \implies II_{l, m}$.

Beweis: Wir wählen eine Messüberdeckungskette

$$\mathfrak{A}_0 \supset \mathfrak{A} \supset \mathfrak{A}_1 \supset \mathfrak{A}_2 \supset \mathfrak{A}_3 \supset \mathfrak{B} \quad \text{bezüglich } \mathfrak{A}_0.$$

Sei $d^+ \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass \mathcal{O}^{d^+} t_1 -torsionsrecht ist. Sei nun $e \in \mathbb{N}^m$ und ohne Einschränkung sei $e_1 > d^+$.

Auf $\mathfrak{A}_0 \supset \mathfrak{A} \supset \mathfrak{A}_1$ wird Theorem III $_{l, m-1}$ angewandt; $\varrho'_1, \Delta'_e, F_{e_1}$ sind die in III $_{l, m-1}$ versprochenen Objekte. Auf $\mathfrak{A}_1 \supset \mathfrak{A}_2$ wird Satz (3.6.6) angewandt, Δ'' sei die dort versprochene Dreiecksmenge. Auf $\mathfrak{A}_0 \supset \mathfrak{A} \supset \mathfrak{A}_3 \supset \mathfrak{B}$ wird der Grauert-Leraysche Satz (3.5.2) angewandt, Δ_L sei die dort versprochene Dreiecksmenge. Auf $\mathfrak{A}_0 \supset \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ wird Theorem II' $_{l, m}$ angewandt; ϱ'''_1, Δ''' sind die in II' $_{l, m}$ (1), (3) versprochenen Objekte.

Theorem II $_{l, m}$ wird für die Messüberdeckungskette $\mathfrak{A}_0 \supset \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ bewiesen. Es werden $\varrho_0, \bar{\varrho}, \tilde{\varrho} \in \mathbb{R}_+^m$ so gewählt, dass $\varrho_0 < \bar{\varrho} < \varrho'''_1 < \tilde{\varrho} < \varrho'_1$ und $\bar{\varrho} \in \Delta'''$ gilt.

Es wird

$$\Delta_e = (\mathbf{R}_+ \times \Delta'_e) \cap \Delta'' \cap \Delta \cap \Delta''' \quad (\text{unterhalb } \varrho_1)$$

gesetzt. Die Abbildung $F: \mathbf{N}^m \rightarrow \mathbf{N}^m$ wird durch

$$\begin{aligned} (e_1, e_2, \dots, e_m) &\mapsto (e_1 - d^+, F_{e_1}(e_2, \dots, e_m)) && \text{wenn } e_1 > d^+ \\ (e_1, e_2, \dots, e_m) &\mapsto (0, \dots, 0) && \text{wenn } e_1 < d^+ \end{aligned}$$

erklärt.

Sei jetzt $\varrho \in \Delta_e$ und $\xi \in Z^l(U(\varrho), \mathcal{D})$ mit $\|\xi\|_{\mathfrak{U}_\varrho} < \infty$ und $q(e)(\xi) = 0$.

Seien $\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_s \in Z^l(U(\varrho'_1), \mathcal{D}_{e_1})$ die in Theorem III _{$l, m-1$} versprochenen Cozyklen.

Nach Theorem III _{$l, m-1$} gibt es:

$$a_1, \dots, a_s \in \Gamma(K(\varrho), \mathcal{F}(F_{e_1}(e_2, \dots, e_m))),$$

$$\text{und ein } \tilde{\eta} \in \mathcal{O}^{l-1}(U_1(\varrho), \mathcal{D}_{e_1}),$$

so dass gilt:

$$q(e_1)(\xi) = a_1 \tilde{\xi}_1 + \dots + a_s \tilde{\xi}_s + \delta \tilde{\eta} \quad \text{auf } U_1(\varrho),$$

$$\|a_j\|_e \leq M'_e(\varrho) \|q(d)(\xi)\|_{\mathfrak{U}_\varrho},$$

$$\|\tilde{\eta}\|_{\mathfrak{U}_1, e} \leq N'_e(\varrho) \|q(d)(\xi)\|_{\mathfrak{U}_\varrho}.$$

Nach Satz (3.6.2) (i) gilt:

$$\|q(e_1)(\xi)\|_{\mathfrak{U}_\varrho} \leq \|\xi\|_{\mathfrak{U}_\varrho}.$$

Nach Corollar (3.6.5), angewandt auf $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{U}_1$, gibt es

$$\xi'_1, \dots, \xi'_s \in Z^l(U_1(\tilde{\varrho}), \mathcal{D}) \quad \text{mit}$$

$$q(e_1)(\xi'_j) = \tilde{\xi} \quad \text{auf } U_1(\tilde{\varrho}), \quad 1 \leq j \leq s,$$

$$\|\xi'_j\|_{\mathfrak{U}_1, \tilde{\varrho}} < c_0, \quad 1 \leq j \leq s$$

Nach Satz (3.6.2) gibt es

$$\bar{\eta} \in C^{l-1}(U_2(\varrho), \mathcal{D}) \quad \text{mit}$$

$$q(e_1)(\bar{\eta}) = \tilde{\eta} \quad \text{auf } U_2(\varrho)$$

$$\|\bar{\eta}\|_{\mathfrak{A}_2 \varrho} \leq c \|\eta\|_{\mathfrak{A}_1 \varrho}$$

Jetzt wird gesetzt:

$$\xi^* = \xi - (a_1 \xi'_1 + \dots + a_s \xi'_s + \delta \bar{\eta}) \quad \text{auf } U_2(\varrho)$$

Wegen Satz (3.6.10) gilt:

$$\|\xi^*\|_{\mathfrak{A}_2 \varrho} \leq \tilde{M}(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{A} \varrho}$$

dabei wurde

$$\tilde{M}(\varrho) = 1 + s M'_e(\varrho) c_0 + l c N'_e(\varrho)$$

gesetzt. Offensichtlich ist $\xi^* \in Z^l(U_2(\varrho), \mathcal{S}^{e_1})$.

Nach Satz (3.6.6) gibt es

$$\widehat{\xi} \in C^l(U_3(\varrho), \mathcal{D}) \quad \text{mit}$$

$$\left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^{e_1} \widehat{\xi} = \xi^* \quad \text{auf } U_3(\varrho)$$

$$\|\widehat{\xi}\|_{\mathfrak{A}_3 \varrho} \leq M(\varrho) \|\xi^*\|_{\mathfrak{A}_2 \varrho}$$

Da \mathcal{S}^{a^+} t_1 -torsionsrecht ist, gilt sogar

$$\left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^{a^+} \widehat{\xi} \in Z^l(U_3(\varrho), \mathcal{D})$$

Nach Satz (3.5.2) gibt es:

$$\xi^{**} \in Z^l(U(\varrho), \mathcal{D}),$$

$$\eta^{**} \in C^{l-1}(V(\varrho), \mathcal{D}),$$

so dass gilt :

$$\left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^{a^+} \widehat{\xi} = \xi^{**} + \delta\eta^{**} \quad \text{auf } V(\varrho),$$

$$\|\xi^{**}\|_{\mathfrak{A}\varrho} \leq L_1(\varrho) \|\widehat{\xi}\|_{\mathfrak{A}_3\varrho},$$

$$\|\eta^{**}\|_{\mathfrak{B}\varrho} \leq L_2(\varrho) \|\widehat{\xi}\|_{\mathfrak{A}_3\varrho}.$$

Seien $\xi_1, \dots, \xi_r \in Z^l(U(\varrho_1''), \mathcal{O})$ die in Theorem II'_{i, m} versprochenen Cozyklen.

Nach Theorem $\widetilde{\text{II}}'_{i, m}$ gibt es :

$$b_1, \dots, b_r \in \Gamma(K(\varrho), \mathcal{O}),$$

und ein $\eta^* \in \mathcal{O}^{l-1}(V(\varrho), \mathcal{O})$

so dass gilt

$$\xi^{**} = b_1 \xi_1 + \dots + b_r \xi_r + \delta\eta^*,$$

$$\|b_j\|_{\varrho} \leq M''(\varrho) \|\xi^{**}\|_{\mathfrak{A}\varrho}, \quad 1 \leq j \leq r,$$

$$\|\eta^*\|_{\mathfrak{B}\varrho} \leq N''(\varrho) \|\xi^{**}\|_{\mathfrak{A}\varrho}.$$

Jetzt gilt auf $V(\varrho)$:

$$\widehat{\xi} = \sum_1^s a_j \xi'_j + \sum_1^r \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^{e_1 - a^+} b_j \xi + \delta\bar{\eta} + \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^{e_1 - a^+} \delta(\eta^{**} + \eta^*)$$

Nach Theorem II'_{i, m} gibt es :

$$c_{i1}, \dots, c_{ir} \in \Gamma(K(\bar{\varrho}), \mathcal{O}), \quad 1 \leq i \leq s,$$

und ein $\eta_i \in \mathcal{O}^{l-1}(V(\bar{\varrho}), \mathcal{O})$,

so dass gilt :

$$\xi'_i = c_{i1} \xi_1 + \dots + c_{ir} \xi_r + \delta\eta_i \quad \text{auf } V(\varrho),$$

$$\|c_{ij}\|_{\bar{\varrho}} \leq M''(\bar{\varrho}) c_0, \quad 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq r,$$

$$\|\eta_i\|_{\mathfrak{B}\bar{\varrho}} \leq N''(\bar{\varrho}) c_0, \quad 1 \leq i \leq s.$$

Jetzt wird gesetzt:

$$\alpha_j = \left(\frac{t_1}{\varrho_1} \right)^{e_1 - a^+} b_j + \sum_{i=1}^s a_i c_{ij} \quad 1 \leq j \leq r,$$

$$\eta = \bar{\eta} + \left(\frac{t_1}{\varrho_1} \right)^{e_1 - a^+} (\eta^{**} + \eta^*) + \sum_{i=1}^s a_i \eta_i,$$

und damit gilt

$$\xi = \alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_r \xi_r + \delta \eta.$$

Wegen Satz (3.6.10) gelten noch die Ungleichungen

$$\|\alpha_j\|_e \leq M_e(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{U}_\varrho}, \quad 1 \leq j \leq r,$$

$$\|\eta\|_{\mathfrak{W}_\varrho} \leq N_e(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{U}_\varrho},$$

Dabei sind M_e und N_e Funktionen, die sich aus dem Hintereinanderschalten obiger Ungleichungen ergeben.

4.4 2. Induktionsschritt

(4.4.1) Sei $e^* \in \mathbf{N}^m$ und $e^* > 0$ und t_0 ein Punkt aus K , dann gilt:

$$(\pi_l(\mathcal{O}_{t_0, e^*}))_{t_0} = H^l(X, \mathcal{O}_{t_0, e^*}) = H^l(X_{t_0}, \mathcal{O}_{t_0, e^*})$$

Man kann also insbesondere $H^l(X, \mathcal{O}_{t_0, e^*})$ als Cohomologiemodul mit Werten in einer kohärenten Garbe auf einem kompakten komplexen Raum auffassen. Daher ist $H^l(X, \mathcal{O}_{t_0, e^*})$ ein endlichdimensionaler \mathbf{C} -Vektorraum.

Man hat stets folgende kanonische Homomorphismen:

$$q(t_0, e^*) : H^l(X(\varrho_0), \mathcal{O}) \rightarrow H^l(X, \mathcal{O}_{t_0, e^*})$$

$$q(t_0, e^*)_{t_0} : (\pi_l(\mathcal{O}))_{t_0} \rightarrow (\pi_l(\mathcal{O}_{t_0, e^*}))_{t_0}$$

DEFINITION (4.4.2). — Sei $\varrho_0 \in \mathbf{R}_+^m$, $\varrho_0 > 0$ und t_0 ein Punkt K aus. Ein endliches System $\xi_1, \dots, \xi_s \in H^l(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{O})$ heisst ein $q(t_0, e^*)$ -Erzeugendensystem, wenn $q(t_0, e^*)(\xi_1), \dots, q(t_0, e^*)(\xi_s)$ über \mathbf{C} das $(\text{im } q(t_0, e^*))_{t_0}$ erzeugen.

(4.4.3) Da $H^d(X, \mathcal{O}_{e^*})$ ein endlichdimensionaler \mathbf{C} -Vektorraum ist, gibt es für hinreichend kleine ϱ_0 $q(t_0, e^*)$ -Erzeugendensysteme.

Aus Theorem II_{l, m} leiten wir das folgende für den 2. Induktionsschritt wichtige Theorem her:

THEOREM $V_{l,m}$. — Voraussetzung: Sei t_0 ein Punkt aus K , \mathcal{O} eine kohärente analytische Garbe auf $X_{t_0, m}$.

Behauptung: Es gibt:

- 1) ein $e^* \in \mathbb{N}^m$, $e^* > 0$,
- 2) eine Abbildung $F: \mathbb{N}^m \rightarrow \mathbb{N}^m$ mit $\lim_{e \rightarrow \infty} F(e) = \infty$,
- 3) zu jedem $e \in \mathbb{N}^m$ eine Dreiecksmenge Δ_e ,
- 4) zu jedem $q(t_0, e^*)$ -Erzeugendensystem $\xi_1, \dots, \xi_s \in H^l(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{O})$ ein $\varrho^* \in \mathbb{R}_+^m$, $\varrho^* \leq \varrho_0$,

so dass für jedes $e \in \mathbb{N}^m$ und jedes $\varrho \in \Delta_e$ mit $\varrho < \varrho^*$ gilt:

Zu jedem $\xi \in H^l(X(t_0, \varrho^*), \mathcal{O})$ mit $q(t_0, e)(\xi) = 0$, gibt es $a_1, \dots, a_s \in \Gamma(K(\varrho), \mathcal{G}(t_0, F(e)))$ mit

$$\xi = a_1 \xi_1 + \dots + a_s \xi_s \text{ auf } X(t_0, \varrho).$$

SATZ (4.4.4). — Theorem $II_{l,m} \implies$ Theorem $V_{l,m}$

Beweis. — Es wird eine Messüberdeckungskette $\mathfrak{U}_0 \supset \mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}$ bezüglich \mathfrak{A}_0 gewählt. Auf $\mathfrak{U}_0 \supset \mathfrak{U}$ wird Cor. (3.6.4) und auf $\mathfrak{U}_0 \supset \mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}$ wird Theorem $II_{l,m}$ angewandt.

Seien $\varrho_+ > 0$,

$$\gamma_1^*, \dots, \gamma_p^* \in Z^l(U(\varrho_+), \mathcal{O}),$$

$$(\Delta_e)_{e \in \mathbb{N}^m},$$

$$F: \mathbb{N}^m \rightarrow \mathbb{N}^m,$$

die in Theorem $II_{l,m}$ versprochenen Elemente.

Wir wählen ein $e^* \in \mathbb{N}^m$ so, dass $F(e^*) > 0$ ist.

Sei jetzt $\xi_1, \dots, \xi_s \in H^l(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{O})$ ein $q(t_0, e^*)$ -Erzeugendensystem, und sei $\tilde{\varrho} \in \Delta_{e^*}$ so gewählt, dass $\tilde{\varrho} < \varrho_0$ ist.

Nach Corollar (3.6.4) gibt es

$$\xi_1^*, \dots, \xi_s^* \in Z^l(U(t_0, \tilde{\varrho}), \mathcal{O}),$$

so dass gilt:

$$\xi_\mu^* \text{ repräsentiert } \xi_\mu | X(t_0, \tilde{\varrho}), \|\xi_\mu^*\|_{\mathfrak{U}_{\tilde{\varrho}}} < \infty.$$

Es gibt jetzt $c_{\nu\mu} \in \mathbb{C}$, $1 \leq \nu \leq p$, $1 \leq \mu \leq s$ mit

$$q(t_0, e^*) \left(\gamma_\nu^* - \sum_{\mu=1}^s c_{\nu\mu} \xi_\mu^* \right) = 0, \quad 1 \leq \nu \leq p.$$

Nach Theorem II_{l, m} gibt es

$$a_{\nu 1}, \dots, a_{\nu p} \in \Gamma(K(t_0, \tilde{\varrho}), \mathcal{J}(t_0, F(e^*))), \quad 1 \leq \nu \leq p,$$

so dass gilt:

$$(*) \quad \gamma_\nu^* - \sum_{\mu=1}^s c_{\nu\mu} \xi_\mu^* = \sum_{\lambda=1}^p a_{\nu\lambda} \gamma_\lambda^*, \quad 1 \leq \nu \leq p.$$

Da die $a_{\nu\lambda}$ im Punkte t_0 verschwinden, lässt sich das Gleichungssystem in einer Umgebung von t_0 holomorph nach den γ_ν^* auflösen. Es gibt also ein $\varrho^* \leq \tilde{\varrho}$ und $b_{\nu\mu} \in \Gamma(K(\varrho^*), \mathcal{O})$ so dass gilt:

$$\gamma_\nu^* = \sum_{\mu=1}^s b_{\nu\mu} \xi_\mu^* \text{ auf } X(\varrho^*).$$

Sei jetzt $e \in \mathbb{N}^m$, $\varrho \in \mathcal{A}_e$ mit $\varrho < \varrho^*$, und $\xi \in H^l(X(t_0, \varrho^*), \mathcal{O})$ mit $q(t_0, e)(\xi) = 0$.

Nach Corollar (3.6.4) gibt es ein $\xi^* \in Z^l(U(t_0, \varrho), \mathcal{O})$ mit

$$\begin{aligned} \xi^* \text{ repräsentiert } \xi \mid X(t_0, \varrho) \text{ und} \\ \|\xi^*\|_{\mathfrak{U}_\varrho} < \infty. \end{aligned}$$

Nach Theorem II_{l, m} gibt es

$$\begin{aligned} a_1, \dots, a_p \in \Gamma(K(t_0, \varrho), \mathcal{J}(t_0, F(e))) \\ \eta \in C^{l-1}(V(t_0, \varrho), \mathcal{O}) \text{ mit} \\ \xi^* = a_1 \gamma_1^* + \dots + a_p \gamma_p^* + \delta \eta \text{ auf } V(t_0, \varrho). \end{aligned}$$

Auf $X(t_0, \varrho)$ gilt somit

$$\xi = \sum_{\nu=1}^p a_\nu \gamma_\nu = \sum_{\mu=1}^s \left(\sum_{\nu=1}^p a_\nu b_{\nu\mu} \right) \xi_\mu.$$

(4.4.5) Bezeichnungen:

- \mathcal{O} kohärente analytische Garbe auf $X_{t_0, m}$,
- $t^* \in K_{t_0, m}$,
- $d \in \mathbb{N}$.

Für jedes $e \in \mathbb{N}^m$ wird definiert :

$$e^+ = (e_1 + d, e_2, \dots, e_m),$$

$$q(e^+, t^*) : H^l(X(t_0, \varrho), \mathcal{S}) \rightarrow H^l(X(t_0, \varrho), \mathcal{S}_{t^*, e^+})$$

$$\tilde{q}(e^+, t^*) : H^l(X(t_0, \varrho), \mathcal{S}_{t^*, 3d+e_1}) \rightarrow H^l(X(t_0, \varrho), \mathcal{S}_{t^*, e^+}).$$

SATZ (4.4.6). — Voraussetzung : $I_{l+1, m}, II_{l+1, m}, t_0, t$ zwei Punkte aus K ,

\mathcal{S} eine kohärente analytische Garbe auf $X_{t_0, m}$,

$\mathcal{S}^{t^*, d}$ $(t_1 - t_1^*)$ -torsionsrecht,

$(\pi_{l+1}(\mathcal{S}))^{(t^*, d)}$ $(t_1 - t_1^*)$ -torsionsrecht.

Behauptung : Es gibt eine Dreiecksmenge Δ , so dass für jedes Paar (ϱ, ϱ_0) mit $\varrho \in \Delta$, $\varrho < \varrho_0$ und jeden $e \in \mathbb{N}^m$ gilt :

Zu jedem $\xi^* \in H^l(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{S}_{t^*, 3d+e_1})$ gibt es ein $\xi \in H^l(X(t_0, \varrho), \mathcal{S})$ so dass gilt :

$$q(e^+, t^*)(\xi) = \tilde{q}(e^+, t^*)(\xi^*).$$

Beweis. — Auf die Daten $t_0, \mathcal{S}, \pi_{l+1}(\mathcal{S})$ wird das Corollar IV _{$l+1, m$} aus (4.1.5) angewandt. Sei Δ die in Corollar IV _{$l+1, m$} versprochenen Dreiecksmenge. Sei jetzt $\varrho \in \Delta$, $\varrho_0 \in \mathbb{R}_+^m$, $\varrho < \varrho_0$, $e \in \mathbb{N}^m$ und $\xi^* \in H^l(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{S}_{t^*, 3d+e_1})$.

Die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{S}^{t^*, 3d+e_1} \rightarrow \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}_{t^*, 3d+e_1} \rightarrow 0$$

liefert die exakte Cohomologiesequenz

$$H^l(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{S}_{t^*, 3d+e_1}) \rightarrow H^{l+1}(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{S}_{t^*, 3d+e_1}) \xrightarrow{\alpha} H^{l+1}(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{S}) \rightarrow$$

Da $\mathcal{S}^{t^*, d}$ torsionsrecht ist, gilt :

$$H^{l+1}(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{S}_{t^*, d}) \xrightarrow{\sim (t_1 - t_1^*)^{2d+e_1}} H^{l+1}(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{S}_{t^*, 3d+e_1})$$

Es gilt also

$$a(\xi^*) / (t_1 - t_1^*)^{2d+e_1} \in H^{l+1}(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{S}_{t^*, d})$$

Aus der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccccc}
 H^{l+1}(x(t_0, \mathcal{S}_0), \mathcal{Y}^{t^*}, 3d+e_1) & \xrightarrow{\alpha} & H^{l+1}(x(t_0, \mathcal{S}_0), \mathcal{Y}) & \xrightarrow{\pi_{l+1}} & \Gamma(K(t_0, \mathcal{S}_0), \pi_{l+1}(\mathcal{Y})) \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 (t_1 - t_1^*)^{2d+e_1} & & (t_1 - t_1^*)^{2d+e_1} & & (t_1 - t_1^*)^{2d+e_1} \\
 \uparrow \wr & & \uparrow & & \uparrow \\
 H^{l+1}(x(t_0, \mathcal{S}_0), \mathcal{Y}^{t^*}, d) & \xrightarrow{\alpha'} & H^{l+1}(x(t_0, \mathcal{S}_0), \mathcal{Y}) & \xrightarrow{\pi_{l+1}} & \Gamma(K(t_0, \mathcal{S}_0), \pi_{l+1}(\mathcal{Y}))
 \end{array}$$

folgt:

$$\pi_{l+1}((\alpha \circ \alpha')(\xi^*)) = (t_1 - t_1^*)^{2d+e_1} \pi_{l+1}(\alpha'(a(\xi^*)/(t_1 - t_1^*)^{2d+e_1}))$$

und aus der exakten Cohomologiesequenz folgt:

$$\pi_{l+1}((\alpha \circ \alpha')(\xi^*)) = 0.$$

Offensichtlich gilt:

$$\begin{aligned}
 (t_1 - t_1^*)^d \pi_{l+1} \alpha'(a(\xi^*)/(t_1 - t_1^*)^{2d+e_1}) &= \pi_{l+1} \alpha'(a(\xi^*)/(t_1 - t_1^*)^{d+e_1}) \in \\
 &\in \Gamma(K(t_0, \mathcal{Q}_0), (t_1 - t_1^*)^d \pi_{l+1}(\mathcal{O})).
 \end{aligned}$$

Nach dem obigen folgt daher:

$$(t_1 - t_1^*)^{d+e_1} \pi_{l+1}(\alpha'(a(\xi^*)/(t_1 - t_1^*)^{d+e_1})) = 0.$$

Da $(t_1 - t_1^*)^d \pi_{l+1}(\mathcal{O})$ torsionsrecht ist, gilt:

$$\pi_{l+1} \alpha'(a(\xi^*)/(t_1 - t_1^*)^{d+e_1}) = 0.$$

Wenden wir Corollar (1.4.7) und dann Corollar IV_{l+1, m} an, so folgt:

$$\alpha'(a(\xi^*)/(t_1 - t_1^*)^{d+e_1})|X(\varrho) = 0.$$

Aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathcal{Y}^{t^*, 3d+e_1} & \longrightarrow & \mathcal{Y} & \longrightarrow & \mathcal{Y}^{t^*, 3d+e_1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & \text{id} & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{Y}^{t^*, d+e_1} & \longrightarrow & \mathcal{Y} & \longrightarrow & \mathcal{Y}^{t^*, d+e_1} & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

folgt das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 H^l(X(t_0, \mathcal{G}), \mathcal{Y}) & \longrightarrow & H^l(X(t_0, \mathcal{G}), \mathcal{Y}_{t^*, 3d+e_1}) & \xrightarrow{a} & H^{l+1}(X(t_0, \mathcal{G}), \mathcal{Y}_{t^*, 3d+e_1}) \\
 \downarrow \text{id} & & \downarrow b_1 & & \downarrow b_2 \\
 H^l(X(t_0, \mathcal{G}), \mathcal{Y}) & \xrightarrow{c} & H^l(X(t_0, \mathcal{G}), \mathcal{Y}_{t^*, d+e_1}) & \xrightarrow{\hat{a}} & H^{l+1}(X(t_0, \mathcal{G}), \mathcal{Y}_{t^*, d+e_1})
 \end{array}$$

Es gibt ein $z \in Z^{l+1}(X(t_0, \varrho), \mathcal{O})$ so dass gilt:

$$z \text{ repräsentiert } \alpha' (a \xi^* / (t_1 - t_1^*)^{d+e_1}) \text{ auf } X(\varrho).$$

Somit ist

$$(t_1 - t_1^*)^{d+e_1} z \in Z^{l+1}(X(t_0, \varrho), \mathcal{O}^{t^*, d+e_1})$$

und

$$(t_1 - t_1^*)^{d+e_1} z \text{ repräsentiert } b_2 a(\xi^*) \in H^{l+1}(X(t_0, \varrho), \mathcal{O}^{t^*, d+e_1}).$$

Wegen oben gilt:

Es gibt ein $z' \in \mathcal{O}^l(X(t_0, \varrho), \mathcal{O})$ mit $\delta z' = z$;

somit ist

$$(t_1 - t_1^*)^{d+e_1} z' \in \mathcal{O}^l(X(t_0, \varrho), \mathcal{O}^{t^*, d+e_1})$$

$$\delta((t_1 - t_1^*)^{d+e_1} z') = (t_1 - t_1^*)^{d+e_1} z$$

und daraus folgt:

$$(b_2 \circ a)(\xi^*) = (\hat{a} \cdot b_1)(\xi^*) = 0 \text{ in } H^{l+1}(X(t_0, \varrho), \mathcal{O}^{t^*, d+e_1})$$

d. h. aber, es gibt ein $\xi \in H^l(X(t_0, \varrho), \mathcal{O})$ mit

$$c(\xi) = b_1(\xi^*) \text{ in } H^l(X(t_0, \varrho), \mathcal{O})$$

und somit gilt auch

$$q(e^+, t^*)(\xi) = q(e^+, t^*)(\xi^*).$$

SATZ (4.4.7). — Voraussetzung: $I_{0, m-1}, I_{l+1, m}, II_{l+1, m}, t_0$ ein Punkt aus K , \mathcal{O} eine kohärente analytische Garbe auf $X_{t_0, m}$.

Behauptung: Es gibt eine Dreiecksmenge Δ , so dass für jedes $\varrho \in \Delta$ gilt: Zu jedem $e \in \mathbb{N}^m, e > 0$ und jedem $t^* \in K(t_0, \varrho)$ gibt es ein $q(t^*, e)$ -Erzeugendensystem $\xi_1, \dots, \xi_s \in H^l(X(t_0, \varrho), \mathcal{O})$.

Beweis. — 1) Sei \mathcal{O} eine kohärente analytische Garbe auf $X_{(t_0, m-1)}$ aufgefasst als kohärente analytische Garbe $X_{(t_0, m)}$: Sei ϱ_0 beliebig und $t^* \in K(t_0, \varrho_0)$ und $e \in \mathbb{N}^m, e > 0$. Wegen Theorem I_{0, m-1} sind alle Bildgarben von \mathcal{O} und \mathcal{O}_{t^*e} kohärent, und damit sind auch alle Bildgarben von \mathcal{O}_{t^*e} kohärent. Die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{t^*e} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_{t^*e} \rightarrow 0$$

liefert das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccc} H^l(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{O}) & \xrightarrow{q(e, t^*)} & H^l(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{O}_{t^*e}) & \xrightarrow{\hat{b}} & H^{l+1}(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{O}_{t^*e}) \\ \downarrow \pi_l & & \downarrow \pi_l & & \downarrow \pi_{l+1} \\ \Gamma(\kappa(t_0, \varrho_0), \pi_l(\mathcal{O})) & \longrightarrow & \Gamma(\kappa(t_0, \varrho_0), \pi_l(\mathcal{O}_{t^*e})) & \xrightarrow{b} & \Gamma(\kappa(t_0, \varrho_0), \pi_{l+1}(\mathcal{O}_{t^*e})) \end{array}$$

Die vertikalen Abbildungen sind Isomorphismen (siehe Anhang (1)). Sei jetzt

$$\zeta \in \text{im}((\pi_l(\mathcal{O}))_{t^*} \rightarrow H^l(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{O}_{t^*e})), \text{ dann ist } b(\pi_l(\zeta)) = 0$$

dies braucht nur im Halm über t^* in der exakten Sequenz

$$\pi_l(\mathcal{O}) \rightarrow \pi_l(\mathcal{O}_{t^*e}) \rightarrow \pi_{l+1}(\mathcal{O}_{t^*e})$$

nachgeprüft werden). Es gilt also $\pi_{l+1}(\hat{b}(\zeta)) = 0$. Somit auch $\hat{b}(\zeta) = 0$. Das heisst aber: es gibt ein $\xi \in H^l(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{O})$ mit $q(e, t^*)(\xi) = \zeta$. Da

$$\text{im}(\pi_l(\mathcal{O}))_{t^*} \rightarrow H^l(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{O}_{t^*e})$$

ein endlichdimensionaler \mathbb{C} -Vektorraum ist, ist also die Behauptung in diesem Fall bewiesen.

2) Sei \mathcal{O} eine kohärente analytische Garbe auf $X_{t_0, m}$, $t^* \in \mathbb{C}^m$ und sei $d \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass \mathcal{O}_{t^*d} und $(\pi_{l+1}(\mathcal{O}))_{t^*d}$ $(t_1 - t_1^*)$ -torsionsrecht sind. Sei ϱ_0 wie in (1) gewählt. Sei Δ die in Satz (4.4.6) versprochene Dreiecksmenge.

Sei jetzt $\varrho \in \Delta$, $\varrho < \varrho_0$. Nach 1) gibt es $\hat{\xi}_1, \dots, \hat{\xi}_s \in H^l(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{O}_{t^*3d+e_1})$ so dass $\tilde{q}(e, t_0)(\hat{\xi}_v)$ das im $((\pi_l(\mathcal{O}_{t^*3d+e_1}))_{t_0} \rightarrow H^l(X(t_0, \varrho), \mathcal{O}_{t^*e}))$ erzeugen. Jetzt gilt aber

$$\text{im}((\pi_l(\mathcal{O}_{t^*3d+e_1}))_{t_0} \rightarrow H^l(X(t_0, \varrho), \mathcal{O}_{t^*e})) = \text{im}((\pi_l(\mathcal{O}))_{t_0} \rightarrow H^l(X(t_0, \varrho), \mathcal{O}_{t^*e}))$$

Nach Satz (4.4.7) folgt :

$$\begin{aligned} \text{Es gibt } \xi_1, \dots, \xi_s \in H^l(X(t_0, \varrho), \mathcal{O}) \text{ mit} \\ q(e, t^*)(\xi_\nu) = \tilde{q}(e, t^*)(\widehat{\xi}_\nu), \quad 1 \leq \nu \leq s \end{aligned}$$

SATZ (4.4.8). — Voraussetzung : $I_{0, m-1}, I_{l+1, m}, II_{l+1, m}, II_{l, m}$,
 t_0 ein Punkt aus K ,
 \mathcal{O} eine kohärente analytische Garbe auf $X_{t_0, m}$.

Behauptung : Es gibt :

- 1) ein $\varrho \in \mathbf{R}_+^m, \varrho > 0$,
- 2) $\xi_1, \dots, \xi_r \in H^l(X(t_0, \varrho), \mathcal{O})$
- 3) zu jedem $t^* \in K(t_0, \varrho)$ eine Abbildung $F_{t^*} : \mathbf{N}^m \rightarrow \mathbf{N}^m$ mit $\lim_{e \rightarrow \infty} F_{t^*}(e) = \infty$

so dass für jedes $t^* \in K(t_0, \varrho)$ und jedes $e \in \mathbf{N}^m$ gilt :

Zu jedem $\gamma \in (\pi^l(\mathcal{O}))_{t^*}$ mit $q(t^*, e)(\gamma) = 0$ gibt es

$$c_1, \dots, c_r \in (\mathcal{J}(t^*, F_{t^*}(e)))_{t^*} \text{ mit } \gamma = c_1(\pi_l(\xi_1))_{t^*} + \dots + (\pi^l(\xi_r))_{t^*}$$

BEMERKUNG. — Insbesondere folgt aus Satz (4.4.9), dass $\pi_l(\mathcal{O})$ von endlichem Typ ist.

Beweis : Auf den Punkt t_0 wird Satz (4.4.7) angewandt, Δ sei die dort versprochene Dreiecksmenge. Dann wird Theorem $V_{l, m}$ bezüglich des Punktes t_0 angewandt; $e^*(t_0)$ und Δ_0 seien die dort versprochenen Objekte. Jetzt wird auf t^* Satz (4.4.7) angewandt und dann wird Theorem $V_{l, m}$ auf den Punkt t angewandt; $\Delta'_e, e^*(t^*), F$ seien die dort versprochenen Objekte. Für die in Satz (4.4.8) (3) verlangte Funktion können wir F_{t^*} nehmen.

Sei $\varrho_1 \in \Delta$. Nach Satz (4.4.7) gibt es zu dem Paar $(e^*(t_0), t_0)$ ein $q(t_0, e^*(t_0))$ -Erzeugungssystem $\xi_1, \dots, \xi_r \in H^l(X(t_0, \varrho_1), \mathcal{O})$.

Nach Theorem $V_{l, m}$ gibt es ein $\varrho \in \Delta_0$, so dass gilt :

Zu jedem $\xi \in H^l(X(t_0, \varrho_1), \mathcal{O})$ gibt es $a_\nu \in \Gamma(K(t_0, \varrho), \mathcal{O})$ mit

$$\xi = a_1 \xi_1 + \dots + a_r \xi_r \text{ in } H^l(X(t_0, \varrho), \mathcal{O})$$

Nach Satz (4.4.7) gibt es zu jedem Paar $(e^*(t^*), t^*)$ mit $t^* \in K(t_0, \varrho)$ ein $q(t^*, e^*(t^*))$ -Erzeugendensystem $\xi_1^{(t^*)}, \dots, \xi_s^{(t^*)} \in H^l(X(t_0, \varrho_1), \mathcal{O})$. Benutzen wir die vorhergehende Aussage : Zu jedem $t^* \in K(t_0, \varrho)$, gibt es $a_{1\nu}^{(t^*)}, \dots, a_{r\nu}^{(t^*)} \in$

$\in \Gamma(K(t_0, \varrho), \mathcal{O})$, $1 \leq \nu \leq s(t^*)$, so dass gilt:

$$\xi_\nu^{(t^*)} = \sum_{\mu=1}^{\nu} a_{\mu\nu}^{(t^*)} \xi_\mu, \quad 1 \leq \nu \leq s(t^*).$$

Sei jetzt $e \in \mathbb{N}^m$ und $\gamma \in (\pi_l(\mathcal{S}))_{t^*}$ mit $q(t^*, e)(\gamma) = 0$. Zu γ gibt es ein ϱ^* (so klein gewählt, dass $K(t^*, \varrho^*) \subset K(t_0, \varrho)$ ist) und ein $\widehat{\xi} \in H^l(X(t^*, \varrho^*), \mathcal{S})$ mit

$$(\pi_l(\widehat{\xi}))_{t^*} = \gamma \quad \text{und} \quad q(t^*, e)(\widehat{\xi}) = 0.$$

Nach Theorem $V_{l,m}$ gibt es ein $\varrho^{**} \in \Delta'_e$

und $a_1^{(\gamma)}, \dots, a_{s(t^*)}^{(\gamma)} \in \Gamma(K(\varrho^{**}), \mathcal{J}(t^*, F_{t^*}(e)))$ mit

$$\widehat{\xi} = a_1^{(\gamma)} \xi_1^{(t^*)} + \dots + a_{s(t^*)}^{(\gamma)} \xi_{s(t^*)}^{(t^*)} \quad \text{in} \quad H^l(X(t^*, \varrho^{**}), \mathcal{S})$$

somit gilt in $H^l(X(t^*, \varrho^{**}), \mathcal{S})$:

$$\widehat{\xi} = \sum_{\nu=1}^{s(t^*)} a_\nu^{(\gamma)} \sum_{\mu=1}^{\nu} a_{\mu\nu}^{(t^*)} \xi_\mu = \sum_{\mu=1}^r \left(\sum_{\nu=1}^{s(t^*)} a_\nu^{(\gamma)} a_{\mu\nu}^{(t^*)} \right) \xi_\mu.$$

SATZ (4.4.9). — Voraussetzungen: $I_{0, m-1}$, $I_{l+1, m}$, $II_{l+1, m}$, $II_{l, m}$,

t_0 ein Punkt aus K ,

\mathcal{S} eine kohärent analytische Garbe auf $X_{t_0, m}$,

e^*, Δ sind die bezüglich \mathcal{S}, t_0 in Theorem $V_{l,m}$ versprochenen Daten

Behauptung: Es gibt

1) $\varrho, \varrho_1 \in \mathbb{R}_+^m$ mit $\varrho \leq \varrho_1$ und $\varrho \in \Delta$

2) zu jedem $t^* \in K(t_0, \varrho)$ ein $F_{t^*}: \mathbb{N}^m \rightarrow \mathbb{N}^m$ mit $\lim_{e \rightarrow \infty} F(e) = \infty$ so

dass für jedes $q(t_0, e^*)$ -Erzeugendensystem $\xi_1, \dots, \xi_r \in H^l(X(t_0, \varrho_1), \mathcal{S})$,

jedes $t^* \in K(t_0, \varrho)$ und jedes $e \in \mathbb{N}^m$ gilt:

Zu jedem $\xi \in H^l(X(t_0, \varrho_1), \mathcal{S})$ mit $q(t^*, e)(\xi) = 0$ gibt es

$$a_1, \dots, a_r \in \Gamma(K(t_0, \varrho), \mathcal{J}(t^*, F_{t^*}(e))) \quad \text{mit}$$

$$\xi = a_1 \xi_1 + \dots + a_r \xi_r \quad \text{auf} \quad X(t_0, \varrho).$$

Beweis. — Zunächst muss ein Hilfssatz bewiesen werden:

Hilfssatz (4.4.9.1). — Voraussetzung : $I_{0, m-1}$, $I_{l+1, m}$, $II_{l+1, m}$, $II_{l, m}$, t_0 ein Punkt aus K , \mathcal{O} eine kohärente analytische Garbe auf $X_{t_0, m}$.

Behauptung: Es gibt ein $\varrho_0 \in \mathbf{R}_+^m$ und zu jedem $d \in \mathbf{N}$ und jedem $t^* \in K(t_0, \varrho_0)$ gibt es

- 1) $\xi_1^{(t^*)}, \dots, \xi_s^{(t^*)} \in H^l(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{O}_{t^*, a})$,
- 2) $F_{t^*} : \mathbf{N}^m \rightarrow \mathbf{N}^m$ mit $\lim_{e \rightarrow \infty} F_{t^*}(e) = \infty$,

so dass für jedes $e \in \mathbf{N}^m$ mit $e_1 \geq d$ gilt:

Zu jedem $\xi \in H^l(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{O}_{t^*, a})$ mit $\delta\xi = 0$ und $q(t^*, e)(\xi) = 0$ gibt es $a_1, \dots, a_s \in \Gamma(K(t_0, \varrho_0), \mathcal{I}(t^*, F_{t^*}(e_1, \dots, e_m)))$ derart, dass $\xi = a_1 \xi_1^{(t^*)} + \dots + a_s \xi_s^{(t^*)}$ ist.

Beweis zum Hilfssatz (4.4.9.1). — Sei ϱ_0 der im Satz (4.4.8) versprochene Polyradius. Da $\pi_1(\mathcal{O}_{t^*, a})$ kohärent ist, gibt es nach Theorem A Schnitte $s_1, \dots, s_q \in \Gamma(K(t_0, \varrho_0), \pi_1(\mathcal{O}_{t^*, a}))$, so dass die Sequenz

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^q &\xrightarrow{\alpha} \pi_1(\mathcal{O}_{t^*, a}) \rightarrow 0 \\ (a_1, \dots, a_q) &\mapsto a_1 s_1 + \dots + a_q s_q \end{aligned}$$

über $K(t_0, \varrho_0)$ exakt ist. Sei F_{t^*} die in Satz (4.4.8) versprochenen Abbildung.

Sei $d \in \mathbf{N}$, $t^* \in K(t_0, \varrho_0)$ und $e \in \mathbf{N}^m$ mit $F_{t^*}(e) > 0$.

Sei jetzt $\xi \in H^l(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{O}_{t^*, a})$ mit $\delta\xi = 0$ und $q(t^*, e)(\xi) = 0$. Aus der exakten Sequenz

$$H^l(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{O}) \xrightarrow{q(t^*, d)} H^l(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{O}_{t^*, a}) \xrightarrow{\delta} H^{l+1}(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{O}_{t^*, a})$$

folgt:

Es gibt ein $\widehat{\xi} \in H^l(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{O})$ mit $q(t^*, d)(\widehat{\xi}) = \xi$ und $q(t^*, e)(\widehat{\xi}) = 0$.

Nach Satz (4.4.8) gilt:

$$(\pi_1(\widehat{\xi}))_{t^*} \in (\pi_1(\mathcal{O}) \mathcal{I}(t^*, F_{t^*}(e)))_{t^*}.$$

Beachten wir den Morphismus

$$\pi_1(\mathcal{O}) \rightarrow \pi_1(\mathcal{O}_{t^*, a}),$$

so sieht man, dass

$$(\pi_1(\widehat{\xi}))_{t^*} \in (\pi_1(\mathcal{O}_{t^*, a}) \mathcal{I}(t^*, F_{t^*}(e)))_{t^*} \quad \text{ist.}$$

Zur Abkürzung wird $\mathcal{G} = \mathcal{G}(t^*, F_{t^*}(e))$ gesetzt.
Aus der kurzen exakten Sequenz

$$0 \rightarrow \pi_1(\mathcal{O}_{t^*, a}) \mathcal{G} \rightarrow \pi_1(\mathcal{O}_{t^*, a}) \rightarrow \pi_1(\mathcal{O}_{t^*, a})/\pi_1(\mathcal{O}_{t^*, a}) \mathcal{G} \rightarrow 0$$

folgt nach Theorem B die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \Gamma(K(t_0, \varrho_0), \pi_1(\mathcal{O}_{t^*, a}) \mathcal{G}) \rightarrow \\ \rightarrow \Gamma(K(t_0, \varrho_0), \pi_1(\mathcal{O}_{t^*, a})) \xrightarrow{\beta} \Gamma(K(t_0, \varrho_0), \pi_1(\mathcal{O}_{t^*, a})/\pi_1(\mathcal{O}_{t^*, a}) \mathcal{G}) \rightarrow 0.$$

Jetzt ist $\pi_1(\xi) \in \Gamma(K(t_0, \varrho_0), \pi_1(\mathcal{O}_{t^*, a}))$, und da $F_{t^*}(e) > 0$ ist, gilt $\beta(\pi_1(\xi)) = 0$ (dies braucht nur im Halm über t^* nachgeprüft werden). Es gilt also $\pi_1(\xi) \in \Gamma(K(\varrho_1), \pi_1(\mathcal{O}_{t^*, a}) \mathcal{G}(t^*, F_{t^*}(e)))$.

Aus dem kommutativen Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}^q & \xrightarrow{\quad} & \pi_1(\mathcal{G}_{t^*, d}) & \xrightarrow{\quad} & 0 \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ \mathcal{O}^q \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{G} & \xrightarrow{\alpha \otimes 1} & \pi_1(\mathcal{G}_{t^*, d}) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{G} & \xrightarrow{\quad} & 0 \end{array}$$

und aus den Formeln

$$\pi_1(\mathcal{O}_{t^*, a}) \mathcal{G} = \text{im}(\pi_1(\mathcal{O}_{t^*, a}) \otimes \mathcal{G} \rightarrow \pi_1(\mathcal{O}_{t^*, a}))$$

$$\mathcal{G}^{\oplus q} = \mathcal{O}^q \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{G}$$

folgt wegen Theorem B:

Es gibt ein $a = (a_1, \dots, a_q) \in \Gamma(K(t_0, \varrho_0), \mathcal{G}^{\oplus q})$ mit

$$a_1 s_1 + \dots + a_q s_q = \alpha(a) = \pi_1(\xi).$$

Wegen $H^1(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{O}_{t^*, a}) \approx \Gamma(K(t_0, \varrho_0), \pi_1(\mathcal{O}_{t^*, a}))$ folgt die Behauptung in diesen Fall. (Anhang 1).

2) Sei jetzt \mathcal{S} eine kohärente analytische Garbe auf $X_{t_0, m}$. Wir wenden Satz (4.4.6) an, ϱ_0 und \mathcal{A}' seien die dort versprochenen Objekte.

Dann wenden wir Satz (4.4.7) und Theorem $V_{i,m}$ an; Δ'', Δ sind der Reihe nach die dort versprochenen Dreiecksmengen.

Seien $\varrho_0, \varrho_1, \varrho$ so gewählt, dass $\varrho \leq \varrho_1 < \varrho_0, \varrho_1 \in \Delta' \cap \Delta''$ und $\varrho \in \Delta$. Sei $e^* \in \mathbb{N}^m$, so wie es in Theorem $V_{i,m}$ versprochen wird. Nach Satz (4.4.7) gibt es ein $q(t_0, e^*)$ -Erzeugendensystem $\xi_1, \dots, \xi_r \in H^l(X(t_0, \varrho_1), \mathcal{O})$.

Sei jetzt $t^* \in K(t_0, \varrho)$ und $e^{++} = (3d + e_1, e_2, \dots, e_m) \in \mathbb{N}^m$.

Sei jetzt $\xi \in H^l(X(t_0, \varrho_1), \mathcal{O})$ mit $q(t^*, e^{++})(\xi) = 0$. Man hat das kommutative Diagramm mit exakter Zeile:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & H^l(X(t_0, \varrho_1), \mathcal{O}_{t^*, 3d+e_1}) \\
 & & & \nearrow \alpha & \downarrow \beta \\
 H^l(X(t_0, \varrho_1), \mathcal{O}_{t^*, d+e_1}) & \xrightarrow{\varepsilon} & H^l(X(t_0, \varrho_1), \mathcal{O}) & \xrightarrow{\gamma} & H^l(X(t_0, \varrho_1), \mathcal{O}_{t^*, d+e_1})
 \end{array}$$

Nach Hilfssatz (4.4.9.1) gibt es:

- 1) $\widehat{\xi}_1^{(t^*)}, \dots, \widehat{\xi}_s^{(t^*)} \in H^l(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{O}_{t^*, 3d+e_1})$
- 2) $F_{t^*} : \mathbb{N}^m \rightarrow \mathbb{N}^m$ mit $\lim_{e \rightarrow \infty} F_{t^*}(e) = \infty$

so dass gilt:

Es gibt $a_1, \dots, a_s^{(t^*)} \in \Gamma(K(t_0, \varrho_0), \mathcal{J}(t^*, F_{t^*}(e_1, e_2, \dots, e_m)))$ mit

$$\alpha(\xi) = a_1 \widehat{\xi}_1^{(t^*)} + \dots + a_s^{(t^*)} \widehat{\xi}_s^{(t^*)}.$$

Nach Satz (4.4.6) gibt es $\xi_1^{(t^*)}, \dots, \xi_s^{(t^*)} \in H^l(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{O})$ mit

$$\gamma(\xi_v^{(t^*)}) = \beta(\widehat{\xi}_v^{(t^*)}).$$

Jetzt gilt:

$$\gamma(\xi - a_1 \xi_1^{(t^*)} - \dots - a_s^{(t^*)} \xi_s^{(t^*)}) = 0.$$

Es gibt also ein $\zeta \in H^l(X(t_0, \varrho_1), \mathcal{O}_{t^*, d+e_1})$ mit

$$\varepsilon(\zeta) = \xi - (a_1 \xi_1^{(t^*)} + \dots + a_s^{(t^*)} \xi_s^{(t^*)}).$$

Aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F}^{t^*, d} & \xrightarrow{(t_1 - t_1^*)^{e_1}} & \mathcal{F}^{t^*, d+e_1} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{F} & \xrightarrow{(t_1 - t_1^*)^{e_1}} & \mathcal{F}
 \end{array}$$

folgt das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 H^1(x(t_0, \mathcal{S}_1), \mathcal{F}^{t^*, d}) & \xrightarrow{(t_1 - t_1^*)^{e_1}} & H^1(x(t_0, \mathcal{S}_1), \mathcal{F}^{t^*, d+e_1}) \\
 \varepsilon \Big| & & \Big| \varepsilon \\
 H^1(x(t_0, \mathcal{S}_1), \mathcal{F}) & \xrightarrow{(t_1 - t_1^*)^{e_1}} & H^1(x(t_0, \mathcal{S}_1), \mathcal{F})
 \end{array}$$

und daraus folgt:

Es gibt ein $\zeta_0 \in H^1(X(t_0, \varrho_1), \mathcal{S}^{t^*, d})$ mit

$$\zeta = (t_1 - t_1^*)^{e_1} \zeta_0$$

somit gilt:

$$\zeta = a_1 \xi_1^{(t^*)} + \dots + a_{s(t^*)} \xi_{s(t^*)}^{(t^*)} + (t_1 - t_1^*)^{e_1} \varepsilon(\zeta_0),$$

Nach Theorem $V_{l, m}$ gilt:

Es gibt $b_1, \dots, b_r \in \Gamma(K(t_0, \varrho), \mathcal{O})$

$$b_{\nu 1}^{(t^*)}, \dots, b_{\nu r}^{(t^*)} \in \Gamma(K(t_0, \varrho), \mathcal{O}), \quad 1 \leq \nu \leq s(t^*)$$

so dass gilt:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(\zeta_0) &= b_1 \xi_1 + \dots + b_r \xi_r \\
 \xi_{\nu}^{(t^*)} &= b_{\nu 1}^{(t^*)} \xi_1 + \dots + b_{\nu r}^{(t^*)} \xi_r
 \end{aligned}$$

Nach elementarem Einsetzen folgt:

$$\zeta = c_1 \xi_1 + \dots + c_r \xi_r,$$

wobei $c_r \in \Gamma(K(t_0, \varrho), \mathcal{F}(t^*, F_{t^*}(e)))$ ist.

SATZ (4.4.10). — Voraussetzungen: $I_{0, m-1}, I_{l+1, m}, II_{l+1, m}, II_{l, m}, t_0$ ein Punkt aus K , \mathcal{S} eine kohärente analytische Garbe auf $X_{t_0, m}$.

Behauptung: Es gibt ein $\varrho \in \mathbf{R}_+^m$ und es gibt Schnitte $s_1, \dots, s_r \in \Gamma(K(t_0, \varrho), \pi_l(\mathcal{O}))$, die jeden Halm von $\pi_l(\mathcal{O})$ über $K(t_0, \varrho)$ erzeugen und jeder Halm über $K(t_0, \varrho)$ der Relationengarbe $\mathcal{R}(s_1, \dots, s_r)$ wird durch Schnitte aus $\Gamma(K(t_0, \varrho)R(s_1, \dots, s_r))$ erzeugt.

BEMERKUNG: Nach (1.3.5) ist also $\mathcal{R}(s_1, \dots, s_r)$ kohärent, und damit ist auch $\pi_l(\mathcal{O})$ kohärent.

Beweis. — Seien $\varrho_0 \in \mathbf{R}_+^m$ und $\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_q \in H^1(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{O})$ die in Satz (4.4.8) versprochenen Dinge.

Nach Satz (4.4.9) gibt es $\varrho, \varrho_1 \in \mathbf{R}_+^m$ mit $\varrho \leq \varrho_1 < \varrho_0$ und ein $q(t_0, e^*)$ -Erzeugendensystem $\xi_1, \dots, \xi_r \in H^1(X(t_0, \varrho_1), \mathcal{O})$.

Nach Theorem $V_{l,m}$ gibt es

$$a_{\nu 1}, \dots, a_{\nu r} \in \Gamma(K(t_0, \varrho), \mathcal{O}) \quad 1 \leq \nu \leq q$$

so dass gilt:

$$\tilde{\xi}_\nu = a_{\nu 1} \xi_1 + \dots + a_{\nu r} \xi_r \quad \text{auf } K(t_0, \varrho)$$

Es wird

$$s_\nu = \pi_l(\tilde{\xi}_\nu), \quad 1 \leq \nu \leq r \quad \text{gesetzt, und es gilt:}$$

$$\pi_l(\tilde{\xi}_r) = a_{r1} s_1 + \dots + a_{rr} s_r$$

Die s_1, \dots, s_r erzeugen also über $K(t_0, \varrho)$ jeden Halm von $\pi_l(\mathcal{O})$. Sei $t^* \in K(t_0, \varrho)$ und sei $\gamma = (f_{1t^*}, \dots, f_{rt^*}) \in (\mathcal{R}(s_1, \dots, s_r))_{t^*}$; es gilt also $f_{1t^*} s_{1t^*} + \dots + f_{rt^*} s_{rt^*} = 0$.

Es gibt einen Polyzylinder $K(t^*, \varrho^*) \subset K(t_0, \varrho)$ und es gibt holomorphe Funktionen $f_1, \dots, f_r \in \Gamma(K(t^*, \varrho^*), \mathcal{O})$, so dass gilt: $(f_1, \dots, f_r)_{t^*} = \gamma$ und $f_1 s_1 + \dots + f_r s_r = 0$ auf $K(t^*, \varrho^*)$.

Zu jedem $e \in \mathbf{N}^m$ gibt es holomorphe Funktionen (Potenzreihenabschnitte) $f_1^{(e)}, \dots, f_r^{(e)} \in \Gamma(K(t_0, \varrho_1), \mathcal{O})$ so dass gilt:

$$f_\nu - f_\nu^{(e)} \in \Gamma(K(t^*, \varrho^*), \mathcal{I}(t^*, e)).$$

Wegen

$$0 = q(t^*, e)((f_1 - f_1^{(e)}) \xi_1 + \dots + (f_r - f_r^{(e)}) \xi_r) =$$

$$= q(t^*, e)(f_1 s_1 + \dots + f_r s_r) - q(t^*, e)(f_1^{(e)} \xi_1 + \dots + f_r^{(e)} \xi_r)$$

gilt also

$$q(t^*, e)(f_1^{(e)} \xi_1 + \dots + f_r^{(e)} \xi_r) = 0.$$

Nach Satz (4.4.9) gibt es

$$a_\nu^{(e)} \in \Gamma(K(t_0, \varrho), \mathcal{F}(t^*, F_{t^*}(e))), \quad 1 \leq \nu \leq r$$

so dass gilt:

$$f_1^{(e)} \xi_1 + \dots + f_r^{(e)} \xi_r = a_1^{(e)} \xi_1 + \dots + a_r^{(e)} \xi_r$$

Man hat also

$$(f_1^{(e)} - a_1^{(e)}, \dots, f_r^{(e)} - a_r^{(e)}) \in \Gamma(K(t_0, \varrho), \mathcal{R}(s_1, \dots, s_r))$$

$$(f_\nu^{(e)} - a_\nu^{(e)}) - f_\nu \in \mathcal{F}(t^*, F_{t^*}(e)).$$

Wegen $\lim_{e \rightarrow \infty} F_{t^*}(e) = \infty$ folgt nach dem Krulllemma, dass $\gamma = (f_{1t^*}, \dots, f_{rt^*})$ in dem durch $\Gamma(K(t_0, \varrho), \mathcal{R}(s_1, \dots, s_r))$ erzeugten \mathcal{O}_{t^*} -Modul liegt.

4.5 Die Haupttheoreme von Grauert.

(4.5.1) Seien X, Y komplexe Räume, $\pi: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung, \mathcal{S} eine kohärente analytische Garbe auf X und y ein Punkt aus Y . Mit m werde die Idealgarbe der analytischen Menge $\{y\} \subset Y$ bezeichnet. Der Halm von m über y ist also nichts anderes als das maximale Ideal von $\mathcal{H}_{X,y}$, wenn mit \mathcal{H}_Y die Strukturgarbe von Y bezeichnet wird. Wir betrachten die Urbildgarbe $\pi^*(m) = \widehat{m}$; sie ist eine kohärente analytische Garbe auf X mit $\text{supp}(\widehat{m}) = X_y$, $X_y = \pi^{-1}(y)$.

Sei $n \in \mathbb{N}$; aus der kanonischen exakten Sequenz

$$0 \rightarrow \widehat{m}^{n+1} \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S} / \widehat{m}^{n+1} \mathcal{S} \rightarrow 0$$

folgt die exakte Bildgarbensequenz

$$\rightarrow \pi_l(\widehat{m}^{n+1} \mathcal{S}) \rightarrow \pi_l(\mathcal{S}) \xrightarrow{q_{n+1}} \pi_l(\mathcal{S} / \widehat{m}^{n+1} \mathcal{S}) \rightarrow .$$

Wegen den Beziehungen

$$(m^{n+1} \pi_l(\mathcal{S}))_y \subset \text{im}((\pi_l(\widehat{m}^{n+1} \mathcal{S}))_y \rightarrow (\pi_l(\mathcal{S}))_y)$$

$$H^1(X_y, \mathcal{S} / \widehat{m}^{n+1} \mathcal{S}) = (\pi_l(\mathcal{S}) / \widehat{m}^{n+1} \mathcal{S})_y$$

hat man einen kanonischen Morphismus

$$p_n : (\pi_l(\mathcal{O}) / m^{n+1} \pi_l(\mathcal{O}))_y \rightarrow H^l(X_y, \mathcal{O} / \widehat{m}^{n+1} \mathcal{O}),$$

somit auch einen kanonischen Morphismus :

(4.5.1.1)

$$\lim_{\longleftarrow n \in \mathbf{N}} (\pi_l(\mathcal{O}) / m^{n+1} \pi_l(\mathcal{O}))_y \rightarrow \lim_{\longleftarrow n \in \mathbf{N}} H^l(X_y, \mathcal{O} / \widehat{m}^{n+1} \mathcal{O})$$

(4.5.2) Die Haupttheoreme von Grauert lauten :

Theorem I. — Voraussetzung :

X, Y komplexe Räume

$\pi : X \rightarrow Y$ eigentliche holomorphe Abbildung

\mathcal{O} kohärente analytische Garbe auf X

Behauptung: Für alle $l \in \mathbf{N}$ sind die Bildgarben $\pi_l(\mathcal{O})$ kohärente analytische Garben auf Y .

Theorem II. — Voraussetzung :

X, Y komplexe Räume

$\pi : X \rightarrow Y$ eigentliche holomorphe Abbildung

\mathcal{O} kohärente analytische Garbe

$y \in Y, l \in \mathbf{N}$

Behauptung: Der kanonische Homomorphismus

$$\lim_{\longleftarrow n \in \mathbf{N}} (\pi_l(\mathcal{O}) / m^{n+1} \pi_l(\mathcal{O}))_y \rightarrow \lim_{\longleftarrow n \in \mathbf{N}} H^l(X_y, \mathcal{O} / \widehat{m}^{n+1} \mathcal{O})$$

ist ein Isomorphismus.

(4.5.3) Beweis zu Theorem I. — Das Theorem I ist in Bezug auf Y von lokaler Natur. Wir dürfen also annehmen, dass der unterliegende topo-

logische Raum von Y eine analytische Menge in einem m -dimensionalen Polyzylinder $K \subset \mathbb{C}^m$ und dass die Strukturgarbe \mathcal{H}_Y isomorph zu \mathcal{O}/\mathcal{I} ist. Dabei bezeichne \mathcal{O} die übliche Garbe der holomorphen Funktionen auf K , \mathcal{I} eine kohärente Idealgarbe von \mathcal{O} mit $\text{supp}(\mathcal{O}/\mathcal{I}) = Y$. Wir haben also eine eigentliche holomorphe Abbildung $\pi: X \rightarrow K$. Sei $l \in \mathbb{N}$ und sei \mathcal{S} eine kohärente analytische Garbe auf X , dann ist $\pi_l(\mathcal{S})$ ein \mathcal{O}/\mathcal{I} -Modul und vermöge der Abbildung $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}/\mathcal{I}$ auch ein \mathcal{O} -Modul. Nach Theorem I _{l,m} ist aber $\pi_l(\mathcal{S})$ ein kohärenter \mathcal{O} -Modul, und wegen Anhang (2) ist $\pi_l(\mathcal{S})$ auch ein kohärenter \mathcal{O}/\mathcal{I} -Modul. Damit ist der Kohärenzatz bewiesen.

Um Theorem II zu beweisen, brauchen wir noch das folgende

LEMMA (4.5.4). — Voraussetzung: wie in Theorem II

Behauptung: Es gibt eine Abbildung $F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} F(n) = \infty$, so dass gilt:

$$(m^{F(n)} \pi_l(\mathcal{S}))_y \supset \text{im}((\pi_l(\widehat{m}^n \mathcal{S}))_y) \rightarrow (\pi_l(\mathcal{S}))_y$$

Beweis. — Wie im Beweis zu Theorem I dürfen wir annehmen, dass Y eine analytische Menge in einem m -dimensionalen Polyzylinder $K \subset \mathbb{C}^m$ ist.

Sei jetzt $\xi \in \ker((\pi_l(\mathcal{S}))_y \rightarrow (\pi_l(\mathcal{S}/\widehat{m}^n \mathcal{S}))_y)$, dann gibt es ein $\varrho \in \mathbb{R}_+^m$ und ein

$$\widehat{\xi} \in \ker(H^1(X(y, \varrho), \mathcal{S}) \rightarrow H^1(X(y, \varrho), \mathcal{S}/\widehat{m}^n \mathcal{S}))$$

mit $(\widehat{\xi})_y = \xi$. Nach Theorem V _{l,m} gibt es eine Funktion $F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} F(n) = \infty$ so dass gilt:

$$\widehat{\xi} = a_1 \xi_1 + \dots + a_s \xi_s \quad \text{auf } X(y, \varrho)$$

wobei

$$a_1, \dots, a_s \in \Gamma(K(\varrho), m^{F(n)}).$$

(dabei wurde ϱ schon aus der Dreiecksmenge von Theorem V _{l,m} gewählt). Jetzt folgt

$$\xi = (\pi_l(\widehat{\xi}))_y = a_{1y}(\pi_l(\xi_1))_y + \dots + a_{sy}(\pi_l(\xi_s))_y$$

somit liegt $\xi \in (m^{F(n)} \pi_l(\mathcal{S}))_y$.

(4.5.5). — Beweis zu Theorem II. — (i) Der Homomorphismus (4.5.11) ist injektiv!

Sei $(\xi_n)_{n \geq 1} \in \lim_{\leftarrow n \in \mathbb{N}} (\pi_l(\mathcal{S})/m^{n+1} \pi_l(\mathcal{S}))_y$ mit $p_n(\xi_n) = 0$ für alle $n \geq 1$. Zu

jedem $n \geq 1$, gibt es ein $n^+ \geq 1$ mit $F(n^+) \geq n$. Dabei ist F die in Lemma (4.5.4) versprochene Abbildung. Man hat folgendes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 (\pi_1(\widehat{m}^{n^+}\mathcal{F}))_y & \xrightarrow{\quad} & (\pi_1(\mathcal{F}))_y & \xrightarrow{q_{n^+}} & (\pi_1(\mathcal{F}/\widehat{m}^{n^+}\mathcal{F}))_y \\
 & & \downarrow \alpha_{n^+} & & \nearrow p_{n^+} \\
 & & \pi_1(\mathcal{F})/\widehat{m}^{n^+} \pi_1(\mathcal{F}) & &
 \end{array}$$

Es gibt ein $\widehat{\xi}_{n^+} \in (\pi_1(\mathcal{O}))_y$ mit $\alpha_{n^+}(\widehat{\xi}_{n^+}) = 0$ somit gilt also $q_{n^+}(\widehat{\xi}_{n^+}) = 0$. Nach Lemma (4.5.4) ist $\alpha_{F(n^+)}(\widehat{\xi}_{n^+}) = 0$. Andererseits ist $\alpha_{F(n^+)}(\widehat{\xi}_{n^+}) = \xi_{F(n^+)}$. Da $F(n^+) \geq n$ ist, folgt dass $\xi_n = 0$ ist.

(ii) Der Homomorphismus (4.5.1.1) ist surjektiv!

Sei $(\xi_\nu)_{\nu \geq 1} \in \varprojlim_{\nu \in \mathbb{N}} (\pi_1(\mathcal{O}/\widehat{m}^{\nu+1}\mathcal{O}))_y$. Für $\mu \geq \nu$ hat man das kanonische

kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccc}
 \pi_1(\mathcal{F}) & \xrightarrow{q_\mu} & \pi_1(\mathcal{F}/\widehat{m}^\mu\mathcal{F}) & \xrightarrow{r_\mu} & \pi_{l+1}(\widehat{m}^\mu\mathcal{F}) \\
 \parallel & & \downarrow q_{\nu\mu} & & \downarrow q_{\nu/\mu} \\
 \pi_1(\mathcal{F}) & \xrightarrow{q_\nu} & \pi_1(\mathcal{F}/\widehat{m}^\nu\mathcal{F}) & \xrightarrow{r_\nu} & \pi_{l+1}(\widehat{m}^\nu\mathcal{F})
 \end{array}$$

Aus diesem Diagramm folgt:

$$r_\nu(\xi_\nu) = q^{\nu\mu} r_\mu(\xi_\mu), \quad \mu \geq \nu$$

Jetzt wird Lemma (4.5.4) auf die Garbe $\widehat{m}^\nu \mathcal{O}$ angewandt.

Für jedes $\mu \geq \nu$ gilt somit:

$$r_\nu(\xi_\nu) \in (m^{\mu(\nu)} \pi_l(\widehat{m}^\nu \mathcal{O}))_y$$

Nach dem Krullschen Lemma folgt $r_\nu(\xi_\nu) = 0$. Es gibt also ein

$$\xi_\nu \in (\pi_l(\mathcal{O}))_y \quad \text{mit} \quad q_\nu(\widehat{\xi}_\nu) = \xi_\nu.$$

Bezeichnet

$$\alpha_\nu : (\pi_l(\mathcal{O}))_y \rightarrow (\pi_l(\mathcal{O}) / m^\nu \pi_l(\mathcal{O}))_y$$

den kanonischen Epimorphismus, dann setzen wir $\widetilde{\xi} = \alpha_\nu(\widehat{\xi}_\nu)$. Offensichtlich ist $(\widetilde{\xi}_\nu)_{\nu \geq 1}$ das gesuchte Element, das vermöge (4.5.1.1) auf $(\xi_\nu)_{\nu \geq 1}$ abgebildet wird.

A N H A N G

- (1) SATZ. — Sei (X, \mathcal{H}_X) und (Y, \mathcal{H}_Y) komplexe Räume $f: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung, \mathcal{F} ein \mathcal{H}_X -Modul und seien die Bildgarben $R^q f_*(\mathcal{F})$ für alle $q \geq 0$ kohärent, dann gilt für jede Steinsche Menge U von Y , dass $H^n(f^{-1}(U), \mathcal{F}) \approx \Gamma(U, R^n f_*(\mathcal{F}))$ ist für alle $n \geq 0$.
- (2) SATZ. — Voraussetzung: Sei (X, \mathcal{O}) ein geringeter Raum, \mathcal{O} ein kohärenter \mathcal{O} -Modul, \mathcal{I} ein kohärentes \mathcal{O} -Ideal und \mathcal{F} ein \mathcal{O}/\mathcal{I} -Modul. Behauptung: \mathcal{F} ist genau dann ein kohärenter \mathcal{O}/\mathcal{I} -Modul, wenn \mathcal{F} aufgefasst vermöge der kanonischen Abbildung $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}/\mathcal{I}$ ein kohärenter \mathcal{O} -Modul ist. Insbesondere ist \mathcal{O}/\mathcal{I} ein kohärenter \mathcal{O}/\mathcal{I} -Modul.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] H. GRAUERT. — *Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen*. (Institut des Hautes Études Scientifiques, Publications mathématiques, n° 5).
- [1] M. HERVÉ. — *Several complex variables*. Oxford University Press 1963.
- [3] A. GROTHENDIECK - J. DIEUDONNÉ. — *Elements de géométrie algébrique, I. Le langage des schémas*. (Institut des Hautes Études Scientifiques, Publications mathématiques, n° 4).