ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

CLAUDIO REA

Le problème de Cauchy-Riemann pour des structures mixtes

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 22, nº 4 (1968), p. 695-727

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1968_3_22_4_695_0>

LE PROBLÈME DE CAUCHY - RIEMANN POUR DES STRUCTURES MIXTES

CLAUDIO REA (*)

0. On sait que sur une variété de Stein X est résoluble le problème de Cauchy-Riemann parametrisé

$$\bar{\partial} u_t = f_t$$

où f_t est (pour tout $t \in \mathbf{R}$, $|t| < \delta$) une $(p, q+1)$-forme, $\bar{\partial}$-fermée, à valeurs dans un fibré vectoriel holomorphe E, dont les coefficients sont de classe C^∞ sur X et C^k sur $X \times \mathbf{R}$ $(k = 0, 1, \dots, \infty)$ et que la solution est aussi régulière que f_t.

Ce resultat, démontré par Andreotti et Grauert [7] peut être obtenu, pour $k = 0$, comme cas particulier d'un théorème de H. Cartan [4].

La démonstration qu'on en donne à la fin de ce travail (prop. 5.5.) m'a été suggérée verbalement par L. Kaup.

Nous avons abordé ici le cas où la structure même de X depend de t. Le problème prend alors la forme

$$\bar{\partial}_t u_t = f_t.$$

Dans la première partie on a envisagé un feuilletage semi-holomorphe, c'est à dire une variété différentiable $\mathcal{W}$, de dimension $2n + m$, $n > 1$, munie d'un atlas $\{\Phi_i, U_i\}$, avec $\Phi_i \colon U_i \to \mathbf{C}^n \times \mathbf{R}^m$, tel que les changements de coordonnées dans $U_i \cap U_j$ soient du type $(z, t) \to [h(z, t), k(t)]$, où h et k sont de classe C^∞ et h est holomorphe par rapport aux z pour tout t.

Pervenuto alla Redazione il 6 Aprile 1968 ed in forma definitiva il 12 Luglio 1968.

(*) Travail exécuté avec l'aide du C.N.R. Groupe 35.

Les feuilles de $\mathcal{W}$ sont donc douées d'une structure de variété analytique complexe.

On a supposé que $\mathcal{W}$ était *complet*, c'est à dire qu'il existe une fonction réelle $\psi \in C^\infty(\mathcal{W})$ telle que sa restriction aux feuilles soit plurisousharmonique et que l'on ait $\{x \in \mathcal{W}, \psi(x) < c\} \subset\subset \mathcal{W}$, $\forall\, c \in \mathbf{R}$. Les feuilles fermées sont donc des variétés de Stein. La première partie du travail est consacrée à établir le

THÉORÈME I. *Soit $\mathcal{W}$ un feuilletage semi-holomorphe complet, f une $(p, q+1)$-forme verticale à valeurs dans un fibré vectoriel différentiable $E \to \mathcal{W}$ donné, dont la restriction aux feuilles soit holomorphe. Si les coefficients de f sont $\mathcal{L}^2_{\text{loc}}$ et $\bar\partial f = 0$, alors il existe une (p, q)-forme verticale u à valeurs dans E, à coefficients $\mathcal{L}^2_{\text{loc}}$, telle que l'on ait*

$$\bar\partial u = f. \tag{1}$$

La méthode employée pour cette démonstration est analogue à celle employée par Andreotti et Vesentini dans [1], [2] et [3]; le formalisme est celui de Hörmander [9] et [10].

Le théorème I n'est pas vrai en général si l'on remplace $\mathcal{L}^2_{\text{loc}}$ par C^∞ (ou même C^0).

Dans la deuxième partie en effet on a du se placer dans le cas, beaucoup plus particulier, où $\mathcal{W}$ est une déformation différentiable, triviale à l'infini, d'une variété de Stein de dimension complexe $n > 1$, et l'on prouve le

THÉORÈME II. *Soit $\mathcal{W} \xrightarrow{\pi} B$ une déformation différentiable, triviale à l'infini, d'une variété de Stein $X \simeq \pi^{-1}(0)$, E un fibré vectoriel differentiable sur $\mathcal{W}$, holomorphe sur chaque feuille. Il existe une restriction $\pi^{-1} B' \to B'$ de $\mathcal{W}$ telle que: pour toute $(p,q+1)$-forme verticale f de classe C^∞ sur $\mathcal{W}$, $(k = 0, 1, \ldots, \infty)$, et $\bar\partial$-fermée sur chaque feuille, on peut trouver une (p, q)-forme verticale u, de classe C^∞ sur $\pi^{-1} B'$ qui satisfait $\bar\partial u = f$. En plus si toute variété $\pi_{-1}(t)$, $t \in B$, est de Stein, on peut remplacer dans cet énoncé B' par B.*

Ce deuxième résultat a été obtenu en introduisant la notion de *uniforme w-ellipticité* du fibré vectoriel en question sur une feuilletage semi-holomorpe. La méthode employée pour établir le théorème II dans le cas $k = 0$, $f =$ « cocycle de déformation de $\mathcal{W}$ », est la même que celle introduite en [2] et [11]. A la fin du travail on démontre le

THÉORÈME III. *Si la forme f est telle que $\pi \,|\, (\operatorname{supp} f)$ soit une application propre, il existe une forme u de classe C^∞ telle que $\bar\partial u = f$ et $\pi \,|\, (\operatorname{supp} u)$ soit propre.*

Je remercie M. Andreotti qui m'a donné des idées qui ont été indispensables.

I$^{\text{ère}}$ PARTIE

1. Soit $\mathcal{W}$ une variété différentiable [1] de dimension $2n+m$, $n>1$, $\mathcal{W}$ sera dite munie d'une structure de variété à *feuilletage semi-holomorphe* si on donne un recouvrement localement fini $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ de $\mathcal{W}$ et, pour tout $i\in I$, une immersion différentiable $\Phi_i\colon U_i\to \mathbf{C}^m\times\mathbf{R}^m$ [2] de façon telle que, si $U_i\cap U_j\neq\emptyset$, le difféomorphisme $\Phi_i\circ\Phi_j^{-1}\colon \Phi_j(U_i\cap U_j)\to\Phi_i(U_i\cap U_j)$ soit de la forme $(z,t)\to[h(z,t),k(t)]$, h étant une n-ple de fonctions différentiables par rapport à (z,t), holomorphes par rapport à z pour tout $t\in pr_2\,\Phi_j(U_i\cap U_j)$. Un tel atlas sera dit distingué. On peut supposer que l'on ait $\operatorname{Im}\Phi_i=A_i\times B_i$, où A_i et B_i sont des rectangles ouverts de $\mathbf{C}^n$ et $\mathbf{R}^m$.

Les sous-ensembles $\Phi_i^{-1}[\operatorname{Im}\Phi_i\cap pr_2^{-1}t]$, $i\in I$, $t\in pr_2\operatorname{Im}\Phi_i$, sont des sous variétés de dimension $2n$ de $\mathcal{W}$ qui s'appellent *plaques*, la restriction de $pr_2\circ\Phi_i$ à une plaque $\mathfrak{p}$ est un difféomorfisme $\varphi_\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{p}$ sur un ouvert de $\mathbf{C}^n$. Les intersections des plaques avec les ouverts de $\mathcal{W}$ sont la base d'une nouvelle topologie τ (plus fine) sur l'ensemble $\mathcal{W}$, soit $\widehat{\mathcal{W}}$ le nouvel espace topologique ainsi obtenu. Les composantes connexes de $\widehat{\mathcal{W}}$ sont les *feuilles* de la structure feuilletée. Soit Π l'ensemble des plaques, Π est un recouvrement ouvert de $\widehat{\mathcal{W}}$ (localement fini) et $\{p,\varphi_\mathfrak{p}\}_{\mathfrak{p}\in\Pi}$ est un atlas qui induit sur $\widehat{\mathcal{W}}$ une structure de variété analytique complexe dont les feuilles sont des sous-variétés ouvertes.

Une feuille est dite *propre* si elle a la même topologie en tant que sous-ensemble de $\mathcal{W}$ et de $\widehat{\mathcal{W}}$. Une feuille fermée est propre, une feuille propre n'est pas nécessairement fermée. Pour la description topologique d'une telle structure nous renvoyons à [12]. Soit $i\colon\widehat{\mathcal{W}}\to\mathcal{W}$ l'immersion de $\widehat{\mathcal{W}}$ dans $\mathcal{W}$. Une fonction différentiable $f\colon\mathcal{W}\to\mathbf{C}$ est dite semi-holomorphe si $i\circ f$ est holomorphe, f est semi-holomorphe si, et seulement si elle est

---

(1) Ici et dans la suite différentiable est synonyme de C^∞.

(2) On peut remplacer, ici et dans la suite, $\mathbf{R}^m$ avec $\mathbf{C}^m$.

différentiable par rapport aux variables $z^1, \ldots, z^n$; $t^1, \ldots, t^m$ et holomorphe par rapport aux variables $z^1, \ldots, z^n$.

Un fibré différentiable sur $\mathcal{W}$ est dit semi-holomorphe si ses fonctions de transition sont semi-holomorphes. Soient $\widetilde{T}$ et $\widehat{T}$ les fibrés tangents réels de $\mathcal{W}$ et $\widehat{\mathcal{W}}$ respectivement, $\widetilde{T}_x$ et $\widehat{T}_x$ indiquent les espaces tangents à $\mathcal{W}$ et à $\widehat{\mathcal{W}}$ en x.

Le complexifié du fibré $\widehat{T}$ est la somme directe d'un fibré holomorphe T sur $\widehat{\mathcal{W}}$ ($i^*(T)$ est un fibré semi-holomorphe sur $\mathcal{W}$) et de son conjugué $\overline{T}$. Nous allons indiquer dans la suite avec la même lettre les fibrés T et $i^*(T)$, $\overline{T}$ et $i^*(\overline{T})$. Soient $A^{1,0}$ et $A^{0,1}$ les duaux de T et $\overline{T}$, on pose $A^{p,q} = (A^{1,0})^{\wedge p} \wedge (A^{0,1})^{\wedge q}$, (le suscript $\wedge p$ veut dire: p-ème puissance extérieure), $A^{p,q}$ sera considéré dans la suite comme fibré de base $\mathcal{W}$.

Nous allons étudier parallèlement les deux cas où $\mathcal{W}$ est un feuilletage et celui plus particulier où $\mathcal{W}$ est une *famille différentiable de variétés analytiques complexes,* c'est à dire qu'il y ait aussi une application différentiable $\pi : \mathcal{W} \to B$ (B variété différentiable réelle de dim. m) dont les fibres coïncident avec les feuilles de la structure feuilletée, la fibre au dessus de $t \in B$ sera indiquee avec X_t. Ce deuxième cas sera brièvement dit « *cas déformation* » Soit U un ouvert de $\mathcal{W}$, on pose $\widehat{U} = i^{-1} U$, $\widehat{U}$ est un ouvert de $\widehat{\mathcal{W}}$, U et $\widehat{U}$ ont les mêmes éléments; soit E un fibré vectoriel semi-holomorphe sur $\mathcal{W}$, $C^{\infty}_{p,q}(U, E)$ et $C^{\infty}_{p,q}(\widehat{U}, E)$ sont les modules des sections différentiables de $(E \otimes A^{p,q}) \mid U$ et de $(E \otimes A^{p,q}) \mid \widehat{U}$ respectivement.

$C^{\infty}_{p,q}(U, E)$ est identifiable à un sous-module de $C^{\infty}_{p,q}(\widehat{U}, E)$.

$\mathcal{H}_{p,q}(U, E, \text{loc})$ est le module des sections de $E \otimes A^{p,q}$ sur U dont les coefficients sont des fonctions qui se trouvent dans l'espace de Sobolev $\mathcal{H}^s_{\text{loc}}(\mathbf{R}^{2n+m})$; on peut voir aisément que cette notion est invariante. On pose comme d'habitude $\mathcal{L}^2_{p,q}(U, E, \text{loc}) = \mathcal{H}^0_{p,q}(U, E, \text{loc})$. On a $C^0_{p,q}(U, E) \subset \mathcal{L}^2_{p,q}(U, E, \text{loc})$ et, grâce au lemme de Sobolev, $\mathcal{H}^s(U, E, \text{loc}) \subset C^{\infty}_{p,q}(U, E)$, si $2s > 2n + m + 1$. Entre $C^{\infty}_{p,q}(\widehat{U}, E)$ et $\mathcal{L}^2_{p,q}(U, E)$ au contraire, il n'y a, à priori, aucune relation.

Le fibré E peut être supposé trivial au dessus des ouverts coordonnés de $\mathcal{W}$, $\{e_a\}$ est un système de μ (= rang de E) sections différentiables indépendantes de E au dessus de l'ouvert coordonné U_i, les formes

$$e_a \otimes dz^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz^{\alpha_p} \wedge d\bar{z}^{\beta_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}^{\beta_q}, \quad 1 \le \alpha_1 < \ldots < \alpha_p \le n,$$

$1 \le \beta_1 < \ldots < \beta_q \le n$, $a = 1, \ldots, \mu$, forment une base pour la fibre de $E \otimes A^{p,q}$ au dessus de chaque point de U_i. On introduit les blocs d'indices, $A = \alpha_1, \ldots, \alpha_p$, avec $\alpha_1 < \ldots < \alpha_p$, $dz^A = dz^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz^{\alpha_p}$, $|A|$ est le nombre d'indices qui forment A. L'opérateur $\bar{\partial}$: $C^{\infty}_{p,q}(\widehat{\mathcal{W}}, E) \to C^{\infty}_{p,q+1}(\widehat{\mathcal{W}}, E)$ s'exprime localement par la formule

$$\bar{\partial}\,(f^a_{AB}\,\mathrm{e}_b \otimes dz^A \wedge d\bar{z}^B) = (-1)^p \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\beta} f^a_{AB}\,\mathrm{e}_a \otimes dz^A \wedge d\bar{z}^{\beta B}\,. \tag{2}$$

Si $\varphi \in C^k(\widehat{\mathcal{W}})$, $k \geq 2$, est une fonction à valeurs réelles, la (1·1) forme (de Levi) $\partial\bar{\partial}\varphi$, opère de façon intrinsèque, hermitienne sur T. La matrice de ses coefficients subit, par un changement de coordonnées, une transformation du type $a \to {}^t\bar{b}\,a\,b$, ses valeurs propres sont donc des fonctions réelles qui appartiennent à $C^{k-2}(\mathcal{W})$, si en plus $\varphi \in C^k(\widehat{\mathcal{W}}) \cap C^h(\mathcal{W})$, les valeurs propres de $\partial\bar{\partial}\,\varphi$ sont dans $C^{k-2}(\widehat{\mathcal{W}}) \cap C^h(\mathcal{W})$.

DÉFINITION 1.1. *Une fonction réelle $\varphi \in C^\infty(\mathcal{W})$ est dite plurisousharmonique si les valeurs propres de $\partial\bar{\partial}\,\varphi$ sont positives.*

DÉFINITION 1.2. *Le feuilletage $\mathcal{W}$ est dit complet s'il existe sur $\mathcal{W}$ une fonction plurisousharmonique telle que l'on ait*

$$\{x \in W,\ \varphi(x) < c\} \subset\subset \mathcal{W},\ \textit{pour tout } c \in \mathbf{R}. \tag{A}$$

Remarque 1.2. Si $\mathcal{W}$ est complet et en même temps une fibration, alors toute fibre est une variété de Stein.

Pour toute fonction réelle $\psi \in C^2(\mathcal{W})$ nous indiquons avec λ_ψ la fonction « plus petite valeur propre de $\partial\bar{\partial}\,\psi$ ».

LEMME 1.1. *Soit g une fonction réelle continue sur le feuilletage complet $\mathcal{W}$. Il existe une fonction réelle plurisousharmonique $\psi \in C^\infty(\mathcal{W})$ qui satisfait la propriété* (A) *et telle que*

(i) $\psi(x) \geq g(x), \quad \forall\, x \in \mathcal{W}$

(ii) $\lambda_\psi(x) \geq g(x), \quad \forall\, x \in \mathcal{W}$.

Preuve. Soit φ la fonction dont à la définition 1.2, on pose $\varepsilon = \min_{\mathcal{W}} \varphi$, $\mathcal{B}_c = \{x \in \mathcal{W},\ \varphi(x) < c\}$.

On peut évidemment choisir une fonction différentiable $F: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que l'on ait $F'(s) > 0$, $F''(s) > 0$, $\forall\, s \in \mathbf{R}$ et $\inf_{[\varepsilon, c]} F' > \sup_{\mathcal{B}_c} \frac{g}{\lambda_\varphi}$, $\inf_{[\varepsilon, c]} F > \sup_{\mathcal{B}_c} g$.

La fonction cherchée est $\psi(x) = F(\varphi(x))$, on a en effet

$$\lambda_\varphi(x) \geq F'[\varphi(x)]\,\lambda_\varphi(x) \geq (\inf_{[\varepsilon,\varphi(x)]} F')\,\lambda_\varphi(x) \geq$$

$$\geq \left\{ \sup_{\xi \in \mathcal{B}_{\varphi(x)}} \frac{g(\xi)}{\lambda_\varphi(\xi)} \right\} \lambda_\varphi(x) \geq g(x);$$

$$\psi(x) \geq \inf_{[\varepsilon,\varphi(x)]} F \geq \sup_{\mathcal{B}_{\varphi(x)}} g \geq g(x).$$

De la première inégalité et du fait que $F' > 0$ on tire $\lambda_\psi(x) > 0$, ψ est donc plurisousharmonique ; à cause de la croissance de F' on a $\psi(x) < c \Longrightarrow \varphi(x) < F^{-1}(c)$, φ et ψ ont donc aussi les mêmes surfaces de niveau et ψ satisfait la propriété (A). Le lemme est donc prouvé.

DÉFINITION. 1.3. *Soient φ et ψ deux fonctions réelles différentiables plurisousharmoniques sur $\mathcal{W}$ et satisfaisant la propriété* (A), *alors ψ sera dite supérieure à φ si l'on a, pour tout $x \in \mathcal{W}$, $\lambda_\psi(x) \geq \lambda_\varphi(x)$, $\psi(x) \geq \varphi(x)$.*

On peut remarquer que si $g > \varphi$ et $g > \lambda_\varphi$ la fonction ψ trouvée au lemme 1.1. est supérieure à la fonction φ.

2. α) On introduit maintenant une métrique riemannienne ds^2 sur $\mathcal{W}$, dont la restriction aux feuilles soit hermitienne (cela peut se faire à l'aide d'une partition de l'unité).

Soit $\{\omega_i^\alpha\}$, $\alpha = 1, \dots, n$, un système orthonormal de sections de $A^{1,0}|\,U_i$; ds^2 induit alors sur $A^{p,q}|\,U_i$ une métrique qui peut être écrite sous la forme

$$|\,\xi\,|^2 = |\,\xi_{A,B}\,\omega_i^A \wedge \overline{\omega}_i^B\,|^2 = \sum_{A,B} |\,\xi_{A,B}\,|^2.$$

On peut douer le fibré E d'une métrique hermitienne en obtenant par conséquent sur $E \otimes A^{p,q}$ aussi une métrique qui peut être définie par la relation $|\,e \otimes f\,| = |\,e\,|\,|\,f\,|$.

Soit $\{e_a\}$ un système orthonormal de μ sections de $E|\,U_i$, le produit scalaire des formes $f = f^a_{A,B}\,e_a \otimes \omega^A \wedge \overline{\omega}^B$ et $u = u^a_{A,B}\,e_a \otimes \overline{\omega}^A \wedge \overline{\omega}^B$ appartenant à la fibre $(E \otimes A^{p,q})_x$ est donné par

$$\langle f, u \rangle_x = \sum_{a,A,B} f^a_{A,B}\,u^a_{A,B}\,.$$

Le nombre positif $|\,f\,|_x = (\langle f, f \rangle_x)^{1/2}$ est dit *longueurs de la forme* f en x. Les composantes des formes de $E \otimes A^{p,q}$ seront dans la suite systématiquement rapportées au repère orthonormal $\{e_a \otimes \omega^A \wedge \overline{\omega}^B\}$. Soit $\omega^\alpha = a^\alpha_\beta\,dz^\beta$,

$a = (a^\alpha_\beta)$, $b = a^{-1}$ et $V = b^\lambda_\beta \dfrac{\partial}{\partial z^\lambda}$. Là formule (2) peut être réecrite ainsi :

$$\bar\partial f = (-1)^p \sum_{a, A, B} \bar V_\beta f^a_{A, B}\, \mathrm{e}_a \otimes \omega^A \wedge \bar\omega^{\beta B} + f^a_{AB}\, \bar\partial\, (\mathrm{e}_a \otimes \omega^A \wedge \omega^B), \tag{3}$$

ou bien ainsi :

$$\bar\partial f = \Big\{ (-1)^p \sum_{a, B, A} \bar V_\beta f^a_{A, B} + M^a_{A, \beta B}(f) \Big\}\, \mathrm{e}_a \otimes \omega^A \wedge \bar\omega^{\beta B}, \tag{4}$$

où les $M^a_{A, \beta B}(f)$ sont des combinaisons linéaires des coefficients de la forme f, les coefficients de ces combinaisons sont différentiables par rapport aux variables z et t.

Soit $dV = g^{1/2}\, dz^1 \dots dz^n\, d\bar z^1 \dots d\bar z^n\, dt^1 \dots dt^m$ (g = déterminant du tenseur métrique) l'élement de volume induit sur $\mathcal{W}$ par la métrique donnée, $d\widehat V$ la restriction de dV à $\widehat{\mathcal{W}}$ ($d\widehat V = \widehat{g}^{1/2}\, dz^1 \dots dz^n\, d\bar z^1 \dots d\bar z^n$) et, dans le cas déformation dV_t l'élement de volume induit sur X_t.

Soit ψ une fonction réelle continue sur $\mathcal{W}$.

On appelle $\mathcal{L}^2_{p, q}(\mathcal{W}, E, \psi)$ l'espace vectoriel de sections (à coefficients) mesurables de $E \otimes A^{p, q}$ telles que $\|f\|^2_\psi \overset{\mathrm{def}}{=} \int |f|^2 e^{-\psi}\, dV < \infty$. La forme sesquilinéaire $(f, g)_\psi = \int \langle f, g \rangle\, e^{-\psi}\, dV$ permet d'introduire une structure d'espace hilbertien sur $\mathcal{L}^2_{p, q}(\mathcal{W}, E, \psi)$; l'espace $D_{p, q}(U, E)$ des sections C^∞ à support compact de $E \otimes A^{p, q}$ est dense dans $\mathcal{L}^2_{p, q}(\mathcal{W}, E, \psi)$; on pose $D(\mathcal{W}, E) = \bigcup_{p, q} D_{p, q}(\mathcal{W}, E)$. L'espace $\mathcal{L}^2_{p, q}(\mathcal{W}, E, \mathrm{loc})$ est formé par les sections de $E \otimes A^{p, q}$ qui sont dans $\mathcal{L}^2_{p, q}(\mathcal{W}, E, \psi)$ pour quelque $\psi \in C^0(W)$. Il peut être aussi caractérisé comme l'espace des sections de $E \otimes A^{p, q}$ dont la restriction à tout $U \subset\subset \mathcal{W}$ est dans $\mathcal{L}^2_{p, q}(U, E, \psi)$ pour chaque $\psi \in C^0(\bar U)$.

Nous envisageons maintenant la suite

$$\dots \xrightarrow{\bar\partial} D_{p, q-1}(\mathcal{W}, E) \xrightarrow{\bar\partial} D_{p, q}(\mathcal{W}, E) \xrightarrow{\bar\partial} D_{p, q+1}(\mathcal{W}, E) \xrightarrow{\bar\partial} \dots .$$

Si $f \in C^\infty_{p, q+1}(\mathcal{W}, E)$ et $u \in D_{p, q}(\mathcal{W}, E)$, on tire de la formule de Green

$$(f, \bar\partial u)_\psi = (\mathfrak{d} f, u)_\psi\,, \tag{5}$$

avec

$$\mathfrak{d} f = (-1)^{p+1} \sum_{a, A, \beta, B} [\delta_\beta f^a_{A, \beta B} + L^a_{A, B}(f)]\, \mathrm{e}_a \otimes \omega^A \wedge \bar\omega^B, \tag{6}$$

les $L^a_{A,B}(f)$ sont des combinaisons linéaire analogues aux $M^a_{A,\beta B}$ considérées tout à l'heure ; l'opérateur δ_β s'exprime par la relation $\delta_\beta h = e^\psi \overline{V}_\beta(e^{-\psi} h)$, $h \in C^\infty(\mathcal{W})$.

LEMME 2.1. *Les opérateurs* $\bar\partial : D_{p,q+1}(\mathcal{W}, E) \to \mathcal{L}^2_{p,q+2}(\mathcal{W}, E, \psi)$ *et* $\vartheta : D_{p,q+1}(\mathcal{W}, E) \to \mathcal{L}^2_{p\,q}(\mathcal{W}, E, \psi)$ *sont préfermés.*

Preuve. Soit $\{f_\sigma\} \subset D_{p,q}(\mathcal{W}, E)$ une suite telle que $\{f_\sigma\} \to 0$ dans $\mathcal{L}^2_{p,q}(\mathcal{W}, E, \psi)$ et $\{\bar\partial f_\sigma\} \to \varphi$ dans $\mathcal{L}^2_{p,q+1}(\mathcal{W}, E, \psi)$. On a alors, pour tout $v \in D_{p,q+1}(\mathcal{W}, E)$, $(\bar\partial f_\sigma - \varphi, v)_\psi \to 0$ et $(f_\sigma, \vartheta v)_\psi \to 0$; du reste on peut écrire $(\varphi, v)_\psi = (f_\sigma, \vartheta v)_\psi - (\bar\partial f_\sigma - \varphi, v)_\psi$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et en passant à la limite pour $\sigma \to \infty$, on a $(\varphi, v)_\psi = 0$; vu l'arbitraire du choix de v on a $\varphi = 0$. La démonstration du fait que ϑ est préfermé est tout à fait analogue à celle-ci.

Les opérateurs $\bar\partial : D_{p,q+1}(\mathcal{W}, E) \to \mathcal{L}^2_{p,q+2}(\mathcal{W}, E, \psi)$ et $\vartheta : D_{p,q+1}(\mathcal{W}, E) \to \mathcal{L}^2_{p,q}(\mathcal{W}, E, \psi)$ sont donc prolongeables à deux opérateurs fermés

$$S : B^{p,q+1}_{\bar\partial}(\mathcal{W}, E, \psi) \to \mathcal{L}^2_{p,q+2}(\mathcal{W}, E, \psi) \quad \text{et}$$

$$T^* : B^{p,q+1}_{\vartheta}(\mathcal{W}, E, \psi) \to \mathcal{L}^2_{p,q}(\mathcal{W}, E, \psi), \quad \text{où}$$

$B^{p,q+1}_{\bar\partial}(\mathcal{W}, E, \psi)$, domaine de l'opérateur S, est le complété de l'espace $D_{p,q+1}(\mathcal{W}, E)$ par rapport à la norme du graphe $(\|\cdot\|^2 + \|\bar\partial\cdot\|^2)^{1/2}$, il est identifiable à l'espace des $f \in \mathcal{L}^2_{p,q+1}(\mathcal{W}, E, \psi)$ telles que $\bar\partial f$, fait au sens des distributions, soit dans $\mathcal{L}^2_{p,q+2}(\mathcal{W}, E, \psi)$ et $B^{p,q+1}_{\vartheta}(\mathcal{W}, E, \psi)$, domaine de l'opérateur T^*, est le complété de l'espace $D_{p,q+1}(\mathcal{W}, E)$ par rapport à la norme $(\|\cdot\|^2 + \|\vartheta\cdot\|^2)^{1/2}$, il est identifiable à l'espace des $f \in \mathcal{L}^2_{p,q+1}(\mathcal{W}, E, \psi)$ telles que ϑf, fait au sens des distributions ,appartienne à $\mathcal{L}^2_{p,q}(\mathcal{W}, E, \varphi)$. On introduit alors l'espace $W^{p,q+1}_\psi(\mathcal{W}, E) \overset{\text{def}}{=} B^{p,q+1}_{\bar\partial}(\mathcal{W}, E, \psi) \cap B^{p,q+1}_{\vartheta}(\mathcal{W}, E, \psi)$. $W^{p,q+1}_\psi(\mathcal{W}, E)$ est évidemment le complété de $D_{p,q+1}(\mathcal{W}, E)$ par rapport à la norme $(\|\cdot\|^2 + \|\bar\partial\cdot\|^2 + \|\vartheta\cdot\|^2)^{1/2}$, il est identifiable aux $f \in \mathcal{L}^2_{p,q+1}(\mathcal{W}, E, \psi)$ telles que $\bar\partial f$ et ϑf, faits au sens des distributions, soient dans $\mathcal{L}^2_{p,q+2}(\mathcal{W}, E, \psi)$ et $\mathcal{L}^2_{p,q}(\mathcal{W}, E, \psi)$ respectivement.

En procédant de la même manière à partir de l'opérateur $\bar\partial : D^{p,q-1}(\mathcal{W}, E) \to \mathcal{L}^2_{p,q}(\mathcal{W}, E, \psi)$, on obtient un opérateur

$$L : B^{p,q-1}_{\bar\partial}(\mathcal{W}, E, \psi) \to \mathcal{L}^2_{p,q}(\mathcal{W}, E).$$

On a alors une suite d'opérateurs *densement définis*

$$\dots \to \mathcal{L}^2_{p,q-1}(\mathcal{W}, E, \psi) \xrightarrow{L} \mathcal{L}^2_{p,q}(\mathcal{W}, E, \psi) \xrightarrow{T} \mathcal{L}^2_{p,q+1}(\mathcal{W}, E, \psi) \xrightarrow{S} \mathcal{L}^2_{p,q+2}(\mathcal{W}, E, \psi) \to \dots$$

Leurs domaines et ceux de leurs adjoints sont caractérisés par les propriétés que l'on vient d'énoncer. Dans le cas fibration on peut faire les mêmes considération et obtenir, pour tout $t \in B$ la suite

$$\to \mathcal{L}^2_{p,q-1}(X_t, E_t, \psi_t) \xrightarrow{L_t} \mathcal{L}^2_{p,q}(X_t, E_t, \psi_t) \xrightarrow{T_t} \mathcal{L}^2_{p,q+1}(X_t, E_t, \psi_t) \xrightarrow{S_t}$$

$$\xrightarrow{S_t} \mathcal{L}^2_{p,q+2}(X_t, E_t, \psi_t) \to \dots,$$

où on a posé $X_t = \pi^{-1}(t)$, $E_t = E \mid X_t$, $\psi_t = \psi \mid X_t$.

β) Lemme 2.2. (Friedrichs). *Soit* $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$, $u \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R}^N)$ *à support compact,* $v \in C^0(\mathbf{R}^N)$; *le support de* χ *soit dans la boule unité de* $\mathbf{R}^N$. *On pose* $\chi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-N}\chi\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$ *et on forme le produit de convolution* $u * \chi_\varepsilon$ e $C^\infty(\mathbf{R}^N)$. *On a alors*

(i) *si* $\varepsilon \to 0$, $v(u * \chi_\varepsilon) \to vu$ *dans* $\mathcal{L}^2(\mathbf{R}^N)$ *et la distance entre* supp u *et* supp $(u * \chi_\varepsilon)$ *ne depasse pas* ε.

(ii) *Si* v *est* C^1 *dans un voisinage de* supp u, *alors* $vD_k(u * \chi_\varepsilon) - (vD_k u) * \chi_\varepsilon \to 0$ *dans* $\mathcal{L}^2(\mathbf{R}^N)$, *quand* $\varepsilon \to 0$. *Ici* $vD_k u$ $(D_k = \partial/\partial x_k)$ *est défini au sens des distributions.*

Pour la démonstration voir, p. ex. ([9], pp. 81 et 110).

Etant donnée alors une fonction réelle $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{2n+m})$ dont le support soit dans la boule unité de $\mathbf{R}^{2n+m}$ et une partition de l'unité $\{p_i\}$ adapté au recouvrement $\{U_i\}$ on peut poser, pour toute $f \in \mathcal{L}^2_{p,q}(\mathcal{W}, E, \psi)$ a support compact, $f * \chi_\varepsilon = \sum_i (p_i f|_{U_i}) * \chi_\varepsilon$. Cela a un sens si $|\varepsilon|$ est assez petit.

Lemme 2.3. *Soit* $f \in \mathcal{L}^2_{p,q+1}(\mathcal{W}, E, \psi)$ *à support compact, et* $\delta > 0$ *tel qu'il existe* $f * \chi_\varepsilon$ *quand* $|\varepsilon| < \delta$.

(i) *Les supports des formes* $f * \chi_\varepsilon \in D_{p,q+1}(\mathcal{W}, E, \psi)$ *sont tous contenus dans un même compact de* $\mathcal{W}$ *et l'on a* $f * \chi_\varepsilon \to f$ *dans* $\mathcal{L}^2_{p,q+1}(\mathcal{W}, E, \psi)$.

(ii) *La forme* f *appartient à* $B^{p,q+1}_{\bar\partial}(\mathcal{W}, E, \psi)$ *si et seulement si la famille* $\bar\partial(f * \chi_\varepsilon)$ *converge dans* $\mathcal{L}^2_{p,q+2}(\mathcal{W}, E, \psi)$. *Cela étant vérifié on a* $\lim_{\varepsilon \to 0} \bar\partial(f * \chi_\varepsilon) = Sf$.

(iii) *La forme* f *appartient à* $B^{p,q+1}_{\delta}(\mathcal{W}, E, \psi)$ *si et seulement si la famille* $d(f * \chi_\varepsilon)$ *converge dans* $\mathcal{L}^2_{p,q}(\mathcal{W}, E, \psi)$. *Cela étant vérifié on a* $\lim_{\varepsilon \to 0} d(f * \chi_\varepsilon) = T^* f$.

Preuve. La partie (i) de l'énoncé est une conséquence immédiate du lemme 2.2. Soit $f \in B^{p,q+1}_{\bar\partial}(\mathcal{W}, E, \psi)$ à support compact.

Si l'on rapporte f à la base $e_a \otimes dz^A \wedge d\bar{z}^B$, on voit aisément de (2) que $Sf * \chi_\varepsilon = \bar{\partial}(f * \chi_\varepsilon)$, en appliquant (i) à la forme Sf on déduit que $\bar{\partial}(f * \chi_\varepsilon) \to Sf$ dans $\mathcal{L}^2_{p,q+2}(\mathcal{W}, E, \psi)$. Si au contraire $\bar{\partial}(f * \chi_\varepsilon)$ converge dans $\mathcal{L}^2_{p,q+2}(\mathcal{W}, E, \psi)$ à une forme g, on a, pour toute $u \in D_{p,q+2}(\mathcal{W}, E)$, $(f, du)_\psi = \lim_{\varepsilon \to 0} (\bar{\partial}(f * \chi_\varepsilon), u)_\psi = (g, u)_\psi$. f est donc dans $B^{p,q+1}_{\bar{\partial}}(\mathcal{W}, E, \psi)$ et $g = Sf$. L'énoncé (ii) est prouvé. On peut maintenant remarquer que l'opérateur $\mathfrak{d}$, restreint à un ouvert U_i, peut être identifié, à l'aide des cartes, à un opérateur différentiel linéaire du premier ordre dont les coefficients sont de classe C^∞ dans un voisinage de $A_i \times B_i$. On voit donc, grâce au lemme 2.2 partie (ii), que, si $f \in B^{p,q+1}_{\mathfrak{d}}(\mathcal{W}, E, \psi)$, alors $\mathfrak{d}(f * \chi_\varepsilon) \to T^* f$ dans $\mathcal{L}^2_{p,q}(\mathcal{W}, E, \psi)$. Si au contraire $\mathfrak{d}(f * \chi_\varepsilon)$ converge vers une forme h dans $\mathcal{L}^2_{p,q}(\mathcal{W}, E, \psi)$ on a, pour tout

$$v \in D_{p,q}(\mathcal{W}, E, \alpha),\ (f, \bar{\partial} v)_\varphi = \lim_{\varepsilon \to 0} (f * \chi_\varepsilon, \bar{\partial} v)_\psi = \lim_{\varepsilon \to 0} (\mathfrak{d}(f * \chi_\varepsilon), v)_\varphi = (h, v)_\varphi .$$

Il s'en suit que $f \in B_{\mathfrak{d}}(\mathcal{W}, E, \psi)$ et $h = Sf$. Le lemme est donc complètement prouvé

Remarque 2.1. Le lemme 2.3 est aussi valable dans le cas d'une seule variété analytique complexe, voir à ce propos [9], pp. 81, 110.

LEMME 2.4. *Soit* $f \in \mathcal{L}^2_{p,q+1}(\mathcal{W}, E, \psi)$ $\{\eta_\nu\}$ *une suite de fonctions réelles,* $\eta_\nu \in C^\infty_0(\mathcal{W})$, *telles que* $\bigcup_\nu \operatorname{supp} \eta_\nu = \mathcal{W}$, $\eta_\nu \leq 1$, $\eta_\nu(x) = 1$ *si* $x \in \operatorname{supp} \eta_{\nu-1}$, $|\bar{\partial}\eta_\nu| \leq 1$. *On a alors*:

(i) *Si* $f \in B^{p,q+1}_{\bar{\partial}}(\mathcal{W}, E, \psi)$, $S(\eta_\nu f) \to Sf$ *dans* $\mathcal{L}^2_{p,q+2}(\mathcal{W}, E, \psi)$;

(ii) *Si* $f \in B^{p,q+1}_{\mathfrak{d}}(\mathcal{W}, E, \psi)$, $T^*(\eta_\nu f) \to T^* f$ *dans* $\mathcal{L}^2_{p,q}(\mathcal{W}, E, \psi)$.

Preuve. Soit $f \in B^{p,q+1}_{\bar{\partial}}(\mathcal{W}, E, \psi)$, on a alors (presque partout)

$$S(\eta_\nu f) = \eta_\nu Sf + \bar{\partial}\eta_\nu \wedge f \quad \text{et donc}$$

$$\| S(\eta_\nu f) - Sf \|^2_\psi \leq 2 \| \eta_\nu Sf - Sf \|^2_\psi + 2 \int_{C_\nu - C_{\nu-1}} |f|^2 e^{-\psi}\, dV$$

où on a posé $C_\nu = \operatorname{supp} \eta_\nu$. Or puisque $Sf \in \mathcal{L}^2_{p,q+2}(\mathcal{W}, E, \psi)$, on a $\lim_{\nu \to \infty} \| \eta_\nu Sf - Sf \|^2_\psi = 0$ et puisque $f \in \mathcal{L}^2_{p,q+1}(\mathcal{W}, E, \psi)$, on a $\lim_{\nu \to \infty} \int_{C_\nu - C_{\nu-1}} |f|^2 e^{-\varphi}\, dV = 0$.

L'énoncé (i) est donc prouvé. Soit maintenant $u \in D_{p,q}(\mathcal{W}, E)$ arbitraire, on a

$$(T^* \eta_\nu f - T^* f, u)_\psi = (\eta_\nu T^* f - T^* f, u)_\psi - (f, \bar\partial \eta_\nu \wedge u)_\psi .$$

Si $f \in B_0^{p,q+1}(\mathcal{W}, E, \psi)$, on a, $\lim\limits_{\nu \to \infty} (\eta_\nu T^* f - T^* f, u)_\varphi = 0$; d'ailleurs, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que $|\bar\partial \eta_\nu| < 1$ nous donnent $|(f, \bar\partial\eta_\nu \wedge u)_\psi|^2 \leq \| u \|_\psi^2 \int\limits_{O_\nu - O_{\nu-1}} |f|^2 e^{-\psi} \, dV$, on a pourtant $\lim\limits_{\nu \to \infty} (f, \bar\partial\eta_\nu \wedge u)_\psi = 0$, cela entraîne $\lim\limits_{\nu \to \infty} \| T^* f - T^* f \|_\psi = 0$. Le lemme est donc prouvé.

3. W-ellipticité.

Définition 3.1. *Le fibré E est dit $w^{p,q}$-elliptique par rapport à la fonction ψ s'il existe une constante k telle que l'on ait*

$$\| f \|_\psi^2 \leq k (\| \bar\partial f \|_\psi^2 + \| df \|_\psi^2), \qquad \forall f \in D_{p,q}(\mathcal{W}, E). \tag{7}$$

Tout nombre k tel que (7) soit satisfait s'appelle constante de w-ellipticité de E.

Définition 3.2. *La fibré E est dit uniformement $w^{p,q}$-elliptique par rapport à la fonction ψ, s'il est w-elliptique et si ses restrictions aux feuilles le sont aussi avec une constante qui ne dépend pas de la feuille.*

Proposition 3.1. *Soit E $w^{p,q+1}$-elliptique par rapport à une fonction ψ, alors*

(i) *l'équation*

$$Tu = f \tag{1$'$}$$

admet une solution $u \in \mathcal{L}^2_{p,q}(\mathcal{W}, E, \psi)$, pour toute $f \in \mathcal{L}^2_{p,q+1}(\mathcal{W}, E, \psi)$, telle que $Sf = 0$.

(ii) *Cette solution est unique si on lui impose la condition $L^* u = 0$* (³).

Pour démontrer cette proposition nous avons besoin du

Lemme 3.1. *Si E est $w^{p,q+1}$-elliptique par rapport à ψ on a, pour toute*

(³) Cette condition est évidemment inutile si $q = 0$.

constante k de $w^{p,q+1}$*-ellipticité*

$$\|f\|_\psi^2 \leq k(\|Sf\|_\psi^2 + \|T^*f\|_\psi^2), \qquad \forall f \in W_\psi^{p,q+1}(W, E). \tag{8}$$

Preuve. Nous supposons d'abord que le support de f soit compact. La formule (7), appliquée à $f * \chi_\varepsilon$ (voir n. 2, point β) nous donne $\|f * \chi_\varepsilon\|_\psi^2 \leq$ $\leq k(\|\bar\partial(f * \chi_\varepsilon)\|_\psi^2 + \|\mathfrak{d}(f * \chi_\varepsilon)\|_\psi^2)$.

En passant alors à la limite pour $\varepsilon \to 0$, grâce au lemme 2.3. on obtient la formule (8). On peut maintenant laisser tomber l'hypothèse faite sur le support de f et introduire la suite de fonctions $\{\eta_\nu\}$ du lemme 2.4. On a certainement $\|\eta_\nu f\|_\psi^2 \leq k(\|S\eta_\nu f\|_\psi^2 + \|T^*\eta_\nu f\|_\psi^2)$ pour tout ν; en passant à la limite pour $\nu \to \infty$, grâce au lemme 2.4. on obtient la formule (8). Le lemme 3.1. est donc prouvé.

Démonstration de la proposition 3.1. Nous rappelons un théorème classique d'analyse ([9], pp. 78, 79).

Soient H_1 *et* H_2 *deux espaces hilbertiens,* D_A *un sous-espace dense de* H_1, $A: D_A \to H_2$ *un opérateur linéaire fermé,* F *un sous-espace fermé de* H_2. *Alors* F *est l'image de* A *si et seulement s'il existe une constante* k *telle que l'on ait*

$$\|f\|_{H_2}^2 \leq k\|A^*f\|_{H_1}^2, \qquad \forall f \in F \cap D_{A^*}, \tag{9}$$

D_{A^*} *étant le domaine (dans* H_2*) de l'opérateur* A^* *adjoint de* A. *En plus, cela étant vérifié,* F *est l'image par* T *de la fermeture de* $\mathfrak{Im}\, A^*$.

On peut alors appliquer ce théorème en posant

$$H_1 = \mathcal{L}^2_{p,q}(\mathcal{W}, E, \psi), \qquad H_2 = \mathcal{L}^2_{p,q+1}(\mathcal{W}, E, \psi), \qquad F = \operatorname{Ker} S,$$

$$D_A = B^{p,q}_{\bar\partial}(\mathcal{W}, E, \psi), \qquad A = T.$$

On a évidemment $D_{A^*} = B_{\mathfrak{d}}^{p,q+1}(\mathcal{W}, E, \psi)$ et $F \cap D_{A^*} = B_{\mathfrak{d}}^{p,q+1}(\mathcal{W}, E, \psi) \cap$ $\cap \operatorname{Ker} S \subset W_\psi^{p,q+1}(\mathcal{W}, E)$. La condition (9), traduite dans notre cas, n'est autre que la relation (8) qu'on vient de prouver, il s'en suit que l'application $T: B^{p,q}_{\bar\partial}(\mathcal{W}, E, \psi) \to \ker S$ est surjective. L'énoncé (i) est donc prouvé. On remarque maintenant que l'on peut choisir la solution u dans la fermeture (dans $\mathcal{L}^2_{p,q}(\mathcal{W}, E, \psi)$) de $\mathfrak{Im}\, T^*$, on a donc une suite de Cauchy $\{v_\nu\}$ dans $B_{\mathfrak{d}}^{p,q+1}(\mathcal{W}, E, \psi)$ telle que $T^*v_\nu \to u$ dans $\mathcal{L}^2_{p,q}(\mathcal{W}, E, \psi)$.

Alors du fait que $L^* \circ T^* = 0$, on tire que $L^*u = \lim_{\nu \to \infty} L^* \circ T^* v_\nu = 0$. Il existe donc une solution u de (1)' telle que $L^*u = 0$. Toute différence u' de deux telles solutions appartient à $W_\psi^{p,q}(\mathcal{W}, E)$ puisque $L^*u' = 0$,

$Tu' = 0$; d'ailleurs l'inégalité (8), écrite pour le bidegré (p, q) est $\| u \|^2 \leq$ $\leq k (\| Tu \|^2_\psi + \| L^* u \|^2_\psi)$, on a donc $u' = 0$.

La proposition 3.1. est donc prouvée.

PROPOSITION 3.2. *Si, pour toute fonction réelle $\gamma \in C^0(W)$ il existe une fonction réelle $\psi \in C^\infty(W)$ telle que $\gamma(x) \leq \psi(x)$ $(\forall x \in W)$ et que E soit $w^{p,q+1}$-elliptique par rapport à ψ, alors l'équation*

$$\bar\partial u = f. \tag{1}$$

a une solution (faible) $u \in \mathcal{L}^2_{p,q}(\mathcal{W}, E, \mathrm{loc})$ pour tout $f \in \mathcal{L}^2_{p,q+1}(\mathcal{W}, E, \mathrm{loc})$ avec $\bar\partial f = 0$.

Démonstration. Il existe certainement une fonction continue γ telle que $f \in \mathcal{L}^2_{p,q+1}(\mathcal{W}, E, \gamma)$, on a $f \in \mathcal{L}^2_{p,q+1}(\mathcal{W}, E, \psi)$. On applique alors la proposition précedente (partie (i)) et l'on a une forme $u \in \mathcal{L}^2_{p,q}(\mathcal{W}, E, \psi) \subset$ $\subset \mathcal{L}^2_{p,q}(W, E, \mathrm{loc})$ satisfaisant (1). La proposition est ainsi prouvée.

4. Nous nous proposons ici de prouver le théorème I.

DÉFINITION 4.1. *Le feuilletage $\mathcal{W}$ est dit être une fibration s'il existe une variété différentiable de Hausdorff B [4] et une application différentiable $\pi : \mathcal{W} \to B$ dont les fibres soient les feuilles de $\mathcal{W}$.*

Remarque. Il n'est pas restrictif de supposer que π soit surjective, dans ce cas doit être $\dim B = m$.

Nous admettrons dans la suite que π soit surjective.

Remarque. On choisit les applications coordonnées Φ'_i de façon que leurs images $A_i \times B_i$ soient le produit d'un disque de $\mathbf{C}^n$ par un disque de $\mathbf{R}^m$.

S'il s'agit d'une fibration, on peut même identifier (à un changement de coordonnées près) B_i à un sous-ensemble de B, de façon telle que l'on ait $pr_{B_i} \circ \Phi_i = \pi$.

On pose alors $X_t = \pi^{-1} t \; (t \in B)$, $E_t = E \mid X_t$.

---

(4) En effet toute variété est supposée ici être de Hausdorff; on a voulu quand même le spécifier à cette endroit car, en otant cette hypothèse à la définition 4.1., on aurait défini la structure de feuilletage simple.

L'indice t en haut ou en bas d'une forme (ou d'une fonction) sert à indiquer: « restriction à X_t » ; d'ailleurs les suffixes t ne seront employés qu'aux endroits où leur manque pourrait gêner la compréhension.

Par exemple, si $w \in D_{p,q}(W, E)$, $\| w \|_{\psi_t}$ veut dire $\int_{X_t} | w^t | \, e^{-\psi_t} \, d V_t$.

On revient au cas feuilletage.

La restriction w_i d'une forme (ou fonction) w de $\mathcal{W}$ à un voisinage coordonné U_i peut être naturellement identifiée à une famille de formes (ou fonctions) $\{w_t\}_{t \in B_i}$ sur A_i en posant $w_t = (pr_{A_i} \circ \Phi_i)^* \, w_i$.

LEMME 4.1. *Soit $U_i \in \mathcal{U}$, il existe une constante c_i qui ne dépend que de l'indice i, telle que l'on ait, pour toute $\psi \in C^0(\mathcal{W}) \cap C^\infty(\widehat{\mathcal{W}})$*

$$\int (\lambda_\psi - c_i) \, |f|^2 \, e^{-\psi} \, d V + \frac{1}{2} \sum_{a, A, \beta, B} \int | \overline{V}_\beta f^a_{A, B} |^2 \, e^{-\psi} \, d V \leq \tag{11}$$

$$\leq 2 \, (\| \bar\partial f \|^2_\varphi + \| \mathfrak{d} f \|^2_\varphi), \quad \textit{pour toute } f \in D_{p,q}(U_i, E), \textit{ et}$$

$$\int (\lambda^t_\psi - c_i) \, | u |^2 \, e^{-\psi_t} \, d V_t + \frac{1}{2} \sum_{a, A, \beta, B} \int | \overline{V}^t_\beta \, u^a_{AB} |^2 \, e^{-\psi_t} \, d V_t \leq \tag{12}$$

$$\leq 2 \, \{ \| \bar\partial u \|^2_{\varphi_t} + \| \mathfrak{d}_t u \|^2_{\varphi_t} \}, \quad \textit{pour tout } u \in D_{p,q}(A_i, E_t), \textit{ et tout } t \in B_i .$$

Démonstration. Soit $Af = (-1)^p \, \overline{V}_\beta f^a_{AB} \, \omega^A \wedge \overline{\omega}^{\beta B} \otimes \mathrm{e}_a \quad Cf = (-1)^{p+1} \cdot \cdot \, \partial_\beta f^a_{A, \beta C} \, \mathrm{e}_a \otimes \omega^A \wedge \overline{\omega}^C$, des formules (4) et (6) on tire

$$| A - \bar\partial f | < k_i |f| \quad \text{et} \quad | C - \mathfrak{d} f | < k_i |f|$$

pour toute $f \in D_{p,q}(U_i, E)$, les constantes k_i ne dépendent que de i. De ces deux relations on obtient

$$\| Af \|^2_\psi + \| Cf \|^2_\psi \leq 2 \, \{ \| \bar\partial f \|^2_\psi + \| \mathfrak{d} f \|^2_\psi + 2k_i \, \| f \|^2_\psi \} \tag{13}$$

et

$$\| Af \|^2_{\psi_t} + \| Cf \|^2_{\psi_t} \leq 2 \, \{ \| \bar\partial f \|^2_{\psi_t} + \| \mathfrak{d} f \|^2_{\psi_t} + 2k_i \, \| f \|^2_{\psi_t} \}. \tag{14}$$

Nous posons maintenant $c_\alpha = \frac{\partial}{\partial z_\beta} b^\beta_\alpha$, le lemme de Green nous donne alors

$$(15)\qquad \int v \nabla_\alpha u e^{-\psi} \, dV = -\int u \delta_\alpha v e^{-\psi} \, dV + \int uv \, c_\alpha e^{-\psi} dV,$$

pour tout $u, v \in C_0^\infty(U_i)$,

$$(16)\qquad \int_{A_i} v_t \nabla^t_\alpha u_t e^{-\psi_t} \, dV^t = -\int_{A_i} u_t \delta^t_\alpha v_t e^{-\psi_t} \, dV_t - \int_{A_i} u_t v_t c_{\alpha t} e^{-\psi_t} \, dV_t,$$

pour tout $u^t, v^t \in C_0^\infty(A_i)$.

On montre avec simples calculs que l'on a

$$(17)\qquad [\nabla_\beta, \overline{\nabla}_\gamma] = c^\lambda_{\gamma\beta} \nabla_\lambda - \overline{c}^\lambda_{\beta\gamma} \overline{\nabla}_\lambda, \quad \text{avec } c^\lambda_{\beta\gamma} \in C^\infty(\overline{U}_i) \text{ (5)}$$

$$(18)\qquad [\delta_\beta, \overline{\nabla}_\gamma] = [\nabla_\beta, \overline{\nabla}_\gamma] + \overline{\nabla}_\gamma \nabla_\beta \psi .$$

Nous posons ensuite $\partial \overline{\partial} u = \mathcal{L}_{\beta\gamma} u \overline{\omega}^\gamma \wedge \omega^\beta$, on a alors

$$(19)\qquad \mathcal{L}_{\beta\gamma} = \nabla_\beta \overline{\nabla}_\gamma + \overline{c}^\lambda_{\beta\gamma} \overline{\nabla}_\lambda = \overline{\nabla}_\gamma \nabla_\beta + c^\lambda_{\gamma\beta} \nabla_\lambda .$$

On obtient alors par élimination de (17), (18), (19)

$$(20)\qquad [\delta_\beta, \overline{\nabla}_\gamma] = c^\lambda_{\gamma\beta} \delta_\lambda - \overline{c}^\lambda_{\beta\gamma} \overline{\nabla}_\lambda + \mathcal{L}_{\beta\gamma} \psi .$$

Pour tout couple u, v de fonctions en $C_0^\infty(U_i)$ on tire de (15)

$$\int (\delta_\beta u \, \overline{\delta_\gamma w} - \overline{\nabla}_\gamma u \, \overline{\nabla_\beta w}) \, e^{-\psi} \, dV = \int \overline{w} \, [\delta_\beta, \overline{\nabla}_\gamma] \, u \, e^{-\psi} \, dV + $$
$$+ \int \overline{w} \, \delta_\beta u \, \overline{c}_\gamma \, e^{-\psi} \, dV - \int \overline{w} \, \overline{\nabla}_\gamma u \, c_\beta \, e^{-\psi} \, dV,$$

la même relation peut être obtenue de la formule (16) avec des intégrales sur A_i, en employant alors (20) et ensuite (15) et (16) on a

$$(21)\qquad \int (\delta_\beta u \, \overline{\delta_\gamma w} - \overline{\nabla}_\gamma u \, \overline{\nabla_\beta w}) \, e^{-\psi} \, dV = \int u \, \overline{w} \, \mathcal{L}_{\gamma\beta} \psi \, e^{-\psi} \, dV + J_1 + J_2 + J_3$$

---

(5) Les fonctions $c^\lambda_{\beta\gamma}$ peuvent être simplement exprimées à l'aide des matrices « a » et « b » $(= a^{-1})$, on a $c^\lambda_{\gamma\beta} = b^e_\beta \overline{\nabla}_\gamma a^\lambda_e$.

et,

$$\int_{A_i} (\delta_\beta^t u_t \overline{\delta_\gamma w_t} - \bar{\nabla}_\gamma^t u_t \nabla_\beta^t \bar{w}_t) e^{-\psi_t} d V_t = \int_{A_i} u_t \bar{w}_t \mathcal{L}_{\gamma\beta} \psi_t e^{-\psi_t} d V_t + \tag{22}$$

$$+ I_1^t + I_2^t + I_3^t,$$

pour tout $u, w \in C_0^\infty(U_i)$, avec

$$I_1^t = \int_{A_i} \bar{w}_t [\bar{c}_{\beta\gamma t}^\lambda \bar{\nabla}_\lambda^t u_t + c_\beta^t \bar{\nabla}_\gamma^t u_t] e^{-\psi_t} d V_t,$$

$$I_2^t = \int_{A_i} u_t [c_{\gamma\beta t}^\lambda \nabla_\lambda^t w_t + \bar{c}_\gamma^t \nabla_\beta^t \bar{w}_t] e^{-\psi_t} d V_t,$$

$$I_3^t = \int_{A_i} u_t \bar{w}_t [c_{\gamma\beta t}^\lambda c_\lambda^t + c_\beta^t \bar{c}_\gamma^t - \nabla_\lambda^t c_{\gamma\beta t}^\lambda - \nabla_\beta^t \bar{c}_\gamma^t] e^{-\psi_t} d V_t,$$

et $J_h = \int_{B_i} I_h^t dt$; $h = 1, 2, 3$. On obtient alors de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|I_1^t| \leq c_1 \sigma \int_{A_i} |w^t|^2 e^{-\psi_t} d V_t + \frac{c_1}{\sigma} \int_{A_i} \sum_\lambda |\bar{\nabla}_\lambda^t u^t|^2 e^{-\psi_t} d V_t,$$

$$|I_2^t| \leq c_2 \sigma \int_{A_i} |u^t|^2 e^{-\psi_t} d V_t + \frac{c_2}{\sigma} \int_{A_i} \sum_\lambda |\nabla_\lambda w^t|^2 e^{-\psi_t} d V_t$$

où c_1 et c_2 sont des constantes et σ un réel positif arbitraire, on a du reste

$$|I_3^t| \leq c_3 \int_{A_i} u^t \bar{w}^t e^{-\psi_t} d V_t \quad (c_3 \text{ constante}).$$

On tire alors de (21) et (22)

$$\int_{A_i} (\delta_\beta^t u_t \overline{\delta_\gamma^t w_t} - \bar{\nabla}_\gamma^t u \nabla_\beta^t \bar{w}_t) e^{-\psi_t} d V_t \geq \int_{A_i} u_t \bar{w}_t (\mathcal{L}_{\gamma\beta} \psi_t - c_3) e^{-\psi_t} d V_t -$$

$$- c_1 \sigma \int_{A_i} |w_t|^2 e^{-\psi_t} d V_t - c_2 \sigma \int_{A_i} |u_t|^2 e^{-\psi_t} d V_t - \frac{c_1}{\sigma} \int_{A_i} \sum_\lambda |\bar{\nabla}_\lambda^t u_t|^2 e^{-\psi_t} d V_t -$$

$$- \frac{c_2}{\sigma} \int_{A_i} \sum_\lambda |\bar{\nabla}_\lambda^t w_t|^2 e^{-\psi_t} d V_t, \quad \text{pour tout } u, w \in C_0^\infty(U_i),$$

et la même relation avec les mêmes constantes où les intégrales sont faites sur U_i.

En rappelant que l'on a ([9], p. 112, formule 5.2.5)

$$(24)\qquad \| A_t f_t \|^2_{\psi_t} + \| C_t f_t \|^2_{\psi_t} = \int_{A_i} \sum_{a,A,B,\beta} | \bar{\nabla}^t_\beta f^a_{tAB} |^2 e^{-\psi_t} dV_t +$$

$$+ \int_{A_i} \sum_{a,A,C,\beta,\gamma} (\delta^t_\beta f^a_{tA,\beta C} \overline{\delta^t f^a_{A,\beta C}} - \bar{\nabla}^t_\gamma f^a_{tA,\beta C} \overline{\nabla^t_\beta f^a_{tA,\gamma C}}) e^{-\psi_t} dV_t$$

et la même formule avec intégration sur U_i, on obtient de (23)

$$\| Af \|^2_\psi + \| Cf \|^2_\psi \geq \left(1 - \frac{c_4}{\sigma}\right) \int \sum_{a,A,B,\beta} | \bar{\nabla}_\beta f^a_{A,B} |^2 e^{-\psi} dV +$$

$$+ \int (\lambda - c_5) | f |^2 e^{-\psi} dV \quad \text{et}$$

$$\| A_t f_t \|^2_{\psi_t} + \| C_t f_t \|^2_{\psi_t} \geq \left(1 - \frac{c_4}{\sigma}\right) \int_{A_i} \sum_{a,A,B,\beta} | \bar{\nabla}^t_\beta f^a_{tA,B} |^2 e^{-\psi_t} dV_t +$$

$$+ \int_{A_i} (\lambda^t - c_5) | f_t |^2 e^{-\psi_t} dV_t;$$

l'on pose alors $\sigma = 2c_4$, $f_t = u$, $c_i = c_5 + 4k_i^2$, on substitue ces deux dernières relations dans (13) et (14) respectivement et on obtient (11) et (12).

Le lemme est donc démontré.

LEMME 4.2. *Il existe une fonction continue g sur $\mathcal{W}$, indépendante de ψ, telle que, pour toute $f \in D^{p,q}(\mathcal{W}, E)$, et toute $\psi \in C^2(\widehat{\mathcal{W}}) \cap C^0(\mathcal{W})$ réelle on ait*

$$(25)\qquad \int (\lambda_\psi - g) | f |^2 e^{-\psi} dV + \frac{1}{2} \int \sum_{a,A,B,\beta} | \bar{\nabla}_\beta f^a_{A,B} |^2 e^{-\psi} dV \leq$$

$$\leq 4 (\| \bar{\partial} f \|^2_\psi + \| \eth f \|^2_\psi)$$

et si $\mathcal{W}$ est une fibration, alors pour tout $u \in D^{p,q}(X_t, E_t)$ et tout $t \in B$, on a

$$\int_{X_t} (\lambda_\psi - g) \, | u |^2 e^{-\psi} d V_t + \frac{1}{2} \int_{X_t} \sum_{a,A,B\beta} | \bar{\nabla}_\beta u^a_{A.B} |^2 e^{-\psi_t} d V_t \leq \tag{26}$$

$$\leq 4 (\| \bar{\partial} u \|^2_{\psi_t} + \| du \|^2_{\psi_t}).$$

Démonstration. Soit $p \in C^\infty_0 (U_i)$, on a

$$| \bar{\partial} p f |^2 = | p \bar{\partial} f + \bar{\partial} p \wedge f |^2 \leq 2 | p \bar{\partial} f |^2 + 2 | \bar{\partial} p |^2 | f |^2 \qquad \text{et}$$

$$| \eth p f |^2 = | p \eth f + (-1)^{p+1} f^a_{A,\beta C} \nabla_\beta p \, \omega^A \wedge \bar{\omega}^B \otimes e_a |^2 \leq$$

$$\leq 2 | p \eth f |^2 + 2 \sum_{\beta\gamma} | \nabla_\beta p | \, | \overline{\nabla_\gamma p} | \, | f |^2 .$$

Soit alors p_i^2 une partition de l'unité sur $\mathcal{W}$ avec $p_i \in C^\infty_0 (U_i)$. Des relations précedentes on tire

$$\sum_i \| \bar{\partial} p_i f \|^2_\psi \leq 2 \| \bar{\partial} f \|^2_\psi + \| c' f \|^2_\psi ,$$

$$\sum_i \| \eth p_i f \|^2_\psi \leq 2 \| \eth f \|^2_\psi + \| c'' f \|^2_\psi$$

$$\sum_i \| \bar{\partial} p_i u \|^2_{\psi_t} \leq 2 \| \bar{\partial} u \|^2_{\psi_t} + \| c'_t u \|^2_{\psi_t}$$

$$\sum_i \| \eth p_i u \|^2_{\psi_t} \leq 2 \| \eth u \|^2_{\psi_t} + \| c''_t u \|^2_{\psi_t}$$

où c' et c'' sont deux fonctions continues positives sur $\mathcal{W}$. Soit c une fonction continue sur $\mathcal{W}$ telle que $\sup_{U_i} c < c_i$; il suffit alors de poser $g = c + c' + c''$ pour obtenir (25) et (26).

Démonstration du théorème I. On peut choisir sur $\mathcal{W}$, grâce au lemme 1.1., une fonction plurisousharmonique φ, qui satisfait (A) et telle que

(i) $\lambda_\varphi (x) > g (x) + 4$, pour tout $x \in \mathcal{W}$, g etant la fonction qui apparait dans (25).

(ii) $f \in \mathcal{L}^2_{p,q+1} (\mathcal{W}, E, \varphi)$.

On a par conséquent

$$\|f\|_\varphi^2 \leq \|\bar{\partial} f\|_\varphi^2 + \|\mathfrak{d} f\|_\varphi^2 . \tag{27}$$

Le fibré E est donc uniformement $w^{p,q+1}$ *- elliptique (de constante* 1) *par rapport à* φ *e à toute fonction réelle plurisubharmonique* ψ, *supérieure à* φ.

De la proposition 3.2 et du lemme 1.1 découle donc le théorème.

II$^{\text{ème}}$ PARTIE

5. Soit maintenant M une variété différentiable.

Soit $\{v_t\}_{t \in B}$ une famille de champs différentiables de vecteurs sur M, de classe C^k par rapport au paramètre t et aux coordonnées sur M, $\{\gamma_\lambda\}$ un groupe local (1) sur B de vitesse u. Le couple $(\{v_t\}, \{\gamma_\lambda\})$ détermine d'une façon canonique un groupe local $\{\Gamma_\lambda\}$ sur $M \times B$ de projection $\{\gamma_\lambda\}$, à savoir celui engendré par le champ de vecteurs $w(x, t) = pr_B^{-1} u(t) + pr_M^{-1} v_t(x)$ (2).

On va donner une condition sur $\{v_t\}$ pour que Γ_λ, pour un λ fixé, opère sur un voisinage saturé d'une fibre.

Proposition 5.1. *Si les trajectoires de* $\{\gamma_\lambda\}$ *ne sont pas closes et on peut fixer sur M une métrique riemannienne complète telle que les longueurs des champs de vecteurs* v_t $(t \in B)$ *soient equibornées, alors, pour tout* $t \in B$ *et* λ *tel qu' il existe* $\gamma_\lambda t$, *les applications* Γ_λ *definissent un difféomorphisme* $\Gamma_\lambda : M \times \{t\} \to M \times \{\gamma_\lambda t\}$.

Démonstration. On va d'abord prouver l'énoncé suivant.

(A) Soient t_1 e $t_2 \in B$ sur la même trajectoire de $\{\gamma_\lambda\}$. Toute trajectoire de $\{\Gamma_\lambda\}$ qui rencontre $M \times \{t_1\}$ rencontre aussi $M \times \{t_2\}$.

Soit donc $t_2 = \gamma_\lambda t_1$, on peut supposer $\lambda > 0$, soit $x \in M$, $l \equiv \{\Gamma_\mu(x, t_1), 0 < \mu < \lambda_0\}$ la demi-trajectoire maximale de $\{\Gamma_\lambda\}$ issue de (x, t_1) (3). Nous supposons, par absurde, que $\lambda_0 < \lambda$. Il existe alors $\gamma_{\lambda_0}^t$.

---

(1) Tous les groupes locaux envisagés dans la suite seront à un seul paramètre formés par des difféomorphismes (locaux).

(2) La signification physique de $\{\Gamma_\lambda\}$ est tres claire. Si $M =$ espace physique, $B =$ axe temporel, $\{\gamma_\lambda\} =$ translations temporelles, alors $\{\Gamma_\lambda\}$ est le mouvement engendré par le champ de vitesses euleriennes $v(x, t) = v_t(x)$, v_t ne dépend de $t \Longleftrightarrow \{\Gamma_\lambda\}$ stationnaire.

(3) S'il était $l \equiv \{\Gamma_\mu(x, t), 0 < \mu < \infty\}$, (A) serait trivial.

On considère alors sur M de chemin $c : \mu \rightsquigarrow pr_M \Gamma_\mu(x, t_1)$, $0 < \mu < \lambda_0$; son vecteur tangent au point $c\mu$ est $pr_M \dot{\Gamma}_\mu(x, t_1) = pr_M w(c\mu) = v_{\gamma_\mu t_1}(c\mu)$ dont la longueur est bornée.

Il s'en suit que $\mathfrak{Im}\, c$ est borné dans M et donc (M est complète) relativement compact. Le chemin l est contenu dans le produit des ensembles $\mathfrak{Im}\, c \subset\subset M$, $\bigcup_{0 \leq \mu < \lambda_0} \gamma_\mu c_1 \subset\subset B$, il est donc relativement compact et il n'est pas fermé car sa projection $\bigcup_{0 \leq \mu < \lambda_0} \gamma_\mu t$ sur B, ne contenant pas le point $\gamma_{\lambda_0} t \in B$, n'est pas compacte. Soit $\{\mu_i\} \to \lambda_0$ une suite numerique positive croissante, il existe, au choix d'une sous-suite près, $z = \lim_{i \to \infty} \Gamma_{\mu_i}(x, t_1) \in \bar{l}$. On a alors $pr_B z = \lim_{i \to \infty} pr_B \Gamma_i(x, t_1) = \lim_{i \to \infty} \gamma_{\mu_i} t_1 = \gamma_{\lambda_0} t_1$.

Soit $l'' : \mu \to M \times B$ la demi-trajectoire de w issue de z. $l'' \cup \bar{l}$ est un chemin continu, et, en dehors du point $z = l'' \cap \bar{l} = l''(0)$, il est C^∞. D'ailleurs la relation $\lim_{\mu \to \lambda_0} \dot{l}(\mu) = \lim_{\mu \to 0} \dot{l}''(\mu) = w(z)$ entraîne que $l'' \cup l$ est une trajectoire de w, $l'' \cup l$ est donc différentiable. On peut maintenant considérer la trajectoire maximale l' de $\{\Gamma_\lambda\}$ issue de z. Ce qui précède entraîne $l'' \cup l \subset l'$, l est donc contenu dans l'. On pose $(x, t_1) = \Gamma_{\lambda_1} z$. On veut prouver que $\lambda_1 = -\lambda_0$. En effet, sur l'intervalle $0 \leq \mu \leq \lambda_0$ on peut définir une fonction continue φ telle que $\Gamma_\mu(x, t) = \Gamma_{\varphi\mu} z$ et on a $\lim_{\mu \to \lambda_0} \varphi u = 0$ et $\lambda_1 + \mu = \varphi\mu$ car $\Gamma_\mu \circ \Gamma_{\lambda_1} z = \Gamma_{\varphi\mu} z$, en passant à la limite pour $\mu \to \lambda_0$, on a $\lambda_1 = -\lambda_0$. Il en suit $z = \Gamma_{\lambda_0}(x, t)$, ce qu'on avait exclu.

L'énoncé (A) est donc prouvé.

On remarque maintenant qu'aucune trajectoire de $\{\Gamma_\lambda\}$ ne rencontre deux fois la même fibre $M \times \{t\}$, en effet, s'il était, $pr_B \Gamma_{\lambda_1} z = pr_B \Gamma_{\lambda_2} z$ pour quelque $z \in M \times B$, on avait $\gamma_{\lambda_1} pr_B z = \gamma_{\lambda_2} pr_B z$ ce qui entraînerait $\lambda_1 = \lambda_2$, à cause des hypothèses qu'on a fait sur $\{\gamma_\lambda\}$. Les difféomorphismes (locaux) Γ_λ engendrent donc une correspondance biunivoque $\Gamma_\lambda : M \times \{t\} \to M \times \{\gamma_\lambda t\}$ qui est de classe C^∞ par des arguments bien élementaires de géometrie differentielle. La proposition est ainsi prouvée.

6. α) Nous énonçons brièvement ici quelques résultats contenus dans [3] n. 2 et dans [15]. Soit X variété hermitienne complète, $\dim_{\mathbf{C}} X > 1$, $E \to X$ un fibré hermitien de métrique h, $\Box = \bar{\partial}\mathfrak{d} + \mathfrak{d}\bar{\partial}$ l'opérateur de Laplace-Beltrami. On a

$$\|\bar{\partial} f\|^2 + \|\mathfrak{d} f\|^2 \leq \sigma \|\Box f\|^2 + \frac{1}{\sigma}\|f\|^2, \quad \forall f \in W^{p,q}(X, E), \quad \forall \sigma \in \mathbf{R}^+. \tag{28}$$

On suppose E $W^{p,q+1}$-elliptique de constante c, c'est à dire que l'on ait

$$\|f\|^2 \leq c\{\|\bar{\partial} f\|^2 + \|\mathfrak{d} f\|^2\}, \quad \forall f \in D_{p,q+1}(X, E).$$

On a vu (lemme 3.1) que ceci equivaut à

$$(29)\qquad \|f\|^2 \leq c\{\|\bar\partial f\|^2 + \|\mathfrak{d} f\|^2\},\quad \forall f \in W^{p,\,q+1}(X, E).$$

De (28) et (29), pour $\sigma = 2c$, on tire

$$(30)\qquad \|f\|^2 \leq 4c^2\|\square f\|^2,\quad \forall f \in W^{p,\,q+1}(X, E),$$

$$(31)\qquad \|\bar\partial f\|^2 + \|\mathfrak{d} f\|^2 \leq 4c\,\|\square f\|^2,\quad \forall f \in W^{p,\,q+1}(X, E).$$

LEMMA 6.1. *Pour toute* $f \in \mathcal{L}^2_{p,\,q+1}(X, E) \cap C^\infty_{p,\,q+1}(X, E)$ *telle que* $\bar\partial f = 0$, *il existe un seul* $w \in W^{p,\,q+1}(X, E) \cap C^\infty_{p,\,q+1}(X, E)$, *tel que l'on ait* $\bar\partial \mathfrak{d}\, w = f$, *et* $\mathfrak{d}\,\bar\partial\, w = 0$.

LEMME 6.2. *Pour toute* $f \in \mathcal{L}^2_{p,\,q+1}(X, E) \cap C^\infty_{p,\,q+1}(X, E)$ *il existe un seul* $w \in W^{p,\,q+1}(X, E) \cap C^\infty_{p,\,q+1}(X, E)$ *tel que l'on ait* $\square\, w = f$.

β) Il existe une application linéaire $\varkappa : C^\infty_{p,\,q+1}(X, E) \to C^\infty_{p,\,q+1}(X, E)$ telle que l'on ait $(\varkappa f, f) \leq \|\bar\partial f\|^2 + \|\mathfrak{d} f\|^2$, $\forall f \in D_{p,\,q+1}(X, E)$ et les coefficients de $\varkappa$ sont des fonctions continues des coefficients de la métrique de X, de ceux de la métrique de E et de leurs dérivées.

Si l'on a la métrique $h' = e^{\psi} h$, où $\psi : X \to \mathbf{R}$ est différentiable, la nouvelle forme $\varkappa'$ est donnée par $(\varkappa' f)^a_{A,B} = (\varkappa f)^a_{A,\,B} + \sum\limits_1^n (\mathcal{L}\psi)_{\alpha,\,\beta_i} f^a_{A,\,B(\beta_i)}$, où on a posé $B(\beta_i) = \beta_1, \dots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \dots, \beta_{q+1}$ (voir [15], p. 94, dernière formule).

Soient μ et λ les fonctions « plus petite valeur propre de $\varkappa$ » et « plus petite valeur propre de $\mathcal{L}\psi$ ». On a donc

$$(\varkappa' f, f) \geq \int (\mu + \lambda)\,|f|^2\, dV,\quad \forall f \in D_{p,\,q+1}(X, E).$$

Fixons un nombre $a > 0$ et choissons ψ telle que $\lambda(x) \geq \dfrac{1}{a} - \mu(x)$, $\forall x \in X$. On a alors

$$\|f\|^2 \leq a\{\|\bar\partial f\|^2 + \|\mathfrak{d} f\|^2\},\quad \forall f \in D_{p,\,q+1}(X, E).$$

Par suite E est $W^{p,\,q+1}$-elliptique de constante a, $\forall p$, $\forall q$.

γ) Soit U un ouvert coordonné de X, $z_0 \equiv (z_0^1, \dots, z_0^n) \in U$. On pose $z^\alpha = x^\alpha + \sqrt{-1}\, x^{\alpha+n}$, $\mathcal{B}_\varrho \equiv \left\{ z \in U,\ \sum\limits_1^{2n} (x_0^\alpha - x^\alpha)^2 \leq \varrho^2 \right\}$ (ϱ assez petit) et, pour toute forme $\eta \in C^{\infty}_{p,q}(\bar{U}, E)$,

$$\|\eta\|^2_{j,\varrho} = \sum_{0}^{j}{}_{l} \sum_{|L| \leq l} \sum_{a, A, B} \int_{\mathcal{B}_\varrho} \left| \frac{\partial^{|L|}}{\partial x^L} \eta^a_{A,B} \right|^2 dV.$$

L'inégalité de Friedrichs ([6] et [11] lemme 3) donne alors

$$\|\eta\|^2_{j+2,\,\varepsilon/2} \leq c'(k, \varepsilon) \{ \|\Box \eta\|^2_{j,\varepsilon} + \|\eta\|^2_{0,\varepsilon} \}, \tag{32}$$

où la constante $c'(k, \varepsilon) > 0$ ne dépend que de k et ε.

Soit $D^{(h)}$ un opérateur de dérivation de degré h par rapport aux variables $x^i \, (i = 1, \dots, 2n)$; l'inégalité de Sobolev ([5], pp. 232-233 ou bien [11] lemme 2), donne pour tout $y \in \mathcal{B}_{\varepsilon/2}$,

$$|(D^{(h)} \eta^a_{A,B})(y)|^2 \leq c''(j, h, \varepsilon) \|\eta\|^2_{j+h,\,\varepsilon/2}, \quad \forall h, \forall j > n. \tag{33}$$

De (32) et (33) résulte alors

$$|(D^{(h)} \eta^a_{A,B})(y)|^2 \leq c_1(j, h, \varepsilon) \{ \|\Box \eta\|^2_{j+h-2,\,\varepsilon} + \|\eta\|^2_{0,\varepsilon} \}, \quad \forall h, \forall j > n \geq 2. \tag{34}$$

7. Soit $\mathcal{W} \xrightarrow{\pi} B$ une déformation différentiable d'une variété de Stein X, avec $\dim_{\mathbf{C}} X > 1$. On suppose $\mathcal{W} \xrightarrow{\pi} B$ *triviale à l'infini*, c'est à dire qu'il existe en isomorphisme de fibrés differentiables $\mathcal{T} : X_0 \times B \to \mathcal{W}$ et un compact $C_0 \subset X_0$, tels que $\mathcal{T} \,|\, [(X_0 - C_0] \times \{t\}] : X_0 - C_0 \to X_t$ soit biholomorphe sur son image, $\forall t \in B$. On pose $C = \mathcal{T}(C_0, B)$, $C_t = C \cap X_t = \mathcal{T}(C_0 \times \{t\})$.

On peut supposer que $\mathcal{T} \,|\, (X_0 \times \{0\}) = id_{X_0}$. Introduisons les translations $\gamma_{st} : X_s \to X_t$, obtenues en composant l'application $\mathcal{T}^{-1} \,|\, X_s$, l'application triviale $(X_0 \times \{s\}) \to (X_0 \times \{t\})$, et $\mathcal{T} \,|\, (X_0 \times \{t\})$. On a $\gamma_{ss} = id_{X_s}$, $\gamma_{st}\gamma_{tl} = \gamma_{sl}$, γ_{st} et un difféomorphisme et applique X_s sur X_t, et $\gamma_{st} \,|\, (X_s - C_s) : (X_s - C_s) \to (X_t - C_t)$ est biholomorphe.

PROPOSITION 7.1. *Pour tout fibré semi-holomorphe $E \to \mathcal{W}$, il existe une restriction $\mathcal{W}_1 \xrightarrow{\pi} B_1$ de $\mathcal{W} \xrightarrow{\pi} B$, une métrique kählerienne complète g sur* (*les fibres de*) $\mathcal{W}_1$ *et une métrique hermitienne h sur E, jouissant des dropriétés suivantes*

(i) *$\gamma_{st}:(X_s - C_s) \longrightarrow (X_t - C_t)$ est une isométrie,*

(ii) *γ_{st} induit une isométrie de $E_s \mid (X_s - C_s)$ sur $E_t \mid (X_t - C_t)$.*

(iii) *$E_t \longrightarrow X_t$ est $W^{p,q+1}$-elliptique de constante c (ne dépendant pas de t) pour tout $t \in B_1$, $\forall p$, $\forall q > 0$.*

(iv) *Toute variété X_t est de Stein.*

Preuve. Fixons une fonction $\varphi_0 : X_0 \longrightarrow \mathbf{R}$, differentiable, strictement plurisousharmonique et telle que $\{x \in X_0, \varphi_0(x) < c\} \subset\subset X_0$, $\forall c \in \mathbf{R}$ et posons $\varphi = \varphi_0 \circ p_{X_0} \circ \mathcal{T}^{-1} : \mathcal{W} \longrightarrow \mathbf{R}$. On a évidemment $\{x \in X_t, \varphi(x) < c\} \subset\subset X_t$, $\forall c \in \mathbf{R}$. Soit $\varphi_t = \varphi \mid X_t$.

La fonction $\lambda : \mathcal{W} \longrightarrow \mathbf{R}$, qui à x associe la plus petite valeur propre de $(\mathcal{L}\varphi)_x$ est continue, et l'on a $\inf_{C_0} \lambda > 0$.

Il existe alors un voisinage $V = \mathcal{T}(A \times N)$ de C_0 dans $\mathcal{W}$ tel que $\inf_V \lambda > \frac{1}{2} \inf_{C_0} \lambda$, A étant un voisinage de C_0 dans X_0 et N un voisinage de 0 dans B. Par suite $\lambda \mid \pi^{-1} N$ est alors positive. En effet, tout $x \in \pi^{-1} N - V \subset \pi^{-1} N - C$ est du type $x = \mathcal{T}(x_0, t)$ et on a $\lambda(x) = \lambda(x_0) > 0$. Si $x \in V$, $\lambda(x) > \frac{1}{2} \inf_{C_0} \lambda > 0$. On a en plus $\{x \in X_t, \varphi(x) < c\} = \gamma_{0t}\{x \in X_0, \varphi(x) < c\} \subset\subset X_t$. Cela prouve (iv) pour tout $t \in N$.

Considérons une métrique hermitienne h_0' sur E, et posons $\widehat{h_t'} = \lambda_{0t}^* h_0'$; $\widehat{h_t'}$ n'est pas à priori hermitienne sur C_t, soit h_t' sa partie hermitienne. Introduisons sur X_t la métrique kählerienne $g_{t,\alpha\bar\beta} = \mathcal{L}_{\alpha\bar\beta}\, \varphi_t$, on peut supposer que g_0 soit complète.

On peut en effet supposer que X_0 est plongé dans $\mathbf{C}^N$ et que φ_0 est la fonction « distance d'un point fixé de $\mathbf{C}^N$», la métrique g_0 est alors la restriction à X_0 de la métrique naturelle de $\mathbf{C}^N$. $\mathcal{W} \longrightarrow B$ est ainsi une déformation triviale à l'infini d'une varieté hermitienne complète (X_0, g_0). Nous avons prouvé dans [12] que, dans ces conditions, les variétés (X_t, g_t) sont elles aussi complètes, à une restriction de $\mathcal{W} \longrightarrow B$ près. On entroduit alors une deuxième fonction strictement plurisousharmonique $\psi_0 : X_0 \longrightarrow \mathbf{R}$ et on pose $\psi = \psi_0 \circ p_{X_0} \circ \mathcal{T}^{-1} : \mathcal{W} \longrightarrow \mathbf{R}$, avec $\{x \in X_0, \psi_0(x) < c\} \subset\subset X_0$, $\forall c \in \mathbf{R}$. Par le même argument que tout à l'heure, on peut supposer $(\mathcal{L}\psi)_x$ définie positive pour tout $x \in \pi^{-1} N$. On considère ensuite les applications $\varkappa$ et $\varkappa' : C^\infty_{p,q+1}(\pi^{-1} N, E) \longrightarrow C^\infty_{p,q+1}(\pi^{-1} N, E)$ du n. 6, β), correspondant aux métriques h' et $h = e^\psi h'$ sur E. On a vu que, si $\lambda(x)$ et $\mu(x)$ sont les plus petites valeurs propres de $(\mathcal{L}\psi)_x$ et de $\langle \varkappa' \cdot, \cdot \rangle_x$, on a

$$\int_{X_t} (\mu + \lambda) |f|^2 \, dV \leq (\varkappa f, f)_t \leq \| \partial f \|_t^2 + \| \mathfrak{d} f \|_t^2, \quad \forall t \in N, \forall f \in D_{p,q+1}(X_t, E_t).$$

En répétant le raisonnement de tout à l'heure, on voit bien qu'à une restriction $\mathcal{W}_1 \xrightarrow{\pi} B_1$ de $\pi N \xrightarrow{\pi} N$ près, l'on peut snpposer $\lambda(x) \geq \frac{1}{c} - \mu(x), c > 0$ fixé. Cela prouve la proposition.

8. Soit ψ la famille des fermés $K \subset \mathcal{W}$, tels que π/K soit propre. On suppose que E et $\mathcal{W}_1$ soient donées des métriques du lemme 7.1.

THÉORÈME 8.1. *Soit* $f \in C^{\infty}_{p,q+1}(\mathcal{W}_1, E)$, $\operatorname{supp} f \in \psi$, $\bar{\partial} f = 0$. *Il existe alors* $u \in C^{\infty}_{p,q}(\mathcal{W}_1, E) \cap \mathcal{L}^2_{p,q}(\widehat{\mathcal{W}}_1, E)$ *tel que* $\bar{\partial} u = f$ *et que* $|u|$ *soit borné sur tout ouvert du type* $\pi^{-1} A$, *avec* $A \subset\subset B_1$ (4).

Démonstration. On fixe, pour tout $t \in B_1$, la forme $w_t \in W^{p,q+1}(X_t, E_t) \cap C^{\infty}_{p,q+1}(X_t, E_t)$ telle que $\bar{\partial}_t \mathfrak{d}_t w_t = f_t$ et que $\mathfrak{d}_t \bar{\partial}_t w_t = 0$ (voir lemme 6.1) et l'on pose $u = \mathfrak{d} w$, on a évidemment $u \in C^{\infty}_{p,q}(\widehat{\mathcal{W}}_1, E)$, $\bar{\partial} u = f$. Il suffit alors de prouver que $|u|$ est borné sur $\pi^{-1} A$ et que $w \in C^{\infty}_{p,q+1}(\mathcal{W}_1, E)$. On va partager la démonstration en plusieurs énoncés successifs

α) $|u|$ *est borné sur tout ouvert* $\pi^{-1} A$, $A \subset\subset B_1$.

De l'inégalité (34) on tire, pour tout $y \in X_t$,

$$|u^{\alpha}_{A,B}(y)|^2 \leq c_1(0, k, \varepsilon)\{\|\Box_t u_t\|^2_{k-2,\varepsilon} + \|u_t\|^2_{0,\varepsilon}\}.$$

Or, d'une part $\Box_t u_t = \mathfrak{d}_t f_t$, et d'autre part $\|\mathfrak{d}_t f_t\|^2_{k-2,\varepsilon} \leq \|\mathfrak{d}_t f_t\|^2_{k-2}$ qui est borné si t varie dans A, à cause du fait que f est de classe C^{∞} et que $\operatorname{supp} f \in \psi$. De l'inégalité (31) on tire $\|u_t\|_{0,\varepsilon} \leq \|u_t\| = \|\mathfrak{d}_t w_t\| \leq 4c \|\Box_t w_t\|^2 = 4c \|f_t\|^2$ ce qui est aussi borné si t varie dans A ; α) est donc prouvé.

Soit $\gamma^*_{st}: C^{\infty}_{p,q}(X_s, T_s) \to \sum_{p'+q'=p+q} \{C^{\infty}_{p',q'}(X_t, E_t) \oplus C^{\infty}_{p',q'}(X_t, \bar{E}_t)\}$ l'isomorphisme (de C-modules) induit par γ_{st} sur les formes. On peut alors considerer l'homomorphisme surjectif $\widehat{\gamma_{st}}: C^{\infty}_{p,q}(X_s, T_s) \to C^{\infty}_{p,q}(X_t, T_t)$ obtenu en composant γ^*_{st} avec la projection canonique

$$\sum_{p'+q'=p+q} \{C^{\infty}_{p',q'}(X_t, T_t) \oplus C^{\infty}_{p',q'}(X_t, \bar{T}_t)\} \to C^{\infty}_{p,q}(X_t, T_t).$$

On a évidemment

$$\operatorname{supp}[(\gamma^*_{st} - \widehat{\gamma_{st}}) f_s] \subset C_t \qquad \forall f_s \in C^{\infty}_{p,q}(X_t, E_t), \tag{35}$$

$$\widehat{\gamma_{st}} : W^{p,q}(X_s, T_s) \to W^{p,q}(X_t, E_t), \tag{36}$$

$$\operatorname{supp}[(\widehat{\gamma_{st}} \Box_s - \Box_t \widehat{\gamma_{st}}) f_s] \subset C_s, \qquad \forall f_s \in C^{\infty}_{p,q}(X_s, E_s). \tag{37}$$

(4) On verra à la fin qu'il est même $\operatorname{supp} u \in \psi$ (Th. III)

β) w et toutes les derivées (de ses coefficients) par rapport aux coordonnées x^l sont continus en $(x^1, \dots, x^{2n}, t^1, \dots, t^m)$.

Soit $x \in \mathcal{W}_1$ fixé, $t = \pi x$, au voisinage de x les composantes de w s'ecrivent $w^a_{A,B}(x, t)$. Fixons la boule $\mathcal{B}_{\varepsilon/2} \equiv \left\{(y, t), \sum_1^{2n} {}_l (x^l - y^l)^2 \leq \varepsilon^2/4\right\}$, soit s un point près de t et soient y et y' dans $\mathcal{B}_{\varepsilon/2}$. On doit prouver que, pour tout opérateur de dérivation $D^{(h)}$ d'ordre h par rapport aux $x^1, \dots, x^{2n}$, on a

$$\lim_{(y', s) \to (y, t)} | D^{(h)} [w^a_{A,B}(y', s) - w^a_{A,B}(y, t)] | = 0.$$

On a

$$| D^{(h)} [w^a_{A,B}(y', s) - w^a_{A,B}(y, t)] | \leq | D^{(h)} [w^a_{A,B}(y, t) - w^a_{A,B}(y, s)] | + \\ + | D^{(h)} [w^a_{A,B}(y', s) - w^a_{A,B}(y, s)] |,$$

$$| D^{(h)} [w^a_{A,B}(y, s) - w^a_{A,B}(y', s)] | \leq | D^{(h+1)} w^a_{A,B}(\bar{y}, s) | \, | y - y' |,$$

où $D^{(h+1)}$ est un opérateur convenable par rapport aux z et $\bar{y} \in \mathcal{B}_{\varepsilon/2}$. On va prouver que $| D^{(h+1)} w^a_{A,B}(\bar{y}, s) |$ est borné quand $(\bar{y}, s)$ varie au voisinage de (y, t). En effet, grâce à (34)

$$| D^{(h+1)} w^a_{A,B}(\bar{y}, s) | \leq c_1(j, h, \varepsilon) \{ \| f_s \|^2_{j+h-2,\varepsilon} + \| w_s \|^2_{0,\varepsilon} \}.$$

On applique alors (30) et l'on tire $| D^{(h+1)} w^a_{A,B} (\bar{y}, s) |^2 \leq c_3 \| f_s \|^2$, avec $c_3 = \sup [4c^2, c_1(j, h, \varepsilon)]$; ceci est borné lorsque s varie dans $A \subset\subset B_1$ à cause du fait que f est différentiable et $\operatorname{supp} f \in \psi$.

Il suffit donc de prouver que $\lim_{s \to t} | D^{(h)} [w^a_{A,B}(y, t) - w^a_{A,B}(y, s)] | = 0$. On applique de nouveau (34) et l'on a

$$| D^{(h)} [w^a_{A,B}(y, t) - w^a_{A,B}(y, s)] |^2 \leq \\ \leq c_1(h, j, \varepsilon) \{ \| \Box_s w_t - \Box_s w_s \|^2_{j+h-2,\varepsilon} + \| w_t - w_s \|^2_{0,\varepsilon} \}.$$

On va prouver séparément que

$$\lim_{s \to t} \| \Box_s w_t - \Box_s w_s \|^2_{j+h-2,\varepsilon} = 0, \tag{38}$$

$$\lim_{s \to t} \| w_t - w_s \|^2_{0,\varepsilon} = 0. \tag{39}$$

Puisque $\Box w = f$, on a $\| \Box_s w_t - \Box_s w_s \|^2_{j+h-2,\varepsilon} \leq \| f_t - f_s \|^2_{j+h-2,\varepsilon} + \| (\Box_s - \Box_t) w_t \|^2_{j+h-2,\varepsilon}$. Ces deux termes tendent vers zéro : le premier à cause de la différentiabilité de f et le deuxième à cause de la différentiabilité des coefficients de $\square$; (38) est ainsi prouvé. On a ensuite, grâce à (36) et (30)

$$\| w_t - w_s \|_{0,\varepsilon}^2 \leq \| \widehat{\gamma_{st}} w_s - w_s \|_{0,\varepsilon}^2 +$$

$$+ 4c^2 \{ \| f_t - \widehat{\gamma_{st}} f_s \|^2 + \| (\widehat{\gamma_{st}} \square_s - \square_t \gamma_{st}) w_s \|^2 \}.$$

Les deux premiers termes du second membre tendent visiblement vers zéro, et le troisième aussi grâce à (37). L'enoncé β) est donc prouvé.

γ) *w et les dérivées (de ses coefficients) rapport aux coordonnées x^l sont de classe C^1 par rapport à $(x^1, \ldots, x^{2n}, t', \ldots, t^m)$.*

On fixe un entier ν, $1 \leq \nu \leq m$ et l'on pose $t + \tau = (t^1, \ldots, t^{\nu-1}, t^\nu + \tau, t^{\nu+1}, \ldots, t^m)$. L'opérateur $\widehat{\gamma_{st}}$ est linéaire et ses coefficients sont C^∞ par rapport aux variables $x^1, \ldots, x^n, t^1, \ldots, t^m, s^1, \ldots s^m$. Il en est donc de même de l'opérateur $\dot{\widehat{\gamma}}$ obténu en dérivant ses coefficients par rapport à s^ν et en posant ensuite $s = t$.

On a $\dot{\widehat{\gamma_t}}$: $C^\infty_{p,q}(X_t, E_t) \longrightarrow C^\infty_{p,q}(X_t, E_t)$, $\dot{\widehat{\gamma_t}} u_t = \lim\limits_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \{ w_t - \widehat{\gamma_{t+\tau,t}} w_t \}$. Si Si u satisfait β) on a, pour tout entier k,

$$\lim_{\tau \to 0} \left\| \dot{\widehat{\gamma_t}} w_t - \frac{1}{\tau} \{ w_t - \widehat{\gamma_{t+\tau,t}} w_t \} \right\|_{k,\varepsilon} = 0, \tag{40}$$

$$\lim_{\tau \to 0} \left\| \frac{1}{\tau} (\text{identité} - \widehat{\gamma_{t+\tau,t}}) (w_t - w_{t+\tau}) \right\|_{k,\varepsilon} = 0. \tag{41}$$

Un simple calcul montre alors que l'on a, $\forall g_t \in C^\infty_{p,q+1}(X_t, T_t)$,

$$\lim_{\tau \to 0} \left\| \frac{1}{\tau} (w_t - w_{t+\tau}) + \dot{\widehat{\gamma_t}} w_t + g_t \right\|_{k,\varepsilon}^2 \leq \lim_{\tau \to 0} \left\| \frac{1}{\tau} (w_t - \widehat{\gamma_{t+\tau,t}} w_{t+\tau}) + g_t \right\|_{k,\varepsilon}^2, \tag{42}$$

cela résulte de l'identité

$$\frac{1}{\tau} (w_t - w_{t+\tau}) + \dot{\widehat{\gamma_t}} w_t + g_t = \left[\frac{1}{\tau} [w_t - \widehat{\gamma_{t+\tau,t}} w_{t+\tau}) + g_t \right] +$$

$$+ \left[\dot{\widehat{\gamma_t}} w_t - \frac{1}{\tau} (w_t - \dot{\widehat{\gamma_{t+\tau,t}}} w_t) \right] + \left[\frac{1}{\tau} (\text{identité} - \dot{\widehat{\gamma_{t+\tau,t}}}) (w_t - w_{t+\tau}) \right],$$

et de (40) et (41). On a en plus

$$\text{(42)}' \qquad \operatorname{supp}\,[\Box_t \widehat{\gamma_{st}} - \widehat{\gamma_{st}}\,\Box_s]\, h_s \subset C_s\,, \quad \forall\ h_s \in C^\infty_{p,q}(X_s\,, E_s)\,,$$

et l'opérateur $[\Box\,, \widehat{\gamma}]^{\cdot}_t : C^\infty_{p,q}(X_t\,, E_t) \rightarrow C^\infty_{p,q}(X_t\,, E_t)$ obtenu en dérivant les coefficients de $\Box_t \widehat{\gamma_{st}} - \widehat{\gamma_{st}}\,\Box_s$ par rapport à s^ν et en posant $t = s$ satisfait la relation

$$\text{(43)} \qquad \operatorname{supp}\,[\,\Box\,, \widehat{\gamma}]^{\cdot}_t\, h_t \subset C_t\,, \quad \forall\ h_t \in C^\infty_{p,q}(X_t\,, E_t).$$

Localement on a

$$\text{(44)} \qquad [\,\Box\,, \widehat{\gamma}]^{\cdot}_t\, h_t = \lim_{\tau \to 0} \{(\Box_t \widehat{\gamma_{t+\tau,t}} - \widehat{\gamma_{t+\tau,t}}\,\Box_{t+\tau})\, h_t\}\,.$$

Pour tout u satisfaisant β) on a

$$\text{(45)} \qquad \lim_{\tau \to 0} \left\| \frac{1}{\tau} (\Box_t \widehat{\gamma_{t+\tau,t}} - \widehat{\gamma_{t+\tau\,t}}\,\Box_{t+\tau})\, w_{t+\tau} - [\,\Box\,, \widehat{\gamma}]^{\cdot}_t\, w_t \right\|_{k,\varepsilon} = 0.$$

C'est une conséquence de la relation

$$\lim_{\tau \to 0} \left\| \frac{1}{\tau} (\,\Box_t \widehat{\gamma_{t+\tau,t}} - \widehat{\gamma_{t+\tau,t}}\,\Box_{t+\tau})\,(w_{t+\tau} - w_t) \right\|_{k,\varepsilon} = 0.$$

Soint alors ξ_t et η_t les formes dans $C^\infty_{p,q+1}(X_t\,, E_t) \cap \mathcal{L}^2_{p,q+1}(X_t\,, E_t)$ qui satisfont $\Box_t\, \xi_t = \dot{\widehat{\gamma_t}}\, f_t$ et $\Box_t\, \eta_t = [\Box\,, \widehat{\gamma}]^{\cdot}_t\, w_t$. Les formes ξ et η satisfont β) par la même raison que w. Nous allons prouver la relation

$$\text{(46)} \qquad \lim_{\tau \to 0} \left\| \frac{1}{\tau} (w_t - w_{t+\tau}) + \dot{\widehat{\gamma_t}}\, w_t - \xi_t + \eta_t \right\|_{k,\varepsilon/2} = 0, \quad \forall\ k \geq 2\,.$$

Il suffit de prouver, grâce à (42), que l'on a

$$\text{(47)} \qquad \lim_{\tau \to 0} \left\| \frac{1}{\tau} (w_t - \widehat{\gamma_{t+\tau,t}}\, w_{t+\tau}) - \xi_t + \eta_t \right\|_{k,\varepsilon/2} = 0, \quad \forall\ k \geq 2.$$

De (32) on tire

$$\left\| \frac{1}{\tau} (w_t - \widehat{\gamma_{t+\tau,t}}\, w_{t+\tau}) - \xi_t + \eta_t \right\|^2_{k,\, \varepsilon/2} \leq$$

$$\leq c'(k, \varepsilon) \left\{ \left\| \frac{1}{\tau} (f_t - \widehat{\gamma_{t+\tau,t}}\, f_{t+\tau}) - \dot{\gamma}_t f_t \right\|_{k-2,\varepsilon} + \right.$$

$$+ \left\| \frac{1}{\tau} (\widehat{\gamma_{t+\tau,t}}\, \square_{t+\tau} - \square_t\, \widehat{\gamma_{t+\tau,t}})\, w_{t+\tau} + [\square, \dot{\widehat{\gamma}}]_t\, w_t \right\|^2_{k-2,\varepsilon} +$$

$$\left. + \left\| \frac{1}{\tau} (w_t - \widehat{\gamma_{t+\tau,t}}\, w_{t+\tau}) - \xi_t - \eta_t \right\|^2 \right\}.$$

Le premier terme du second membre tend trivialement vers zéro, et le deuxième aussi à cause de (45). On va démontrer que l'on a

$$\lim_{\tau \to 0} \left\| \frac{1}{\tau} (w_t - \widehat{\gamma_{t+\tau,t}}\, w_{t+\tau}) - \xi_t - \eta_t \right\|^2 = 0, \tag{48}$$

Puisque ce qui se trouve entre $\| \quad \|$ appartient à $W^{p,q+1}(X_t, E_t)$, on tire de (30)

$$\left\| \frac{1}{\tau}\, w_t - \widehat{\gamma_{t+\tau,t}}\, w_{t+\tau}) - \xi_t + \eta_t \right\|^2 \leq 4c^2 \left\{ \left\| \frac{1}{\tau} (f_t - \widehat{\gamma_{t+\tau,t}}\, f_{t+\tau}) - \dot{\widehat{\gamma_t}} f_t \right\|^2 + \right.$$

$$\left. + \left\| \frac{1}{\tau} (\widehat{\gamma_{t+\tau,t}}\, \square_{t+\tau} - \square_t\, \widehat{\gamma_{t+\tau,t}})\, w_{t+\tau} + [\square, \dot{\widehat{\gamma}}]_t\, w_t \right\|^2 \right\}.$$

Le premier terme de droite tend vers zéro ainsi que le deuxième par (42)′ et (43). On a prouvé (48) et, par consèquent, (46).

Il ne reste alors qu'àppliquer l'inegalité de Sobolev (33) pour en déduire qu'il existe $\dfrac{\partial}{\partial t^\nu} D^{(h)} u^a_{A,B}$ et que l'on a

$$\frac{\partial}{\partial t^\nu} D^{(h)} w^a_{A,B} = (\dot{\widehat{\gamma_t}}\, w_t - \xi_t + \eta_t)^a_{A,B}\,. \tag{49}$$

Le deuxième membre est continu à cause de β), le premier l'est donc aussi. L'énoncé γ) est prouvé.

δ) *w est de classe C^∞ par rapport à $(x^1, \dots, x^{2n}, t^1, \dots, t^m)$.* **On sait déja que** w **est C^0 par rapport à toutes les variables et C^∞ par rapport aux x. On suppose** w de classe C^k, $\widehat{\dot{\gamma} w}$, ξ et η le sont a donc aussi, et de (49) **resulte alors** que w est de classe C^{k+1}. **Le théorème 8.1. est ainsi complètement démontré.**

9. **Soit** $J_0 \equiv \{i \in I,\ U_i \cap C_0 \neq \emptyset\}$, $J_1 \equiv \{i \in I,\ U_i \cap X_0 \neq \emptyset,\ U_i \cap C_0 = \emptyset\}$; **on a** $J_0 \cap J_1 = \emptyset$, $J_0 \cup J_1 \equiv \{i \in I,\ U_i \cap X_0 \neq \emptyset\}$. J_0 **est fini.**

Soit $B_2 \subset\subset B_1$ **un voisinage ouvert de 0 dans** $\bigcap_{j \in J_0} \pi\, U_j$, **et soit** $\mathcal{W}_2 \xrightarrow{\pi} B_2$ **la restriction de** $\mathcal{W}_1 \xrightarrow{\pi} B_1$ **qui lui correspond. On pose**

$$\widetilde{U}_j \begin{cases} = U_j \cap \mathcal{W}_2, & \text{si } j \in J_0 \\ = \mathcal{T}[(U_j \cap X_0) \times B_2], & \text{si } j \in J_1, \end{cases}$$

et, pour tout $x \in \widetilde{U}_j$,

$$\psi(x) \begin{cases} = \varphi_j(x), & \text{si } j \in J_0 \\ = p_{\mathbf{C}^n} \circ \varphi \circ p_{X_0} \circ \mathcal{T}^{-1}(x), & \text{si } j \in J_1. \end{cases}$$

$\{\widetilde{U}_j, \psi_j\}_{j \in J}$ est un atlas pour $\mathcal{W}_2 \xrightarrow{\pi} B_2$. On a $\pi \widetilde{U}_j = B_2$, $\forall j \in J$. **Soient** x et y deux points de $\widetilde{U}_{j,\, i \in J}$; pour que $z_j^a(y) = z_j^a(y)$ **il faut et suffit qu'il** existe $x_0 \in X_0 - C_0$ tel que $\mathcal{T}(x_0, \pi x) = x$, et $\mathcal{T}(x_0, \pi y) = y$. **On pose** $D_j^\nu = \left(\dfrac{\partial}{\partial t^\nu}\right)_{z_j = \text{const}}$ **sur** $\widetilde{U}_j$. **On vérifie immédiatement que l'on a** $\pi D_j^\nu = \dfrac{\partial}{\partial t^\nu}$, que le champ $D_i^\nu - D_j^\nu$, sur $\widetilde{U}_i \cap \widetilde{U}_j$ **et vertical (réel), que sa partie holomorphe** $(D_i^\nu - D_j^\nu)^\wedge \in C^\infty_{0,0}(\widetilde{U}_i \cap \widetilde{U}_j, T)$ **est** $\bar{\partial}$**-fermée. Si** $i, j \in J_1$, $D_i^\nu - D_j^\nu$ **est** nul. Soit $\{\varrho_i\}_{i \in J}$ une partition de l'unité sur $\mathcal{W}_2$ **relative à** $\{\widetilde{U}_j\}$. **On** pose, sur $\widetilde{U}_i$, $v_i = D_i^\nu - \sum_j \varrho_j D_j^\nu$, v_i **est vertical, il est nul si** $i \in J_1$. **Sa partie** holomorphe $\widehat{v}_i$ satisfait, sur $\widetilde{U}_i \cap \widetilde{U}_j$, la relation $\bar{\partial}\, \widehat{v}_i = \bar{\partial}\, \widehat{v}_j$. **En fait on a** $\bar{\partial}\, (\widehat{v}_i - \widehat{v}_j) = \bar{\partial}\, [(D_i^\nu - D_j^\nu)^\wedge] = 0$. **Le champ vectoriel** $v = v_i + D_i^\nu$ **est visiblement global,** $\widehat{v} \in C^\infty_{0,0}(\mathcal{W}_2, T)$. **On pose** $D^\nu = D_i^\nu$, **pour** $i \in J_1$, $A = \bigcup_{j \in J_0} \widetilde{U}_j$. D^ν **est un champ global sur** $\mathcal{W}_2 - A$ **de projection** $\dfrac{\partial}{\partial t^\nu}$, $v \,|\, (\mathcal{W}_2 - A) = D^\nu$. $\bar{\partial}\, \widehat{v}_i$ **définit une forme** $f^\nu \in C^\infty_{0,1}(\mathcal{W}_2, T)$, **avec** $\bar{\partial} f^\nu = 0$, $\operatorname{supp} f^\nu \subset K \in \psi$. **Soit** $\widehat{u}^\nu$ **le champ vectoriel qui satisfait** $\bar{\partial}\, \widehat{u}^\nu = f^\nu$, **donné par le théorème 8.1.** **On pose** $u^\nu = \widehat{u}^\nu + \overline{\widehat{u}^\nu}$, $w = - v_i + u^\nu + D_i^\nu$. w **est un champ global sur** $\mathcal{W}_2$. $|w|$ **est borné sur** $\pi^{-1} N$, $\forall N \subset\subset B_2$, **et la projection sur** $\mathbf{C}^n$ **de sa partie** holomorphe, faite à l'aide des ψ_i, **est** $\bar{\partial}$**-fermée.**

On pose $\tau_\lambda^\nu t = (t^1, \ldots, t^{\nu-1}, t^\nu + \lambda, t^{\nu+1}, \ldots, t^m)$. Le groupe local $\{\Phi_\lambda^\nu\}$ engendré par u^ν se projette dans le groupe local $\{\tau_\lambda^\nu\}$ de translation de B_2. En plus, pour tout ouvert $V \subset\subset \mathcal{W}_2$, l'application Φ_λ^ν: $V \cap X_t \longrightarrow X_{\tau_\lambda^\nu t}$ est biholomorphe sur son image.

D'ailleurs, comme $|w|$ est borné sur $\pi^{-1} N$, $\forall N \subset\subset B_2$ et puisque les trajectoires de $\{\tau_\lambda^\nu\}$ sont des segments de droites, on peut appliquer la prop. 5.1 et affirmer que le groupe $\{\Phi_\lambda^\nu\}$ engendre des applications biholomorphes Φ_λ^ν: $X_t \longrightarrow X_{\tau_\lambda^\nu t}$ On choisit alors $\delta > 0$ tel que $B' \equiv \{t \in B_2, |t^\nu| < \delta, \nu = 1, \ldots, m\} \subset\subset B_2$. On pose, pour tout $(x, t) \in X_0 \times B'$, $\tau^{-1}(x, t) = \Phi_{t_1}^1 \circ \ldots \circ \Phi_{t_m}^m(x)$. On peut résumer le propriétés de τ dans le

LEMME 9.1. *τ: $\mathcal{W}' \longrightarrow X_0 \times B'$ et un isomorphisme de fibrés différentiables de base B'. Pour tout $t \in B'$, l'application $\tau \mid X_t$: $X_t \longrightarrow X_0$ est biholomorphe.*

10. *Dĕmonstration du théoréme II.* Grâce au lemme 9.1, la démonstration de la première partie du théorème II se reduit à prouver le

LEMME 10.1. *Soit E un fibré vectoriel holomorphe sur une variété de Stein X, $\{f_t\}_{t \in B}$ une famille de formes $f_t \in C^\infty_{p, q+1}(X, E)$, $\bar\partial$-fermées. B est un ouvert de $\mathbf{R}^m$ et (les coefficients des) f_t sont supposés de classe C^∞ sur $U_i \times B$, U_i étant un voisinage coordonné de X. Il existe une famille $\{u_t\}_{t \in B}$, dont les élements $u_t \in C^\infty_{p, q}(X, E)$, vérifient $\bar\partial u_t = f_t$, et qui a même régularité que $\{f_t\}$.*

Démonstration. Soit $\widetilde{E} = E \times B \longrightarrow X \times B$, et soient $\mathcal{F}^p$ et $\mathcal{A}^{p,q}$ les faisceaux définis de la façon suivante :

$$\mathcal{F}^p : U \longrightarrow \begin{cases} \text{Module des sections différentiables de } \widetilde{E} \times A^{p,0} \text{ au dessus de} \\ U \times B, \text{ holomorphes au dessus des fibres } U \times \{t\}, \ (t \in B). \end{cases}$$

$$\mathcal{A}^{p,q} : U \longrightarrow \begin{cases} \text{Module des sections différentiables de } \widetilde{E} \times A^{p,q} \text{ au dessus de} \\ U \times B. \end{cases}$$

La suite

$$(\Sigma) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{F}^p \xrightarrow{i} \mathcal{A}^{p,0} \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{A}^{p,1} \xrightarrow{\bar\partial} \ldots \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{A}^{p,n-1} \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{A}^{p,n} \longrightarrow 0$$

est exacte au cause du lemme de Poincaré-Grothendieck avec paramètres (cf. [7]); les faisceaux $\mathcal{A}^{p,0}, \dots, \mathcal{A}^{p,n}$ sont fins, (Σ) est donc une resolution acyclique de $\mathcal{F}^p$ et l'on a

$$H^q(X, \mathcal{F}^p) \simeq \frac{\operatorname{Ker}\{\bar\partial : C^\infty_{p,q}(X, E) \to C^\infty_{p,q+1}(X, E)\}}{\operatorname{Im}\{\bar\partial : C^\infty_{p,q-1}(X, E) \to C^\infty_{p,q}(X, E)\}}.$$

Le lemme 10.1. équivaut donc à

$$H^q(X, \mathcal{F}^p) = 0 \qquad (q = 1, \dots, n;\ p = 0, \dots, n). \tag{50}$$

PROPOSITION 10.1. *Soit X une variété de Stein, B un ouvert de $\mathbf{R}^m$, F uu fibré vectoriel holomorphe sur X, soit $\mathcal{G}$ le faisceau associé au pré-faisoceau dont les sections au dessus d'un ouvert U sont les familles $\{\sigma_t\}_{t \in B}$ de sections holomorphes $U \xrightarrow{\sigma_t} F$ qui sont différentiables en tant que sections de $F \times B \to U \times B$. On a alors*

$$H^q(X, \mathcal{G}) = 0 \qquad (q > 0) \tag{51}$$

$$H^q_k(X, \mathcal{G}) = 0. \qquad (q < n). \tag{52}$$

Démonstration. Soit $\mathcal{O}$ le faisceau des germes des sections holomorphes de F, et soit $C^\infty(B)$ l'espace de Fréchet des fonctions différentiables $B \to \mathbf{C}$, muni de la topologie de la convergence compacte de chaque dérivée.

$\mathcal{G}$ est isomorphe au produit tensoriel topologique de $\mathcal{O}$ par l'espace vectoriel $C^\infty(B)$. Du théorème des coefficients universels on tire alors

$$H^i(X, \mathcal{G}) \simeq H^i(X, \mathcal{O}) \hat{\otimes}_\varepsilon C^\infty(B),$$

$$H^j_k(X, \mathcal{G}) \simeq H^i_k(X, \mathcal{O}) \hat{\otimes}_\varepsilon (B),$$

car les espaces $H^i(X, \mathcal{O})$ et $H^j_k(X, \mathcal{O})$ sont de Hausdorff (en fait, ceci est toujours vrai si i et j sont nuls, et si $i > 0$, $j < n$, on a $H^i(X, \mathcal{O}) = 0$, $H^j_k(X, \mathcal{O}) = 0$). On a ainsi prouvé la proposition, en particulier la formule (50), le lemme 10.1. et la première partie du théorème II.

On revient au cas où B est une variété différentiable réelle de dimension m et où chaque variété X_t est de Stein. On vient de prouver que, pour tout $t \in B$, il existe un voisinage U_t de t dans B et une forme $u^* \in C^\infty_{p,q}(\pi^{-1} U_t, E)$ telle que $\bar\partial u^* = f$. Soit alors $\{B_i\}_{i \in I}$ un recouvrement localement fini par de tels voisinages; pour chaque i soit $u_i^* \in C^\infty_{p,q}(\pi^{-1} U_i, E)$

tel que $\bar{\partial} u_i^* = f$; soit enfin $\{p_i\}$ une partition de l'unité de B, subordonnée à $\{B_i\}_{i \in I}$. La forme $u(x) = \Sigma_i \, p_i(\pi x) \, u_i(x)$ satisfait aux conditions voulues.

11. *Démonstration du théorème* III. Grâce au lemme 9.1, démontrer la première partie de l'énoncé du théorème III se ramène à prouver le lemme 10.1. modifié de la façon suivante: on fait l'hypothèse que, pour tout compact $C \subset B$, $\bigcup_{t \in C} \operatorname{supp} f_t$ est compact dans X, et on exige dans la conclusion que u possede la même propriété.

On peut alors supposer que l'on a $\bigcup_{t \in B} \operatorname{supp} f_t \subset \overset{\circ}{K}$, où $\overset{\circ}{K}$ est un ouvert de Stein dans X et K est compact. En mettant alors dans (52) $\mathcal{F}^p$ à la place de $\mathcal{G}$ et $\overset{\circ}{K}$ à celle de X on obtient trivialement l'existence de la forme u. La démonstration de la deuxième partie du théorème III est parfaitement identique à celle du théorème II, voir fin du n. précédent.

Istituto Matematico Università di Pisa

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANDREOTTI A. et VESENTINI, E. *Les théorèmes fondamentaux de la théorie des espaces holomorphiquement complets*, Séminaire Ehresmann, 4 (1962-63), 1-31, Paris, Secrétariat Mathématique.

[2] ANDREOTTI, A. et VESENTINI, E. *On deformations of discontinuous groups* Acta mathematica, 112, (1964), 249-298.

[3] ANDREOTTI, A. et VESENTINI, E. *Carleman estimates for the Laplace-Beltrami equation on complex manifolds.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., 25, (1965), 81-130.

[4] CARTAN, H. *Espaces fibrés analytiques.* Symp. Int. de Topologia alg., Mexico, (1953), 97-121.

[5] COURANT HILBERT, D., *Methods of mathematical physics*, vol. II, Interscience Publishers, New York, 1962.

[6] FRIEDRICHS, K. O., *On the differentiability of the solution of partial differential equations.* Comm. Pure Appl. Math. 6, (1953), 299-326.

[7] ANDREOTTI, A. et GRAUERT, H., *Théoremes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes,* Bull. Soc. Math. Fr, t. 90, (1962), 192-259.

[8] HAEFLIGER, A. *Variétés feuilletées.* Cours d'été sur « Topologia differenziale », C. I. M. E. Urbino (1962). Édit. Cremonese. Roma.

[9] HÖRMANDER, L. *An Introduction to complex analysis in several variables.* D. Van Nostrand Publ., Princeton, (1966).

[10] HÖRMANDER, L. *L^2-estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator.*, Acta Math. 113, (1965), 89-152.

[11] KODAIRA, K. et SPENCER, D. C. *On deformations of complex analytic structures III,* Ann. of Math., 71, (1960) 43-76.

[12] REA, C. *Un'osservazione sulle deformazioni di una varietà completa.* Boll. U. M. I, 22, (1967), 345-349.

[13] REEB, G. *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées*, Act. Sc. at Ind., Herman, Paris, (1952).

[14] TOGNOLI A. *Un criterio di isomorfismo per il primo gruppo di coomologia nel caso non abeliano.* À paraître.

[15] VESENTINI E. *Lectures on Levi convexity of complex manifolds and cohomology vanishing theorems.* Tata Inst of found. research. Bombay. (1967).