ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

GÜNTHER TRAUTMANN

Fortsetzung lokal-freier Garben über 1-dimensionale Singularitätenmengen

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 23, nº 1 (1969), p. 155-184

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1969_3_23_1_155_0>

FORTSETZUNG LOKAL-FREIER GARBEN ÜBER 1-DIMENSIONALE SINGULARITÄTENMENGEN

GÜNTHER TRAUTMANN

In der Arbeit [6] wurde ein Fortsetzungssatz für kohärente analytische Garben bezüglich nulldimensionaler Singularitäten bewiesen. Ist X ein komplexer Raum, $x_0 \in X$ ein Punkt und $\mathcal{F}$ eine auf $X - x_0$ kohärente analytische Garbe mit $codh_x(\mathcal{F}) \geq 3$ in der Nähe von x_0, so besitzt $\mathcal{F}$ eine kohärente Fortsetzung über ganz X.

Während dieser Satz noch relativ einfach mit Methoden und Ergebnissen von ANDREOTTI-GRAUERT [1] bewiesen werden konnte, erwiesen sich die höherdimensionalen Analoga als viel hartnäckiger.

In dieser Arbeit wird nun ein erster Versuch gemacht, mit der Behandlung des 1-dimensionalen Falles einen Lösungsweg für den allgemeinen aufzuzeigen. Es wird folgender Satz bewiesen. Sei G ein Gebiet des $\mathbb{C}^4$ und $A \subset G$ eine analytische Teilmenge der Dimension 1. Dann besitzt jede über $G - A$ lokal-freie kohärente analytische Garbe eine kohärente Fortsetzung über ganz G. Zum Beweis greifen wir auf einige Ideen von GRAUERT [2] zurück, obwohl hier keine eigentlichen Abbildungen vorliegen. Ist A ein Ebenenstück der Dimension 1, und $\pi : G \longrightarrow A$ die natürliche Projektion, so beweisen wir gleichzeitig, dass $\pi_1(\mathcal{F})$, die erste Leraysche Bildgarbe von $\mathcal{F}$, kohärent ist.

ZUSATZ BEI DER KORREKTUR:

Inzwischen hat YUM-TONG SIU ebanfalls mit Hilfe von Methoden von GRAUERT, [2], den folgenden allgemeinen Satz bewiesen: Ist X ein komplexer Raum, $A \subset X$ analytisch und $\mathcal{F}$ eine kohärente analytische Garbe über $X - A$ mit $codh\ (\mathcal{F}) \geq dim\,(A) + 3$, so besitz $\mathcal{F}$ eine kohärente Fortsetzung über X. Kurze Zeit später konnten FRISCH und GUENOT mit Hilfe von Methoden von DOUADY einen neuen Beweis für diesen Satz angeben.

Pervenuto alla Redazione il 22 Maggio 1968.

1. Bezeichnungen

Sei G ein Gebiet des $\mathbb{C}^4$ mit den Koordinaten $z_1, \dots, z_4$. In den Abschnitten 1 bis 7 sei A stets die Menge $A = \{z \in G, z_1 = z_2 = z_3 = 0\}$ und $0 \in G$. Ferner sei $E = \{z \in G, z_4 = 0\}$. $\mathcal{F}$ sei stets eine lokal-freie kohärente analytische Garbe über $G - A$, d.h. $codh(\mathcal{F}) \geq 4$. $t = z_4$ sei die komplexe Variable auf A. Wir definieren $\mathcal{F}_E = \mathcal{F}/t\mathcal{F}$. Da $\mathcal{F}$ ohne Torsion ist, gilt $codh(\mathcal{F}_E) \geq 3$ über $E - \{0\}$, d.h. $\mathcal{F}_E$ ist wieder lokal-frei bezüglich der Garbe $\mathcal{O}_E = \mathcal{O}_G/t\mathcal{O}_G$.

Nach [6] besitzt $\mathcal{F}_E$ eine maximale kohärente Fortsetzung $\widehat{\mathcal{F}}_E$ von $E - \{0\}$ nach ganz E, so dass $codh_0(\widehat{\mathcal{F}}_E) \geq 2$. Dann existiert (notfalls unter Verkleinerung von G) über E eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_E^n \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_E^m \xrightarrow{\alpha} \widehat{\mathcal{F}}_E \longrightarrow 0, \quad \text{wo} \quad n \leq m.$$

Sei $\mathcal{K}_E = \beta(\mathcal{O}_E^n)$. $\mathcal{K}_E$ ist lokal-frei über E und $rg(\mathcal{K}_E) = n$. Der Homomorphismus β wird durch eine Matrix $(\beta_{\nu\mu})$ $\nu = 1, \dots, n$; $\mu = 1, \dots, m$ von holomorphen Funktionen $\beta_{\nu\mu} = \beta_{\nu\mu}(z_1, z_2, z_3)$ über E dargestellt. Es gilt bekanntlich: $rg_{\mathbb{C}}(\beta_{\nu\mu}(x)) = n$ genau dann, wenn $\widehat{\mathcal{F}}_{E,x}$ frei ist, d.h. genau dann, wenn $x \neq 0$. Zu jedem $x \neq 0$ gibt es dann ein $\delta_x > 0$ und eine Umgebung $W = W(x)$, so dass über W für eine der Unterdeterminanten d von $(\beta_{\nu\mu})$ vom Rang n gilt: $|d| \geq \delta_x$.

Sei nun $R = R(a, b) = \left\{z \in \mathbb{C}^3, a^2 < \sum_{\nu=1}^{3} |z_\nu|^2 < b^2\right\} \subset\subset E$ wo $0 < a < b$, und R^* ein weiteres Ringgebiet mit $R \subset\subset R^* \subset\subset E$. Dann gibt es eine endliche Überdeckung $\mathfrak{W} = \{W_\varkappa\}_{\varkappa=1,\dots,k}$ von R^*, wobei jedes $W_\varkappa$ holomorph-vollständing und eine Menge der eben beschriebenen Art ist. Eine solche Überdeckung $\mathfrak{W}$ von R heisse Messatlas.

Sei $\varrho > 0$. Wir schreiben $K_\varrho = K_\varrho(0) = \{t \in A, |t| < \varrho\}$. Es gibt ein $\varrho_0 > 0$, so dass $\widehat{R}^*_{\varrho_0} = R^* \times K_{\varrho_0} \subset\subset G$. Für eine Menge $M \subset E$ schreiben wir stets $\widehat{M}_\varrho = M \times K_\varrho$, und ist $\mathfrak{W}$ ein Messatlas, kurz $\widehat{\mathfrak{W}} = \mathfrak{W} \times K_{\varrho_0}$. Über jedem $\widehat{W}_\varkappa$ gibt es dann einen Isomorphismus $\alpha_\varkappa: \mathcal{O}_G^S \longrightarrow \mathcal{F}$, wo $s = rg(\mathcal{F})$.

2. Zulässige Überdeckungen.

Wir bezeichnen mit $\partial_a R$ den inneren Rand $\{|z| = a\}$ von $R = R(a, b)$ wo $|z|^2 = \sum_1^3 |z_\nu|^2$. In jedem $z_0 \in \partial_a R$ gibt es eine Taylorentwicklung von $|z|^2$ der Form

$$|z|^2 = a^2 + 2Re\left(\sum_{\nu=1}^{3} \bar{z}_\nu^0 (z_\nu - z_\nu^0)\right) + |z - z_0|^2.$$

Durch eine unitäre Transformation der Art

$$w_1 = c\,\Sigma \bar{z}_\nu^0 (z_\nu - z_\nu^0), \quad c > 0$$

$$w_2 = \Sigma\, a_{2\nu} (z_\nu - z_\nu^0)$$

$$w_3 = \Sigma\, a_{3\nu} (z_\nu - z_\nu^0)$$

führen wir in z_0 neue Koordinaten ein. Zu $\varepsilon_2, \varepsilon_3 > 0$ gibt es ein $\varepsilon_1 > 0$, so dass

$$(\partial \{(w_2, w_3), |w_2| < \varepsilon_2, |w_3| < \varepsilon_3\} \times \{w_1, |w_1| \leq \varepsilon_1\}) \cap \partial_a R = \emptyset$$

denn die Ebene $w_1 = 0$ berührt $\partial_a R$ genau in z_0. Sei $U = U(z_0) = \{w \in \mathbb{C}^3 \mid |w_\nu| < \varepsilon_\nu, \nu = 1, 2, 3\}$, wo $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Mit diesen Bezeichnungen gilt das folgende Lemma.

(2.1) *Jede auf $U \cap R$ holomorphe und dort quadrat-integrierbare Funktion f ist fortsetzbar zu einer auf U holomorphen und dort quadrat-integrierbaren Funktion $\widehat{f}$. Darüber hinaus gibt es eine Konstante $c > 0$, so dass stets*

$$\int_U |\widehat{f}|^2 d\lambda \leq C^2 \int_{U \cap R} |f|^2 d\lambda$$

wo λ dass Lebesguesmass des $\mathbb{C}^3$ bezeichne.

Beweis: Die Fortsetzung $\widehat{f}$ existiert nach dem Kontinuitätssatz von Hartogs. Die Integralabschätzung ergibt sich aus dem Satz von Fubini für mehrfache Integrale, dem Maximumprinzip für holomorphe Funktionen und aus der Tatsache, dass zwei reelle Zahlen $0 < r_1 < r_2$ existieren, so dass für jedes w_1^0 mit $|w_1^0| \leq \varepsilon_1$ die Menge $\{(w_1^0, w_2, w_3), r_1^2 < |w_1|^2 + |w_2|^2 < r_2^2\} \subset\subset U \cap \{w_1 = w_1^0\}$ liegt.

Definition: Seien R und $\mathfrak{W}$ wie in Abschnitt 1. Eine offene Überdeckung $\mathfrak{U}$ von $\bar{R}$ heisst zulässig, wenn gilt:
1. $\mathfrak{U}$ ist endlich, 2. $\mathfrak{U}$ ist Steinsch, 3. jedes $U \in \mathfrak{U}$ mit $U \cap \partial_a R \neq \emptyset$ ist ein Polyzylinder der eben beschriebenen Art, 4. $\mathfrak{U}$ ist echt feiner als $\mathfrak{W}$, d.h. zu jedem $U \in \mathfrak{U}$ gibt es ein $W_\varkappa$ mit $U \subset\subset W_\varkappa$, 5. für jedes $U \in \mathfrak{W}$ folgt aus $U \cap \partial_a R \neq \emptyset$ $U \cap \partial_b R = \emptyset$ und umgekehrt.

3. Die $\mathfrak{U} - \varrho -$ Norm.

a) Sei ϱ_0 wie in Abschnitt 1 gewählt und $\varrho < \varrho_0$. $\mathfrak{U}$ sei eine zulässige Überdeckung von R, und I bzw. $K = \{1, \dots, k\}$ die Indexmemgen von $\mathfrak{U}$ bzw. $\mathfrak{W}$. Wir wollen in $C^q(\widehat{\mathfrak{U}}_\varrho \cap \widehat{R}_\varrho, \mathcal{F})$ eine Norm einführen. Zu diesem Zweck betrachten wir Abbildungen $\varkappa : I^{q+1} \longrightarrow K$, die jedem $(\iota_0, \dots, \iota_q)$ ein $\varkappa = \varkappa(\iota_0, \dots, \iota_q)$ mit $U\iota_0 \dots \iota_q \subset\subset W_\varkappa$ zuordnen. Wir schreiben im folgenden auch σ für ein $(\iota_0, \dots, \iota_q) \in I^{q+1}$, falls $\dim(\iota_0, \dots, \iota_q) = q$ ist. Ist $\xi = (\xi_\sigma) \in C^q(\widehat{\mathfrak{U}}_\varrho \cap \widehat{R}_\varrho, \mathcal{F})$, so gibt es zu jeder Funktion $\varkappa$ ein System $f_{\sigma, \varkappa(\sigma)} \in H^0(\widehat{U}_{\sigma,\varrho}, \mathcal{O}_G^S)$, so dass $\xi_\sigma = \alpha_{\varkappa(\sigma)}(\mathfrak{f}_{\sigma,\varkappa(\sigma)})$. Jedes $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_{\sigma,\varkappa(\sigma)}$ können wir in eine Potenzreihe

$$\mathfrak{f} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{\varrho}\right)^n \mathfrak{f}^{(n)}$$

entwickeln, in der die Koeffizienten holomorph in z_1, z_2, z_3 sind. Bezeichnet λ wieder das Lebesguemass des $\mathbb{C}^3$, so setzen wir

$$\|\xi\|^2_{\mathfrak{U}\varrho} = \sup_\varkappa \sup_n \sum_\sigma \int\limits_{U_\sigma \cap R} |\mathfrak{f}^{(n)}_{\sigma,\varkappa(\sigma)}|^2 \, d\lambda$$

wo $|\mathfrak{f}|^2 = |f_1|^2 + \dots + |f_s|^2$ für ein Tupel $\mathfrak{f} = (f_1, \dots, f_s)$ gesetzt ist, und das $\sup\limits_\varkappa$ über alle möglichen Funktionen $\varkappa$ zu erstrecken ist. Es ist möglich, dass $\|\xi\|_{\mathfrak{U},\varrho} = \infty$ ist. Sei $C_0^q = C_0^q(\widehat{\mathfrak{U}}_\varrho \cap \widehat{R}_\varrho, \mathcal{F})$ der Raum der Coketten mit endlicher Norm.

Bevor wir Eigenschaften der $\mathfrak{U} \cdot \varrho \cdot$ Norm untersuchen, beweisen wir einen Hilfssatz über die Isomorphismen $\alpha_{\varkappa_1}^{-1} \circ \alpha_{\varkappa_2}$. Ist $U \in \mathfrak{U}$ und $\mathfrak{f} \in H^0(\widehat{U}_\varrho, \mathcal{O}_G^s)$ so definieren wir $\|\mathfrak{f}\|^2_{U,\varrho} = \sup\limits_n \int\limits_U |\mathfrak{f}^{(n)}|^2 \, d\lambda$, wenn $\mathfrak{f} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{\varrho}\right)^n \mathfrak{f}^{(n)}$ ist. Nun gilt

(3.1) *Es gibt eine Konstante $C > 0$, so dass für jedes Paar $(\varkappa_1, \varkappa_2)$ und jedes $U \in \mathfrak{U}$, $U \subset W_{\varkappa_1} \cap W_{\varkappa_2}$, gilt*

$$\|\alpha_{\varkappa_1}^{-1} \circ \alpha_{\varkappa_2}(\mathfrak{f})\|_{U,\varrho} \leq C \, \|\mathfrak{f}\|_{U,\varrho}$$

für $\mathfrak{f} \in H^0(\widehat{U}_\varrho, \mathcal{O}_G^s)$.

Beweis: Sei $\mathfrak{W}' \subset\subset \mathfrak{W}$ ein Messatlass, der auch noch eine Umgebung von R überdeckt so dass $\mathfrak{U}$ noch echt feiner als $\mathfrak{W}'$ ist. Sei ferner $\varrho<\varrho^*<\varrho_0$. Der Isomorphismus $\alpha = \alpha_{\varkappa_1}^{-1} \circ \alpha_{\varkappa_2}$ wird durch eine Matrix $(a_{\mu\nu})$ beschrieben, derart, dass

$$\alpha(f_1, \dots, f_s) = (\sum_\nu f_\nu a_{\nu 1}, \dots, \sum_\nu f_\nu a_{\nu s}).$$

Es gibt dann für die Funktionen $a_{\nu\mu}$ Taylorreihen der Form

$$a_{\nu\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{\varrho}\right)^n \left(\frac{\varrho}{\varrho_*}\right)^n a_{\nu\mu}^{(n)}.$$

Wegen der kompakten Konvergenz von Taylorreihen dürfen wir annehmen, dass $\sup_{x \in W'_{\varkappa_1 \varkappa_2}} |a_{\nu\mu}^{(n)}(x)| \leq C$; und da nur endlich viele Paare $(\varkappa_1, \varkappa_2)$ auftreten, ist C unabhängig von $(\varkappa_1, \varkappa_2)$ wählbar. Sei nun $U \subset\subset W'_{\varkappa_1 \varkappa_2} \subset\subset W_{\varkappa_1 \varkappa_2}$ und sei $\mathfrak{g} = (g_1, \dots, g_s) = \alpha_{\varkappa_1}^{-1} \circ \alpha_{\varkappa_2}(f_1, \dots, f_s)$ für $\mathfrak{f} = (f_1, \dots, f_s) \in H^0(\widehat{U}_\varrho, \mathcal{O}_G^s)$ mit $\|\mathfrak{f}\|_{U,\varrho} \leq M$. Wir schreiben $g_\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{\varrho}\right)^k g_\mu^{(k)}$ und erhalten mit $\tau = \frac{\varrho}{\varrho^*} < 1$

$$g_\mu^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{s} \left(\sum_{n=0}^{k} f_\nu^{(k-n)} \cdot a_{\nu\mu}^{(n)} \cdot \tau^n \right)$$

Nun schätzen wir der Reihe nach *ab*:

$$|g_\mu^{(k)}| \leq \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{n=0}^{k} |f_\nu^{(k-n)}| \, C \cdot \tau^n$$

wobei wegen der Wahl von C diese Abschätzung unabhängig von $(\varkappa_1, \varkappa_2)$ ist. Es folgt

$$|g_\mu^{(k)}|^2 \leq C^2 \cdot s \cdot \sum_{\nu=1}^{s} \left(\sum_{n=0}^{k} |f_\nu^{(k-n)}| \, \tau^n \right)^2$$

$$\leq C^2 \cdot s \sum_{\nu=1}^{s} \frac{1}{1-\tau} \sum_{n=0}^{k} |\mathfrak{f}_\nu^{(k-n)}|^2 \tau^n$$

denn $1 + \tau + \dots + \tau^k \leq \frac{1}{1-\tau}$. Weiter folgt daraus

$$|\mathfrak{g}^{(k)}|^2 \leq C^2 \cdot s^2 \cdot \frac{1}{1-\tau} \sum_{n=0}^{k} |\mathfrak{f}^{(k-n)}|^2 \tau^n$$

Integration über U ergibt

$$\int\limits_U |\mathfrak{g}^{(k)}|^2 \, d\lambda \leq C^2 \cdot s^2 \cdot \frac{1}{1-\tau} \sum_{n=0}^{k} \tau^n \int\limits_U |\mathfrak{f}^{(k-n)}|^2 \, d\lambda$$

$$\leq C^2 \cdot s^2 \cdot \frac{1}{1-\tau} \sum_{n=0}^{k} \tau^n \cdot M^2 \leq \frac{C^2 \cdot s^2}{(1-\tau)^2} \cdot M^2$$

und da diese Abschätzung von k unabhängig ist, folgt

$$\| \mathfrak{g} \|^2_{U,\varrho} \leq \frac{C^2 \cdot s^2}{(1-\tau)^2} \cdot M^2,$$

womit der Hilfssatz (3.1) bewiesen ist.

Nun stellen wir einige Eigenschaften der $\mathfrak{U}$-ϱ-Norm zusammen

(3.2) *Der Raum $C^q_0(\widehat{\mathfrak{U}}_\varrho \cap \widehat{R}_\varrho, \mathcal{F})$ der q-Coketten mit endlicher $\mathfrak{U}$-ϱ-Norm ist ein Banachraum.*

Beweis: Zunächst sieht man sofort, dass $\| \;\; \|_{\mathfrak{U},\varrho}$ alle Eigenschaften einer Norm besitzt, und dass C^q_0 ein normierter Vektorraum über $\mathbb{C}$ ist Um die Vollständigkeit zu beweisen, konstruiere man sich zu einer Cauchyfolge ξ^ν in C^q_0 zu jeder Funktion $\varkappa$ ein System $\mathfrak{f}_{\sigma,\varkappa} = \mathfrak{f}_{\sigma,\varkappa(\sigma)}$ von Tupeln holomorpher Funktionen. Aufgrund der Stetigkeit der Isomorphismen $\alpha^{-1}_{\varkappa_1} \circ \alpha_{\varkappa_2}$, vgl. (3.1), kann man dann $\xi_\sigma = \alpha_\varkappa(\mathfrak{f}_{\sigma,\varkappa})$ eindeutig definieren und zeigen, dass in der $\mathfrak{U}$-ϱ-Norm $\xi^\nu \longrightarrow \xi = (\xi_\sigma)$ konvergiert.

Die folgende Aussage ergibt sich direkt aus der Definition

(3.3) (1) *Sei $\xi \in C^q(\widehat{\mathfrak{U}}_\varrho \cap \widehat{R}_\varrho, \mathcal{F})$* und $\dfrac{t}{\varrho}\xi$ *endlich. Dann ist auch ξ endlich und es gilt* $\| \xi \|_{\mathfrak{U},\varrho} = \left\| \dfrac{t}{\varrho} \xi \right\|_{\mathfrak{U},\varrho}$

(2) *Ist $\xi \in C^q_0(\widehat{\mathfrak{U}}_\varrho \cap \widehat{R}_\varrho, \mathcal{F})$ und $\tau < \varrho$, so gilt für jede natürliche Zahl n die Abschätzung*

$$\left\| \left(\frac{t}{\varrho}\right)^n \xi \right\|_{\mathfrak{U},\tau} \leq \left(\frac{\tau}{\varrho}\right)^n \| \xi \|_{\mathfrak{U},\varrho}$$

Wir beweisen weiter den wichtigen Satz

(3.4) *Sei $R^* \supset\supset R$ ein weiteres Ringgebiet, so dass $\bar{R}^* \subset \bigcup\limits_1^k W_\varkappa$ und $\varrho_0 > \varrho^* > \varrho$.*

Dann gibt es zu jedes Klasse $c \in H^1(\widehat{R}^*_{\varrho^*}, \mathcal{F})$ *einen endlichen Cozyklus* $\xi \in Z^1_0(\widehat{\mathfrak{U}}_\varrho \cap \widehat{R}_\varrho, \mathcal{F})$ *der* $c \mid \widehat{R}_\varrho$ *repräsentiert.*

Beweis: Es gibt eine zulässige Überdeckung $\mathfrak{U}^*$ von R^* mit derselben Indexmenge I wie $\mathfrak{U}$ und $U_\iota \subset\subset U_\iota^*$ für jedes $\iota \in I$. Nach [1] ist wegen $codh\ (\mathcal{F}) \geq 4\ H^1(\widehat{U}_\varrho \cap \widehat{R}_\varrho, \mathcal{F}) = 0$ für $U \in \mathfrak{U}$. Also ist $\widehat{\mathfrak{U}}_\varrho \cap \widehat{R}_\varrho$ zulässig für die erste Cohomologie, d. h. $H^1(\widehat{\mathfrak{U}}_\varrho \cap \widehat{R}_\varrho, \mathcal{F}) \cong H^1(\widehat{R}_\varrho, \mathcal{F})$; Entsprechendes gilt für $\mathfrak{U}^*$ und R^*. Wir wählen einen Repräsentanten $\xi^* = (\xi^*_\sigma) \in Z^1(\widehat{\mathfrak{U}}^*_{\varrho^*} \cap \widehat{R}^*_{\varrho^*}, \mathcal{F})$ von c. Für jede Funktion $\varkappa : I^2 \longrightarrow K$ gilt $\xi^*_\sigma = \alpha_{\varkappa(\sigma)}(\mathfrak{f}^*_{\sigma, \varkappa(\sigma)})$. Entwickeln wir die Funktionen $\mathfrak{f}^*_{\sigma, \varkappa(\sigma)}$ in Taylorreihen bez. ϱ' mit $\varrho^* > \varrho' > \varrho$ so gibt es eine Schranke M, so dass $\sup\limits_{x \in U_\sigma \cap R} |\mathfrak{f}^{*(n)}_{\sigma, \varkappa(\sigma)}(x)| \leq M$ für alle n und alle (endlich vielen) Indizes $(\sigma, \varkappa(\sigma))$, wenn $\mathfrak{f}^*_{\sigma, \varkappa(\sigma)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{\varrho'}\right)^n \mathfrak{f}^{*\,(n)}_{\sigma, \varkappa(\sigma)}$ ist, denn die Reihen konvergieren gleichmässig in $(U_\sigma \cap R)^\wedge_{\varrho'}$.

Wir setzen $\xi_\sigma = \xi^*_\sigma \mid \widehat{U}_{\sigma, \varrho} \cap \widehat{R}_\varrho$ und $\xi = (\xi_\sigma)$. Dann repräsentiert ξ die Klasse $c \mid \widehat{R}_\varrho$ und ξ ist endlich: Für jede Funktion $\varkappa$ gilt $\xi_\sigma = \alpha_{\varkappa(\sigma)}(\mathfrak{f}_{\sigma\, \varkappa(\sigma)})$ mit $\mathfrak{f}_{\sigma, \varkappa(\sigma)} = \mathfrak{f}^*_{\sigma, \varkappa(\sigma)} \mid \widehat{U}_{\sigma, \varrho} \cap \widehat{R}_\varrho$ und

$$\mathfrak{f}_{\sigma, \varkappa(\sigma)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{\varrho}\right)^n \mathfrak{f}^{(n)}_{\sigma, \varkappa(\sigma)}$$

mit $\mathfrak{f}^{(n)}_{\sigma, \varkappa(\sigma)} = \left(\frac{\varrho}{\varrho'}\right)^n \mathfrak{f}^{*(n)}_{\sigma, \varkappa(\sigma)}$. Dann gibt es eine Konstante C, unabhängig von $\varkappa$ und n, so dass

$$\sum_\sigma \int\limits_{U_\sigma \cap R} |\mathfrak{f}^{(n)}_{\sigma, \varkappa(\sigma)}|^2\, d\lambda \leq C^2 M^2$$

d. h. $\| \xi \|_{\mathfrak{U}, \varrho} \leq CM$ ist endlich.

Es gibt noch der Satz

(3.5) Der Corandoperator $\partial^q : C^q_0(\widehat{\mathfrak{U}}_\varrho \cap \widehat{R}_\varrho, \mathcal{F}) \longrightarrow C^{q+1}_0(\widehat{\mathfrak{U}}_\varrho \cap \widehat{R}_\varrho, \mathcal{F})$ ist stetig.

Zum Beweis beachte man, dass bezüglich $q+1$ mehr Funktionen $\varkappa$ auftreten. Man hat daher Abschätzungen wie in (3.1) zu benutzen. Aufgrund der Endlichkeit der Überdeckung $\mathfrak{U}$ ergibt sich eine geometrische Kanstante C, so dass für jedes $\xi \in C^q_0(\widehat{\mathfrak{U}}_\varrho \cap \widehat{R}_\varrho, \mathcal{F})$ gilt $\| \partial^q \xi \|_{\mathfrak{U}, \varrho} \leq C \| \xi \|_{\mathfrak{U}, \varrho}$ Man beachte, dass die Stetigkeit bei unendlicher Überdeckung $\mathfrak{U}$ im allgemeinen nicht mehr gewährleistet ist.

b) Wir befassen uns nun mit der Äquivalenz verschiedener $\mathfrak{U}$-Normen für die Garbe $\mathcal{F}_E = \mathcal{F}/t\mathcal{F}$. Die Isomorphismen $\alpha_\varkappa : \mathcal{O}_G^s \longrightarrow \mathcal{F}$ über $\widehat{W}_\varkappa$ induzieren Isomorphismen $\overline{\alpha}_\varkappa : \mathcal{O}_E^s \longrightarrow \mathcal{F}_E$ über $W_\varkappa$. Wir definieren nun für Coketten $\xi \in C^q(\mathfrak{U} \cap R, \mathcal{F}_E)$ eine Norm $\| \xi \|_{\mathfrak{U}}$ wie folgt. Ist $\xi = (\xi_\sigma)$ und $\xi_\sigma = \overline{\alpha}_\varkappa (\mathfrak{f}_{\sigma,\varkappa})$ so sei

$$\| \xi \|^2_{\mathfrak{U}} = \sup_\varkappa \sum_\sigma \int\limits_{U_\sigma \cap R} | \mathfrak{f}_{\sigma,\varkappa} |^2 \, d\lambda,$$

wo das sup wieder über alle Funktionen $\varkappa : I^{q+1} \longrightarrow K$ genommen wird.

Wie in *a*) ist $C_0^q(\mathfrak{U} \cap R, \mathcal{F}_E)$, der Raum der Coketten mit endlicher Norm, ein Banachraum. Die kanonische Abbildung $\xi \longrightarrow \overline{\xi}$ von

$$C_0^q(\widehat{\mathfrak{U}}_\varrho \cap \widehat{R}_\varrho, \mathcal{F}) \longrightarrow C_0^q(\mathfrak{U} \cap R, \mathcal{F}_E)$$

ist stetig, denn es gilt $\| \overline{\xi} \|_{\mathfrak{U}} \leq \| \xi \|_{\mathfrak{U},\varrho}$.

Sei nun ein anderes System $\beta_\varkappa$, $\varkappa = 1, \dots, k$, von Epimorphismen $\beta_\varkappa : \mathcal{O}_E^{s_\varkappa} \longrightarrow \mathcal{F}_E$ über $W_\varkappa$ gegeben. Ist $\xi = (\xi_\sigma)$ eine Cokette in $C^q(\mathfrak{U} \cap R, \mathcal{F}_E)$, so gibt es stets Systeme $(\mathfrak{g}_{\sigma,\varkappa(\sigma)})$ mit $\xi_\sigma = \beta_{\varkappa(\sigma)}(\mathfrak{g}_{\sigma,\varkappa(\sigma)})$. Wir definieren

$$\| \xi \|^2_{\mathfrak{U},\beta} = \sup_\varkappa \inf_{(\mathfrak{g}_{\sigma,\varkappa})} \sum_\sigma \int\limits_{U_\sigma \cap R} | \mathfrak{g}_{\sigma,\varkappa(\sigma)} |^2 \, d\lambda$$

$$= \sup_\varkappa \sum_\sigma \inf_{\mathfrak{g}_{\sigma,\varkappa}} \int\limits_{U_\sigma \cap R} | \mathfrak{g}_{\sigma,\varkappa(\sigma)} |^2 \, d\lambda.$$

Die Normeigenschaften lassen sich wieder leicht verifizieren. Dass $\| \ \|_{\mathfrak{U},\beta}$ definit ist, folgt so: Ist $\| \xi \|_{\mathfrak{U},\beta} = 0$ so gilt für jede Funktion $\varkappa$
$\inf\limits_{\mathfrak{g}_{\sigma,\varkappa(\sigma)}} \int\limits_{U_\sigma \cap R} | \mathfrak{g}_{\sigma,\varkappa(\sigma)} |^2 \, d\lambda = 0$ für jeden Index.

Nun induziert bekanntlich die L^2-Konvergenz in $H^0(U_\sigma \cap R, \mathcal{O}_E^{s_\varkappa})$ die übliche F-Konvergenz. Ist $\mathcal{K}_\varkappa = \mathrm{Ker}(\beta_\varkappa)$, so ist aber in der F-Topologie $H^0(U_\sigma \cap R, \mathcal{K}_\varkappa)$ abgeschlossener Unterraum von $H^0(U_\sigma \cap R, \mathcal{O}_E^{s_\varkappa})$, d. h. es ist $\xi_\sigma = 0$.

Es gilt nun

(3.6) *Sei* $\beta_\varkappa : \mathcal{O}_E^{s_\varkappa} \longrightarrow \mathcal{F}_E$ *ein beliebiges System von Epimorphismen über* $W_\varkappa$, $\varkappa = 1, \dots, k$. *Dann sind die Normen* $\| \ \|_{\mathfrak{U}}$ *und* $\| \ \|_{\mathfrak{U},\beta}$ *zueinander äquivalent und es werden dieselben Räume endlicher Elemente definiert.*

Beweis: Alle $W_\varkappa$ sind holomorph-vollständig. Deshalb sind in dem folgenden Diagramm die $\bar{\alpha}_\varkappa$ und die $\beta_\varkappa$ surjektiv.

$$\begin{tikzcd}
H^0(W_\varkappa, \mathcal{O}_E^s) \arrow[d, shift right, "\gamma_\varkappa"'] \arrow[dr, "\bar{\alpha}_\varkappa"] & \\
 & H^0(W_\varkappa, F_E) \arrow[r] & 0 \\
H^0(W_\varkappa, \mathcal{O}_E^{s_\varkappa}) \arrow[u, shift right, "\delta_\varkappa"'] \arrow[ur, "\beta_\varkappa"'] &
\end{tikzcd}$$

$\bar{\alpha}_\varkappa$ werde durch die Schnitte $u_1^\varkappa, \dots, u_s^\varkappa$ definiert, $\beta_\varkappa$ durch $v_1^\varkappa, \dots, v_{s_\varkappa}^\varkappa$. Dann gibt es holomorphe Funktionen $a_{\nu\mu}^\varkappa \in H^0(W_\varkappa, \mathcal{O}_E)$ mit $u_\nu^\varkappa = \sum_\mu a_{\nu\mu}^\varkappa v_\mu^\varkappa$, $\nu = 1, \dots, s$. Wir definieren dann den Homomorphismus $\gamma_\varkappa$ durch die Zuordnung

$$(f_1, \dots, f_s) \to \left(\sum_\nu f_\nu a_{\nu 1}^\varkappa, \dots, \sum_\nu f_\nu a_{\nu s_\varkappa}^\varkappa\right)$$

Dann gilt $\alpha_\varkappa = \beta_\varkappa \circ \gamma_\varkappa$. Ist $\xi \in C^q(\mathfrak{U} \cap R, \mathcal{F}_E)$ mit

$$\|\xi\|_{\mathfrak{U}}^2 = \sup_\varkappa \sum_\sigma \int_{U_\sigma \cap R} |f_{\sigma, \varkappa(\sigma)}|^2 \, d\lambda = M^2 \text{ und}$$

$$\xi_\sigma = \bar{\alpha}_{\varkappa(\sigma)}(\mathfrak{f}_{\sigma, \varkappa(\sigma)}) = \beta_{\varkappa(\sigma)} \circ \gamma_{\varkappa(\sigma)}(\mathfrak{f}_{\sigma, \varkappa(\sigma)}) \text{ so setzen wir}$$

$\mathfrak{g}_{\sigma, \varkappa(\sigma)} = \gamma_{\varkappa(\sigma)}(\mathfrak{f}_{\sigma, \varkappa(\sigma)})$ und es folgt mit $* = (\sigma, \varkappa(\sigma))$

$$|\mathfrak{g}_*|^2 \leq \sum_{\mu=1}^{s_\varkappa} \left(\sum_{\nu=1}^{s} |a_{\nu\mu}^\varkappa|^2\right) \left(\sum_{\nu=1}^{s} |f_{*\nu}|^2\right).$$

Wir können eine Konstante $C > 0$ finden, so dass über jedem $U_\sigma \cap R$ $\sum_{\nu,\mu} |a_{\nu\mu}^\varkappa|^2 \leq C^2$ für alle $\varkappa$, denn $\mathfrak{U}$ ist eine endliche Überdeckung. Also haben wir

$$\sum_\sigma \int_{U_\sigma \cap R} |\mathfrak{g}_{\sigma, \varkappa(\sigma)}|^2 \, d\lambda \leq \max_1^k s_\varkappa \cdot C^2 \cdot M^2, \text{ d.h.}$$

auch

$$\|\xi\|_{\mathfrak{U}, \beta}^2 \leq \max_1^k s_\varkappa \, C^2 M^2.$$

Entsprechend definieren wir den Homomorphismus $\delta_\varkappa$ mit $\beta_\varkappa = \bar{\alpha}_\varkappa \circ \delta_\varkappa$ und bekommen eine umgekehrte Abschätzung.

Nach Abschnitt 1 existiert über E die exakte Garbensequenz $0 \to \to \mathcal{O}_E^n \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_E^m \xrightarrow{\alpha} \widehat{\mathcal{F}}_E \to 0$. Sei $\mathcal{K}_E = \beta(\mathcal{O}_E^n)$ die Kerngarbe von α. Sei $\widetilde{\mathfrak{U}}$ die Überdeckung $\mathfrak{U} \cup \{|z| < a\}$ von $\Omega = \{z \in E, |z| < b\}$.

Für $C^q(\widetilde{\mathfrak{U}} \cap \Omega, \mathcal{K}_E)$ können wir zwei Normen definieren. Einmal die Norm $\| \;\; \|_{\widetilde{\mathfrak{U}}, i}$, die für ein ξ folgendermassen gebildet wird:

$$\| \xi \|^2_{\widetilde{\mathfrak{U}}, i} = \sum_\sigma \int_{\widetilde{U}_\sigma \cap \Omega} | \xi_\sigma |^2 \, d\lambda, \text{ denn } \mathcal{K}_E \subset \mathcal{O}_E^m.$$

Zum anderen die von dem Isomorphismus β induzierte Norm $\| \;\; \|_{\widetilde{\mathfrak{U}}, \beta}$. Es gilt nun mit diesen Bezeichnungen

(3.7) *Für* $C^q(\widetilde{\mathfrak{U}} \cap \Omega, \mathcal{K}_E)$, $q \geq 1$, *sind die Normen* $\| \;\; \|_{\widetilde{\mathfrak{U}}, \beta}$ *und* $\| \;\; \|_{\widetilde{\mathfrak{U}}, i}$ *äquivalent und es werden dieselben Räume endlicher Elemente definiert.*

Beweis: Es ist zunächst $n \leq m$. Sei $\xi \in C^q(\widetilde{\mathfrak{U}} \cap \Omega, \mathcal{K}_E)$ mit

$$\| \xi \|_{\widetilde{\mathfrak{U}}, i} \leq M < \infty, \text{ d.h. } \sum_\sigma \int_{\widetilde{U}_\sigma \cap \Omega} | \xi_\sigma |^2 \, d\lambda \leq M^2.$$

Der Homomorphismus β wird durch Schnitte $s_\nu = (\beta_{\nu 1}, \dots, \beta_{\nu m})$, $\nu = = 1, \dots, n$ erzeugt. Es gilt

$$\xi_\sigma = (g_{\sigma 1}, \dots, g_{\sigma m}) = \sum_{\nu=1}^n f_{\sigma, \nu} s_\nu$$

mit holomorphen Funktionen $f_{\sigma, \nu} \in H^0(\widetilde{U}_\sigma, \mathcal{O}_E)$, denn $\widetilde{U}_\sigma$ ist holomorph-vollständing.

Also gilt $g_{\sigma, \mu} = \sum_\nu f_{\sigma, \nu} \beta_{\nu\mu}$, $\mu = 1, \dots, m$. Nun liegt jedes U_σ in einem $W_\varkappa$, da $q \geq 1$ und $\mathfrak{U}$ nur den Rand $\partial_a R = \{|z| = a\}$ überdeckt. Nach Wahl der $W_\varkappa$ in Abschnitt 1 gibt es $\delta_\varkappa > 0$, so dass für eine Unterdeterminante $d_\varkappa$ von $(\beta_{\nu\mu})$ vom Rang n gilt $|d_\varkappa| \geq \delta_\varkappa$ über $W_\varkappa$. Also kann man das Gleichungssystem nach $(f_{\sigma,1}, \dots, f_{\sigma,n})$ auflösen $(n \leq m)$ und mit Hilfe der Cramerschen Regeln eine Abschätzung der Art

$$|f_{\sigma, \nu}|^2 \leq C^2 |\xi_\sigma|^2$$

beweisen, wobei C eine Konstante ist, die weder von σ noch von ξ abhängt. Also folgt $\| \xi \|_{\widetilde{\mathfrak{U}}, \beta} \leq C \cdot \| \xi \|_{\widetilde{\mathfrak{U}}, i}$. Die umgekehrte Abschätzung ist trivial. Damit ist (3.7) bewiesen.

4. Ein Lemma von Hörmander.

In diesem Abschnitt zitieren wir ein wichtiges Lemma von Hörmander über die Lösungen des $\bar{\partial}$-Operators und ziehen daraus eine für uns wichtige Folgerung.

(4.1) (vgl. [4], Theorem 2.2.3., p. 107).
Sei Ω eine beschränkte pseudokonvexe offene Menge des $\mathbb{C}^n$ und d ihr Durchmesser. Sei ferner φ eine plurisubharmonische Funktion in Ω. Dann gibt es zu jedem $f \in L^2_{p,q}(\Omega, \varphi)$, $q > 0$, mit $\bar{\partial} f = 0$ ein $u \in L^2_{p,q-1}(\Omega, \varphi)$ mit $\bar{\partial} u = f$ und

$$q \cdot \int_\Omega | u |^2 e^{-\varphi} \, d\lambda \leq e d^2 \int_\Omega | f |^2 e^{-\varphi} \, d\lambda.$$

Bemerkungen:

1) $L^2_{p,q}(\Omega, \varphi)$ ist der Raum der (p, q)-Formen

$$\Sigma f_{i_1 \ldots i_p j_1 \ldots j_q} \, dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \ldots d\bar{z}_{j_q}$$

deren Koeffizienten bezüglich des Masses $e^{-\varphi} \, d\lambda$ quadratisch integrierbar sind.

2) Der Fall $\varphi = 0$ ist zugelassen und nur für diesen Fall benutzen wir das Theorem.

3) $\bar{\partial} f$ für $f \in L^2_{p,q}(\Omega, \varphi)$ ist im distributionellen Sinne zu verstehen.

4) Ω ist pseudokonvex, genau dann, wenn Ω Holomorphiegebiet ist. (vgl. [4], p. 105, Def. 2.2.2).

Aus (4.1) folgt nun das Lemma (4.2), das wir im folgenden Abschnitt benutzen werden:

(4.2) *Sei Ω eine beschränkte offene pseudokonvexe Menge des $\mathbb{C}^n$, $\mathfrak{U}$ eine Steinsche Überdeckung von Ω und $p > 0$. Es gibt eine Konstante $K > 0$, so dass zu jeder Cokette $\xi \in C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ mit $\partial \xi = 0$ und*

$$\| \xi \|^2_{\mathfrak{U}} = \sum_{(\iota_0, \ldots, \iota_p)} \int_{U_{\iota_0 \ldots \iota_p}} | \xi_{\iota_0 \ldots \iota_p} |^2 \, d\lambda < \infty$$

eine Cokette $\eta \in C^{p-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ *existiert, so dass* $\partial\eta = \xi$ *und* $\|\eta\|_{\mathfrak{U}} \leq K \|\xi\|_{\mathfrak{U}}$ *ist.*

Der Beweis kann dabei genauso wie in [3], p. 185, proof of proposition 7.6.1, geführt werden. Man ersetze nur $\mathbb{C}^n$ durch Ω, φ und ψ durch 0 und benutze den Satz (4.1) anstelle des Lemma 7.6.1 in [3].

5. Der Corandoperator.

Wir beweisen für die Garbe $\mathcal{F}_E$ den wichtigen Satz 5.1 und benutzen dabei die Bezeichnungen der früheren Abschnitte. Seien R und $\mathfrak{U}$ wie in den Abschnitten 1 bis 3.

(5.1) *Es gibt eine Konstante* $C = C(R, \mathfrak{U})$, *so dass gilt : Zu jedem* $\gamma \in B^1(\mathfrak{U} \cap R, \mathcal{F}_E)$ *mit* $\|\gamma\|_{\mathfrak{U}} < \infty$ *gibt es ein* $\eta \in C^0(\mathfrak{U} \cap R, \mathcal{F}_E)$ *mit* $\partial\eta = \gamma$, $\|\eta\|_{\mathfrak{U}} \leq C \|\gamma\|_{\mathfrak{U}}$.

Beweis :

a) Nach Abschnitt 1 gibt es über E die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_E^n \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_E^m \xrightarrow{\dot{\alpha}} \widehat{\mathcal{F}}_E \longrightarrow 0.$$

Wir setzen wieder $\mathcal{K}_E = \beta(\mathcal{O}_E^n)$. $\mathfrak{U}$ ist eine zulässige Überdeckung von $R = R(a, b)$. Wir setzen $\Omega = \{z \in E \mid |z| < b\}$ und $U_0 = \{z \in E, |z| < a\}$. Dann ist $\widetilde{\mathfrak{U}} = (\mathfrak{U} \cup \{U_0\}) \cap \Omega$ eine Steinsche Überdeckung von Ω, auf die wir (4.2) anwenden können.

b) Da $\gamma \in B^1(\mathfrak{U} \cap R, \mathcal{F}_E)$ ist, gibt es ein $\eta \in C^0(\mathfrak{U} \cap R, \mathcal{F}_E)$ mit $\gamma = \partial\eta$, d. h. über $U_{\iota_0 \iota_1} \cap R$ gilt $\gamma_{\iota_0 \iota_1} = \eta_{\iota_1} - \eta_{\iota_0}$. Seien $\bar{\alpha}_\varkappa : \mathcal{O}_E^s \longrightarrow \mathcal{F}_E$ wie oben die Isomorphismen über $W_\varkappa$. Wir haben dann

$$\gamma_{\iota_0 \iota_1} = \bar{\alpha}_\varkappa(\mathfrak{f}_{\iota_0 \iota_1, \varkappa}) \text{ mit } \sup_\varkappa \sum_{\iota_0, \iota_1} \int_{U_{\iota_0 \iota_1} \cap R} |\mathfrak{f}_{\iota_0 \iota_1, \varkappa}|^2 \, d\lambda < \infty.$$

Entsprechend gibt es für Funktionen $\tau : I \longrightarrow K$ Tupel von Funktionen $\mathfrak{g}_{\iota, \tau}$ mit $\eta_\iota = \bar{\alpha}_\tau(\mathfrak{g}_{\iota, \tau})$. Sei nun U_{ι_0} herausgegriffen, so dass $U_{\iota_0} \cap \partial\Omega = \emptyset$. Wir wollen zeigen, dass η_{ι_0} oder $\mathfrak{g}_{\iota_0, \tau(\iota_0)}$ endlich ist. Sei $x \in \partial(U_{\iota_0} \cap R)$. Es gibt zwei Fälle : $x \in \partial_a R$ oder $x \notin \partial_a R$. Sei zunächst $x \in \partial_a R$. Dann gibt es eine Umgebung $V = V(x) \subset\subset U_{\iota_1}$ fur ein U_{ι_1}. Da U_{ι_1} nach Abschnitt 1 ein ausgezeichneter Polyzylinder ist, kann man η_{ι_1} auf ganz U_{ι_1} fortsetzen, so dass für ein τ_1 das Tupel $\mathfrak{g}_{\iota_1, \tau_1}$ mit $\eta_{\iota_1} = \bar{\alpha}_{\tau_1}(\mathfrak{g}_{\iota_1, \tau_1})$ « endlich über V » und damit auch endlich über $V \cap U_{\iota_0} \cap R$ ist, d. h.

$$\int_{V \cap U_{\iota_0} \cap R} |\mathfrak{g}_{\iota_1, \tau_1}|^2 \, d\lambda < \infty.$$

Mit weiteren gewissen $\varkappa$ und τ_0 gilt nun aufgrund von $\gamma_{\iota_0 \iota_1} = \eta_{\iota_1} - \eta_{\iota_0}$ über $U_{\iota_0 \iota_1} \cap R$

$$\mathfrak{f}_{\iota_0 \iota_1, \varkappa} = \overline{\alpha}_{\varkappa}^{-1} \circ \overline{\alpha}_{\tau_1} (\mathfrak{g}_{\iota_1, \tau_1}) - \overline{\alpha}_{\varkappa}^{-1} \circ \overline{\alpha}_{\tau_0} (\mathfrak{g}_{\iota_0, \tau_0}).$$

Es ist nun $\int_{V \cap U_{\iota_0} \cap R} |\overline{\alpha}_{\varkappa}^{-1} \circ \overline{\alpha}_{\tau_1} (\mathfrak{g}_{\iota_1, \tau_1})|^2 \, d\lambda < \infty$, vgl. (3.1) und nach. Voraussetzung

$$\int_{V \cap U_{\iota_0} \cap R} |\mathfrak{f}_{\iota_0 \iota_1, \varkappa}|^2 \, d\lambda < \infty.$$

Also ist auch

$$\int_{V \cap U_{\iota_0} \cap R} |\mathfrak{g}_{\iota_0, \tau_0}|^2 \, d\lambda^2 < \infty.$$

Ist $x \notin \partial_a R$, so schliesst man ganauso. Da $\partial (U_{\iota_0} \cap R)$ kompakt ist, haben wir damit gezeigt, dass $\mathfrak{g}_{\iota_0, \tau_0}$ über $U_{\iota_0} \cap R$ quadratisch integrierbar ist. Nach Satz (2.1) besitzt $\mathfrak{g}_{\iota_0, \tau_0}$ eine Fortsetzung $\widehat{\mathfrak{g}}_{\iota_0, \tau_0}$ auf ganz U_{ι_0}, die dort ebenfalls quadratisch integrierbar ist. Dasselbe gilt auch für jede andere Funktion $\tau : I \longrightarrow K$ vgl. Satz (3.1). $\widehat{\eta}_\iota = \overline{\alpha}_\tau (\widehat{\mathfrak{g}}_{\iota, \tau})$ ist dann « endlich », wenn $U_\iota \cap \partial \Omega = \emptyset$.

c) Wir definieren nun $\widetilde{\eta} \in C^0 (\widetilde{\mathfrak{U}}, \mathcal{F}_E)$ wie folgt: $\widetilde{\eta} = (\widetilde{\eta}_\iota)$,

$$\widetilde{\eta}_\iota = \begin{cases} 0 & \text{für } \iota = 0 \\ \widehat{\eta}_\iota & \text{für } \iota \neq 0 \quad \text{und} \quad U_\iota \cap \partial \Omega = \emptyset \\ \eta_\iota & \text{sonst} \end{cases}$$

und es gilt $\widetilde{\eta} \,|\, \mathfrak{U} \cap R = \eta$, so dass $\widetilde{\gamma} = \partial \widetilde{\eta} \,|\, \mathfrak{U} \cap = \gamma$. Aber $\widetilde{\gamma}$ ist wegen *b*) endlich! denn auf $U_0 \cap U_\iota$ ist $\widehat{\eta}_\iota \,|\, U_0 \cap U_\iota$ endlich.

d) Der Homomorphismus α wird durch Schnitte $s_1, \dots, s_m \in H^0 (E, \mathcal{F}_E)$ definiert. Da die $\widetilde{U}_\iota$ holomorph-vollständig sind, gibt es Tupel $\mathfrak{f}_\iota = (f_\iota^1, \dots, f_\iota^m)$ über $\widetilde{U}_\iota$ und

$$\mathfrak{g}_{\iota_0 \iota_1} = (g^1_{\iota_0 \iota_1}, \dots, g^m_{\iota_0 \iota_1})$$

über $\widetilde{U}_{\iota_0 \iota_1}$ mit $\widetilde{\eta}_\iota = \sum_\mu f_\iota^\mu s_\mu$ und $\widetilde{\gamma}_{\iota_0 \iota_1} = \sum_\mu g_{\iota_0 \iota_1}^\mu s_\mu$. Da $\widetilde{\gamma}$ endlich ist, kann man die $\mathfrak{g}_{\iota_0 \iota_1}$ so wählen, dass

$$\sum_{\iota_0 \iota_1} \int_{\widetilde{U}_{\iota_0 \iota_1}} | \mathfrak{g}_{\iota_0 \iota_1} |^2 \, d\lambda < \infty, \qquad \text{vgl. Satz (3.6).}$$

(Zu jedem $\widetilde{U}_{\iota_0 \iota_1}$ gibt es ein $W_\varkappa$ mit $\widetilde{U}_{\iota_0 \iota_1} \subset\subset W_\varkappa$).

Wegen $\partial \widetilde{\eta} = \widetilde{\gamma}$ gilt über $\widetilde{U}_{\iota_0 \iota_1}$ nun

$$\sum_\mu (f_{\iota_1}^\mu - f_{\iota_0}^\mu - g_{\iota_0 \iota_1}^\mu) s_\mu = 0$$

d. h. $\mathfrak{k} = (\mathfrak{k}_{\iota_0 \iota_1}) = (\mathfrak{f}_{\iota_1} - \mathfrak{f}_{\iota_0} - \mathfrak{g}_{\iota_0 \iota_1}) \in C^1(\widetilde{\mathfrak{U}}, \mathcal{K}_E)$. Es gilt $\partial \mathfrak{k} = - \partial \mathfrak{g}$ und demnach ist $\| \partial \mathfrak{k} \|_{\widetilde{\mathfrak{U}}, i} < \infty$. Nach Satz (3.7) ist dann aber auch $\| \partial \mathfrak{k} \|_{\widetilde{\mathfrak{U}}, \beta} < \infty$. Sind $t_1, \ldots, t_n$ die erzeugenden Schnitte von $\mathcal{K}_E$, so gilt also

$$(\partial \mathfrak{k})_{\iota_0 \iota_1 \iota_2} = \sum_\nu h_{\iota_0 \iota_1 \iota_2}^\nu t_\nu$$

und

$$\sum_{\iota_0, \iota_1, \iota_2} \int_{\widetilde{U}_{\iota_0 \iota_1 \iota_2}} | \mathfrak{h}_{\iota_0 \iota_1 \iota_2} |^2 \, d\lambda < \infty.$$

Da die t_ν keine Relationen haben, gilt $\mathfrak{h} = (\mathfrak{h}_{\iota_0 \iota_1 \iota_2}) \in Z^2(\widetilde{\mathfrak{U}}, \mathcal{O}_E^n) = B^2(\widetilde{\mathfrak{U}}, \mathcal{O}_E^n)$. Nach (4.2) gibt es ein $\mathfrak{h}' \in C^1(\widetilde{\mathfrak{U}}, \mathcal{O}_E^n)$ mit $\| \mathfrak{h}' \|_{\widetilde{\mathfrak{U}}} < \infty$ und $\mathfrak{h} = \partial \mathfrak{h}'$, d. h. es gilt mit $\mathfrak{k}' = \beta(\mathfrak{h}')$ $\partial \mathfrak{k} = \partial \mathfrak{k}'$ und $\| \mathfrak{k}' \|_{\widetilde{\mathfrak{U}}, \beta} < \infty$. Also ist such $\| \mathfrak{k}' \|_{\widetilde{\mathfrak{U}}, i} < \infty$. Weiter ist $\partial (\mathfrak{k} - \mathfrak{k}') = 0$. Da $H^1(\widetilde{\mathfrak{U}}, \mathcal{K}_E) = 0$ folgt die Existenz einer Kette $(\mathfrak{k}_\iota) \in C^0(\widetilde{\mathfrak{U}}, \mathcal{K}_E)$ mit $\mathfrak{k}_{\iota_0 \iota_1} - \mathfrak{k}'_{\iota_0 \iota_1} = \mathfrak{k}_{\iota_1} - \mathfrak{k}_{\iota_0}$ über $\widetilde{U}_{\iota_0 \iota_1}$. Wir erhalten so

$$\mathfrak{k}_{\iota_0 \iota_1} = \mathfrak{f}_{\iota_1} - \mathfrak{f}_{\iota_0} - \mathfrak{g}_{\iota_0 \iota_1} = \mathfrak{k}'_{\iota_0 \iota_1} + (\mathfrak{k}_{\iota_1} - \mathfrak{k}_{\iota_0})$$

oder

$$(\mathfrak{f}_{\iota_1} - \mathfrak{k}_{\iota_1}) - (\mathfrak{f}_{\iota_0} - \mathfrak{k}_{\iota_0}) = \mathfrak{k}'_{\iota_0 \iota_1} + \mathfrak{g}_{\iota_0 \iota_1}.$$

Aber $(\mathfrak{g}_{\iota_0 \iota_1} + \mathfrak{k}'_{\iota_0 \iota_1}) \in B^1(\widetilde{\mathfrak{U}}, \mathcal{O}_E^m)$ und ist endlich. Also gibt es, wieder nach (4.2) ein $\mathfrak{g}' \in C^0(\widetilde{\mathfrak{U}}, \mathcal{O}_E^m)$ mit $\| \mathfrak{g}' \|_{\widetilde{\mathfrak{U}}} < \infty$, so dass $\partial \mathfrak{g}' = \mathfrak{g} + \mathfrak{k}'$. Wir haben so

$$(\mathfrak{f}_{\iota_1} - \mathfrak{k}_{\iota_1}) - (\mathfrak{f}_{\iota_0} - \mathfrak{k}_{\iota_0}) = \mathfrak{g}'_{\iota_1} - \mathfrak{g}'_{\iota_0}$$

d. h. durch $\mathfrak{g}'' = \mathfrak{f}_{\iota_1} - \mathfrak{k}_{\iota_1} - \mathfrak{g}'_{\iota_1}$ ist eine Funktion $\in H^0(\Omega, \mathcal{O}_E^m)$ definiert. Wir berechnen nun

$$\tilde{\gamma}_{\iota_0 \iota_1} = \sum_\mu (f^\mu_{\iota_1} - f^\mu_{\iota_0}) s_\mu = \sum_\mu ((f^\mu_{\iota_1} - k^\mu_{\iota_1}) - (f^\mu_{\iota_0} - k^\mu_{\iota_0})) s_\mu$$

da $k_\iota \in H^0(\tilde{U}_\iota, \mathcal{K}_E)$, und weiter

$$\tilde{\gamma}_{\iota_0 \iota_1} = \sum_\mu ((f^\mu_{\iota_1} - k^\mu_{\iota_1} - g''^\mu) - (f^\mu_{\iota_0} - k^\mu_{\iota_0} - g''^\mu)) s_\mu$$

$$= \sum_\mu (g'^\mu_{\iota_1} - g'^\mu_{\iota_0}) s_\mu = \sum_\mu g'^\mu_{\iota_1} s_\mu - \sum_\mu g'^\mu_{\iota_0} s_\mu .$$

Definieren wir nun $\eta'_\iota = \sum_\mu g'^\mu_\iota s_\mu$, so erhalten wir in $\tilde{\eta}' = (\eta'_\iota)$ eine Cokette $\in C^0(\tilde{\mathfrak{U}}, \hat{\mathcal{F}}_E)$ mit $\| \tilde{\eta}' \|_{\tilde{\mathfrak{U}}} < \infty$ und $\partial \tilde{\eta}' = \tilde{\gamma}$. Nun setzen wir $\eta' = \tilde{\eta}' \mid \mathfrak{U} \cap R$. Dann ist $\| \eta' \|_{\mathfrak{U}} < \infty$ und $\partial \eta' = \gamma$.

e) In *d*) haben wir gezeigt, dass zu jedem endlichen Corand $\gamma \in B^1(\mathfrak{U} \cap R, \mathcal{F}_E)$ eine endliche Cokette $\eta \in C^0(\mathfrak{U} \cap R, \mathcal{F}_E)$ existiert, so dass $\partial \eta = \gamma$. Also ist die Abbildung

$$\partial : C_0^0(\mathfrak{U} \cap R, \mathcal{F}_E) \to B_0^1(\mathfrak{U} \cap R, \mathcal{F}_E)$$

surjektiv. Aber B_0^1 ist ein Banachraum: Denn aus [6] folgt, dass $B^1(\mathfrak{U} \cap R, \mathcal{F}_E)$ abgeschlossen in dem Fréchetraum $C^1(\mathfrak{U} \cap R, \mathcal{F}_E)$ ist. Da die Konvergenz in der Norm $\| \; \|_{\mathfrak{U}}$ die F-Konvergenz nach sich zieht, folgt, dass auch $B_0^1(\mathfrak{U} \cap R, \mathcal{F}_E)$ vollständig ist. Nun ist ∂ stetig. Also folgt aus dem Theorem von Banach die Existenz der Konstante C in Satz (5.1), der damit bewiesen ist.

6. Konvergenzverfahren.

Die Bezeichnungen seien weiterhin wie in den vorigen Abschnitten. Wir betrachten nun die kurze exakte Sequenz $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow[\varphi]{} \mathcal{F} \xrightarrow[\pi]{} \mathcal{F}_E \to 0$, in der $\varphi : s \to t \cdot s$ wegen der Torsionsfreiheit von $\mathcal{F}$ injektiv ist. Für jedes

$\varrho < \varrho_0$ bekommen wir daraus die exakte Cohomologiesequenz

$$\dots \longrightarrow H^1(\widehat{R}_\varrho, \mathcal{F}) \xrightarrow[\pi_\varrho]{} H^1(R, \mathcal{F}_E) \longrightarrow H^2(\widehat{R}_\varrho, \mathcal{F}) \longrightarrow \dots$$

Die Gruppe $H^1(R, \mathcal{F}_E)$ ist nach [6] ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Sei $\mathfrak{J}_\varrho \subset H^1(R, \mathcal{F}_E)$ das Bild von π_ϱ. Ist $\varrho_2 > \varrho_1$, so folgt $\mathfrak{J}_{\varrho_2} \subset \mathfrak{J}_{\varrho_1}$. Es gibt dann ein $\varrho_1 < \varrho_0$, so dass $\mathfrak{J}_{\varrho_1} = \mathfrak{J}_\varrho$ für $\varrho \leq \varrho_1$.

Nach [7] kann man die endlich vielen Cohomologieklassen $c_1, \dots, c_m \in H^1(\widehat{R}_{\varrho_1}, \mathcal{F})$, deren π_{ϱ_1}-Bilder $\mathfrak{J}_\varrho = \mathfrak{J}_{\varrho_1}$ erzeugen, auf eine grösseren Ring $\widehat{R}^*_{\varrho_1}$ fortsetzen. Deshalb können wir (notfalls unter nochmaliger Verkleinerung von ϱ_1) nach Satz (3.4) voraussetzen, dass endliche Cozyklen $\zeta_1, \dots, \zeta_m \in Z_0^1(\widehat{\mathfrak{U}}_{\varrho_1} \cap \widehat{R}_{\varrho_1}, \mathcal{F})$ existieren, so dass für die erzeugten Klassen $[\zeta_\mu] = c_\mu$ gilt.

Sei nun $\xi \in Z_0^1(\widehat{\mathfrak{U}}_\varrho \cap \widehat{R}_\varrho, \mathcal{F})$ mit $\|\xi\|_{\mathfrak{U}, \varrho} \leq M < \infty$, $\varrho < \varrho_1$. Sei $\bar{\xi} = \pi_\varrho(\xi)$. Dann gibt es komplexe Zahlen $a_1^0, \dots, a_m^0$, so dass

$$[\bar{\xi}] = \sum_{\mu=1}^{m} a_\mu^0 [\bar{\zeta}_\mu].$$

Nach Satz (5.1) gibt es ein $\bar{\eta} \in C^0(\mathfrak{U} \cap R, \mathcal{F}_E)$ mit $\|\bar{\eta}\|_{\mathfrak{U}} < \infty$ so dass

$$\bar{\xi} = \sum_{\mu=1}^{m} a_\mu^0 \bar{\zeta}_\mu + \partial \bar{\eta}.$$

Sei $\bar{\eta}_\iota = \bar{\alpha}_{\tau(\iota)}(\mathfrak{g}_{\iota_1 \tau(\iota)})$, wo $\bar{\alpha}_\tau : \mathcal{O}_E^s \longrightarrow \mathcal{F}_E$ die Isomorphismen von Abschnitt 3 sind und $\mathfrak{g}_{\iota_1 \tau(\iota)}$ nicht von t abhängt. Die Endlichkeit von $\bar{\eta}$ besagt, dass

$$\sup_\tau \sum_\iota \int_{U_\iota \cap R} |\mathfrak{g}_{\iota, \tau}|^2 \, d\lambda < \infty.$$

Für eine feste Funktion $\tau_0 : I \longrightarrow \{1, \dots, k\}$ definieren wir $\eta_\iota = \alpha_{\tau_0(\iota)}(\mathfrak{g}_{\iota, \tau_0(\iota)})$. Aus Satz (3.1) folgt, dass $\eta_0 = (\eta_\iota)$ eine endliche 0-Cokette ist. Es gilt $\bar{\eta}_0 = \pi_\varrho(\eta_0) = \bar{\eta}$ und aufgrund der Darstellung von $\bar{\xi}$ gibt es ein $\xi_1 \in C^1(\widehat{\mathfrak{U}}_\varrho \cap \widehat{R}_\varrho, \mathcal{F})$ so dass

$$\xi = \sum_\mu a_\mu^0 \zeta_\mu + \partial \eta_0 + \frac{t}{\varrho} \xi_1$$

Da ξ, ζ_μ und η_0 endlich sind, ist es auch $\dfrac{t}{\varrho} \xi_1$ und nach Satz (3.3) auch

ξ_1. Es gilt $\partial\left(\frac{t}{\varrho}\xi_1\right)=\frac{t}{\varrho}\,\partial\xi_1=0$. Da F keine Torsion besitzt, folgt $\partial\xi_1=0$, d. h. ξ_1 ist wieder ein Cozyklus. Damit haben wir gezeigt, dass durch die Zuordnung

$$\psi:\ (a_1,\dots,a_m\,;\ \eta\,;\ \xi)\longrightarrow\sum_\mu a_\mu\zeta_\mu+\partial\eta+\frac{t}{\varrho}\,\xi$$

ein surjektiver Homomorphismus

$$\psi:\mathbb{C}^m\times C_0^0(\widehat{\mathfrak{U}}_\varrho\cap\widehat{R}_\varrho,\mathcal{F})\times Z_0^1(\widehat{\mathfrak{U}}_\varrho\cap\widehat{R}_\varrho,\mathcal{F})\longrightarrow Z_0^1(\widehat{\mathfrak{U}}_\varrho\cap R_\varrho,\mathcal{F})$$

definiert wird. Aus der Stetigkeit von ∂ folgt, dass Z_0^1 ein Banachraum ist und dass ψ stetig ist. Nach dem Theorem von Banach gibt es dann eine Konstante $C>0$, so dass man zu ξ mit $\|\xi\|_{\mathfrak{U},\varrho}\leq M$ stets ein ψ-Urbild $(a_1^0,\dots,a_m^0\,;\ \eta_0,\xi_1)$ so finden kann, dass $|a_\mu^0|\leq CM$ für $\mu=1,\dots,m$,

$$\|\eta_0\|_{\mathfrak{U}\,\varrho}\leq CM\quad\text{und}\quad\|\xi_1\|_{\mathfrak{U},\varrho}\leq CM.$$

Auf ξ_1 können wir dasselbe anwenden und erhalten induktiv Folgen $a_\mu^\nu,\eta_\nu,\xi_\nu$ mit den Eigenschaften $|a_\mu^\nu|\leq C^{\nu+1}M$, $\|\eta_\nu\|_{\mathfrak{U},\varrho}\leq C^{\nu+1}M$, $\|\xi\|_{\mathfrak{U},\varrho}\leq$ $\leq C^\nu M$ und $\xi_\nu=\sum_\mu a_\mu^\nu\zeta_\mu+\partial\eta_\nu+\frac{t}{\varrho}\,\xi_{\nu+1}$. Durch Einsetzen erhalten wir für ξ eine Darstellung:

$$\xi=\sum_{\mu=1}^{m}\left(\sum_{\nu=0}^{\nu_0}a_\mu^\nu\left(\frac{t}{\varrho}\right)^\nu\right)+\partial\left(\sum_{\nu=0}^{\nu_0}\eta_\nu\left(\frac{t}{\varrho}\right)^\nu\right)+\left(\frac{t}{\varrho}\right)^{\nu_0+1}\xi_{\nu_0+1}$$

für jedes ν_0. Nun wählen wir $\sigma>0$ so klein, dass $\frac{\sigma}{\varrho}\,C<1$. Aus Satz (3.3) folgt dann

$$\left\|\left(\frac{t}{\varrho}\right)^n\xi_n\right\|_{\mathfrak{U}.\,\varrho}\leq\left(\frac{\sigma}{\varrho}\right)^n\|\xi_n\|_{\mathfrak{U}.\,\varrho}\leq\left(\frac{\sigma}{\varrho}\,C\right)^nM$$

und damit $\left(\frac{t}{\varrho}\right)^n\xi_n\longrightarrow0$ in der Norm $\|\ \|_{\mathfrak{U},\,\varrho}$. Ebenso wir die Abschätzungen

$$\left|\sum_{\nu=\nu_0}^{\nu_1}\left(\frac{t}{\varrho}\right)^\nu a_\mu^\nu\right|_\sigma\leq\sum_{\nu=\nu_0}^{\nu_1}\left(\frac{\sigma}{\varrho}\right)^\nu|a_\mu^\nu|\leq\sum_{\nu=\nu_0}^{\nu_1}\left(\frac{\sigma}{\varrho}\,C\right)^\nu C\cdot M$$

und

$$\left\|\sum_{\nu=\nu_0}^{\nu_1}\left(\frac{t}{\varrho}\right)^\nu\eta_\nu\right\|_{\mathfrak{U}.\,\varrho}\leq\sum_{\nu=\nu_0}^{\nu_1}\left(\frac{\sigma}{\varrho}\,C\right)^\nu\cdot C\cdot M,$$

so dass diese Reihen in der Norm $\| \ \|_\sigma$ bzw. $\| \ \|_{\mathfrak{U},\sigma}$ konvergieren und zwar gegen holomorphe $a_\mu(t)$ über K_σ bzw. eine 0-Cokette $\eta \in C^0(\widehat{\mathfrak{U}}_\sigma \cap \widehat{R}_\sigma, \mathcal{F})$. Wir erhalten also in $Z^1(\widehat{\mathfrak{U}}_\sigma \cap \widehat{R}_\sigma, \mathcal{F})$

$$\xi \mid \widehat{R}_\sigma = \sum_{\mu=1}^{m} a_\mu(t)\, \zeta_\mu \mid \widehat{R}_\sigma + \partial\eta$$

oder

$$[\xi] \mid \widehat{R}_\sigma = \sum_{\mu=1}^{m} a_\mu(t)\, [\zeta_\mu] \mid \widehat{R}_\sigma .$$

Bemerkung: Benutzt man den Satz (5.1) in voller Schärfe, so kann man zeigen, dass die Konstante C nicht von ϱ abhängt.

Wir schliessen den Abschnitt 6 mit einer Bemerkung über die erzeugenden Klassen $[\zeta_\mu]$ *ab*. Sei b_0 und ϱ_0 so gewählt, dass $\widehat{R}_{\varrho_0}(0, b_0) \subset G$, vgl. Abschnitt 1. $\mathfrak{J}_\varrho(a, b)$ sei dass Bild des Homomorphismus $\pi_\varrho(a, b)$: $H^1(\widehat{R}_\varrho(a, b), \mathcal{F}) \to H^1(R(a, b), \mathcal{F}_E)$. Sei $\varrho_1 \leq \varrho_0$ so gewählt, dass $\pi_{\varrho_1}(0, b_0)[\zeta_\mu]$ alle Bilder $\mathfrak{J}_\varrho(0, b_0) = \mathfrak{J}_{\varrho_1}(0, b_0)$ für $\varrho \leq \varrho_1$ erzeugen. Dieselben $[\zeta_\mu]$ und dasselbe ϱ_1 kann man dann auch für alle anderen Ringe $R(a, b)$, $0 \leq a < < b \leq b_0$, nehmen: Dazu betrachte man das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^1(\widehat{R}_\varrho(0, b_0), \mathcal{F}) & \xrightarrow{r} & H^1(\widehat{R}_\varrho(a, b), \mathcal{F}) \\ \downarrow \pi_\varrho(0, b_0) & & \downarrow \pi_\varrho(a, b) \\ H^1(R(0, b_0), \mathcal{F}_E) & \xrightarrow[r_E]{} & H^1(R(a, b), \mathcal{F}_E) \end{array}$$

Nach [6] ist r_E bijektiv und nach [7] r surjektiv. Angenommen, die Klassen $\pi_{\varrho_1}(0, b_0)[\zeta_\mu]$ erzeugen $\mathfrak{J}_\varrho(0, b_0) = \mathfrak{J}_{\varrho_1}(0, b_0)$ für $\varrho \leq \varrho_1$, aber die Klassen $\pi_{\varrho_1}(a, b) \circ r[\zeta_\mu]$ noch nicht $\mathfrak{J}_{\varrho_1}(a, b)$. Da r surjektiv ist, gäbe es ein $[\xi] \in H^1(\widehat{R}_{\varrho_1}(0, b_0), \mathcal{F})$ so dass $\pi_{\varrho_1}(a, b) \circ r[\xi]$ von den $\pi_{\varrho_1}(a, b) \circ r[\zeta_\mu]$ linear unabhängig wäre. Da r_E bijektiv ist, folgte, dass $\pi_{\varrho_1}(0, b_0)[\xi]$ von den $\pi_{\varrho_1}(0, b_0)[\zeta_\mu]$ linear unabhängig wäre, Widerspruch. Genauso zeigt man, dass $\mathfrak{J}_\varrho(a, b) = = \mathfrak{J}_{\varrho_1}(a, b)$ für $\varrho \leq \varrho_1$.

Wir wollen ohne Beschränkung der Allgemeinheit stets $\varrho_1 = \varrho_0$ annehmen und formulieren den Satz

(6.1) *Es gibt ein $\varrho_0 > 0$ und $b_0 > 0$ mit $\widehat{R}_{\varrho_0}(0, b_0) \subset G$ und endlich viele $c_1, \ldots, c_m \in H^1(\widehat{R}_{\varrho_1}(0, b), \mathcal{F})$ so dass gilt:*
Für jedes Ringgebiet $R = R(a, b) \subset R(0, b_0)$, $a > 0$, und jede zulässige Überdeckung $\mathfrak{U}$ von R gibt es eine Konstante $C = C(\mathfrak{U}, R)$ und endliche

Cozyklen $\zeta_1, \ldots, \zeta_m \in Z^1(\widehat{\mathfrak{U}}_\varrho \cap \widehat{R}_\varrho, \mathcal{F})$, $\varrho < \varrho_0$, mit $[\zeta_\mu] = c_\mu \,|\, \widehat{R}_\varrho$, *so dass gilt:*

Ist $\xi \in Z^1(\widehat{\mathfrak{U}}_\varrho \cap \widehat{R}_\varrho, \mathcal{F})$ *ein endlicher Cozyklus und* $\sigma < \frac{\varrho}{C}$, *so gibt es holomorphe Funktionen* $a_\mu(t)$ *über* K_σ *mit*

$$[\xi] \,|\, \widehat{R}_\sigma = \sum_{\mu=1}^{m} a_\mu(t) [\zeta_\mu] \,|\, \widehat{R}_\sigma.$$

Zusatz: *Da die Restriction* $H^1(\widehat{R}_\sigma(0, b), \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(\widehat{R}_\sigma(a, b), \mathcal{F})$ *stets bijektiv ist, vgl.* [1] *oder* [6], *gilt die Darstellung von* $[\xi]$ *auch über* $\widehat{R}_\sigma(0, b)$, *d. h.* $[\xi] \,|\, \widehat{R}_\sigma(0, b) = \sum_\mu a_\mu(t)\, c_\mu \,|\, \widehat{R}_\sigma(0, b)$.

7. Relationen und erzeugende Schnitte.

a) Sei ϱ_0 wie in (6.1) gewählt, $b_\nu > 0$ eine Folge reeller Zahlen mit $b_\nu \searrow 0$ und $b_1 < b_0$. Wir setzen

$$R_\nu = R(0, b_\nu).$$

Es gilt $R_\nu \supset R_{\nu+1} \supset \ldots$. Sei für $\sigma < \varrho_0$ $N_\nu^{(\sigma)} = \left\{ (f_1, \ldots, f_m) \in H^0(K_\sigma, \mathcal{O}_A^m) \text{ mit } \sum_1^m f_\mu c_\mu \,|\, \widehat{R}_{\nu,\sigma} = 0 \right\}$ wo $c_\mu \in H^1(\widehat{R}_{\varrho_0}(0, b_0), \mathcal{F})$ die erzeugenden Klassen sind.

Es ist dann evident, dass $N_\nu^{(\sigma)} \subset N_{\nu+1}^{(\sigma)} \subset \ldots$ Mit $\mathcal{N}_\nu^{(\sigma)}$ bezeichnen wir die von den Schnitten in $N_\nu^{(\sigma)}$ über K_σ erzeugte kohärente Untergarbe von $\mathcal{O}_A^m$. Wieder gilt $\mathcal{N}_\nu^{(\sigma)} \subset \mathcal{N}_{\nu+1}^{(\sigma)} \subset \ldots$

Sei $\sigma' < \sigma$, so dass $K_{\sigma'} \subset\subset K_\sigma$. Dann gibt es nach bekannten Sätzen einen Index $\nu_0 = \nu_0(\sigma')$, so dass

$$\mathcal{N}_{\nu_0}^{(\sigma)} \,|\, K_{\sigma'} = \mathcal{N}_\nu^{(\sigma)} \,|\, K_{\sigma'} \quad \text{für } \nu \geq \nu_0.$$

Für ein beliebiges b mit $0 < b < b_{\nu_0}$ bilden wir genauso $N_b^{(\sigma)}$ bezüglich $R(0, b)$ und $\mathcal{N}_b^{(\sigma)}$. Es gibt dann ein $\nu_1 > \nu_0$, so dass $b_{\nu_1} < b < b_{\nu_0}$ und $\mathcal{N}_{\nu_0}^{(\sigma)} \subset \mathcal{N}_b^{(\sigma)} \subset \mathcal{N}_{\nu_1}^{(\sigma)}$. Über $K_{\sigma'}$ folgt dann

$$\mathcal{N}_{\nu_0}^{(\sigma)} \,|\, K_{\sigma'} = \mathcal{N}_b^{(\sigma)} \,|\, K_{\sigma'} = \mathcal{N}_{\nu_1}^{(\sigma)} \,|\, K_{\sigma'}.$$

(7.1) *Mit den eben eingeführten Bezeichnungen gilt:*

Zu $\sigma' < \sigma < \varrho_0$ *gibt es ein* $k = k(\sigma')$ *und endlich viele* $s_1, \ldots, s_k \in N_{\nu_0}^{(\sigma)}$,

$\nu_0 = \nu_0(\sigma')$, *so dass für jedes* $s \in H^0(K_{\sigma'}, \mathfrak{N}_b^{(\sigma)})$, $0 < b < b_{\nu'}$, *gilt*:

$$s = \sum_{\varkappa=1}^{k} h_\varkappa s_\varkappa \mid K_{\sigma'}$$

mit $h_1, \dots, h_k \in H^0(K_{\sigma'}, \mathcal{O}_A)$.

Beweis: Es ist $\mathfrak{N}_b^{(\sigma)} \mid K_{\sigma'} = \mathfrak{N}_{\nu_0}^{(\sigma)} \mid K_{\sigma'}$. Wir wählen ein σ'' mit $\sigma' < \sigma'' < \sigma$, und nach Theorem A endlich viele Schnitte $t_1, \dots, t_l \in H^0(K_{\sigma'}, \mathfrak{N}_{\nu_0}^{(\sigma)})$ die über $K_{\sigma''}$ die Garbe $\mathfrak{N}_{\nu_0}^{(\sigma)}$ erzeugen, so dass über $K_{\sigma''}$ eine exakte Sequenz der Art

$$0 \longrightarrow \mathfrak{K}_{(l)} \longrightarrow \mathcal{O}_A^l \longrightarrow \mathfrak{N}_{\nu_0}^{(\sigma)} \longrightarrow 0$$

besteht. Wegen Theorem B ist auch

$$\begin{array}{c} H^0(K_{\sigma'}, \mathcal{O}_A^l) \longrightarrow H^0(K_{\sigma'}, \mathfrak{N}_{\nu_0}^{(\sigma)}) \longrightarrow 0 \\ \qquad\qquad\qquad \| \\ \qquad\qquad\qquad H^0(K_{\sigma'}, \mathfrak{N}_b^{(\sigma)}) \end{array}$$

surjektiv.

Zu jedem $s \in H^0(K_{\sigma'}, \mathfrak{N}_b^{(\sigma)})$ gibt es also holomorphe Funktionen $g_\lambda \in$ $\ni H^0(K_{\sigma'}, \mathcal{O}_A)$ mit

$$s = \sum_{\lambda=1}^{l} g_\lambda t_\lambda .$$

Zu jedem $x \in K_{\sigma''}$ gibt es eine Umgebung $U(x) \subset K_\sigma$ so dass

$$t_\lambda \mid U = \sum_{i=1}^{i_x} f_{\lambda, i}^{(x)} \cdot s_{\lambda, i} \mid U$$

mit $s_{\lambda, i} \in N_{\nu_0}^{(\sigma)}$ und $f_{\lambda, i}^{(x)} \in H^0(U, \mathcal{O}_A)$, denn $N_{\nu_0}^{(\sigma)}$ erzeugt ja die Garbe $\mathfrak{N}_{\nu_0}^{(\sigma)}$. Es gibt eine endliche Überdeckung von $K_{\sigma''}$ mit solchen U. Sei num $s_{\lambda,1}, \dots$ $\dots, s_{\lambda, k_\lambda}$ die Menge aller beteiligten Schnitte. Wir bilden die Garbe $\mathfrak{M}_\lambda \subset \mathcal{O}_A^m$ über K_σ, die von diesen erzeugt wird. Aus den Epimorphismus $\mathcal{O}_A^{k_\lambda} \longrightarrow$ $\longrightarrow \mathfrak{M}_\lambda \longrightarrow 0$ ergibt sich der Epimorphismus $H^0(K_{\sigma''}, \mathcal{O}_A^{k_\lambda}) \longrightarrow H^0(K_{\sigma''}, \mathfrak{M}_\lambda) \longrightarrow 0$. Aber $t_\lambda \mid K_{\sigma''}$ gehört zu $H^0(K_{\sigma''}, \mathfrak{M}_\lambda)$ nach Konstruktion von $\mathfrak{M}_\lambda$. Also gilt

$$t_\lambda \mid K_{\sigma''} = \sum_{\varkappa_\lambda=1}^{k_\lambda} f_{\lambda\varkappa_\lambda} s_{\lambda\varkappa_\lambda} \quad \text{mit } f_{\lambda, \varkappa_\lambda} \in H^0(K_{\sigma''}, \mathcal{O}_A).$$

Wir setzen num $k = \sum_{\lambda=1}^{l} k_\lambda$ und haben in $s_{11}, \dots, s_{1, k_1}$; $s_{21}, \dots, s_{2k_2}$; $\dots s_{lk_l}$ die gewünschten Schnitte.

b) Wir kommen nun zur Konstruktion erzeugender Schnitte für die Garbe $\mathcal{F}$. Sei ϱ_0 und b_0 wieder wie in (6.1). Sei $0 < a < b \leq b_0$ und $\mathfrak{U}$ eine zulässige Überbeckung von $R = R(a, b)$. Zu $\varrho < \varrho_0$ gibt es dann ein $\sigma < \frac{\varrho}{C}$ nach (6.1), wo $C = C(R, \mathfrak{U})$. Sei $\sigma' < \sigma$. Wir wählen eine Folge $b_\nu \searrow 0$ mit $b_1 < b$, und setzen $b_* = b_{\nu_0}$, wo $\nu_0 = \nu_0(\sigma')$.

Sei $x \in \widehat{R}_{\sigma'}(0, b_*)$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ und $r^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2$. Wir wählen eine komplexe Hyperebene $L = \{l = 0\}$, die $R(0, r)$ genau in x berührt, und für die l von t nicht abhängt. Sei $b < b' < b_0$, $\varrho < \varrho' < \varrho_0$. Aus der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow[l]{} \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}/l\mathcal{F} \longrightarrow 0$$

erhalten wir das Diagramm

$$\text{(D)}\qquad \begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H^0(\widehat{R}_{\varrho'}(0, b'), \mathcal{F}/l\mathcal{F}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] \arrow[dd, bend right, "h"'] & H^1(\widehat{R}_{\varrho'}(0, b'), \mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ & H^0(\widehat{R}_{\varrho}(0, b), \mathcal{F}/l\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(\widehat{R}_{\varrho}(0, b), \mathcal{F}) \arrow[d] & \\ & H^0(\widehat{R}_{\sigma'}(0, b_*), \mathcal{F}/l\mathcal{F}) \arrow[r, "\delta_*"] & H^1(\widehat{R}_{\sigma'}(0, b_*), \mathcal{F}) & \end{tikzcd}$$

Für jedes $s \in H^0(\widehat{R}_{\sigma'}(0, b'), \mathcal{F}/l\mathcal{F})$ wird wegen Satz (3.4) $\delta(s) \mid \widehat{R}_\varrho(a, b)$ von einem endlichen Cazyklus aus $Z^1(\widehat{\mathfrak{U}}_\varrho \cap \widehat{R}_\varrho(a, b), \mathcal{F})$ repräsentiert. Daher gilt nach (6.1), Zusatz:

$$\delta(s) \mid \widehat{R}_\sigma(0, b) = \sum_{\mu=1}^{m} f_\mu c_\mu \mid \widehat{R}_\sigma(0, b).$$

Es ist aber $l \cdot \delta(s) = 0$ aufgrund der exakten ersten Reihe. In $\widehat{R}_\sigma(0, r)$ existiert aber $\frac{1}{l}$. Also folgt $\delta(s) \mid \widehat{R}_\sigma(0, r) = 0$, d. h.

$$f = (f_1, \ldots, f_m) \in N_r^{(\sigma)}.$$

Nun ist aber $r < b_*$. Nach (7.1) gibt es dann eine Darstellung

$$f \mid K_{\sigma'} = \sum_{\varkappa=1}^{k} h_\varkappa s_\varkappa \mid K_{\sigma'}$$

mit $s_\varkappa \in N_{b_*}^{(\sigma)}$ und $h_\varkappa \in H^0(K_{\sigma'}, \mathcal{O}_A)$. Wir haben $s_\varkappa = (g_{\varkappa 1}, \ldots, g_{\varkappa m})$ und

$$\sum_\mu g_{\varkappa\mu} c_\mu \mid \widehat{R}_\sigma(0, b_*) = 0.$$

Also folgt auch $\sum_{\mu} f_\mu c_\mu \mid \widehat{R}_{\sigma'}(0, b_*) = 0$. Das aber heisst $\delta(s) \mid \widehat{R}_{\sigma'}(0, b_*) = 0$.

Betrachten wir nun noch einmal das das Diagramm D, so ist gezeigt, dass $\delta_* \circ h = 0$. Wir zeigen sogar, dass $\delta^* = 0$ ist. Sei $s \in H^0(\widehat{R}_{\sigma'}(0, b_*), \mathcal{F}/l\mathcal{F})$ beliebig. Da $Tr(F/lF) = L$ und $\widehat{R}_{\sigma'}(0, b') \cap L$ ein Holomorphiegebiet ist mit $\widehat{R}_{\sigma'}(0, b_*) \cap L \subset\subset \widehat{R}_{\varrho'}(0, b') \cap L$, so wird $H^0(\widehat{R}_{\sigma'}(0, b_*), \mathcal{F}/l\mathcal{F})$ von endlich vielen Schnitten $s_1, \dots, s_j \in H^0(\widehat{R}_{\varrho'}(0, b'), \mathcal{F}/l\mathcal{F})$ über $H^0(\widehat{R}_{\sigma'}(0, b_*), \mathcal{O}_G/l\mathcal{O}_G)$ erzeugt. Für jedes $s \in H^0(\widehat{R}_{\sigma'}(0, b_*), \mathcal{F}/l\mathcal{F})$ gibt es also eine Darstellung

$$s = \sum_{i=1}^{j} g_i \, h(s_i)$$

und es folgt $\delta_*(s) = \sum_i g_i \sigma_* \circ h(s_i) = 0$.

Damit ist gezeigt, dass der Homomorphismus

$$H^0(\widehat{R}_{\sigma'}(0, b_*), \mathcal{F}) \longrightarrow H^0 \widehat{R}_{\sigma'}(0, b_*), \mathcal{F}/l\mathcal{F})$$

surjektiv ist. Da $x \in \widehat{R}_{\sigma'}(0, b_*) \cap L$ ist auch $H^0(\widehat{R}_{\sigma'}(0, b_*), \mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{F}_x/\mathfrak{m}_x \mathcal{F}_x$ surjektiv, wo $\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_x$ das maximale Ideal ist. Da $x \in \widehat{R}_{\sigma'}(0, b_*)$ beliebig war, folgt aus dem Nakayama-Lemma, dass $\mathcal{F}$ über $\widehat{R}_{\sigma'}(0, b_*)$ von ihren globalem Schnitten erzeugt wird. Wir haben damit bewiesen:

(7.2) *Zu $0 \in A$ gibt es ein $\varrho_0 > 0$ und ein $r_0 > 0$, so dass die Garbe $\mathcal{F}$ über $\widehat{R}_{\varrho_0}(0, r_0) = \{z \in G, 0 < |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 < r_0^2, |z_4| < \varrho_0\}$ von ihren globalen Schnitten erzeugt wird.*

8. Der Fortsetzungssatz:

Sei G ein Gebiet des $\mathbb{C}^4$ und $A \subset G$ eine analytische Menge der Dimension 1. Dann gibt es zu jeder lokal-freien kohärenten Garbe $\mathcal{F}$ über $G - A$ eine kohärente Garbe $\widehat{\mathcal{F}}$ über G mit $\widehat{\mathcal{F}} \mid G - A = \mathcal{F}$.

Zusatz: Ist $i: G - A \longrightarrow G$ die natürliche Inklusion, so ist $i_* \mathcal{F}$ kohärent, wo $i_* \mathcal{F}$ durch das Garbendatum $U \rightsquigarrow H^0(U - A, \mathcal{F})$ definiert ist.

Beweis: Sei $S(A)$ die Menge der singulären Punkte von A. Zu jedem $x \in A - S(A)$ gibt es eine Umgebung $U(x)$, so dass $U \cap A$ durch eine biholomorphe Transformation auf die Gestalt $U \cap A = \{z \in U \, z_1 = z_2 = z_3 = 0\}$ gebracht werden kann und x dabei in 0 übergeht. Nach (7.2) kann man U dann noch so wählen, dass $\mathcal{F}$ über $U - A$ von dem Schnittmodul

$H^0(U - A, \mathcal{F})$ erzeugt wird. Nach [5] ist dann $i_{s*}(\mathcal{F})$ kohärent, wo $i_{s*}: G - A \to G - S(A)$ die natürliche Inklusion bezeichnet. In [8] wird dann gezeigt, dass eine diskrete Menge $D' \subset A - S(A)$ existiert mit $codh_x(i_{s*}(\mathcal{F})) \geq 3$ für $x \in A - (S(A) \cup D')$. Aus dem Fortsetzungssatz in [6] folgt dann, dass $i_{s*}(\mathcal{F})$ nochmals eine kohärente Fortsetzung über $D' \cap S(A)$ auf ganz G besitzt. Der Zusatz folgt aus dem Hauptsatz in [5].

9. Injektivität bezüglich H^1 und H^2.

Die Abschnitte 9 und 10 sind nur sinnvoll, wenn A ein Ebenenstück darstellt. Wir wollen deshalb wieder wie in den Abschnitten 1 bis 7 voraussetzen, dass $A = \{z \in G, z_1 = z_2 = z_3 = 0\}$ ist. $\mathcal{F}$ sei wieder lokal-frei auf $G - A$. Nach Abschnitt 8 besitzt $\mathcal{F}$ eine maximale kohärente Fortsetzung $\widehat{\mathcal{F}} = i * \mathcal{F} \cdot \widehat{\mathcal{F}}$ genügt dem 0-ten Hebbarkeitssatz. Wir beweisen den folgenden Satz.

(9.1) *Zu jedem Punkt $x_0 = (0, t_0) \in A$ gibt es ein $\varrho_0 > 0$, eine endliche diskrete Menge $D \subset K_{\varrho_0}(t_0) = \{|t - t_0| < \varrho_0\}$ und ein $b_0 > 0$, so dass für jedes $t_1 \in K_{\varrho_0}(t_0) - D$ und jedes $b < b_0$, $\varrho < \varrho_0$ gilt:*
Die von dem Homomorphismus $\mathcal{F} \to \mathcal{F}, f \to (t - t_1) f$, induzierten Abbildungen

$$H^i(R(0, b) \times K_\varrho(t_0), \mathcal{F}) \to H^i(R(0, b) \times K_\varrho(t_0), \mathcal{F})$$

sind injektiv für $i = 1, 2$.

Beweis.

a) $\mathcal{F}$ besitzt eine maximale kohärente Fortsetzung $\widehat{\mathcal{F}}$, die wieder ohne Torsion ist. Es gibt eine Umgebung $U(x_0)$, so dass eine Einbettung $\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}^k$ über U existiert. Wählen $t_0 = 0$ und schreiben wieder $\widehat{R}_\varrho(0, b) = R(0, b) \times K_\varrho(0) \cdot \varrho_0 > 0$ und $b_0 > 0$ seien so gewählt, dass $\widehat{R}_{\varrho_0}(0, b_0) \subset U$. Über U definieren wir die Garbe $\mathcal{G}$ durch die Sequez

$$0 \to \widehat{\mathcal{F}} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}^k \to \mathcal{G} \to 0.$$

Es gilt der Hilfssatz (9.2), den wir später beweisen.

(9.2) Ist $i: U - A \to U$ die natürliche Inklusion, so ist $i_*(\mathcal{G} \mid U - A)$ kohärent.

b) Da sowohl $\widehat{\mathcal{F}}$ als auch $\widehat{\mathcal{G}} = i_*(\mathcal{G} \mid U - A)$ dem 0-ten Hebbarkeitssatz bezüglich A genügen, gibt es nach [8] eine diskrete Punktmenge $D \subset K_{\varrho_0}(0)$, so dass $codh_x(\widehat{\mathcal{F}}) \geq 3$ und $codh_x(\widehat{\mathcal{G}}) \geq 3$ für $x \in K_{\varrho_0} - D$.

c) Sei nun $\varrho < \varrho_0$ und $b < b_0$. Wir setzen $X = \left\{ z \in U \sum_1^3 |z_\nu|^2 < b^2 \right\} \times K_\varrho$ und $X_{t_1} = \{z_4 = t_1\} \cap X$. Aus der Sequenz $0 \to \widehat{\mathcal{F}} \to \widehat{\mathcal{F}} \to \widehat{\mathcal{F}}/(t - t_1)\widehat{\mathcal{F}} \to 0$ ergibt sich das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
H^0(X, \widehat{\mathcal{F}}) & \longrightarrow & H^0(X_{t_1}, \widehat{\mathcal{F}}/(t-t_1)\widehat{\mathcal{F}}) & \longrightarrow & 0 & & \\
\cong \Big\downarrow r & & \Big\downarrow r_{t_1} & & & & \\
H^0(X - A, \mathcal{F}) & \longrightarrow & H^0(X_{t_1} - 0, \mathcal{F}/(t-t_1)\mathcal{F}) & \xrightarrow{\delta} & H^1(X - A, \mathcal{F}) & \xrightarrow{(t-t_1)} & H^1(X - A, \mathcal{F}
\end{array}$$

Ist $t_1 \in K_{\varrho_0} - D$, so ist $codh_{(0,\, t_1)}(\widehat{\mathcal{F}}/(t - t_1)\widehat{\mathcal{F}}) \geq 2$. d. h. r_{t_1} ist bijektiv. Da auch r bijektiv ist, folgt die Injektivität von $(t - t_1)$ bezüglich H^1.

d) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir über U eine exakte Sequenz der Art

$$0 \to \mathcal{L} \to \mathcal{O}^s \to \widehat{\mathcal{G}} \to 0$$

annehmen. Für jedes t_1 erhalten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & H^1(X_{t_1} - 0, \mathcal{L}/(t-t_1)\mathcal{L}) & & \\
 & & & & \swarrow & & \\
0 & \longrightarrow & H^1(X - A, \mathcal{G}) & \longrightarrow & H^2(X - A, \mathcal{L}) & \longrightarrow & \ldots \\
 & & \Big\downarrow (t - t_1) & & \Big\downarrow (t - t_1) & & \\
0 & \longrightarrow & H^1(X - A, \mathcal{G}) & \longrightarrow & H^2(X - A, \mathcal{L}) & \longrightarrow & \ldots
\end{array}$$

Nach *b*) ist für $t_1 \in K_\varrho - D$ $codh_{(0,\, t_1)}(\mathcal{G}) \geq 3$, d.h. $codh_{(0,\, t_1)}(\mathcal{L}) \geq 4$ und damit $codh_0(\mathcal{L}/(t - t_1)\mathcal{L}) \geq 3$. Folglich ist $H^1(X_{t_1} - 0, \mathcal{L}/(t - t_1)\mathcal{L}) = 0$ und $(t - t_1)$ bezüglich $H^2(X - A, \mathcal{L})$ injektiv. Aus dem Diagramm folgt dann die Injektivität bezüglich $H^1(X - A, \mathcal{G})$.

e) Zu der definierenden Sequenz von $\mathcal{G}$ gehört nun das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & H^1(X - A, \mathcal{G}) & \longrightarrow & H^2(X - A, \mathcal{F}) & \longrightarrow & H^2(X - A, \mathcal{O}^k) & \longrightarrow & \ldots \\
 & & \Big\downarrow \mu_1 & & \Big\downarrow \mu_2 & & \Big\downarrow \mu_3 & & \\
0 & \longrightarrow & H^1(X - A, \mathcal{G}) & \longrightarrow & H^2(X - A, \mathcal{F}) & \longrightarrow & H^2(X - A, \mathcal{O}^k) & \longrightarrow & \ldots
\end{array}$$

wo die vertikalen Homomorphismen die Multiplikation mit $(t - t_1)$ darstellen. Da die Homomorphismen μ_1 und μ_2 injektiv sind, muss es auch μ_2 sein, falls $t_1 \notin D$. Damit ist (9.1) bewiesen.

Beweis von (9.2):

a) Sei $x_0 \in A \cap U$ ein beliebiger Punkt, den wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit als 0 wählen können. ϱ_0, b_0 seien so gewählt, dass $\widehat{R}_{\varrho_0}(0, b) \subset U$. Ferner sei $\varrho_0 > 0$ so klein gewählt, dass endlich viele $c_1, \ldots$ $\ldots, c_m \in H^1(\widehat{R}_{\varrho_0}(0, b_0), \mathcal{F})$ existieren, für die das Theorem (6.1) gilt. Aus der definierenden Sequenz für $\mathcal{G}$ ergibt sich die folgende exakte Sequenz

$$\ldots \longrightarrow H^0(\widehat{R}_{\varrho_0}(0, b_0), \mathcal{G}) \xrightarrow{\delta} H^1(\widehat{R}_{\varrho_0}(0, b_0), \mathcal{F}) \longrightarrow 0.$$

Wir wählen danach $u_1, \ldots, u_m$, so dass $\delta(u_\mu) = c_\mu$.

Sei nun $\varrho < \varrho < \varrho_0$ und $b < b_0$ und $[\xi] \in H^1(\widehat{R}_\varrho, (0, b), \mathcal{F})$ Es gibt ein Ringgebiet $R \subset\subset R(0, b)$ und eine zulässige Überdeckung $\mathfrak{U}$ von R, so dass $[\xi]$ durch einen endlichen Cozyklus $\xi \in Z_0^1(\widehat{\mathfrak{U}^\varrho} \cap \widehat{R}_\varrho, \mathcal{F})$ repräsentiert wird. Nach (6.1) gibt es dann ein $\sigma < \varrho$ so dass

$$[\xi] \mid \widehat{R}_\sigma = \sum_{\mu=1}^{m} f_\mu(t)\, c_\mu \mid \widehat{R}_\sigma$$

wo f_μ holomorph über K_σ sind. Da aber wegen [7] $B^1(\widehat{R}_\varrho(0, b), \mathcal{F})$ abgeschlossen ist für jedes b und ϱ, so folgt wie in [7], dass dann die Fortsetzung der Cohomologieklassen von $\widehat{R}_\varrho$ nach $\widehat{R}_\varrho(0, b)$ eindeutig ist:

$$[\xi] \mid \widehat{R}_\sigma(0, b) = \sum_\mu f_\mu c_\mu \mid \widehat{R}_\sigma(0, b).$$

b) Ist nun $s \in H^0(\widehat{R}_{\varrho'}(0, b), \mathcal{G})$, so gilt auch

$$\delta(s) \mid \widehat{R}_\sigma(0, b) = \sum_\mu f_\mu\, \delta(u_\mu) \mid \widehat{R}_\sigma(0, b)$$

oder

$$\delta\Big(s - \sum_\mu f_\mu u_\mu\Big) \mid \widehat{R}_\sigma(0, b) = 0, \text{ d. h.}$$

$$\Big(s - \sum_\mu f_\mu u_\mu\Big) \mid \widehat{R}_\sigma(0, b) = \sum_{\varkappa=1}^{k} g_\varkappa s_\varkappa \mid \widehat{R}_\sigma(0, b)$$

wo $s_1, \ldots, s_k$ den Epimorphismus $\mathcal{O}^k \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0$ erzeugen. Dabei sind auch die $g_\varkappa$ holomorph über K_σ. Also

$$s \mid \widehat{R}_\sigma(0, b) = \sum_\mu f_\mu u_\mu \mid \widehat{R}_\sigma(0, b) + \sum_\varkappa g_\varkappa s_\varkappa \mid \widehat{R}_\sigma(0, b)$$

c) Wir bilden nun über $R_{\varrho_0}(0, b_0)$ die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{O}^{k+m} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0$$

indem wir zu dem Epimorphismus $\mathcal{O}^k \longrightarrow \mathcal{G}$ noch die $u_1, \dots, u_m$ hinzunehmen, und $\mathcal{K}$ als Kern des neuen Epimorphismus definieren. Für $b < b_0$ und $\sigma < \varrho < \varrho' < \varrho_0$, wo σ gemäss (6.1) gebildet ist, erhalten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
\dots \longrightarrow H^0(\widehat{R}_{\varrho'}, (0,b), \mathcal{O}^{k+m}) \longrightarrow & H^0(\widehat{R}_{\varrho'}, (0,b), \mathcal{G}) & \xrightarrow{\delta} & H^1(\widehat{R}_{\varrho'}, (0,b), \mathcal{K}) & \longrightarrow 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & \\
\dots \longrightarrow & H^0(\widehat{R}_\sigma\,(0,b), \mathcal{G}) & \xrightarrow[\delta_{\sigma,b}]{} & H^1(\widehat{R}_\sigma\,(0,b), \mathcal{K}) & \longrightarrow 0
\end{array}$$

Nach *b*) folgt für ein $s \in H^0(\widehat{R}_{\varrho'}(0, b), \mathcal{G})$

$$\delta_{\sigma, b}(s \mid \widehat{R}_\sigma(0, b)) = 0$$

Da aber δ surjektiv ist, folgt für jede Klasse

$$[\xi] \in H^1(\widehat{R}_{\varrho'}(0, b), \mathcal{K}), \text{ dass } [\xi] \mid \widehat{R}_\sigma(0, b) = 0.$$

d) Da $\mathcal{F}$ ausserhalb A lokal-frei für $\mathcal{G}$ ausserhalb A *codh* $(\mathcal{G}) \geq 3$ und damit *codh* $(\mathcal{K}) \geq 4$ ausserhalb A. Nach dem Hauptsatz 8. besitzt $\mathcal{K}$ eine kohärente Fortsetzung $\widehat{\mathcal{K}}$ über $\{|z| < b_0\} \times K_{\varrho_0}$. Aus der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \widehat{\mathcal{K}} \longrightarrow \widehat{\mathcal{K}} \xrightarrow[t]{} \widehat{\mathcal{K}} / t\widehat{\mathcal{K}} \longrightarrow 0$$

resultiert für $b < b_0$, $\sigma < \varrho < \varrho' < \varrho_0$ das folgende Diagramm, wo $\widehat{B}_\varrho(b) = \{|z| < b\} \times K_\varrho$ ist.

$$\begin{tikzcd}
 & & H^0(\widehat{B}_\sigma(b), \widehat{K}) \arrow[dr, "\hat{\pi}_\sigma"] \arrow[dddd, "r_\sigma", "\cong"'] & & \\
\dots \arrow[r] & H^0(\widehat{B}_{\varrho'}(b), \widehat{K}) \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd, "\cong"', "r_{\varrho'}"] & & H^0(B(b), \widehat{K}/t\widehat{K}) \arrow[r] \arrow[dd, "r_b"'] & 0 \\
 & & & & H^1(\widehat{R}_\sigma(0,b), K) \\
\dots \arrow[r] & H^0(\widehat{R}_{\varrho'}(0,b), K) \arrow[rr] \arrow[dr] & & H^0(R(0,b), K/tK) \arrow[r] \arrow[ur, "\delta_\sigma"] & H^1(\widehat{R}_{\varrho'}(0,b), K) \arrow[u] \\
 & & H^0(\widehat{R}_\sigma(0,b), K) \arrow[ur, "\pi_\sigma"'] & &
\end{tikzcd}$$

Die Restriktion r_σ ist nach Definition von $\widehat{\mathcal{K}}$ bijektiv. Wir zeigen, dass auch r_b bijektiv ist für jedes b: Ist $s \in H^0(R(0, b), \mathcal{K}/t\mathcal{K})$, so ist nach c) $\delta_\sigma(s) = 0$, d. h. $\exists\, u \in H^0(\widehat{B}_\sigma(b), \widehat{\mathcal{K}})$ mit $\pi_\sigma \circ r_\sigma(u) = s$, d. h. $r_b \circ \widehat{\pi}_\sigma(u) = s$. Setzen wir $\widehat{s} = \widehat{\pi}_\sigma(u)$, so folgt, dass r_b surjektiv ist. Die Injektivität von r_b folgt aus dem waagerechten Diagramm.

e) Aus Satz 1.1, [6], folgt nun $codh_0(\widehat{\mathcal{K}}/t\widehat{\mathcal{K}}) \geq 2$, d. h. $codh_0(\widehat{\mathcal{K}}) \geq 3$. Also gibt es über einer Umgebung $\widehat{B}_{\varrho_1}(b_1)$ mit $\varrho_1 < \varrho_0$, $b_1 < b_0$ eine exakte Sequenz der Art

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^{p_1} \longrightarrow \mathcal{O}^{p_0} \longrightarrow \widehat{\mathcal{K}} \longrightarrow 0.$$

Für $\sigma < \varrho < \varrho' < \varrho_1$ und $b < b_1$ haben wir wieder ein Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
0 \longrightarrow & H^1(\widehat{R}_{\varrho'}(0, b), \mathcal{K}) & \longrightarrow & H^2(\widehat{R}_{\varrho'}(0, b), \mathcal{O}^{p_1}) & \longrightarrow \ldots \\
 & \downarrow r_k & & \downarrow r_{\mathcal{O}} & \\
0 \longrightarrow & H^1(\widehat{R}_\sigma(0, b), \mathcal{K}) & \longrightarrow & H^2(\widehat{R}_\sigma(0, b), \mathcal{O}^{p_1}) & \longrightarrow \ldots
\end{array}$$

Nacht Punkt c) dieses Beweises ist $r_k = 0$. Da wir uns im $\mathbb{C}^4$ befinden, können wir mittels Laurentreihen und dem Identitätssatz für die holomorphen Koeffizienten zeigen, dass $r_{\mathcal{O}}$ injektiv ist. Also ist sogar r_k injektiv und wir haben gezeigt, dass $H^1(\widehat{R}_{\varrho'}(0, b), \mathcal{K}) = 0$. Da das für alle $\varrho' < \varrho_1$ und $b < b_1$ gilt, folgt, dass durch $\widehat{\mathcal{G}} = \mathcal{O}^{k+m}/\widehat{\mathcal{K}}$ über $\widehat{B}_{\varrho_1}(b_0)$ eine kohärente Fortsetzung von $\mathcal{G} \mid U - A$ definiert ist, die dem 0-ten Hebbarkeitssatz genügt. Also ist $\widehat{\mathcal{G}} \cong i_*(\mathcal{G} \mid \widehat{R}_{\varrho_1}(0, b_0))$ und damit ist (9.2) bewiesen.

10. Kohärenz vou $\pi_1(\mathcal{F})$.

Sei wie in Abschnitt 9 A das Ebenenstück $A = \{z \in G\ z_1 = z_2 = z_3 = 0\}$ und F auf $G - A$ lokal frei. Da wir auch hier mit den Methoden der früheren Abschnitte arbeiten müssen, ist es sinnvoll, die Projektion π einzuschränken. Sei $R = R(a, b)$ wieder ein Ringgebiet im $\mathbb{C}^3$ und $\Omega \subset A$ offen, so dass $R \times \Omega \subset G$. Wir wollen von nun ab nur noch die Garbe $\mathcal{F} \mid R \times \Omega$ betrachten. Die Projektion π sei die natürliche Projektion $\pi: R \times \Omega \longrightarrow \Omega$. Dann ist die Garbe $\pi_1(\mathcal{F})$ über Ω durch dass Garbendatum $U \rightsquigarrow H^1(\overline{\pi}^1(U), \mathcal{F}) = H^1(R \times U, \mathcal{F})$ definiert. Wirt zeigen, dass $\pi_1(\mathcal{F})$ kohärent ist.

a) $\pi_1(\mathcal{F})$ *ist von endlichem Typ:*

Sei $t_0 \in \Omega$ und $\varrho_0 > 0$ so klein, dass $D \cap K_{\varrho_0}(t_0) = \begin{cases} \emptyset \\ \{t_0\} \end{cases}$, wo D die diskrete Ausnahmemenge von A bezüglich $\mathcal{F}$ gemäss (9.1) in der Nähe von $x_0 = (0, t_0)$ ist. Ferner sei ϱ_0 so klein, dass endlich viele Klassen $c_1, \dots, c_m \in H^1(R(0, b_0) \times K_{\varrho_0}(t_0), \mathcal{F})$ existieren so dass (6.1) gilt. Zu ϱ_0 wählen wir $\sigma_0 < \varrho_0$ gemäss (6.1). Sodann wählen wir $t_1 \in K_{\sigma_0}(t_0)$ beliebig und zeigen, dass die $s_\mu = \pi_1(c_\mu)$ den Halm $\pi_1(\mathcal{F})_{t_1}$ erzeugen.

Ist $t_1 = t_0$, so folgt die Behauptung sofort aus (6.1). Denn ist $s_{t_0} \in \pi_1(\mathcal{F})_{t_0}$, so gibt es eine Umgebung $K_\varrho(t_0)$ und einen Repräsentanten $s = [\xi] \in H^1(\widehat{R}_\varrho, \mathcal{F})$. Wir wählen ein Ringgebiet $R' \subset\subset R$ und $\varrho > 0$ so klein, dass $[\xi] \mid \widehat{R}'_\varrho$ von einem endlichen Cozyklus $\xi \in Z_0^1(\widehat{\mathfrak{U}}_\varrho \cap \widehat{R}'_\varrho, \mathcal{F})$ repräsentiert wird, wo $\mathfrak{U}$ eine zulässige Überdeckung von R' ist. Es folgt dann für ein $\sigma < \varrho$

$$[\xi] \mid \widehat{R}'_\sigma = \sum_\mu f_\mu c_\mu \mid \widehat{R}'_\sigma$$

mit $f_\mu \in H^0(K_\sigma(t_0), \mathcal{O}_A)$. Wie beim Beweis von (9.2), *a)* haben wir dann auch über $\widehat{R}_\sigma$ die Darstellung

$$[\xi] \mid \widehat{R}_\sigma = \sum_\mu f_\mu c_\mu \mid \widehat{R}_\sigma .$$

Also gilt auch $s \mid K_\sigma = \sum_\mu f_\mu s_\mu \mid K_\sigma$, d. h. $\pi_1(\mathcal{F})_{t_0}$ wird von den s_μ erzeugt.

Ist $t_1 \neq t_0$, so folgt aus der Wahl von ϱ_0 und dem Satz (9.1) für $i = 2$, dass der Homomorphismus

$$(*) \qquad H^1(R \times K_{\varrho_0}(t_0), \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(R \times \{t_1\}, \mathcal{F}/(t - t_1)\mathcal{F}) \longrightarrow 0$$

surjektiv ist. Ist nun $s_{t_1} \in \pi_1(\mathcal{F})_{t_1}$, so gibt es wieder eine Kreisscheibe $K_\varrho(t_1)$ und einen Repräsentanten $s = [\xi] \in H^1(R \times K_\varrho(t_1), \mathcal{F})$. Mit $R' \subset\subset R$ und einer zulässigen Überdeckung $\mathfrak{U}$ von R' gibt es wieder einen endlichen repräsentierenden Cozyklus $\xi \in Z_0^1((\mathfrak{U} \cap R') \times K_\varrho(t_1), \mathcal{F})$. Da $(*)$ surjektiv ist, gibt es endlich viele $\check{c}_1, \dots, \check{c}_l$ aus $H^1(R(0, b_0) \times K_{\varrho_0}(t_0), \mathcal{F})$, so dass wir nach einem Verfahren wie in Abschnitt 6 für ein $\sigma < \varrho$ eine Darstellung

$$[\xi] \mid R \times K_\sigma(t_1) = \sum_{\lambda=1}^{l} h_\lambda \check{c}_\lambda \mid R \times K_\sigma(t_1)$$

erhalten, mit $h_\lambda \in H^0(K_\sigma(t_1), \mathcal{O}_A)$. Aber über $R \times K_{\sigma_0}(t_0)$ gibt es, ebenfalls nach (6.1) eine Darstellung $\check{c}_\lambda \mid R \times K_{\sigma_0} = \sum_\mu g_{\lambda\mu} c_\mu \mid R \times K_{\sigma_0}$, wo die c_μ die ursprünglichen Klassen und die $g_{\lambda\mu}$ holomorph über $K_{\sigma_0}(t_0)$ sind. Definieren wir über $K_\sigma(t_1) \cap K_{\sigma_0}(t_0)$ $f_\mu = \sum_\mu h_\lambda g_{\lambda\mu}$, so folgt $s_{t_1} = \sum_\mu f_{\mu, t_1} s_{\mu, t_1}$, d. h. auch $\pi_1(\mathcal{F})_{t_1}$ wird von den s_μ erzeugt. Über $K_{\sigma_0}(t_0)$ existiert also eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathcal{R} \to \mathcal{O}_A^m \to \pi_1(\mathcal{F}) \to 0.$$

b) $\pi_1(\mathcal{F})$ *ist kohärent:*

Aufgrund der letzten Sequenz genügt es zu zeigen, dass $\mathcal{R}$ von endlichen Typ ist über dem Kreis $K_{\sigma_0}(t_0)$, denn dann ist $\pi_1(\mathcal{F}) \mid K_{\sigma_0}(t_0)$ kohärent. Da t_0 beliebig war, sind wir dann fertig.

Sei $t_1 \in K_{\sigma_0}(t_0)$ beliebig und $f_{1,t_1}, \dots, f_{m,t_1} \in \mathcal{O}_{A,t_1}$ mit

$$\sum_\mu f_{\mu. t_1} s_{\mu, t_1} = 0_{t_1}.$$

Dann gibt es eine Umgebung $U = U(t_1)$, so dass $U \subset K_{\sigma_0}(t_0)$ und über U Rapräsentanten f_μ der f_{μ, t_1}, so dass

$$\sum_\mu f_\mu c_\mu \mid R \times U = 0.$$

Nun wählen wir Polynome f_μ^n, so dass $f_\mu - f_\mu^{(n)} = (t - t_1)^n g_\mu^{(n)}$ und bilden $c = -\sum_\mu f_\mu^n c_\mu$ über $R \times K_{\varrho_0}(t_0)$. Über $R \times U$ gilt dann

$$c = (t - t_1)^n \sum_\mu g_\mu^{(n)} c_\mu .$$

Bei Anwendung des Homomorphismus

$$H^1(R \times K_{\varrho,}(t_0), \mathcal{F}) \to H^1(R, \mathcal{F}/(t - t_1)^n \mathcal{F})$$

geht dann c in 0 über, d.h. es existiert eine Klasse $c^{(n)} \in H^1(R \times K_{\varrho_0}(t_0), \mathcal{F})$ mit

$$c = (t - t_1)^n c^{(n)} .$$

Auf $c^{(n)}$ wenden wir nun (6.1) an. Es gibt dann Funktionen $b_\mu^{(n)} \in H^0(K_{\sigma_0}(t_0), \mathcal{O}_A)$ mit

$$c^{(n)} \mid R \times K_{\sigma,}(t_0) = \sum_\mu b_\mu^{(n)} c_\mu \mid R \times K_{\sigma,}(t_0),$$

so dass dann

$$c \mid R \times K_{\sigma_0}(t_0) = \sum_\mu (t - t_1)^n b_\mu^{(n)} c_\mu \mid R \times K_{\sigma_0}(t_0).$$

Wir setzen $a_\mu^{(n)} = (t - t_1)^n b_\mu^{(n)}$ und haben

$$\sum_\mu (f_\mu^{(n)} + a_\mu^{(n)}) c_\mu \mid R \times K_{\sigma_0}(t_0) = 0$$

d.h. $h^{(n)} = (f_1^{(n)}, \dots, f_m^{(n)}) + (a_1^{(n)}, \dots, a_m^{(n)}) \in H^0(K_{\sigma_0}(t_0), \mathcal{R})$. Ausserdem gilt über U

$$f - h^{(n)} \in (t - t_1)^n \cdot H^0(U, \mathcal{O}_A^m)$$

wo $f = (f_1, \dots, f_m)$, denn $f_\mu - (f_\mu^{(n)} + a_\mu^{(n)}) = (f_\mu - f_\mu^{(n)}) - a_\mu^{(n)} = (t - t_1)^n (g_\mu^{(n)} - b_\mu^{(n)})$. Nun wenden wir wie in [2[den Satz 2, |2], p. 28, an. Zu diesem Zweck sei $M'_{t_1} \subset \mathcal{O}^m_{A, t_1}$ der von $H^0(K_{\sigma_0}(t_0), \mathcal{R})$ erzeugte Untermodul und $M_{t_1} = \mathcal{R}_{t_1}$. Zu jedem $f_{t_1} \in M_{t_1}$ haben wir ein $h_{t_1}^{(n)} \in M'_{t_1}$ gefunden mit

$$f_{t_1} - h_{t_1}^{(n)} \in (t - t_1)^n \mathcal{O}^m_{A, t_1}.$$

für jedes n! Aus [2], Satz 2 folgt dann $f_{t_1} \in M'_{t_1}$ d.h. $\mathcal{R}_{t_1}$ wird von $H^0(K_{\sigma_0}(t_0), \mathcal{R})$ erzeugt für jedes $t_1 \in K_{\sigma_0}(t_0)$. Das war zu zeigen.

Mathematisches Seminar
Frankfurt a. M.

LITERATUR

[1] ANDREOTTI, A. and GRAUERT, H.: *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes.* Bull Soc. Math. France 90, 193-259 (1962).

[2] GRAUERT, H.: *Ein Theorem der anlytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Structuren.* Publ. Math. I.H.E.S. N^0 5. (1960).

[3] HÖRMANDER L.: *An Introduction to complex analysis in several variables.* New York: van Nostrand 1966.

[4] HÖRMANDER, L.: *L^2-estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$-operator.* Acta Math. 113, 89-152 (1965).

[5] SERRE, J. P.: *Prolongement de faisceaux analytiques cohérents.* Ann. Inst. Fourier 16, 363-374 (1966).

[6] TRAUTMANN, G.: *Ein Kontinuitätssatz für die Fortsetzung kohärenter analytischer Garben.* Arch. Math. 18, 188-196 (1967).

[7] TRAUTMANN, G.: *Abgeschlossenheit von Corandmoduln und Fortsetzbarkeit kohärenter analytischer Garben.* Inv. math. 5, 216-230 (1968).

[8] TRAUTMANN, G.: *Eine Bemerkung zur Struktur der kohärenten analytischen Garben.* Arch. Math. 19, 300-304 (1968).