Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Knut Knorr

Über den Grauertschen Kohärenzsatz bei eigentlichen holomorphen Abbildungen

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 22, nº 4 (1968), p. 729-761

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1968_3_22_4_729_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ÜBER DEN GRAUERTSCHEN KOHÄRENZSATZ BEI EIGENTLICHEN HOLOMORPHEN ABBILDUNGEN

von Knut Knorr

INHALTSVERZEICHNIS

Pervenuto alla Redazione il 25 Gennaio 1968.

(1) Die Kapitel 3 und 4 werden in der nächsten Ausgabe dieses Journals erscheinen.

VORWORT

In der algebraischen Geometrie wurde von Serre-Grothendieck folgender fundamentale Kohärenzsatz bewiesen: Ist $f: X \to Y$ eine eigentliche morphe Abbildung zwischen zwei algebraischen Varietäten, dann sind alle Bildgarben $R^i f_*(\mathcal{S})$ einer kohärenten algebraischen Garbe $\mathcal{S}$ wieder kohärent. Dieser Satz lässt sich verhältnismässig einfach mit rein garbentheoretischen Mitteln beweisen, wenn X isomorph zu einer lokal abgeschlossenen Untervarietät eines projektiven Raumes ist. Den allgemeinen Satz bekommt man mit Hilfe des Chow'schen Lemmas, das aussagt, dass jede algebraische Varietät Bild einer surjektiven eigentlichen, morphen Abbildung ist. Unvergleichbar schwieriger ist das analoge Kohärenztheorem in der analytischen Geometrie zu beweisen. Hier hat man kein Chow-Lemma zur Verfügung, und deshalb kann der Weg, der in der algebraishen Geometrie vorgezeichnet ist, nicht beschritten werden. In dem berühmten blauen Buch: « Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen », bewies Grauert den grossen Kohärenzsatz der analytischen Geometrie. Die Knappheit seiner Darstellung bringt es mit sich, dass die vielen schönen Ideen und neuen Methoden oft recht unverständlich erscheinen und deshalb der Beweis auf seine Richtigkeit unerhört schwer zu kontrollieren ist. In dieser Arbeit ist der Grauertsche Beweis des grossen Kohärenzsatzes lückenlos aufgeschrieben.

Es sei mir an dieser Stelle gestattet, Herrn Prof. Dr. R. Narasimhan für das Lesen des Manuskriptes und für seine Verbesserungsvorschläge zu danken.

1. Privilegierte Umgebungen.

1.1. Die Grauertnorm

(1.1.1) Bezeichnungen:

$\mathbf{R}_+$ Menge der nicht negativen reellen Zahlen,

m und n seien natürliche Zahlen,

$$\varrho = (\varrho_1, \dots, \varrho_m) \in \mathbf{R}_+^m,$$

$$\varrho_0 = (\varrho_1^{(0)}, \dots, \varrho_m^{(0)}) \in \mathbf{R}_+^m.$$

Seien $\varrho, \varrho' \in \mathbf{R}_+^m$. Die Relation $\varrho_i \leq \varrho_i'$, $1 \leq i \leq m$ (bzw. $\varrho_i < \varrho_i'$, $1 \leq i \leq m$) wird mit $\varrho \leq \varrho'$ (bzw. $\varrho < \varrho'$) bezeichnet.

$k = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbf{N}^m$

$t = (t_1, \dots, t_m)$ m-tupel von Unbestimmten

$t_0 = (t_1^{(0)}, \dots, t_m^{(0)}) \in \mathbf{C}^m$

$$\left(\frac{t}{\varrho}\right)^k = \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^{k_1} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{t_m}{\varrho_m}\right)^{k_m}$$

G offene Menge des $\mathbf{C}^n$.

$K(t_0, \varrho)$ Polyzylinder im $\mathbf{C}^m$ mit Zentrum t_0 und Polyradius ϱ. Wenn t_0 der Nullpunkt von $\mathbf{C}^m$ ist, dann setzen wir $K(t_0, \varrho) = K(\varrho)$.

$\mathcal{O}$ Garbe der holomorphen Funktionen auf $\mathbf{C}^q$ (der Exponent q ist im folgenden aus dem Zusammenhang ersichtlich).

$\mathcal{S}$ kohärenter $\mathcal{O}$-Modul.

(1.1.2) In den Schnittmoduln $\Gamma(G \times K(\varrho), \mathcal{O}^n)$ und $\Gamma(G \times K(\varrho), \mathcal{S})$ werden Pseudomormen eingeführt. Dazu entwickeln wir jedes $f \in \Gamma(G \times \times K(\varrho), \mathcal{O}^n)$ in eine Potenzreihe

$$f = \sum_k f_k \left(\frac{t}{\varrho}\right)^k.$$

Dabei sind die Koeffitienten f_k Schnitte aus $\Gamma(G, \mathcal{O}^n)$.

Definition (1.1.3). — (i) (Maximumnorm) Sei $g = (g_1, \dots, g_n)$ ein Schnitt aus $\Gamma(G, \mathcal{O}^n)$. Es wird

$$\| g \|_G = \sum_1^n \sup_{z \in G} | g_j(z) |$$

gesetzt.

(ii) (Grauertnorm) Sei $f = \sum f_k \left(\frac{t}{\varrho}\right)^k$ ein Schnitt aus $\Gamma(G \times K(\varrho), \mathcal{O}^n)$.

Es wird

$$\| f \|_{G\varrho} = \sup_k \| f_k \|_G$$

gesetzt.

(iii) (Grauertnorm) Sei $\mathcal{O}^n \to \mathcal{S} \to 0$ eine Auflösung von $\mathcal{S}$ über $G \times K(\varrho)$ und sei $s \in \Gamma(G \times K(\varrho), \mathcal{S})$. Wir setzen

$$\| s \|_{G\varrho} = \inf \{ \| f \|_{G\varrho} : f \in \Gamma(G \times K(\varrho), \mathcal{O}^n) \text{ mit } \alpha(f) = s \}.$$

Anmerkung: 1) Wenn $s \in \Gamma(G \times K(\varrho), \mathcal{O})$ und $\|s\|_{G\varrho} = 0$, dann gilt $s = 0$. Dies ist eine leichte Folgerung des Cartanschen Satzes (1.3.1). 2) An Stelle des Wortes « Pseudonorm » wird bequemlichkeitshalber oft das Wort « Norm » benutzt.

SATZ (1.1.4). — Voraussetzung: Sei $f \in \Gamma(G \times K(\varrho_0), \mathcal{O}^n)$. Behauptung: (i) Wenn $\varrho < \varrho_0$, dann ist $\|f\|_{G\varrho} \leq \|f\|_{G \times K(\varrho)}$. (ii) Wenn $G' \subset\subset G$ und $\varrho < \varrho_0$, dann ist $\|f\|_{G'\varrho} < \infty$. (iii) Wen $G' \subset G$ und $\varrho < \varrho_0$, dann ist $\|f\|_{G'\varrho} \leq \|f\|_{G\varrho_0}$.

LEMMA (1.1.5). — Sei $\varrho_0 \in \mathbf{R}_+^m$. Zu jedem $\varrho_1 \in \mathbf{R}_+^m$ mit $\varrho_1 < \varrho_0$ gibt es zwei Konstanten $c, a \in \mathbf{R}_+$ mit $c > 0$, $0 < a < 1$ derart, dass für jede offene Menge B des $\mathbf{C}^n$ und jedes $\varrho \in \mathbf{R}_+^m$ mit $\varrho < \varrho_1$ die Aussage gilt: Wenn $f \in \Gamma(B \times K(\varrho_0), \mathcal{O})$, dann gilt für die Koeffizienten der Entwicklung $f = \sum_k f_k \left(\frac{t}{\varrho}\right)^k$ die Ungleichung $\|f_k\|_B \leq \|f\|_{B\varrho_0}\, c \cdot a^{|k|}$. Dabei wurde $|k| = k_1 + \ldots + k_m$ gesetzt.

Die Beweise von (1.1.4) und (1.1.5) sind trivial.

(1.1.6). — Seien B_i offene Mengen des $\mathbf{C}^{n_i}$ $(i = 1, 2)$ und sei $\varrho_0 \in \mathbf{R}_+^m$. Mit ${}_i\mathcal{O}$ werde die Garbe der holomorphen Fnnktionen auf $\mathbf{C}^{n_i+m}$ bezeichnet. Eine holomorphe Abbildung $\psi_0 : B_1 \times K(\varrho_0) \leftarrow B_2 \times K(\varrho_0)$ heisst eine Abbildung über $K(\varrho_0)$ wenn $pr_2 \circ \psi_0 = pr_2$ gilt.

LEMMA (1.1.7). — Sei $\psi_0 : B_1 \times K(\varrho_0) \leftarrow B_2 \times K(\varrho_0)$ eine holomorphe Abbildung über $K(\varrho_0)$. Zu jedem $\varrho_1 \in \mathbf{R}_+^m$ mit $\varrho_1 < \varrho_0$ gibt es eine Konstante $M > 0$, so dass für jedes $\varrho < \varrho_1$ die Aussage gilt: Wenn $f \in \Gamma(B_1 \times K(\varrho), {}_1\mathcal{O})$, dann gilt die Ungleichung

$$\|f \circ \psi_0\|_{B_2\varrho} \leq M \|f\|_{B_1\varrho}.$$

Beweis. — Es werde zunächst f unabhängig von t vorausgesetzt (dabei bezeichne t die Unbestimmten, die in $K(\varrho)$ laufen. Dann lässt sich f als Schnitt aus $\Gamma(B_1 \times K(\varrho_0), {}_1\mathcal{O})$ und damit auch $g = f \circ \psi_0 = \sum_k g_k \left(\frac{t}{\varrho}\right)^k$ als Schnitt aus $\Gamma(B_2 \times K(\varrho_0), {}_2\mathcal{O})$ auffassen. Nach Lemma (1.1.5) gilt $\|g_k\|_{B_2} \leq$ $\leq \|g\|_{B_2\varrho_1} c a^{|k|}$. Nach Satz (1.1.4) (i) gilt $\|g\|_{B_2\varrho_1} \leq \|g\|_{B_2 \times K(\varrho_1)} \leq \|f\|_{B_1 \times K(\varrho_1)} =$ $= \|f\|_{B_1\varrho}$. Insgesamt folgt also die Ungleichung

$$(*) \qquad \|g_k\|_{B_2} \leq \|f\|_{B_1\varrho}\, c a^{|k|}.$$

Sei jetzt $f = \sum_k f_k \left(\frac{t}{\varrho}\right)^k \in \Gamma(B_1 \times K(\varrho), {}_1\mathcal{O})$ beliebig, dann gilt offensichtlich $g = f \circ \psi_0 = \sum_k (f_k \circ \psi_0)\left(\frac{t}{\varrho}\right)^k$. Behandeln wir $f_k \circ \psi_0 = \sum_\mu g_\mu^k \left(\frac{t}{\varrho}\right)^\mu$ nach (*), so folgt $\| g_\mu^k \|_{B_2} \leq \| f_k \|_{B_1} c a^{|\mu|} \leq \| f \|_{B_1} c a^{|\mu|}$. Elementares Einsetzen liefert

$$g = \sum_k \sum_\mu g_\mu^k \left(\frac{t}{\varrho}\right)^{\varkappa+\mu} \sum_\tau \left(\sum_{\mu \leq \tau} g_\mu^{\tau-\mu}\right)\left(\frac{t}{\varrho}\right)^\tau \text{ und es gilt}$$

$$\Big\| \sum_{\mu \leq \tau} g_\mu^{\tau-\mu} \Big\|_{B_2} \leq \| f \|_{B_1 \varrho}\, c \sum_\mu a^{|\mu|} = c\left(\frac{1}{1-a}\right)^m \| f \|_{B_1 \varrho}\,.$$

(1.1.8) Seien G_i offene Meugen des $\mathbf{C}^{n_i}$, $(i = 1, 2)$ und sei $\psi_0 : G_1 \times K(\varrho_0) \leftarrow G_2 \times K(\varrho_0)$ eine holomorphe Abbildung. Ein ${}_1\mathcal{O}$-Modulmorphismus $\psi_1 : {}_1\mathcal{O}^{q_1} \longrightarrow (\psi_0)_* ({}_2\mathcal{O}^{q_2})$ heisst ein ψ_0-Morphismus und wird auch mit $\psi_1 : {}_1\mathcal{O}^{q_1} \longrightarrow {}_2\mathcal{O}^{q_2}$ bezeichnet. Für jedes Paar (B_2, B_1), wobei B_1 offene Teilmenge von $G_1 \times K(\varrho_0)$, B_2 offene Teilmenge von $G_2 \times K(\varrho_0)$ mit $\psi_0(B_2) \subset B_1$ liefert ψ_1 einen Dimorphismus

$$\psi_1(B_2, B_1) : \Gamma(B_1, {}_1\mathcal{O}^{q_1}) \longrightarrow \Gamma(B_2, {}_2\mathcal{O}^{q_2}).$$

SATZ. (1.1.9). — Voraussetzung:

$\psi_0 : G_1 \times K(\varrho_0) \leftarrow G_2 \times K(\varrho_0)$ holomorphe Abbildung über $K(\varrho_0)$

$\psi_1 : {}_1\mathcal{O}^{q_1} \longrightarrow {}_2\mathcal{O}^{q_2}$ ψ_0-Morphismus

Behauptung: Für jedes $G^* \subset\subset G_2$ und jedes $\varrho_1 < \varrho_0$ gibt es eine Konstante $M > 0$, so dass für jedes Paar (B_2, B_1) offener Mengen $B_1 \subset G_1$, $B_2 \subset G^*$ mit $\psi_0(B_2 \times K(\varrho_0)) \subset B_1 \times K(\varrho_0)$ und jedes $\varrho < \varrho_1$ die Aussage gilt: Wenn $f \in \Gamma(B_1 \times K(\varrho)$, dann gilt die Ungleichung $\| \psi_1 \circ f \|_{B_2 \varrho} \leq M \| f \|_{B_1 \varrho}$.

Beweis. — Sei $(e_\nu)_{1 \leq \nu \leq q_1}$ die kanonische Basis von $\Gamma(G_1 \times K(\varrho_0), \mathcal{O}^{q_1})$ und $f_\nu = \psi_1 \circ e_\nu \in \Gamma(G_2 \times K(\varrho_0), {}_2\mathcal{O}^{q_2})$. Sei jetzt ϱ und ϱ' so gewählt, dass $\varrho < \varrho_1 < \varrho' < \varrho_0$ ist. Nach Lemma (1.1.5) gilt für die Koeffizienten der Entwicklung $f_\nu = \sum_k f_k^\nu \left(\frac{t}{\varrho}\right)^k$ die Ungleichung $\| f_k^\nu \|_{B_2} \leq \| f_\nu \|_{B_2 \varrho'} c_1 a^{|k|}$. Nach Satz (1.1.4) (ii) ist $c_0 = \sup_\nu \| f_\nu \|_{B_2 \varrho'} < \infty$. Man hat also $\| f_k^\nu \|_{B_2} \leq c_0 c_1 a^{|k|}$. Sei jetzt $f = \sum_\nu k_\nu e_\nu \in \Gamma(B_1 \times K(\varrho), {}_1\mathcal{O}^{q_1})$. Nach (1.1.3) (iii) ist $\| f \|_{B_1 \varrho} = \sum_\nu \| k_\nu \|_{B_1 \varrho}$. Nach Definition von ψ_1 gilt $g = \psi_1 \circ f = \sum_\nu (k_\nu \circ \psi_0) \psi_1 \circ e_\nu = \sum_\nu (k_\nu \circ \psi_0) f_\nu$. Nach Lemma (1.1.7) gilt für die Koeffizienten der Entwicklung $k_\nu \circ \psi_0 = \sum_\chi k_\chi^\nu \left(\frac{t}{\varrho}\right)^\chi$ die Ungleichung $\| k_\chi^\nu \|_{B_2} \leq M \| k_\nu \|_{B_1 \varrho}$. Elementares Einsetzen liefert

$$g = \sum_{\nu=1}^{q_1} \sum_\chi \sum_\mu k_\chi^\nu f_\mu^\nu \left(\frac{t}{\varrho}\right)^{\chi+\mu} = \sum_\tau \left(\sum_{\nu=1}^{q_1} \sum_{\mu \leq \tau} k_{\tau-\mu}^\nu f_\mu^\nu \right) \left(\frac{t}{\varrho}\right)^\tau$$

und es gilt die Abschätzung

$$\left\| \sum_{\nu=1}^{q_1} \sum_{\mu \leq \tau} k_{\tau-\mu}^\nu f_\mu^\nu \right\|_{B_2} \leq \sum_{\nu=1}^{q_1} M \| k_\nu \|_{B_1 \varrho} c_0 c_1 \sum_{\mu \geq 0} a^{|\mu|} = M c_0 c_1 \left(\frac{1}{1-a}\right)^m \| f \|_{B_1 \varrho}.$$

COROLLAR (1.1.10). — Voraussetzung:

G_2 Steinsche offene Menge des C^{n_2}

$\mathcal{S}_i$ kohärenter ${}_i\mathcal{O}$-Modul auf $G_i \times K(\varrho_0)$, $(i = 1, 2)$

${}_i\mathcal{O}^{q_i} \longrightarrow \mathcal{S}_i \longrightarrow 0$ Auflösung über $G_i \times K(\varrho_0)$, $(i = 1, 2)$

$\psi_0 : G_1 \times K(\varrho_0) \longleftarrow G_2 \times K(\varrho_0)$ holomorphe Abbildung über $K(\varrho_0)$,

$\psi_1 : \mathcal{S}_1 \longrightarrow \mathcal{S}_2$ $\quad$ ψ_0-Morphismus.

Behauptung: Für jedes $G^* \subset\subset G_2$ und jedes $\varrho_1 < \varrho_0$ gibt es eine Konstante $M > 0$, so dass für jedes Paar (B_2, B_1) offener Mengen $B_1 \subset G_1$, $B_2 \subset G^*$ mit $\psi_0(B_2 \times K(\varrho_0)) \subset B_1 \times K(\varrho_0)$ und jedes $\varrho < \varrho_1$ die Aussage gilt: Wenn $s \in \Gamma(B_1 \times K(\varrho), \mathcal{S}_1)$, dann gilt die Ungleichung $\| \psi_1(f) \|_{B_2 \varrho} \leq M \| f \|_{B_1 \varrho}$

COROLLAR (1.1.11). — Voraussetzung:

G Steinsche offene Menge des C^n

$\mathcal{S}$ kohärenter $\mathcal{O}$-Modul auf $G \times K(\varrho_0)$

$\mathcal{O}^{q_\nu} \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow 0$, $(\nu = 1, 2)$ Auflösungen von $\mathcal{S}$ über $G \times K(\varrho_0)$.

Behauptung: Für jedes $G^* \subset\subset G$ und jedes $\varrho_1 < \varrho_0$ gibt es eine Konstante $M > 0$, so dass für jedes $B \subset G^*$ und jedes $\varrho < \varrho_1$ die Aussage gilt: Wenn $s \in \Gamma(B \times K(\varrho), \mathcal{S})$, dann gilt die Ungleichung $\| s \|'_{B\varrho} \leq M \| s \|''_{B\varrho}$. (Dabei bezeichnet $\| \; \|^{(\nu)}_{B\varrho}$ die Pseudonorm bezüglich der Auflösung $\mathcal{O}^{q_\nu} \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow 0$).

COROLLAR (1.1.12). — Voraussetzung:

$$\psi_1 : \mathcal{O}^{q_1} \longrightarrow \mathcal{O}^{q_2} \text{ Morphismus über } G \times K(\varrho_0).$$

Behauptung: Für jedes $G^* \subset\subset G$ und jedes $\varrho_1 < \varrho_0$ gibt es eine Konstante $M > 0$. so das für jedes $B \subset G^*$ and jedes $\varrho < \varrho_1$ die Aussage gilt: Wenn $f \in \Gamma(B \times K(\varrho), \mathcal{O}^{q_1})$, dann gilt die Ungleichung $\| \psi_1(f) \|_{B\varrho} \leq M \| f \|_{B\varrho}$.

COROLLAR (1.1.13). — Voraussetzung:

G Steinsche offene Menge des $\mathbf{C}^n$,

$\mathcal{S}_i$ kohärente $\mathcal{O}$-Moduln auf $G \times K(\varrho_0)$, $(i = 1,2)$,

$\mathcal{O}^{q_i} \longrightarrow \mathcal{S}_i \longrightarrow 0$ Auflösungen über $G \times K(\varrho_0)$,

$\psi_1 : \mathcal{S}_1 \longrightarrow \mathcal{S}_2$ Morphismus über $G \times K(\varrho_0)$.

Behauptung: Für jedes $G^* \subset\subset G$ und jedes $\varrho_1 < \varrho_0$ gibt es eine Konstante $M > 0$, so das für jedes $B \subset G^*$ und jedes $\varrho < \varrho_1$ die Aussage gilt: Wenn $s \in \Gamma(B \times K(\varrho), \mathcal{S}_1)$, dann gilt die Ungleichung $\| \psi_1(f) \|_{B\varrho} \leq M \| f \|_{B\varrho}$.

(1.1.14) Ein Beispiel: Sei $f(t) = \dfrac{1}{1-t}$ definiert auf $K(1) = \{t \in \mathbf{C} : |t| < 1\}$ Jetzt ist $f(t) = \sum\limits_{n \geq 0} t^n$, somit $\|f\|_1 = 1$. Dagegen ist $f \cdot f = \sum\limits_{n \geq 0} (n+1) t^n$, also $\|f \cdot f\|_1 = \infty$. Es gilt aber der folgende

SATZ (1.1.15). — Voraussetzung:

$$f \in \Gamma(B \times K(\varrho_0), \mathcal{O}^n) \text{ mit } \|f\|_{B\varrho_0} < \infty.$$

Behauptung: Zu jeden $\tilde{\varrho} < \varrho_0$ gibt en eine Konstante $c > 0$, so dass für jedes $\varrho < \tilde{\varrho}$ und jedes $a \in \Gamma(B \times K(\varrho), \mathcal{O})$ die Ungleichung $\| a \cdot f \|_{B\varrho} \leq c \| a \|_{B\varrho} \| f \|_{B\varrho_0}$ gilt.

COROLLAR (1.1.16). — Voraussetzung:

$\mathcal{S}$ kohärente analytische Garbe über $B \times K(\varrho_0)$,

$\mathcal{O}^n \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow 0$ Auflösung über $B \times K(\varrho_0)$.

$s \in \Gamma(B \times K(\varrho_0), \mathcal{S})$ mit $\| s \|_{B\varrho_0} < \infty$.

Behauptung: Zu jeden $\tilde{\varrho} < \varrho_0$ gibt es eine Konstante $c > 0$, so dass für jedes $\varrho < \tilde{\varrho}$ und jedes $a \in \Gamma(B \times K(\varrho), \mathcal{O})$ die Ungleichung $\| a \cdot s \|_{B\varrho} \leq c \| a \|_{B\varrho} \| s \|_{B\varrho_0}$ gilt.

1.2. Dreiecksmengen

DEFINITION (1.2.1). — Sei m eine natürliche Zahl, und sei $\delta_i : \mathbf{R}_+^{m-i} \to \to \mathbf{R}_+$, $1 \leq i \leq m$ ein System von positivwertigen monotonen Funktionen. Die Menge aller m-tupel $(\varrho_1, \dots, \varrho_m)$ aus $\mathbf{R}_+^m$ mit der Eigenschaft

$$\varrho_{m-i} < \delta_{m-i}(\varrho_m, \dots, \varrho_{m-i+1}), \qquad 0 \leq i \leq m-1,$$

heisst m-dimensionale Dreiecksmenge bezüglich $(\delta_1, \dots, \delta_m)$ und wird mit $\Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)$ bezeichnet.

SATZ (1.2.2). — 1) Wenn $\Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)$ eine Dreiecksmenge ist, dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\varrho > 0$ aus $\Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)$ derart, dass $\varrho_i < \varepsilon$ für $1 \leq i \leq m$ gilt.

2) Wenn $\Delta(\delta_1', \dots, \delta_m')$ und $\Delta(\delta_1'', \dots, \delta_m'')$ Dreiecksmengen sind, dann ist $\Delta(\delta_1', \dots, \delta_m') \cap \Delta(\delta_1'', \dots, \delta_m'')$ wieder eine Dreiecksmenge.

(1.2.3) Die Sprechweise « für hinreichend kleines $\varrho \in \mathbf{R}_+^m$ mit der Eigenschaft $R\{\varrho\}$ gilt die Aussage $A\{\varrho\}$ » soll heissen, dass es ein $\varrho_0 \in \mathbf{R}_+^m$ mit $\varrho_0 > 0$ gibt, derart dass für $\varrho, 0 < \varrho < \varrho_0$, mit der Eigenschaft $R\{\varrho\}$ die Aussage $A\{\varrho\}$ gilt.

1.3 Cartan privilegierte Umgebungen

THEOREM (1.3.1) (Cartan). — Voraussetzung: Sei x ein Punkt des $\mathbf{C}^n$ und sei N ein Untermodul von $\mathcal{O}_x^q$.

Behauptung: Es gibt

1) einen Homomorphismus $h : \mathcal{O}^p \to \mathcal{O}^q$ über einer offenen Umgebung von x mit im $h_x = N$,

2) eine Dreiecksmenge $\Delta(\delta_1, \dots, \delta_n)$.

3) eine Abbildung $M : \Delta(\delta_1, \dots, \delta_n) \to \mathbf{R}_+$, so dass für hinreichend kleines $\varrho \in \Delta(\delta_1, \dots, \delta_n)$ gilt:

Zu jedem $f \in \Gamma(K((x, \varrho), \mathcal{O}^q)$ mit $\|f\|_{K(x,\varrho)} < \infty$ und $f_x \in$ im h_x gibt es ein $g \in \Gamma(K(x, \varrho), \mathcal{O}^p)$ mit $h(g) = f$ und $\|g\|_{K(x,\varrho)} \leq M(\varrho)\|f\|_{K(x,\varrho)}$. Ein Beweis zu (1.3.1) ist in [2] zu finden.

DEFINITION (1.3.2). — Sei h wie in (1.3.1) vorgegeben. Dann heisst jedes Paar $(K(x, \varrho), M(\varrho))$ wie es in (1.3.1) auftritt, h-privilegierte Umgebung im Sinne von Cartan.

Bemerkung (1.3.3). — Hat man bereits einen Morphismus $h : \mathcal{O}^p \longrightarrow \mathcal{O}^q$, über eine offene Menge U des $\mathbf{C}^n$, dann gibt es zu jeden Punkt $x \in U$ eine Dreiecksmenge $\Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)$ und eine Abbildung $M : \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m) \longrightarrow \mathbf{R}_+$, so dass für jedes $\varrho \in \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)$ das Paar $(K(x, \varrho), M(\varrho)$ h-privilegiert ist. Es werden noch einige wohlbekannte Corollare ohne Beweis notiert.

Corollar (1.3.4) — Voraussetzung: $(X, \mathcal{H})$ sei ein komplexer Raum, $\mathcal{S}$ kohärenter $\mathcal{H}$-Modul, und $(\mathcal{S}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ eine aufsteigende Folge (d. h. $\mathcal{S}_n \subset \mathcal{S}_{n+1}$) von kohärenten Untergarben von $\mathcal{S}$.

Behauptung: Zu jeder relativkompakten offenen Teilmenge $Y \subset X$ gibt es eine natürliche Zahl $n(Y)$ derart, dass $\mathcal{S}_n | Y = \mathcal{S}_{n(Y)} | Y$ für alle $n \geq n(Y)$.

Corollar (1.3.5). — Voraussetzung: $(X, \mathcal{H})$ sei ein komplexer Raum, $\mathcal{S}$ ein kohärenter $\mathcal{H}$-Modul und $\mathcal{L}$ ein Untermodul von $\mathcal{S}$.

Behauptung: Wenn die globalen Schnitte von $\mathcal{L}$ jeden Halm von $\mathcal{L}$ erzeugen, dann ist $\mathcal{L}$ kohärent.

1.4. Gauert-privilegierte Umgebungen

Definition (1.4.1). — Sei $\mathcal{S}$ ein kohärenter $\mathcal{O}$-Modul. $\mathcal{S}$ heisst im Punkte $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{C}^n$ $(t_1 - x_1)$-torsionsrecht, wenn die Abbildung $s_x \longmapsto (t_1 - x_1) s_x : \mathcal{S}_x \longrightarrow \mathcal{S}_x$ injektiv ist.

Satz (1.4.2). — Sei $\mathcal{S}$ ein kohärenter $\mathcal{O}$-Modul, dann gilt

(i) Zu jedem $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{C}^n$ gibt es eine natürliche Zahl d, so dass $(t_1 - x_1)^d \mathcal{S}$ in x $(t_1 - x_1)$-torsionsrecht ist

(ii) Wenn $\mathcal{S}$ in $x = (x_1, \dots, x_n)$ $(t_1 - x_1)$-torsionsrecht ist, dann gibt es eine Umgebung U von x, so dass für jedes $y = (y_1, \dots, y_n) \in U$ $\mathcal{S}$ in y $(t_1 - y_1)$-torsionsrecht ist.

Beweis. — (i) Ohne Einschränkung sei $x_1 = 0$. Sei N_ν der Kern der Abbildung $t_1^\nu : \mathcal{S}_x \longrightarrow \mathcal{S}_x$ $(\nu \in \mathbf{N},\ s_x \longrightarrow t_1^\nu s_x)$ dann bildet $(N_\nu)_{\nu \in \mathbf{N}}$ eine aufsteigende Folge von Untermoduln von $\mathcal{S}_x$. Nach Corollar (1.3.4) gibt es eine natürliche Zahl d so dass $N_d = N_\nu$ für alle $\nu \geq d$ gilt. Jetzt ist die Abbildung $t_1 : t_1^d \mathcal{S}_x \longrightarrow t_1^d \mathcal{S}_x$ injektiv. Denn sei $s_x \in t_1^d \mathcal{S}_x$ mit $t_1 s_x = 0$, dann gibt es ein $\tilde{s}_x \in \mathcal{S}_x$ mit $t_1^d \tilde{s}_x = s_x$ und $t_1^{d+1} \tilde{s}_x = t_1 s_x = 0$. Wegen $N_d = N_{d+1}$ ist also auch $s_x = 0$.

(ii) ist wohlbekannt

(1.4.3) Mit $r = (r_1, \dots, r_n)$ werde ein n — tupel nicht negativer reeller Zahlen, mit $\varrho = (\varrho_1, \dots, \varrho_m)$ ein m — tupel positiver reeller Zahlen bezeichnet.

Sei $z = (x, y)$ ein festgewählter Punkt aus dem $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$, dann bezeichne $K(r_0, \varrho_0) = K(r_0) \times K(\varrho_0)$ den Polyzylinder um z mit dem Polyradius $(r_1^{(0)}, \dots, r_n^{(0)}, \varrho_1^{(0)}, \dots, \varrho_m^{(0)})$. Im folgenden werde in den Beweisen der Bequemlichkeit halber für z stets der Nullpunkt angenommen.

Mit $t_1, \dots, t_m$ werden die letzten m Koordinatenfunktionen von $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$ bezeichnet.

Seien $e = (e_1, \dots, e_m)$ und $e' = (e'_1, \dots, e'_m)$ Elemente aus $\mathbf{N}^m$, dann heisst $e \leq e'$ wenn $e_\nu \leq e'_\nu$ für $1 \leq \nu \leq m$ gilt. Eine Abbildung $F : \mathbf{N}^m \longrightarrow \mathbf{N}^m$ heisst monoton, wenn aus $e \leq e'$ folgt $F(e) \leq F(e')$.

Mit $\mathcal{I}(e)$ werde die Idealgarbe $t_1^{e_1}\mathcal{O} + \dots t_1^{e_m}\mathcal{O}$ bezeichnet. Es gilt die wohlbekannte Beziehung: $\mathcal{O}^q \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}/\mathcal{I}(e) = \mathcal{O}^q/\mathcal{I}(e)\,\mathcal{O}^q$.

Mit $q(e) : \mathcal{O}^q \longrightarrow \mathcal{O}^q/\mathcal{I}(e)\,\mathcal{O}^q$ sei der kanonische Epimorphismus bezeichnet.

THEOREM (1.4.4) (Grauert). — Voraussetzung:

$$z = 0 \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$$

$h : \mathcal{O}^p \longrightarrow \mathcal{O}^q$ Homomorphismus über eine offene Umgebung von z.

Behauptung: Es gibt

1) eine Deicksmenge $\Delta(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n, \delta_1, \dots, \delta_m)$,

2) eine Abbildung $M : \Delta(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n, \delta_1, \dots, \delta_m) \longrightarrow \mathbf{R}_+$,

3) eine monotone Abbildung $F : \mathbf{N}^m \longrightarrow \mathbf{N}^m$ mit $\lim\limits_{e \to \infty} F(e) = \infty$,

so dass für jedes $(r, \varrho) \in \Delta(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n, \delta_1, \dots, \delta_m)$ gilt:

(I) Zu jedem $f \in \Gamma(K(r, \varrho), \mathcal{O}^q)$ mit $\|f\|_{K(r)\varrho} < \infty$ und $f_z \in (\operatorname{im} h)_z$ gibt es ein $g \in \Gamma(K(r, \varrho), \mathcal{O}^p)$ mit $h(g) = f$ und $\|g\|_{K(r)\varrho} \leq M(r, \varrho)\,\|f\|_{K(r)\varrho}$

(II) Gilt für f zusätzlich $q(e_1, \dots, e_m)(f) = 0$, dann lässt sich g aus (I) sogar so wählen, dass $q(F(e_1, \dots, e_m))(g) = 0$ ist.

Zusatz: Ist $\mathcal{O}^q/\operatorname{im} h$ $(t_1 - y_1)$-torsionsrecht, dann kann M sogar von ϱ_1 unabhänging gewählt werden.

Wir notieren zunächst zwei Hilfssätze:

Hilfssatz (d, m) (1.4.4.1). — Voraussetzung:

$$z = 0 \in \mathbf{C}^{n+m}$$

$h : \mathcal{O}^p \longrightarrow \mathcal{O}^q$. Homomorphismus über eine offene Umgebung von z.

Behauptung: Es gibt

1) eine Dreicksmenge $\Delta_d(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n, \delta_1, \ldots, \delta_m)$,

2) eine von ϱ_1 unabhängige Abbildung $M_d: \Delta_d(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n, \delta_1, \ldots, \delta_m) \longrightarrow \mathbf{R}_+$,

3) eine monotone Abbildung $F_d: \mathbf{N}^{m-1} \longrightarrow \mathbf{N}^{m-1}$ mit $\lim\limits_{e \to \infty} F(e) = \infty$,

so dass für jedes $(r, \varrho) \in \Delta_d(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n, \delta_1, \ldots, \delta_m)$ gilt:

$I_{(d,m)}$ Zu jedem $f \in \Gamma(K(r, \varrho), \mathcal{O}^q/t_1^d \mathcal{O}^q$ mit $\|f\|_{K(r)\varrho} < \infty$ und $f_z \in (\operatorname{im} h(d))_z$ gibt es ein $g \in \Gamma(K(r, \varrho), \mathcal{O}^p/t_1^d \mathcal{O}^p)$ mit $h(d)(g) = f$ und $\|g\|_{K(r)\varrho} \leq M_d(r, \varrho) \|f\|_{K(r)\varrho}$

$II_{(d,m)}$ Gilt für f zusätzlich $q(e_1, \ldots, e_m)(f) = 0$. wobei $e_1 > d$ ist, dann lässt sich das g aus $I_{(d,m)}$ sogar so wählen, dass noch $q(F_d(e_2, \ldots, e_m))(g) = 0$ ist.

Hilfssatz (∞, m) (1.4.4.2). — (Hilfssatz (∞, m) ist eine andere Bezeichnung für Theorem (1.4.4), wenn man dort (I) durch $I_{(\infty,m)}$ und (II) durch $II_{(\infty,m)}$ ersetzt.

(1.4.4.3) Der Beweis von Theorem (1.4.4) gelingt durch eine Doppelinduktion über die beiden Hilfssätze (1.4.4.1) und (1.4.4.2) nach folgenden Induktionsschema:

Induktionsanfang:

(i) $I_{(1,1)}$

(ii) $II_{(\infty,1)}$

1. Induktionsschritt:

$$I_{1,m},\ II_{1,m} \Longrightarrow I_{d,m},\ II_{d,m}$$

2. Induktionsschritt:

(i) $$I_{(d+,m)} \Longrightarrow I_{(\infty,m)}$$

(ii) $$I_{(d+,m)},\ II_{(d+,m)} \Longrightarrow II_{\infty,m)}$$

3. **Induktionsschritt:**

$$I_{(\infty, m)},\ II_{(\infty, m)} \Longrightarrow I_{(1, m+1)},\ II_{(1, m+1)}$$

Dabei sei d^+ eine natürliche Zahl (> 0), so dass $t^{d^+-1}(\mathcal{O}^q/\operatorname{im} h)$ im Nullpunkt t_1-torsionsrecht ist. Nach (1.4.2) (i) gibt es eine solche Zahl.

(1.4.4.4) Induktionsanfang. — (i) Die Aussage $I_{(1,1)}$ ist nichts anderes als die Bemerkung zu Theorem (1.3.1).

(ii) Um $II_{(\infty,1)}$ zu bweisen braucht man nur zu zeigen: Gilt für f aus $I_{(\infty,1)}$ zusätzlich $q(e_1)(f) = 0$, wobei $e_1 \geq d^+$ ist, dann lässt sich g aus $I_{(\infty,1)}$ so wählen, dass $q(e_1 - d^+ + 1)(g) = 0$ ist.

Beweis dazu. — Nach Voraussetzung gilt

$$f = \sum_{k=e_1}^{\infty} c_k \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^k = \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^{e_1-d^++1} f'$$

dabei wurde $f' = \sum_{k=e_1}^{\infty} c_k \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^{k-e_1+d^+-1}$ gesetzt. Offensichtlich gilt

$$\| f' \|_{K(r)\varrho} = \| f \|_{K(r)\varrho}$$

und da $t_1^{d^+-1}(\mathcal{O}^q/\operatorname{im} h)$ t_1-torsionsrecht ist, gilt auch $f'_z \in (\operatorname{im} h)_z$. Nach $I_{(\infty,1)}$ gilt: es gibt ein $g' \in \Gamma(K(r, \varrho), \mathcal{O}^p)$ mit $h(g') = f'$ und

$$\| g' \|_{K(r)\varrho} \leq M(r, \varrho) \| f' \|_{K(r)\varrho}.$$

Für $g = \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^{e_1-d^++1} g'$ gilt jetzt $h(g) = f$, $\| g \|_{K(r)\varrho} \leq M(r, \varrho) \| f \|_{K(r)\varrho}$ und $q(e_1 - d^+ + 1)(g) = 0$.

(1.4.4.5) 1. Induktionsschritt. Der Abbildung $h(d): \mathcal{O}^p/t_1^d\mathcal{O}^p \to \mathcal{O}^q/t_1^d\mathcal{O}^q$ kann in kanonischerweise die Abbildung $h: (\mathcal{O}/t_1\mathcal{O})^{pd} \to (\mathcal{O}/t_1\mathcal{O})^{qd}$ zugeordnet werden. Damit sind $I_{d,m}$ und $I_{d,m}$ auf $I_{1,m}$ und $I_{1,m}$ zurückgefürt.

(1.4.4.6) Bezeichnungen. — Sei $\Delta(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n, \delta_1, \ldots, \delta_m)$ eine Dreiecksmenge und $(r, \varrho) = (r_1, \ldots, r_n, \varrho_1, \ldots \varrho_m)$ ein Element daraus, dann wird das m-tupel $(1/2\, \delta_1(\varrho_m, \ldots, \varrho_2), \varrho_2, \ldots, \varrho_m)$ mit ϱ_* bezeichnet.

Wenn $\varrho_1 < \varrho_1^* = 1/2\, \delta_1 (\varrho_m, \dots, \varrho_2)$ ist, dann gilt

(1.4.4.6.1) $$(r, \varrho_*) \in \Delta (\vartheta_1, \dots, \vartheta_n, \delta_1, \dots, \delta_m)$$

LEMMA (1.4.4.7). — Voraussetzung:

$0 < \varepsilon < 1/2$

$H =$ Konstante aus Corollar (1.1.12) bezüglich $h : \mathcal{O}^p \to \mathcal{O}^q$

$\Delta_{d^+} (\vartheta_1, \dots, \vartheta_n, \delta_1, \dots, \delta_m)$ Dreiecksmenge aus

Hilfssatz (d^+, m) (1.4.4.1).

Sei jetzt: $(r, \varrho) \in \Delta (\vartheta_1, \dots, \vartheta_n, \varepsilon\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m)$, $\varrho_1^* = 1/2\, \delta_1 (\varrho_m, \dots, \varrho_2)$,

$$f = \sum_{\chi=l}^{\infty} f_\chi \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\chi \in \Gamma (K(r, \varrho), \mathcal{O}^q) \text{ mit } l \geq d^+ + 1,$$

$f_z \in (im\ h)_z$,

$\| f_\chi \|_{K(r)\varrho} \leq M_\chi$ für alle $\chi \geq l$.

Behauptung: (i) Es gibt ein $g \in \Gamma(K(r, \varrho), \mathcal{O}^p)$ mit

$$f - \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^{l-d^++1} h(g) = \sum_{\chi=l+1}^{\infty} f_\chi^* \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^k$$

$$\| f_\chi^* \|_{K(r)\varrho} \leq M_\chi + H M_{d^+} (r, \varrho_*) \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_1^*}\right)^{\chi-l} M_l, \qquad \chi > 1,$$

$$\| g \|_{K(r)\varrho} \leq M_{d^+} (r, \varrho_*) \left(\frac{\varrho_1^*}{\varrho_1}\right)^{d^+-1} M_l.$$

(ii) Gilt für f zusätzlich $q(e_1, e_2, \dots, e_m)(f) = 0$, wobei $e_1 \geq l + 1$ ist, dann lässt sich das g aus (i) sogar so wählen, dass noch

$$q(F_{d^+}(e_2, \dots, e_m))(g) = 0 \text{ ist.}$$

Beweis. — Aus $\left(f_l \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^l\right)_z \in (\text{im}\ h\ (l+1))_z$ folgt $\left(f_l \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^{d^+-1}\right)_z \in (\text{im}\ h\ (d^+))_z$.

Man betrachte dazu das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_z^p \arrow[r, "h"] \arrow[d, "q(l+1)"] & \mathcal{O}_z^q \arrow[d, "q(l+1)"] \\ (\mathcal{O}^p / t_1^{l+1}\, \mathcal{O}^p)_z \arrow[r, "h(l)"] & (\mathcal{O}^q / t_1^{l+1}\, \mathcal{O}^q)_z \end{tikzcd}$$

Es gibt ein $g_z \in \mathcal{O}_z^p$ **mit** $(h(l) \circ q(l+1))(g_z) = \left(f_l \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^l\right)_z$. **Jetzt gilt**

$$h(g_z) = \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^l f_l + \sum_{\chi=l+1}^{\infty} \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\chi g_\chi \in (\mathrm{im}\, h)_z .$$

Da $t_1^{d^+-1}(\mathcal{O}^q/\mathrm{im}\, h)$ t_1**-torsionrecht ist, folgt**

$$\tilde{g}_z = \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^{d^+-1} f_l + \sum_{\chi=l+1}^{\infty} \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^{\chi-l+d^+-1} g_\chi \in (\mathrm{im}\, h)_z .$$

Damit ist also $q(d^+)(\tilde{g}_z) = \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^{d^+-1} f_l \in (\mathrm{im}\, h(d^+))_z$.

Da $f_l \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^{d^+-1}$ **ein Monom in** t_1 **ist, lässt es sich auch als Schnitt über** $K(r, \varrho_*)$, $\varrho_1^* = 1/2\, \varrho_1\, (\varrho_m, \dots, \varrho_2)$ **auffassen, und es gilt**

$$\left\| f_l \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^{d^+-1} \right\|_{K(r)\varrho_*} = \left(\frac{\varrho_1^*}{\varrho_1}\right)^{d^+-1} \left\| f_l \left(\frac{t_1}{\varrho_1^*}\right)^{d^+-1} \right\|_{K(r)\varrho_*} = \left(\frac{\varrho_1^*}{\varrho_1}\right)^{d^+-1} \| f_l \|_{K(r)\varrho} .$$

Nach $I_{(d^+, m)}$ **gilt: es gibt** $g \in \Gamma(K(r, \varrho_*), \mathcal{O}^p/t_1^{d^+}\, \mathcal{O}^p)$ **mit**

$$h(d^+)(g) = f_l \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^{d^+-1}, \quad \| g \|_{K(r)\varrho_*} \leq M_{d^+}(r, \varrho_*) \left(\frac{\varrho_1^*}{\varrho_1}\right)^{d^+-1} M_l$$

Fasst man g **als Schnitt aus** $\Gamma(K(r, \varrho_*), \mathcal{O}^p)$ **auf, so kann man schreiben** $h(g) = f_l \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^{d^+-1} + \sum_{\chi=d^+}^{\infty} f_\chi^{**} \left(\frac{t_1}{\varrho_1^*}\right)^\chi$ **und es gilt** $\| h(g) \|_{K(r)\varrho_*} \leq H \| g \|_{K\, r\, \varrho}$.
Damit folgt

$$\| h(g) \|_{K(r)\varrho_*} \leq H M_{d^+}(r, \varrho_*) \left(\frac{\varrho_1^*}{\varrho_1}\right)^{d^+-1} M_l$$

Daraus folgt insbesondere

$$\|f_\chi^{**}\|_{K(r,\varrho} = \|f_\chi^{**}\|_{K(r,\varrho_*} \leq HM_{d+}(r, \varrho_*)\left(\frac{\varrho_1^*}{\varrho_1}\right)^{d+-1} M_l$$

Jetzt gilt noch

$$\left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^{l-d++1} h(g) = f_l\left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^l + \sum_{\chi=d+}^{\infty} f_\chi^{**}\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_1^*}\right)^\chi \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^{\chi+l-d++1}$$

$$= f_l\left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^l \sum_{\chi=l+1} f^{**}_{\chi+d+-l-1}\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_1^*}\right)^{\chi+d+-l-1} \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\chi$$

Somit ist $f_\chi^* = f_\chi - f^{**}_{\chi+d+-l-1}\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_1^*}\right)^{\chi+d+-l-1}$ und es gilt

$$\|f_\chi^*\|_{K(r)\varrho} \leq M_\chi + HM_{d+}(r, \varrho_*)\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_1^*}\right)^{\chi-l} M_l$$

(ii) Nach Voraussetzung folgt $q(l+1, e_2, \ldots, e_m)\left(f_l\left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^l\right) = 0$ und es gilt sogar $q(d+, e_2, \ldots, e_m)\left(f_l\left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^{d+-1}\right) = 0$. Nach $II_{(d+\ m)}$ gilt somit $q(F_{d+}(e_2, \ldots, e_m))(g) = 0$, für geeignetes g.

(1.4.4.8) 2. Induktionsschritt. — (i) Es bezeichne wieder $\Delta_{d+}(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n, \delta_1, \ldots, \delta_m)$ die Dreiecksmenge aus Hilfssatz $(d+, m)$ (1.4.4.1). Es werde eine monotone Funktion $\varepsilon: \Delta(\delta_2, \ldots, \delta_m) \rightarrow]0, 1/2[$ so gewählt, so dass für jedes $(r, \varrho) \in \Delta(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n, \varepsilon\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m)$ gilt:

$$H \cdot M_{d+}(r, \varrho_*)\frac{\varrho_1}{\varrho_1^*} < \frac{1}{4}$$

wobei H wieder die Konstante aus Corollar (1.1.12) bezüglich $h: \mathcal{O}^p \rightarrow \mathcal{O}^q$ und $\varrho_1^* = 1/2\ \ \delta_1(\varrho_m, \ldots, \varrho_2)$ ist.

Sei jetzt $(r, \varrho) \in \Delta(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n, \varepsilon\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m)$ und sei

$$f = \sum_{\chi=d+-1}^{\infty} f_\chi\left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\chi \in \Gamma(K(r, \varrho), \mathcal{O}^q)$$

mit $\|f\|_{K(r)\varrho} = M < \infty$ und $f_z \in (\mathrm{im}\ h)_z$.

Nach Lemma (1.4.4.7) für $l = d^+ + 1$ gilt: es gibt ein $g_0 \epsilon \Gamma(K(r, \varrho), \mathcal{O}^p)$ mit

$$f = h(g^{(0)}) = \sum_{\chi=d^+}^{\infty} f_\chi^{(0)} \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\chi,$$

$$\| g^{(0)} \|_{K(r)\varrho} \leq M_{d^+}(r, \varrho_*) \left(\frac{\varrho_1^*}{\varrho_1}\right)^{d^+-1} M,$$

$$\| f_\chi^{(0)} \|_{K(r)\varrho} \leq M(1 + 4^{-\chi+d^+-1}).$$

Nach wiederholter Anwendung von Lemma (1.4.4.7) folgt: für geeignete $g^{(\lambda)}, f_\chi^{(l)}$ gilt:

$$f - \sum_{\lambda=0}^{l} \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\lambda h(g^{(\lambda)}) = \sum_{\chi=d^++1}^{\infty} f_\chi^{(l)} \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\chi =$$

$$\| g^{(l)} \|_{K(r)\varrho} \leq M_{d^+}(r, \varrho_*) \left(\frac{\varrho_1^*}{\varrho_1}\right)^{d^+-1} M\left(1/2 + \sum_{\chi=0}^{l} 2^{-\chi-1}\right),$$

$$\| f_\chi^{(l)} \|_{K(r)\varrho} \leq M + M \sum_{\lambda=0}^{l} 2^\lambda \cdot 4^{-\chi+d^++l-\lambda-1}.$$

Setzt man $\chi = d^+ + l$, so erhält man

$$\| f_\chi^{(l)} \|_{K(r)\varrho} \leq M + M \sum_{\lambda=0}^{l} 2^{-\lambda-2},$$

und durch weiteres Vergrössern folgt

$$\| g^{(l)} \|_{K(r)\varrho} \leq M_{d^+}(r, \varrho_*) \left(\frac{\varrho_1^*}{\varrho_1}\right)^{d^+-1} M\left(1/2 + \sum_{\chi=0}^{\infty} 2^{-\chi-1}\right).$$

$$\| f_\chi^{(l)} \|_{K(r)\varrho} \leq M + M \sum_{\lambda=0}^{\infty} 2^{-\lambda-2},$$

und daraus folgt

$$\| g^{(l)} \|_{K(r)\varrho} \leq 3/2\, M_{d^+}(r, \varrho_*) \left(\frac{\varrho_1^*}{\varrho_1}\right)^{d^+-1} \| f \|_{K(r)\varrho},$$

$$\| f_\chi^{(l)} \|_{K(r)\varrho} \leq 3/2 \| f \|_{K(r)\varrho}.$$

Sei jetzt $g = \sum_{\chi=0}^{\infty} g^{(\chi)} \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\chi$ gesetzt. Um die Norm von g abzuschätzen, entwickeln wir $g^{(\varkappa)} = \sum_{\lambda=0}^{d^+-1} g_\lambda^{(\varkappa)} \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\lambda$ und erhalten somit

$$g = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{d^+-1} g_\lambda^{(\varkappa)} \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^{\lambda+\varkappa} = \sum_{\tau=0}^{\infty} \left(\sum_{\tau=\lambda+\varkappa} g_\lambda^{(\varkappa)} \right) \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\tau .$$

Da $\sum_{\tau=\lambda+\varkappa} g_\lambda^{(\varkappa)}$ nur d^+ Summanden hat, gilt also

$$\| g \|_{K(r)\varrho} \leq 3/2\, d^+ + M_{d^+}(r, \varrho_*) \left(\frac{\varrho_1^*}{\varrho_1}\right)^{d^+-1} \| f \|_{K(r)\varrho} ,$$

$$g \in \Gamma(K(r, \varrho), \mathcal{O}^p)$$

und wegen der Abschätzung $\| f_\varkappa^{(l)} \|_{K(r)\varrho} \leq 3/2 \, \| f \|_{K(r)\varrho}$ folgt

$$h(g) = f$$

Zum *Zusatz*: Wenn $\mathcal{O}^q/\mathrm{im}\ h$ t_1-torsionsrecht ist, dann lässt sich $d^+ = 1$ wählen und damit ist der Zusatz von Theorem (1.4.4) bewiesen.

Sei jetzt $f = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} f_\varkappa \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\varkappa \in \Gamma(K(r, \varrho), \mathcal{O}^q)$ mit $\| f \|_{K(r)\varrho} < \infty$ und $f_z \in (\mathrm{im}\ h)_z$. Für $f' = \sum_{\varkappa=0}^{d^+-1} f_\varkappa \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\varkappa \in \Gamma(K(r, \varrho), \mathcal{O}^q/t_1^{d^+}\mathcal{O}^q)$ gilt

$$\| f' \|_{K(r)\varrho} \leq \| f \|_{K(r)\varrho} , \quad f'_z \in (\mathrm{im}\ h(d^+))_z$$

Nach $I_{(d^+, m)}$ gilt: es gibt ein $g' \in \Gamma(K(r, \varrho), \mathcal{O}^p/t_1^{d^+}\mathcal{O}^p)$ mit

$$h(d^+)(g') = f', \ \| g' \|_{K(r)\varrho} \leq M_{d^+}(r, \varrho) \| f' \|_{K(r)} .$$

Da $\| h(g') \|_{K(r)\varrho} \leq H \| g' \|_{K(r)\varrho}$ ist, gilt für $f - h(g') = \sum_{\varkappa=d^+}^{\infty} f_\varkappa^* \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\varkappa \in \Gamma(K(r, \varrho), \mathcal{O}^q)$ offensichtlich

$$\| f - h(g') \|_{K(r)\varrho} \leq (1 + H M_{d^+}(r, \varrho)) \| f \|_{K(r)\varrho} ,$$

$$(f - h(g'))_z \in (\mathrm{im}\ h)_z .$$

Das vorausgehende Resultat angewandt: Es gibt ein $g'' \in \Gamma(K r, \varrho), \mathcal{O}^p)$ mit

$$h(g'') = f - h(g'),$$

$$\| g'' \|_{K(r\,\varrho} \leq 3/2\, d^+ M_{d^+}(r, \varrho_*) \left(\frac{\varrho_1^*}{\varrho_1}\right)^{d^+-1} \| f - h(g') \|_{K(r\,\varrho}$$

Somit gilt also

$$f = h(g' + g'')$$

$$\| g' + g'' \|_{K(r)\varrho} \leq (M_{d^+}(r, \varrho) + 3/2\, d^+ M_{d^+}(r, \varrho) \left(\frac{\varrho_1^*}{\varrho_1}\right)^{d^+-1} (1 + H M_{d^+}(r, \varrho))) \| f \|_{K(r)\varrho}$$

(ii) Wir zeigen zunächst folgendes

LEMMA (1.4.4.8.1). — Zu jedem $(d_1, \ldots, d_m) \in \mathbf{N}^m$ gibt as ein $(e_1, \ldots, e_m) \in \mathbf{N}^m$ mit $(e_1, \ldots, e_m) \geq (d_1, \ldots, d_m)$ so dass die Aussage gilt:

Gilt für f aus $I_{(\infty, m)}$ zusätzlich $q(e_1, \ldots, e_m)(f) = 0$, dann lässt sich das g aus $I_{(\infty, m)}$ sogar so wählen, dass $q(d_1, \ldots, d_m)(g) = 0$ ist.

Beweis. — Sei also $(d_1, \ldots, d_m)$ vorgegeben, dann wird $e_1 = d^+ + d_1$ und $F^* = F_{d^+} \circ F_{d^+} \circ \ldots \circ F_{d^+}$ (insgesant $(d_1 + 1)$ - mal) gesetzt. F_{d^+} bezeichne dabei die Abbildung aus Hilfssatz (d^+, m) (1.4.4.1). Jetzt wird $(e_2, \ldots, e_m)$ so gross gewählt, dass $F^* \circ F_{d^+}(e_2, \ldots, e_m) \geq (d_2, \ldots, d_m)$ gilt.

Sei zunächst $f = \sum_{\chi = d^+ - 1}^{\infty} f_\chi \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\chi$. Nach Lemma (1.4.4.7) (ii) lässt sich das $g^{(0)}$ noch so wählen, dass $q(F_{d^+}(e_2, \ldots, e_m))(g^{(0)}) = 0$ gilt.

Damit gilt auch

$$q(e_1, F_{d^+}(e_2, \ldots, e_m))(f - h(g^{(0)})) = 0.$$

Nach $(d_1 + 1)$-maliger Anwedung von Lemma (1.4.4.7) (ii) folgt, dass sich das $g^{(d_1)}$ noch so wählen lässt, dass $q(F^*(e_2, \ldots, e_m))(g^{(d_1)}) = 0$ gilt.

Damit gilt auch

$$q(e_1, F^*(e_2, \ldots, e_m)) \left(f - \sum_{\chi=0}^{d_1} \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\chi g^{(\chi)} \right) = 0.$$

Nach $I_{(\infty, m)}$ gilt

$$g = \sum_{\chi=0}^{d_1} g^{(\chi)} \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\chi + \sum_{\chi = d^+ + d_1}^{\infty} g^{(\chi)} \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\chi$$

und es gilt

$$q(d_1, F^*(e_2, \dots, e_m))(g) = 0.$$

Damit ist auch der Zusatz von Theorem (1.4.4) bezüglich $II_{\infty, m)}$ bewiesen. Sei jetzt $f = \sum_{\chi=0}^{\infty} f_\chi \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\chi$, dann ist

$$q(d^+, e_2, \dots, e_m)\left(\sum_{\chi=0}^{d^+-1} f_\chi \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\chi\right) = 0$$

Wegen $II_{(d^+, m)}$ kann men g' so wählen, dass $q(F_{d^+}(e_2, \dots, e_m))(g') = 0$ gilt. Damit gilt

$$q(e_1, F^* F_{d^+}(e_2, \dots, e_m))(f - h(g')) = 0.$$

Nach dem vorausgehenden Resultat folgt

$$q(d_1, F^* F_{d^+}(e_2, \dots, e_m))(g'') = 0,$$

also gilt auch

$$q(d_1, d_2, \dots, d_m)(g' + g'') = 0,$$

und das Lemma ist bewiesen.

Nach Lemma (1.4.4.8.1) wird jetzt zu jedem $d \in \mathbf{N}$ ein $(e_1(d), \dots, e_m(d)) \in \mathbf{N}^m$ so gewählt, dass $(e_1(d), \dots, e_m(d)) < (e_1(d'), \dots, e_m(d'))$, wenn $d < d'$ ist. Sei $F: \mathbf{N}^m \to \mathbf{N}^m$ die Abbildung, definiert durch $F(e_1, \dots, e_m) = (d, \dots, d)$ mit $d = \sup\{d' : (e_1(d'), \dots, e_m(d')) \leq (e_1, \dots, e_m)\}$. Offensichtlich ist F monoton und $\lim_{e \to \infty} F(e) = \infty$ und nach Lemma (1.4.4.8.1) folgt,dass F eine gesuchte Funktion für den Hilfssatz (∞, m) (1.4.4.2) ist.

Corollar (1.4.5). — Voraussetzung:

$z = 0 \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$

$h: \mathcal{O}^p \to \mathcal{O}^q$ Homomorphismus über eine offene Umgebung von z

Behauptung: Es gibt

1) eine Dreiecksmenge $\Delta(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n, \delta_1, \dots, \delta_m)$

2) eine Abbildung $M: \Delta(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n, \delta_1, \dots, \delta_m) \to R_+$

so dass für jedes $d \in \mathbf{N}$ und jedes $(r, \varrho) \in \Delta(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n, \delta_1, \dots, \delta_m)$ gilt:

Zu jedem $f \in \Gamma(K(r, \varrho), \mathcal{O}^q/t_1^d \mathcal{O}^q)$ mit $\| f \|_{K(r)\varrho} < \infty$ und $f_z \in (\operatorname{im} h(d))_z$ gibt es ein $g \in \Gamma(K(r, \varrho), \mathcal{O}^p/t_1^d \mathcal{O}^p)$ mit $f = h(d)(g)$ und $\| g \|_{K(r)\varrho} \leq$ $\leq M(r, \varrho) \| f \|_{K(r)\varrho}$.

COROLLAR (1.4.6). — Voraussetzung:

$z = 0 \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$

$\mathcal{F}$ kohärenter $\mathcal{O}$-Modul

$\varphi : \mathcal{O}^p \longrightarrow \mathcal{F}$ Homomorphismus über eine offene Umgebung von z

Behauptung: Es gibt

1) eine Dreiecksmenge $\Delta(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n, \delta_1, \dots, \delta_m)$

2) eine Abbildung $M : \Delta(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n, \delta_1, \dots, \delta_m) \longrightarrow \mathbf{R}_+$, so dass für jedes $(r, \varrho) \in \Delta(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n, \delta_1, \dots, \delta_m)$ gilt:

Zu jedem $s \in \Gamma(K(r, \varrho), \mathcal{F})$ mit $\| s \|_{K(r)\varrho} < \infty$ und $s_z \in (\operatorname{im} \varphi)_z$ gibt es ein $g \in \Gamma(K(r, \varrho), \mathcal{O}^p)$ mit $\varphi(g) = s$ und $\| g \|_{K(r)\varrho} \leq M(r, \varrho) \| s \|_{K(r)\varrho}$.

Beweis. — Da $\mathcal{F}$ kohärent ist, gibt es in einer Umgebung von z eine (normdefinierende) Auflösung $\mathcal{O}^{q_0} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \longrightarrow 0$ von $\mathcal{F}$. Jetzt ist $\alpha^{-1}(\operatorname{im} \varphi)$ eine kohärente Untergarbe von $\mathcal{O}^{q_0}$: Es gibt also in einer Umgebung von z einen Morphismus $\beta : \mathcal{O}^{q_1} \longrightarrow \mathcal{O}^{q_0}$ mit $\operatorname{im} \beta = \alpha^{-1}(\operatorname{im} \varphi)$. Jetzt gibt es in einer Umgebung von z einen Morphismus $\gamma : \mathcal{O}^{q_1} \longrightarrow \mathcal{O}^p$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}^p \arrow[r, "\varphi"] & \mathcal{F} \\
\mathcal{O}^{q_1} \arrow[u, "\gamma"] \arrow[r, "\beta"'] & \mathcal{O}^{q_0} \arrow[u, "\alpha"']
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Auf den Morphismus β wird Theorem (1.4.4) angewandt. Seien $\Delta(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n, \delta_1, \dots, \delta_m)$ und $\widetilde{M}$ die in (1.4.4) versprochenen Daten.

Sei jetzt $(r, \varrho) \in \Delta$ und $s \in \Gamma(K(r, \varrho), \mathcal{F})$ mit $\| s \|_{K(r)\varrho} < \infty$ und $s_z \in (\operatorname{im} \varphi)_z$. Nach Definition der Norm gibt es ein $f \in \Gamma(K(r, \varrho), \mathcal{O}^{q_0})$ mit $\| f \|_{K(r)\varrho} \leq 2 \| s \|_{K(r)\varrho}$ und $\alpha(f) = s$. Jetzt ist aber $f_z \in (\alpha^{-1}(\operatorname{im} \varphi))_z$. Nach Theorem (1.4.4) gibt es ein $\widetilde{g} \in \Gamma(K(r, \varrho), \mathcal{O}^{q_1})$ mit $\beta(\widetilde{g}) = f$ und $\| \widetilde{g} \|_{K(r)\varrho} \leq$ $\leq M(r, \varrho) \| f \|_{K(r)\varrho}$.

Nach Corollar (1.2.12) gibt es eine Konstante $c > 0$, so dass gilt $\| \gamma(\tilde{g}) \|_{K(r)\varrho} \leq c \| \tilde{g} \|_{K(r)\varrho}$. Es wird $g = \gamma(\tilde{g})$ und $M(r, \varrho) = 2 \tilde{M}(r, \varrho) c$ gesetzt und es gilt $\varphi(g) = s$ mit $\| g \|_{K(r)\varrho} \leq M(r, \varrho) \| s \|_{K(r)\varrho}$.

COROLLAR (1.4.7). — Voraussetzung:

$$z = 0 \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$$

$$\mathcal{F} \text{ kohärenter } \mathcal{O}\text{-Modul}$$

Behauptung: Es gibt eine Dseiecksmenge $\Delta(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n, \delta_1, \ldots, \delta_m)$, so dass für jedes $(r, \varrho) \in \Delta(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n, \delta_1, \ldots, \delta_m)$ gilt:

Für jedes $s \in \Gamma(K(r, \varrho), \mathcal{F})$ mit $\| s \|_{K(r)\varrho} < \infty$ und $s_z = 0$ gilt $s = 0$.

Beweis. — Das Corollar ergibt sich sofort aus Corollar (1.4.6), wenn mann dort $\varphi = 0$ setzt.

DEFINITION (1.4.8). — Jedes Paar $(K(r, \varrho), M(r, \varrho))$ wie es in (1.4.4 auftritt, heisst h-privilegierte Umgebung im Sinne von Grauert.

ANMERKUNG. — In den Sätzen (1.4.4) bis (1.4.7) wurde der einfacheren Bezeichnung wegen der Punkt z als Nullpunkt gewählt. Selbstverständlich gelten sämtliche Sätze mit einer etwas komplizierteren Schreibweise auch für einen beliebigen anderen Punkt des $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$.

2. Cohomologietheorie mit Schranken

2.1 Frécheträume

(2 1.1) Sei U ein lokalkompakter und im Unendlichen abzâhlbarer topologischer Raum und sei V ein $\mathbf{C}$-Vektorraum stetiger komplexwertiger Funktionen auf U. Jede Teilmenge $U_0 \subset U$ liefert, wenn man

$$\| f \|_{U_0} = \sup_{x \in U_0} | f(x) |, \; f \in V$$

setzt, eine Pseudonorm in V. Sei jetzt $(K_n)_{n \in \mathbf{N}}$ eine kompakte Ausschöpfung von U, so wird durch

$$\operatorname{dist}(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\| f - g \|_{K_n}}{1 + \| f - g \|_{K_n}} \qquad f, g \in V$$

auf V eine Metrik definiert. Bekanntlich wird V dadurch zu einen Fréchetraum. Im folgenden sei V stets mit dieser Fréchetraumstruktur versehen.

DEFINITION (2.1.2). — Sei V ein Fréchetraum und $\| \ \|$ eine Pseudonorm auf V, dann wird definiert:

(i) $\| \ \|$ heisst eine s-Norm, wenn die Menge $\{ f \in V : \| f \| < 1 \}$ eine Umgebung der Null ist.

(ii) $\| \ \|$ heisst eine o-Norm, wenn gilt: zu jeder Umgebung W der Null gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $\{ f \in V : \| f \| < \varepsilon \} \subset W$.

LEMMA (2.1.3). — Voraussetzung:

V_1, V_2 seien Fréchetráume

$\| \ \|_1$ sei eine s-Norm auf V_1,

$\| \ \|_2$ sei eine o-Norm auf V_2,

$\delta : V_1 \longrightarrow V_2$ sei eine stetige, lineare surjektive Abbildung. Behauptung: Es gibt eine Konstante $c > 1$, so dass für jedes $\xi \in V_2$ ein $\eta \in V_1$ gibt mit $\delta\eta = \xi$ und

$$\| \eta \|_1 \leq c \| \xi \|_2 .$$

Beweis. — Für die Fälle $\| \xi \|_2 = \infty$ und $\| \xi \|_2 = 0$ ist die Behauptung trivial (man beachte, dass aus $\| \xi \|_2 = 0$, $\xi = 0$ folgt) Sei also $o < \| \xi \|_2 < \infty$. Nach dem « open-mapping-theorem » von Banach und nach Definition (2.1.2) (i) ist $\delta (\{ \eta \in V_1 : \| \eta \|_1 \leq 1 \})$ eine Umgebung der Null in V_2. Nach Definition (2.1.2) (ii) gibt es ein ε, $0 < \varepsilon < 2$, so dass gilt:

$$\{ \xi \in V_2 : \| \xi \|_2 < \varepsilon \} \subset \delta (\{ \eta \in V_1 : \| \eta \|_1 \leq 1 \}).$$

Jetzt ist $\left\| \frac{\varepsilon}{2 \| \xi \|_2} \xi \right\|_2 = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, also gibt es ein $\eta' \in V_1$ mit $\| \eta' \|_1 < 1$ und $\delta\eta' = \frac{\varepsilon}{2 \| \xi \|_2} \xi$. Setzt man nun $\eta = \frac{2 \cdot \| \xi \|_2}{\varepsilon} \eta'$, dann ist $\delta\eta = \xi$ und es gilt:

$$\| \eta \|_1 = \frac{2}{\varepsilon} \| \xi \|_2 \cdot \| \eta' \|_1 \leq c \ \| \xi \|_2 ,$$

wobei $c = \frac{2}{\varepsilon}$ gesetzt wurde.

LEMMA. (2.1.4). — **Voraussetzungen:**

U lokalkompakter, im Unendlichen abzählbarer topologischer Raum

V $\mathbf{C}$-Vektorraum stetiger komplexwertiger Funktionen auf U

$U_0 \subset\subset U$

Behauptung: (i) $\| \ \|_{U_0}$ ist eine s-Norm.

(ii) $\| \ \|_U$ ist eine o-Norm.

Beweis. — (i) Sei $(K_n)_{n \in \mathbf{N}}$ eine kompakte Ausschöpfung von U, dann gibt es ein $n_0 > 1$ mit $U_0 \subset K_{n_0}$. Aus dist $(0, f) < 2^{-2n_0}$ folgt:

$$\| f \|_{K_{n_0}} (1 + \| f \|_{K_{n_0}})^{-1} < 2^{-n_0}.$$

Denn wäre $\| f \|_{K_{n_0}} (1 + \| f \|_{K_{n_0}})^{-1} \geq 2^{-n_0}$, so würde die Abschätzung

$$\operatorname{dist}(0, f) \geq \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\| f \|_{K_n}}{1 + \| f \|_{K_n}} \geq \frac{1}{2^{2n_0}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \geq \frac{1}{2^{2n_0}}$$

entgegen der Voraussetzung gelten. Es gilt jetzt folgende Beziehung

$$\left\{ f : \operatorname{dist}(0, f) < \frac{1}{2^{2n_0}} \right\} \subset \{ f : \| f \|_{U_0} < 1 \},$$

denn nach dem obigen gilt für ein f mit dist$(0, f) < 2^{-2n_0}$ die Ungleichung

$$\| f \|_{U_0} \leq \| f \|_{K_{n_0}} < \frac{2^{-n_0}}{1 - 2^{-n_0}} < 1.$$

(ii) Sei $W = \{ f : \operatorname{dist}(0, f) < \varepsilon' \}$ mit $0 < \varepsilon' < 2$. Da für alle $n \in \mathbf{N}$, $\| f \|_{K_n} \leq \| f \|_U$ ist, gilt für alle n auch

$$\frac{\| f \|_{K_n}}{1 + \| f \|_{K_n}} \leq \frac{\| f \|_U}{1 + \| f \|_U}$$

und somit

$$\operatorname{dist}(0, f) \leq \frac{2 \| f \|_U}{1 + \| f \|_U}.$$

Wählt man für $\varepsilon = \varepsilon'/(2 - \varepsilon')$, so folgt für $\| f \|_U < \varepsilon$, dass dist$(0, f) < \varepsilon'$ ist.

2.2 Theorem B mit Schrancke bezüglich der Garbe $\mathcal{O}^q$

(2.2.1) Sei G eine offene Menge des $\mathbf{C}^n$ und $G' \subset G$.

$U = (U_i)_{i \in I}$ heisst offene Überdeckung von G, wenn U_i offene Teilmenge von G und $\bigcup_{i \in I} U_i = G$ ist. $V = (V_j)_{j \in J}$ heisst offene Familie von G, die noch G' überdeckt, wenn V_j offene Teilmenge von G und $\bigcup_{j \in J} V_j \supset G'$ ist. V heisst eigentlich Verfeinerung von U, wenn es eine Abbildung $\tau: J \longrightarrow I$ gibt mit $V_j \subset\subset U_{\tau(j)}$. Ist V eine (eigentliche) Verfeinerung von U, dann sei stets ein für alle Mal eine Verfeinerungsabbildung $\tau: J \longrightarrow I$ gewählt. Sei wie in (1.1.1) $K(\varrho)$ ein Polyzylinder im $\mathbf{C}^m$, dann wird mit $U \times K(\varrho)$ die Familie $(U_i \times K(\varrho))_{i \in I}$ bezeichnet.

Sei $\mathcal{S}$ eine Garbe auf $G \times K(\varrho)$, V eine Verfeinerung von U, $\xi \in C^s(U \times K(\varrho), \mathcal{S})$, dann ist mit $\xi \mid V \times K(\varrho)$ die übliche Beschränkung bezüglich der Verfeinerungsabbildung τ gemeint.

Sei $\mathcal{S}$ eine kohärente $\mathcal{O}$-Garbe auf $G \times K(\varrho)$, $\mathcal{O}^p \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow 0$ eine Auflösung von $\mathcal{S}$ über $G \times K(\varrho)$ und sei $\xi = (\xi_{i_0, \ldots, i_s})$ ein Element von $C^s(U \times K(\varrho), \mathcal{S})$, dann ist für jedes $\xi_{i_0, \ldots, i_s}$ nach (1.1.3) die Grauertnorm $\| \xi_{i_0, \ldots, i_s} \|_{U_{i_0, \ldots, i_s} \varrho}$ definiert. Auf $C^s(U \times K(\varrho), \mathcal{S})$ wird jetzt eine Pseudonorm eingeführt.

DEFINITION (2.2.2) (Grauertnorm). — Sei $\xi = (\xi_{i_0, \ldots, i_s})$ ein Element von $C^s(U \times K(\varrho), \mathcal{S})$, dann wird

$$\| \xi \|_{U\varrho} = \sup_{(i_0, \ldots, i_s)} \| \xi_{i_0, \ldots, i_s} \|_{U_{i_0, \ldots, i_s} \varrho}$$

gesetzt. (Für den Fall, dass $K(\varrho)$ nur ein Punkt ist, schreiben wir auch kurz $\| \xi \|_U$ für $\| \xi \|_{U\varrho}$.

SATZ (2.2.3). — Voraussetzung :

- G offene Steinsche Menge des $\mathbf{C}^n$,
- G' relativkompakte Teilmenge von G,
- U endliche Steinsche Überdeckung von G,
- V endliche offene Familie, die noch $\overline{G}'$ überdeckt, und die eine eigentliche Verfeinerung von U ist.

Behauptung : (i) Für jedes $\xi \in Z^0(U \times K(\varrho), \mathcal{O}^p)$ gilt

$$\| \xi \mid G' \times K(\varrho) \|_{G', \varrho} \leq \| \xi \|_{U\varrho}$$

(ii) Zu jedem $s \in \mathbf{N}$, $s > 0$, gibt es eine Konstante $M > 0$, so dass die Aussage gilt:

Zu jedem $\xi \in Z^s(U \times K(\varrho), \mathcal{O}^p)$ gibt es ein $\eta \in C^{s-1}(V \times K(\varrho), \mathcal{O}^p)$, so dass $\delta\eta = \xi \mid V \times K(\varrho)$ und $\| \eta \|_{V\varrho} \leq M \| \xi \|_{U\varrho}$ ist (die Konstante M ist also unabhängig von ϱ).

Beweis. — (i) $\xi = (\xi_i) \in Z^0(U \times K(\varrho), \mathcal{O}^p)$ lässt sich als Schnitt aus $\Gamma(G \times K(\varrho), \mathcal{O}^p)$ auffassen und lässt sich daher in eine Potenzreihe

$$\xi = \Sigma\, \xi_{\chi_1 \cdots \chi_m} \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^{\chi_1} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{t_m}{\varrho_m}\right)^{\chi_m}.$$

über $G \times K(\varrho)$ entwickeln. Nach Definition (1.1.3) ist

$$\| \xi \mid G' \times K(\varrho) \|_{G'\varrho} = \sup_{(\chi_1, \cdots, \chi_m)} \| \xi_{\chi_1, \ldots, \chi_m} \|_{G'}$$

und nach Definition (2.2.2) ist

$$\| \xi \|_{U\varrho} = \sup_{i \in I} \sup_{(\chi_1 \cdots \chi_m)} \| \xi_{\chi_1 \cdots \chi_m)} \|_{U_i}.$$

Die Behauptung (i) folgt jetzt sofort aus

$$\| \xi_{\chi_1 \cdots \chi_m} \| \leq \| \xi_{\chi_1 \cdots \chi_m} \|_{\cup U_i} = \sup_{i \in I} \| \xi_{\chi_1 \cdots \chi_m} \|_{U_i}$$

(ii) Zunächst beweisen wir einen Spezialfall:

Lemma (2.2.3.1). — Voraussetzung: Wie in Satz (2.2.3)

Behauptung: Zu jedem $s \in \mathbf{N}$, $s > 0$ gibt es eine Konstante $M > 0$, so dass die Aussage gilt:

Zu jedem $\xi \in Z^s(U, \mathcal{O}^p)$ gibt es ein $\eta \in C^{s-1}(V, \mathcal{O}^p)$, so dass $\delta\eta = \xi \mid V$ und $\| \eta \|_V \leq M \| \xi \|_U$ ist.

Nach (2.2.1) ist $\Gamma(U_{i_0 \cdots i_s}, \mathcal{O}^p)$ ein Fréchetraum, damit ist auch $C^s(U, \mathcal{O}^p) = \Pi\, \Gamma(U_{i_0 \cdots i_s}, \mathcal{O}^p)$ als endliches Produkt (I sei endlich vorausgesetzt) ein Fréchetraum; weiter ist $Z^s(U, \mathcal{O}^p)$ als Kern des Randoperators auch ein Fréchetraum. Sei $\eta \in C^{s-1}(U, \mathcal{O}^p)$, dann werde $\| \eta \mid V \|_V$ kurz mit $\| \eta \|_V$ bezeichnet. Offensichtlich ist $\| \;\|_V$ eine s-Norm in $C^{s-1}(U, \mathcal{O}^p)$; weiter ist $\| \;\|_U$ eine o-Norm in $Z^s(U, \mathcal{O}^p)$. Nach Theorem B und dem Satz von Leray folgt, dass die stetige, lineare Abbildung

$$\delta: \; C^{s-1}(U, \mathcal{O}^p) \to Z^s(U, \mathcal{O}^p)$$

surjektiv ist. Nach Lemma (2.1.3) folgt jetzt sofort die Behauptung von (2.2.3.1).

Um (ii) allgemein zu beweisen entwickeln wir die Cozyklen in eine Potenzreihe nach $\frac{t_1}{\varrho_1}, \dots, \frac{t_m}{\varrho_m}$ und wenden auf die Koeffizienten Lemma (2.2.3.1) an.

2.3 Theorem B mit Schranke bezüglich einer kohärenten Untergarbe $\mathcal{M} \subset \mathcal{O}^p$

LEMMA (2.3.1). — **Voraussetzung:**

G'' Steinsche offene Menge im $\mathbf{C}^n$

G relativkompakte offene Teilmenge von G''

$h_0: \ \mathcal{O}^{p_1} \to \mathcal{O}^{p_0}$ Morphismus über $G'' \times K(\varrho_0)$

Behauptung: Für jedes $\varrho_0^* < \varrho_0$ gibt es eine Steinsche offene Menge G^* mit $G'' \supset\supset G^* \supset\supset G$ und eine endliche Syzygie

$$0 \to \mathcal{O}^{p_l} \to \mathcal{O}^{p_{l-1}} \to \dots \to \mathcal{O}^{p_1} \xrightarrow{h_0} \mathcal{O}^{p_0}$$

über $G^* \times K(\varrho_0^*)$.

Beweis. — Wir formulieren zunächst ein

LEMMA $(2.3.1.1)_l$. — Voraussetzung: wie in Lemma (2.3.1)

Behauptung. — Für jedes $\varrho_0^* < \varrho_0$ gibt es ein ϱ_l mit $\varrho_0 < \varrho_l < \varrho_0$ und eine Steinsche offene Menge G_l mit $G'' \supset\supset G_l \supset\supset G$ und eine Syzygie

$$\mathcal{O}^{p_l} \to \mathcal{O}^{p_{l-1}} \to \dots \to \mathcal{O}^{p_1} \to \mathcal{O}^{p_0}$$

über $G_l \times K(\varrho_l)$.

Jetzt wird gezeigt: $(2.3.1.1)_{l-1} \Longrightarrow (2.3.1.1)_l$.

Bekanntlich gibt es eine Steinsche offene Menge G_l mit $G_{l-1} \supset\supset G_l \supset\supset G$. Theorem A angewand auf $G_{l-1} \times K(\varrho_{l-1})$ liefert über $G_l \times K(\varrho_l)$, $\varrho_0^* < \varrho_l < \varrho_{l-1}$ eine Syzygie

$$\mathcal{O}^{p_l} \to \mathcal{O}^{p_{l-1}} \to \dots \to \mathcal{O}^{p_1} \to \mathcal{O}^{p_0}$$

Nach dem Hilbertschen Syzygiensatz folgt aus dem Lemma $(2.3.1.1)_l$ für alle l das Lemma (2.3.1).

Im folgenden, besonders im 3. Kapitel wird häufig der Schrumpfungssatz angewandt. Er wird deswegen hier, jedoch ohne Beweis angeführt.

SATZ (2.3.2). — Voraussetzung :

X normaler topologisher Raum,

F abgeschlossene Teilmenge von X,

$U = (U_i)_{i \in I}$ punktendliche Familie offener Teilmengen von X, die noch F überdeckt.

Behauptung : Es gibt eine Familie $V = (V_i)_{i \in I}$ (die gleiche Indexmenge !) offener Teilmengen von X, die noch F überdeckt und $\overline{V_i} \subset U_i$ für jedes $i \in I$.

Jede Überdeckung in dieser Arbeit kann als punktendlich vorausgesetzt werden.

Es wird noch das klassische Lebesguesche Lemma in einer etwas anderen Form gebraucht.

Lebesguesches Lemma (2.3.3). — Voraussetzung :

X kompakter metrischer Raum,

F abgeschlossene Teilmenge von X,

$U = (U_i)_{i \in I}$ Familie offener Mengen aus X, die noch F überdeckt.

Behauptung : Es gibt ein $\lambda > 0$, so dass für jede Teilmenge $G \subset X$ die Aussage gilt :

Wenn der Durchmesser $d(G) < \lambda$ und $G \cap F \neq \Phi$ ist, dann gibt es ein $i \in I$ mit $G \subset\subset U_i$.

Beweis. — Ohne Einschränkung sei $U = (U_i)_{i \in I}$ punktendlich. Nach (2.3.2) gibt es eine Schrumpfung $U' = (U_i')_{i \in I}$ von U und eine Schrumpfung $U'' = (U_i'')_{i \in I}$ von U', die noch F überdecken. Es gibt eine Zahl $\delta > 0$ mit der Eigenschaft : wenn $G \subset X$ mit $d(G) < \delta$ und $G \cap F \neq \Phi$, dann ist $G \subset \bigcup_{i \in I} U_i''$. Es sei $U^* = \complement \bigcup_{i \in I} \overline{U_i''}$ gesetzt, dann bildet (U', U^*) eine offene Überdeckung von X. Dazu gibt es nach dem klassischen Lebesgueschen Lemma eine Lebesguesche Zahl λ mit $\delta > \lambda > 0$. Wenn jetzt $G \subset X$ ist mit $d(G) < \lambda$ und $G \cap F \neq \Phi$, dann folgt zunächst $G \cap U^* = \Phi$, und somit gibt es ein $i \in I$ mit $G \subset U_i' \subset\subset U_i$.

LEMMA (2.3.4). — Voraussetzung :

G, G' beschränkte offene Mengen des $\mathbf{C}^n$ mit $G' \subset\subset G$

$U = (U_i)_{i \in I}$ endliche Familie offener Mengen aus G, die noch $\overline{G'}$ überdeckt

$h : \mathcal{O}^p \longrightarrow \mathcal{O}^q$ Morphismus über $G \times K(\varrho_0)$.

Behauptung: Es gibt eine endliche Familie $K = (K_j)_{j \in I}$ von Polyzylindern, die noch $\overline{G'}$ überdeckt, und eine eigentliche Verfeinerung von U ist und es gibt eine Dreiecksmenge $\Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)$ und eine Abbildung

$$M : \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m) \longrightarrow \mathbf{R}_+ ,$$

so dass für jedes $\varrho \in \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)$ die Aussage gilt:

Zu jedem $\xi \in C^0(K \times K(\varrho), \operatorname{im} h)$ mit $\| \xi \|_{K\varrho} < \infty$ gibt es ein

$$\xi^* \in C^0(K \times K(\varrho), \mathcal{O}^p) \text{ mit } h(\xi^*) = \xi \text{ und } \|\xi\|_{K\varrho} \leq M(\varrho) \| \xi \|_{K\varrho}$$

Zusatz: Ist zusätzlich $\mathcal{O}^q/\operatorname{im} h$ t_1-torsionsrecht, dann kann M sogar so gewählt werden, dass es von ϱ_1 unabhängig ist.

Beweis. — Nach dem Lebesgueschen Lemma (2.3.3) gibt es ein $\lambda > 0$, so dass für jedes $V \subset G$ mit $d(V) < \lambda$ gilt:

$$V \cap \overline{G'} \neq \Phi \Longrightarrow \text{es gibt ein } i \in I \text{ mit } V \subset\subset U_i$$

Nach Theorem (1.4.4) folgt: Zu jedem $(x, 0) \in \overline{G'} \times K(\varrho_0)$ gibt es eine Dreiecksmenge $\Delta_x = \Delta(\delta_{1x}, \dots, \delta_{mx}, \vartheta_{m+1x}, \dots, \vartheta_{m+nx})$ und eine Abbildung $M_x : \Delta_x \longrightarrow \mathbf{R}_+$, so dass die Aussage von (1.4.4) bezüglich h gilt. Zu jedem $x \in \overline{G'}$ wählen wir ein $r_x = (r_{1x}, \dots, r_{nx}) \in \mathbf{R}_+^n$ mit $d(K(x, r_x)) < \lambda$, ($K(x, r_x)$ Polyzylinder mit Zentrum x und Polyradius r_x) und $r_{nx} < \vartheta_{m+n,x}$, $r_{n-1,x} < \vartheta_{m+n-1,x}(r_{nx}), \dots, r_{1x} < \vartheta_{m+1}(r_{nx}, \dots, r_{2x})$. Es gibt eine endliche Familie $(x_j)_{j \in J}$ von Punkten aus $\overline{G'}$, so dass $K = (K_j)_{j \in J}$, $K_j = K(x_j, r_{xj})$ die Menge $\overline{G'}$ überdeckt. Nach (2.3.3) ist K sogar eine eigentliche Verfeinerung von U. Setzen wir jetzt $\Delta_j = \Delta(\delta_{1j}, \dots, \delta_{mj})$ mit $\delta_{\nu j}(\varrho_1, \dots, \varrho_{\nu-1}) = \delta_{\nu x_j}(r_{nx_j}, \dots, r_{1x_j}, \varrho_1, \dots, \varrho_{\nu-1})$ und

$$M_j : \Delta_j \longrightarrow \mathbf{R}_+ \text{ mit } M_j(\varrho_1, \dots, \varrho_m) = M_{x_j}(r_{1x_j}, \dots, r_{nx_j}, \varrho_1, \dots, \varrho_m),$$

dann ist $\Delta(\delta_1, \dots, \delta_m) = \bigcap_{j \in J} \Delta_j(\delta_{1j}, \dots, \delta_{mj})$ die gesuchte Dreiecksmenge und $M = \sup_{j \in J} M_j$ die gesuchte Funktion. Die Behauptung und der Zusatz folgen jetzt sofort aus Theorem (1.4.4).

Hilfssatz $(2.3.5)_l$. — Voraussetzung:

G beschränkte Steinsche offene Menge des $\mathbf{C}^n$,

G' relativkompakte offene Teilmenge von G,

$U = (U_i)_{i \in I}$ endliche Steinsche Überdeckung von G,

$0 \longrightarrow \mathcal{O}^{p_l} \longrightarrow \mathcal{O}^{p_{l-1}} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{O}^{p_1} \longrightarrow \mathcal{O}^{p_0}$ eine

Syzygie der Länge l über $G \times K(\varrho_0)$.

Behauptung: Es gibt eine endliche Familie V offener Teilmengen von G, die noch $\overline{G'}$ überdeckt und die eine eigentliche Verfeinerung von U ist und es gibt eine Dreiecksmenge $\Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)$ und zu jedem $s \in \mathbf{N}$ eine Abbildung $M_s : \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m) \to \mathbf{R}_+$, so dass für jedes $\varrho \in \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)$ die Aussage gilt:

Zu jedem $\xi \in Z^s(U \times K(\varrho), \operatorname{im} h_0)$ mit $\| \xi \|_{U\varrho} < \infty$ gibt es ein

$$\eta \in Z^s(V \times K(\varrho), \mathcal{O}^{p_1}) \text{ mit } h_0(\eta) = \xi \mid V \times K(\varrho) \text{ und } \| \eta \|_V \leq M_s(\varrho) \| \xi \|_U .$$

Zusatz: Ist $\mathcal{O}^{p_0}/\operatorname{im} h_0$ t_1-torsionsrecht, dann kann M_s sogar so gewählt werden, dass es von ϱ_1 unabhängig ist.

Beweis. — Eine Uberdeckung $U = (U_i)_{i \in I}$ heisst schnittstabil, wenn es zu jedem Paar $(i, j) \in I^2$ ein $k \in I$ gibt mit $U_{i,j} = U_k$. Sei $s \in \mathbf{N}$, dann bezeichnen wir mit $U^{(s)}$ die Uberdeckung $(U_{i_0, \dots, i_s})_{(i_0, \dots, i_s) \in I^{s+1}}$; dabei wurde $U_{i,j} = U_i \cap U_j$ und $U_{i_0, \dots, i_s} = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_s}$ gesetzt.

Der Beweis von $(2.3.5)_l$ geschieht durch Induktion nach l:

$(2.3.5)_0$ ist trivial. Es wird jetzt $(2.3.5)_{l-1} \Longrightarrow (2.3.5)_l$ gezeigt:

Da U endlich ist, gibt es ein $s_0 \in \mathbf{N}$, so dass $U^{(s_0)}$ schnittstabil ist. Es gibt eine Steinsche offene Menge G_1 mit $G \supset\supset G_1 \supset\supset G'$. Auf die Daten $G \supset\supset G_1$, $U^{(s_0)}$, $h_0 : \mathcal{O}^{p_1} \to \mathcal{O}^{p_0}$ Lemma (2.3.4) angewandt: Es gibt eine endliche Polyzylinderfamilie $K = (K_j)$, die eine eigentliche Verfeinerung von $U^{(s_0)}$ ist und noch $\overline{G_1}$ überdeckt und es gibt eine Dreiecksmenge $\Delta(\delta'_1, \dots, \delta'_m)$ und eine Abbildung $M : \Delta(\delta'_1, \dots, \delta'_m) \to \mathbf{R}_+$, so dass für jedes $\varrho \in \Delta(\delta'_1, \dots, \delta'_m)$ die Aussage von (2.3.4) bezüglich h_0 gilt.

Auf die Daten $G_1 \supset\supset G'$, K und

$$0 \to \mathcal{O}^{p_l} \to \mathcal{O}^{p_{l-1}} \to \dots \to \mathcal{O}^{p_1} \text{ über } G_1 \times K(\varrho_0)$$

wird Hilfssatz $(2.3.5)_{l-1}$ angewandt.

Sei $\Delta(\delta''_1, \dots, \delta''_m)$ die Dreiecksmenge von $(2.3.5)_{l-1}$, dann setzen wir

$$\Delta(\delta_1, \dots, \delta_m) = \Delta(\delta'_1, \dots, \delta'_m) \cap \Delta(\delta''_1, \dots, \delta''_m).$$

Sei jetzt $\varrho \in \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)$ und $\xi = (\xi_{i_0 \dots i_s}) \in Z^s(U \times K(\varrho), \operatorname{im} h_0)$ mit $\| \xi \|_{U\varrho} < \infty$, dann ist offenbar

$$\xi \mid K \times K(\varrho) = (\xi_j)_{j \in J} \in C^0(K \times K(\varrho), \operatorname{im} h_0) \text{ und}$$

$$\| \xi \mid K \times K(\varrho) \|_{K\varrho} \leq \| \xi \|_{U\varrho} .$$

Nach Lemma (2.3.4) folgt: es gibt ein $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_j)_{j \in J} \in C^0(K \times K(\varrho), \mathcal{O}^{p_1})$ mit

$$h_0(\tilde{\xi}) = \xi, \|\tilde{\xi}\|_{K\varrho} \leq M(\varrho) \|\xi\|_{K\varrho}.$$

Da man $K^{(s)}$ als Verfeinerung von K auffassen kann, gilt:

$$\tilde{\xi} \mid K^{(s)} \times K(\varrho) = (\tilde{\xi}_{j_0 \ldots j_s}) \in C^0(K^{(s)} \times K(\varrho), \mathcal{O}^{p_1}) \text{ und}$$

$$\|\tilde{\xi} \mid K^{(s)} \times K(\varrho)\|_{K\varrho} \leq \|\xi\|_{K\varrho}.$$

Offenbar gilt die Beziehung

$$C^0(K^{(s)} \times K(\varrho), \mathcal{O}^{p_1}) = C^s(K \times K(\varrho), \mathcal{O}^{p_1}),$$

also kann man schreiben

$$\eta = \delta(\xi \mid K^{(s)} \times K(\varrho)) \in Z^{s+1}(K \times K(\varrho), \mathcal{O}^{p_1})$$

und es gilt

$$\|\xi\|_{K\varrho} \leq (s+1) \|\xi \mid K^{(s)} \times K(\varrho)\|_{K\varrho}.$$

Wegen $h_0(\eta) = \delta(h_0(\tilde{\xi})) = \delta\xi = 0$ auf $K \times K(\varrho)$, gilt sogar

$$\eta \in Z^{s+1}(K \times K(\varrho), im\ h_1).$$

Nach Hilfssatz $(2.3.5)_{l-1}$ gilt: Es gibt eine Familie V', eigentliche Verfeinerung von K, die noch $\overline{G'}$ überdeckt und eine Abbildung

$$M_{s+1} : \Delta(\delta_1, \ldots, \delta_m) \to \mathbf{R}_+ \text{ und ein } \eta^* \in Z^{s+1}(V' \times K(\varrho), \mathcal{O}^{p_2}) \text{ mit}$$

$$h_1(\eta^*) = \eta \mid V' \times K(\varrho), \qquad \|\eta^*\|_{V'\varrho} \leq M_{s+1}(\varrho) \|\eta\|_{K\varrho}.$$

Sei V eine Schrumpfung (2.3.2) von V', die noch $\overline{G'}$ überdeckt. Nach Satz (2.2.3) gilt: Es gibt ein $\gamma \in C^s(V \times K(\varrho), \mathcal{O}^{p_2})$ mit

$$\delta\gamma = \eta^* \mid V \times K(\varrho), \qquad \|\gamma\|_{V\varrho} \leq c \|\eta^*\|_{V'\varrho}.$$

Es gibt eine Konstante $c' > 0$, (1.1.12), so dass für $h_1(\gamma) \in C^s(V \times K(\varrho), \mathcal{O}^{p_1})$ gilt: $\|h_1(\gamma)\|_{V\varrho} \leq c' \|\gamma\|_{V\varrho}$. Setzen wir jetzt $\xi^* = \tilde{\xi} - h_1(\gamma)$ auf $V \times K(\varrho)$, dann gilt:

$$\| \xi^* \|_{V\varrho} \leq M(\varrho)\,(1 + (s+2)\,c'\,c\,M_{s+1}(\varrho))\, \| \xi \|_{U\varrho} ,$$

$$h_0(\xi^*) = h_0(\widetilde{\xi}) + \xi,$$

$$\xi^* \in Z^s(V \times K(\varrho), \mathcal{O}^{p_1}).$$

Gilt zusätzlich, dass $\mathcal{O}^{p_0}/im\,h_0$ t_1-torsionsrecht ist, dann folgt nach dem Zusatz von Theorem (1.4.4), dass man M so wählen kann, dass es von ϱ_1 unabhängig ist. Da $\mathcal{O}^{p_1}/im\,h_1 = im\,h_0$ als Untergarbe voh $\mathcal{O}^{p_0}$ torsionsrecht ist, lässt sich nach Induktioshypothese M_{s+1} so wählen, dass es von ϱ_1 unabhängig ist. Damit ist auch der Zusatz von $(2.3.5)_l$ erledigt.

Aus Lemma (2.3.1) und Hilfssatz $(2.3.5)_l$ folgt sofort das

THEOREM (2.3.6). — Voraussetzung.

G'', G, G' sind offene Mengen des $\mathbf{C}^n$, wobei G'' beschränkt und Steinsch, G Steinsch und $G'' \supset\supset G \supset\supset G'$ gilt,

$U = (U_i)_{i \in I}$ endliche Steinsche Überdeckung von G,

$$h : \mathcal{O}^p \longrightarrow \mathcal{O}^q \text{ Morphismus über } G'' \times K(\varrho_0)$$

Behauptung: Es gibt eine endliche Familie V offener Teilmengen von G, die noch G' überdeckt und die eine eigentliche Verfeinerung von U ist und es gibt eine Dreicksmenge $\Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)$ und zu jedem $s \in \mathbf{N}$ eine Abbildung $M_s : \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m) \longrightarrow \mathbf{R}_+$, so dass für jedes $\varrho \in \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)$ die Aussage gilt:

Zu jedem $\xi \in Z^s(U \times K(\varrho), \text{im } h)$ mit $\| \xi \|_{U\varrho} < \infty$ gibt es ein

$$\eta \in Z^s(V \times K(\varrho), \mathcal{O}^p) \text{ mit } h(\eta) = \xi \mid V \times K(\varrho) \text{ und}$$

$$\| \eta \|_{V\varrho} \leq M_s(\varrho)\, \| \xi \|_{U\varrho} .$$

Zusatz: Ist $\mathcal{O}^q/\text{im } h$ t_1-torsionsrecht, dann lässt sich M_s sogar so wählen dass es von ϱ_1 unabhängig ist.

COROLLAR (2.3.7). — Voraussetzung:

G'', G, G' sind offene Mengen des $\mathbf{C}^n$, wobei G'' beschränkt und Steinsch, G Steinsch und $G'' \supset\supset G \supset\supset G'$ gilt,

$U = (U_i)_{i \in I}$ endliche Steinsche Uberdeckung von G,

$\mathcal{M}$ kohärente Untergarbe von $\mathcal{O}^q$ auf $G'' \times K(\varrho_0)$.

Behauptung: Es gibt eine endliche Familie V offener Teilmengen von G, die noch $\bar{G}'$ überdeckt und die eine eigentliche Verfeinerung von U ist und es gibt eine Dreiecksmenge $\Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)$ und zu jedem $s \in \mathbf{N}$, $s > 0$ eine Abbidung $M_s : \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m) \longrightarrow \mathbf{R}_+$, so dass für jedes $\varrho \in \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)$ die Aussage gilt:

Zu jedem $\xi \in Z^s(U \times K(\varrho), \mathcal{M})$ mit $\| \xi \|_{U\varrho} < \infty$ gibt es ein

$\eta \in C^{s-1}(V \times K(\varrho), \mathcal{M})$ mit $\delta\eta = \xi \mid V \times K(\varrho)$ und $\| \eta \|_{V\varrho} \leq M_s(\varrho) \| \xi \|_{U\varrho}$.

Zusatz: Ist $\mathcal{O}^q/\mathcal{M}$ t_1-torsionsrecht, dann lässt sich M_s sogar so wählen, dass es von ϱ_1 unabhängig ist.

Beweis. — Es gibt eine Steinsche offene Menge G^* mit $G'' \supset\supset G^* \supset\supset G$ und einen Morphismus $h : \mathcal{O}^p \longrightarrow \mathcal{O}^q$ über $G^* \times K(\varrho_0^*)$, $\varrho_0^* < \varrho_0$ mit im $h = \mathcal{M}$. G_1' sei eine weitere Steinsche offene Menge mit $G \supset\supset G_1' \supset\supset G'$. Auf die Daten $G^* \supset\supset G \supset\supset G_1'$, $U, h : \mathcal{O}^p \longrightarrow \mathcal{O}^q$ wird Theorem (2.3.6) angewandt, $\Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)$, M_s, V_1 seien die in (2.3.6) versprochenen Objekte. V sei eine Schrumpfung von V_1, die noch $\bar{G}'$ überdeckt. Auf die Daten $G_1' \supset\supset G'$, $V_1 \supset\supset V$ wird Satz (2.2.3) angewandt.

Sei jetzt $\varrho \in \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)$ und $\xi \in Z^s(U \times K(\varrho), \mathcal{M})$ mit $\| \xi \|_{U\varrho} < \infty$. Nach Theorem (2.3.6) gibt es ein $\xi' \in Z^s(V_1 \times K(\varrho), \mathcal{O}^p)$ mit $h(\zeta') = \xi \mid V_1 \times K(\varrho)$ und $\| \xi' \|_{V_1\varrho} \leq M_s(\varrho) \| \xi \|_{U\varrho}$. Nach Satz (4.2.9) gibt es ein $\eta' \in C^{s-1}(V \times K(\varrho), \mathcal{O}^p)$ mit $\delta\eta' = \xi' \mid V \times K(\varrho)$ und $\| \eta' \|_{V\varrho} \leq c \| \xi \|_{V_1\varrho}$. Setzen wir $\eta = h(\eta')$, dann gilt nach (1.1.12) $\| \eta \|_{V\varrho} \leq c' \| \eta' \|_{V\varrho}$. Auf $V \times K(\varrho)$ gilt jetzt $\delta\eta = \xi$ mit der Abschätzung

$$\| \eta \|^{V\varrho} \leq c'c\, M_s(\varrho) \| \xi \|_{U\varrho}.$$

Der Zusatz von (2.3.7) folgt jetzt sofort aus dem Zusatz von (2.3.6).

2.4 Theorem B mit Schranke bezüglich einer kohärenten $\mathcal{O}$-Garbe.

THEOREM (2.4.1). — Voraussetzungen:

G'', G, G' sind offene Mengen des $\mathbf{C}^n$, wobei G'' beschränkt und Steinsch, G Steinsch und $G'' \supset\supset G \supset\supset G'$ gilt,

$U = (U_i)_{i \in I}$ endliche Steinsche Überdeckung von G, $\mathcal{S}$ kohärenter $\mathcal{O}$-Modul auf $G'' \times K(\varrho_0)$

Behauptung: Es gibt eine endliche Familie V offener Teilmengen von G, die noch $\bar{G}'$ überdeckt und die eine eigentliche Verfeinerung von U ist und es gibt eine Dreiecksmenge $\Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)$ und zu jedem $s \in \mathbf{N}$ eine Abbildung M_s: $\Delta(\delta_1, \dots, \delta_m) \to \mathbf{R}_+$, so dass für jedes $\varrho \in \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)$ die Aussage gilt:

(i) Für jedes $\xi \in Z^0(U \times K(\varrho), \mathcal{S})$ mit $\|\xi\|_{U\varrho} < \infty$ gilt

$$\|\xi \mid G' \times K(\varrho)\|_{G'\varrho} \leq M_0(\varrho) \|\xi\|_{U\varrho}$$

(ii) Wenn $s > 0$, dann gibt es zu jedem

$\xi \in Z^s(U \times K(\varrho), \mathcal{S})$ mit $\|\xi\|_{U\varrho} < \infty$ ein

$\eta \in C^{s-1}(V \times K(\varrho), \mathcal{S})$ mit $\delta\eta = \xi \mid V \times K(\varrho)$

und $\|\eta\|_{V\varrho} \leq M_s(\varrho) \|\xi\|_{U\varrho}$.

Zusatz. — Ist $\mathcal{S}$ t_1-torsionsrecht, dann lässt sich M_s sogar unabhängig von ϱ_1 wählen.

Beweis. — Ohne Einschränkung gibt es eine Auflösung $\mathcal{O}^q \xrightarrow{\alpha} \mathcal{S} \to 0$ über $G'' \times K(\varrho_0)$, weiter gibt es eine Steinsche offene Menge G_1' mit $G \supset\supset G_1' \supset\supset G'$. Auf die Daten $G'' \supset\supset G \supset\supset G_1'$, U, ker $\alpha \subset \mathcal{O}^q$ wird Corollar (2.3.7) angewandt; V', Δ, M_s, $s > 0$ sind die in (2.3.7) versprochenen Daten.

Sei jetzt $s \in \mathbf{N}$, $\varrho \in \Delta$ und $\xi \in Z^s(U \times K(\varrho), \mathcal{S})$ mit $\|\xi\|_{U\varrho} < \infty$. Nach Definition der Norm (1.1.3) und (2.2.2) gibt es ein $\eta_1 \in C^s(U \times K(\varrho), \mathcal{O}^q)$ mit $\alpha(\eta_1) = \xi$ und $\|\eta_1\|_{U\varrho} \leq 2 \|\xi\|_{U\varrho}$. Jetzt ist $\delta\eta_1 \in Z^{s+1}(U \times K(\varrho), \ker \alpha)$ mit $\|\delta\eta_1\|_{U\varrho} \leq (s+1) \|\eta_1\|_{U\varrho}$. Nach Corollar (2.3.7) gibt es ein $\eta_2 \in C^s(V' \times K(\varrho), \ker \alpha)$ mit $\delta\eta_2 = \delta\eta_1$ und $\|\eta_2\|_{V'\varrho} \leq M_{s+1}(\varrho) \|\delta\eta_1\|_{U\varrho}$. Jetzt ist $\eta_1 - \eta_2 \in Z^s(V' \times K(\varrho), \mathcal{O}^q)$. Sei V eine Schrumpfung von V', die noch $\bar{G}'$ überdeckt.

Auf Die Daten $G_1' \supset\supset G'$, V', V (V' sei ohne Einschränkung eine Steinsche Überdeckung) wird Satz (2.2.3) angewandt.

(i) Für $s = 0$ folgt nach (2.2.3) die Ungleichung $\|\eta_1 - \eta_2\|_{G'\varrho} \leq \|\eta_1 - \eta_2\|_{V'\varrho}$. Jetzt ist $\alpha(\eta_1 - \eta_2) = \xi$ und es gilt $\|\xi \mid G \times K(\varrho)\|_{G'\varrho} \leq \|\eta_1 - \eta_2\|_{G'\varrho}$ und damit gilt $\|\xi \mid G' \times K(\varrho)\|_{G'\varrho} \leq 2c(1 + M_1(\varrho)) \|\xi\|_{U\varrho}$.

(ii) Für $s > 0$ gibt es nach (2.2.3) ein $\gamma \in C^{s-1}(V \times K(\varrho), \mathcal{O}^q)$ mit $\delta\gamma = \eta_1 - \eta_2$ und $\|\gamma\|_{V\varrho} \leq c \|\eta_1 - \eta_2\|_{V'\varrho}$. Wir setzen $\eta = \alpha(\gamma)$; es ist $\|\eta\|_{V\varrho} \leq \|\gamma\|_{V\varrho}$. Jetzt ist $\delta\eta = \xi$ und es gilt

$$\|\eta\|_{V\varrho} \leq 2c(1 + M_{s+1}(\varrho)(s+1)) \|\xi\|_{U\varrho}.$$