ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

S. SPAGNOLO

Sulla convergenza di soluzioni di equazioni paraboliche ed ellittiche

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 22, nº 4 (1968), p. 571-597
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1968_3_22_4_571_0>

SULLA CONVERGENZA DI SOLUZIONI DI EQUAZIONI PARABOLICHE ED ELLITTICHE

S. Spagnolo (*)

Introduzione.

Dati due numeri positivi λ_0, Λ_0, indichiamo $M(\lambda_0, \Lambda_0)$ l'insieme delle matrici (a_{ij}), $i, j = 1, 2, \ldots, n$, dove le a_{ij} sono funzioni reali misurabili e limitate su un aperto Ω di R^n tali che

$$a_{ij} = a_{ji}$$

$$\lambda_0 \, | \xi |^2 \leq \Sigma_{ij} \, a_{ij}(x) \, \xi_i \, \xi_j \leq \Lambda_0 \, | \xi |^2, \quad \forall \, \xi \in R^n, \; x \in \Omega.$$

Ad ogni $(a_{ij}) \in M(\lambda_0, \Lambda_0)$ si può associare il *problema di Cauchy*

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Sigma_{ij} \dfrac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \dfrac{\partial u}{\partial x_j} \right) & \text{per } t > 0 \\ u = \varphi & \text{per } t = 0, \end{cases} \qquad \varphi \in L^2(\Omega),$$

e anche il *problema di Dirichlet*

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} \Sigma_{ij} \dfrac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \dfrac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) = f \\ \psi \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \qquad f \in H^{-1}(\Omega).$$

In [4], limitatamente al caso $\Omega = R^n$, abbiamo visto che l'insieme

---

Pervenuto alla Redazione il 2 Febbraio 1968
(*) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca n. 9 del C.N.R. (anno 1967-68).

$M(\lambda_0, \Lambda_0)$ è chiuso rispetto alla convergenza in $L^2(\Omega)$ delle soluzioni $u(t, x; \varphi)$ di (I), per ogni $t > 0$ ed ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Si è inoltre mostrato, con un esempio dovuto a E. De Giorgi, che tale convergenza non è in generale confrontabile con la convergenza debole in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ dei coefficienti a_{ij}.

Ci proponiamo qui di approfondire lo studio della convergenza in questione, che chiameremo per brevità la *G-convergenza* (la definizione precisa è all'inizio del § 2.)

Nel § 1 estendiamo al caso di Ω aperto arbitrario di R^n i risultati di [4] e ricaviamo alcune proprietà, che saranno utilizzate nel seguito, delle soluzioni di (I) quando il dato iniziale φ ha supporto compatto in Ω.

Nel § 2 definiamo la G-convergenza e ne mostriamo le prime proprietà: completezza, compattezza, etc.

Nel § 3 mostriamo (Teor. 4) che la G-convergenza è equivalente alla convergenza in $L^2(\Omega)$ delle soluzioni $\psi(x, f)$ di (II), per ogni $f \in H^{-1}(\Omega)$; applicazione: l'insieme di tutte le soluzioni di (II), per ogni fissato secondo membro f, è un compatto di $L^2(\Omega)$.

Nel § 4 studiamo i legami esistenti fra la G-convergenza ed altre convergenze su $M(\lambda_0, \Lambda_0)$.

Nel § 5 ricaviamo due risultati relativi alle *soluzioni locali* (cioè le $\varphi \in H^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tali che $\Sigma_{ij} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) = 0$ su Ω, $(a_{ij}) \in M(\lambda_0, \Lambda_0)$):

1. Se i coefficienti a_{ij} convergono in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, la convergenza in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ delle soluzioni locali implica la convergenza di tali soluzioni in $H^1_{\text{loc}}(\Omega)$ (Teor. 5).

2. L'insieme di tutte le soluzioni locali è un chiuso di $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ la cui intersezione con i chiusi e limitati di $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ è compatta (Teor. 6 e Corollari seguenti).

Mostriamo infine che la G-convergenza è di *natura locale* (Teor. 7 e Corollario seguente) ed esaminiamo esplicitamente il caso particolare $n = 1$ (Prop. 6).

Ringrazio E. De Giorgi per gli utili colloqui sull'argomento.

Notazioni

Ω aperto di R^n, $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$, $D_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ $(i = 1, \dots, n)$ Le *classi di funzioni* (equivalenti rispetto alla coincidenza quasi ovunque su Ω) saranno dette brevemente *funzioni* su Ω, e la locuzione « *quasi ovunque* » sarà in genere sottointesa.

Considereremo i seguenti spazi lineari sul *corpo reale* R, muniti delle usuali strutture topologiche, :

$\mathcal{D}(\Omega)$	*funzioni reali indefinitamente derivabili ed a supporto compatto in* Ω.
$L^\infty(\Omega)$	*funzioni reali misurabili ed essenzialmente limitate su* Ω
$L^p(\Omega)$	*funzioni reali di potenza p-ma sommabile su* Ω
$L^p_{\text{loc}}(\Omega)$	*funzioni reali di potenza p-ma sommabile su ogni compatto di* Ω

$H^1(\Omega) = \{\varphi \in L^2(\Omega) : D_i\varphi \in L^2(\Omega),\ i = 1, \dots, n\}$

$H^1_0(\Omega)$ *aderenza di* $\mathcal{D}(\Omega)$ *in* $H^1(\Omega)$

$H^1_{\text{loc}}(\Omega) = \{\varphi \in L^2_{\text{loc}}(\Omega) : D_i\varphi \in L^2_{\text{loc}}(\Omega),\ i = 1, \dots, n\}$

$H^{-1}(\Omega) = \left\{g_0 + \sum_1^n{}_i D_i g_i : g_0,\ g_i \in L^2(\Omega)\right\}$

$K \subset\subset \Omega$ sta per *K è un sottoinsieme compatto di Ω*

$\|\ \|_{H^1}$, $\|\ \|_{L^2}$, $\|\ \|_{H^{-1}}$ indicano le *norme* su $H^1(\Omega)$ (e $H^1_0(\Omega)$), su $L^2(\Omega)$ e su $H^{-1}(\Omega)$ rispettivamente; $(\,,\,)_{H^1}$ è il prodotto scalare su $H^1(\Omega)$ e su $H^1_0(\Omega)$.

§ 1. Estensione dei risultati precedenti.

Sia Ω un aperto arbitrario di R^n.

In modo perfettamente analogo al caso $\Omega = R^n$ (vedi [3]), si prova il

TEOREMA 1. *Sia a un operatore lineare, simmetrico e continuo su $H^1_0(\Omega)$. Se a è D-locale, cioè verifica la condizione*

$$(1)\quad \begin{cases} (a\varphi_1, \varphi_2) = 0 \quad \textit{per ogni } \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega) \textit{ con } \varphi_1 \textit{ costante in un intorno di} \\ \textit{supp } (\varphi_2), \end{cases}$$

allora esistono degli $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, con $a_{ij} = a_{ji}$, per cui

$$(a\varphi, \psi) = \Sigma_{ij} \int_\Omega a_{ij} D_i\varphi\, D_j\psi\, dx \qquad \varphi, \psi \in H^1_0(\Omega).$$

Se inoltre si ha, per certi λ_0, Λ_0,

$$\lambda_0 \Sigma_i \| D_i \varphi \|_{L^2}^2 \leq (a\varphi, \varphi) \leq \Lambda_0 \Sigma_i \| D_i \varphi \|_{L^2}^2, \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

allora gli a_{ij} *sono tali che*

$$\lambda_0 | \xi |^2 \leq \Sigma_{ij} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \Lambda_0 | \xi |^2, \qquad \forall \xi \in R^n, \ x \in \Omega. \tag{2}$$

Sia ora X uno spazio di Hilbert reale, di prodotto scalare $(,)$ e norma $\| \ \|$, e siano a, b, due operatori lineari, continui, simmetrici e positivi su X, tali che si abbia, per ogni $\varphi \in X$,

$$(b\varphi, \varphi) = 0 \quad \text{solo per } \varphi = 0$$

$$\lambda_0 \| \varphi \|^2 - \varrho (b\varphi, \varphi) \leq (a\varphi, \varphi) \leq \Lambda_0 \| \varphi \|^2 - \sigma (b\varphi, \varphi) \tag{3}$$

$$(\Lambda_0 \geq \lambda_0 > 0, \ \sigma \geq \varrho \geq 0).$$

Si è allora provato ([4], pagg. 663-685) che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} au(t) + b \dfrac{du(t)}{dt} = 0, & t > 0 \\ u(0) = \varphi \end{cases} \tag{4}$$

ammette, per ogni dato iniziale $\varphi \in X$, una e una sola soluzione $u(t)$, continua per $t \geq 0$ ed analitica per $t > 0$ (come funzione a valori in X).

Inoltre la soluzione di (4) dipende con linearità da φ e verifica le seguenti proprietà ($t > 0$, $\varphi \in X$):

$$(bu(t), u(t)) \leq (b\varphi, \varphi) \tag{5}$$

$$\| u(t) \|^2 \leq \frac{\Lambda_0}{\lambda_0} \| \varphi \|^2 \tag{6}$$

$$\lim_{t \to 0+} \frac{1}{t} (b\varphi - bu(t)) = a\varphi. \tag{7}$$

Un'altra proprietà (non provata in [4]) che ci sarà utile è la

$$\left(b \frac{du(t)}{dt}, \frac{du(t)}{dt} \right) \leq \frac{\Lambda_0}{t} \| \varphi \|^2, \qquad t > 0, \ \varphi \in X. \tag{8}$$

Dim. di (8). Fissato $\varphi \in X$, consideriamo le funzioni, continue e ≥ 0 su $[0, +\infty)$,

$$\alpha(t) = (au(t), u(t))$$

$$\beta(t) = \left(b \frac{du(t)}{dt}, \frac{du(t)}{dt}\right).$$

Poichè

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = -2\beta(t) \leq 0$$

$$\frac{d\beta(t)}{dt} = -2\left(a \frac{du(t)}{dt}, \frac{du(t)}{dt}\right) \leq 0$$

tali funzioni sono non-crescenti.

Fissato $t > 0$, sia γ la funzione su $[0, 3t]$ così definita:

$$\gamma(\xi) = \begin{cases} \dfrac{\xi}{t}, & 0 \leq \xi \leq t \\ 1, & t < \xi < 2t \\ 3 - \dfrac{\xi}{t}, & 2t \leq \xi \leq 3t. \end{cases}$$

Si ha allora, integrando per parti,

$$t\beta(2t) \leq \int_t^{2t} \beta(\xi)\, d\xi \leq \int_0^{3t} \gamma(\xi)\, \beta(\xi)\, d\xi = \frac{1}{2}\int_0^{3t} \gamma'(\xi)\, \alpha(\xi)\, d\xi \leq \frac{1}{2}\, \alpha(0)$$

e quindi, per la (3), la (8).

Sia b come sopra, $\widehat{X}_b$ il completamento di X rispetto alla norma $\varphi \rightsquigarrow (b\varphi, \varphi)^{1/2}$, $\{a_k\}$ una successione di operatori, su X, lineari, continui, simmetrici, positivi e verificanti uniformemente la (3) e sia $u_k(t; \varphi)$ la soluzione di (4) relativamente ad $\{a_k, b\}$.

Si è provato in [4], pagg. 681-685, il

TEOREMA 2. *Se, per ogni* $t > 0$, $\varphi \in X$, $\{u_k(t\,;\,\varphi)\}$ *ha limite* $\tilde{u}(t\,;\,\varphi)$ *in* $\widehat{X}_b$, *esiste un operatore* $\tilde{a}$ *su* X, *lineare, continuo, simmetrico, positivo e verificante la* (3), *tale che* $\tilde{u}(t\,;\,\varphi)$ *è la soluzione di* (4) *relativamente ad* $\{\tilde{a}, b\}$.

Indichiamo $M(\lambda_0, \Lambda_0)$ l'insieme di tutte le matrici $n \times n$, (a_{ij}), simmetriche, con $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ verificanti la (2) con $\lambda_0 > 0$.

I risultati precedenti si possono applicare al caso concreto in cui

$$X = H_0^1(\Omega)$$

$$(b\varphi, \psi) = \int_\Omega \varphi\psi\, dx \tag{9}$$

$$(a\varphi, \psi) = \Sigma_{ij} \int_\Omega a_{ij} D_i \varphi\, D_j \psi\, dx \tag{10}$$

ove $\varphi, \psi \in H_0^1(\Omega)$, $(a_{ij}) \in M(\lambda_0, \Lambda_0)$.

Il problema (4) si traduce nel seguente modo

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \frac{du(t)}{dt} \psi\, dx + \Sigma_{ij} \int_\Omega a_{ij} D_i u(t) D_j \psi\, dx = 0, & \forall\, \psi \in H_0^1(\Omega),\ t > 0 \\ \displaystyle\lim_{t \to 0+} \| u(t) - \varphi \|_{H^1} = 0, & \end{cases} \tag{11}$$

mentre le formule (5), (6), (7) ed (8) diventano ($\varphi \in H_0^1(\Omega)$, $t > 0$):

$$\| u(t) \|_{L^2} \leq \| \varphi \|_{L^2} \tag{12}$$

$$\| u(t) \|_{H^1} \leq \sqrt{\frac{\Lambda_0}{\lambda_0}}\, \| \varphi \|_{H^1} \tag{13}$$

$$\lim_{t \to 0+} \left| \frac{1}{t} \int_\Omega [\varphi - u(t)]\, \psi\, dx - \Sigma_{ij} \int_\Omega a_{ij} D_i \varphi\, D_j \psi\, dx \right| = 0 \tag{14}$$

uniform. per $\psi \in \mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ limitato in $H_0^1(\Omega)$.

$$\left\| \frac{du(t)}{dt} \right\|_{L^2} \leq \sqrt{\frac{\Lambda_0}{t}} \, \| \varphi \|_{H^1} \,. \tag{15}$$

Se il dato iniziale di (11), φ, è a supporto compatto in Ω, le (12), (13), si possono ulteriormente precisare.

Sia $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\vartheta(x) = \operatorname{dist}(x, \operatorname{supp}(\varphi))$; allora si ha, detta $u(t, x\,;\, \varphi)$ la soluzione di (11), :

$$\int_\Omega | u(t, x\,;\, \varphi) |^2 \, e^{\lambda \vartheta(x)} \, dx \leq C e^{\lambda^2 t} \| \varphi \|^2_{L^2}, \qquad \forall \lambda, t \geq 0 \tag{16}$$

$$\int_\Omega | D_i u(t, x\,;\, \varphi) |^2 \, e^{\lambda \vartheta(x)} \, dx \leq C' \, e^{2\lambda^2 t} \, \frac{\lambda}{\sqrt{t}} \, \| \varphi \|^2_{H^1} \qquad \forall \lambda \geq 1, \; 0 < t \leq 1 \tag{17}$$

dove le costanti C e C' dipendono solo da n, λ_0, Λ_0.

Dim. di (16): vedi [4] pag. 690

Dim. di (17): Posto $\vartheta_k(x) = \operatorname{Inf}\{\vartheta(x), k\}$, $u(t) = u(t, x\,;\, \varphi)$, si ha su Ω, per la (2),

$$\lambda_0 \, \Sigma_i \, | D_i u(t) |^2 \, e^{\lambda \vartheta_k} \leq \Sigma_{ij} \, a_{ij} \, D_i u(t) \cdot D_j u(t) \cdot e^{\lambda \vartheta_k}$$

$$= \Sigma_{ij} \, a_{ij} \, D_i u(t) \, D_j [u(t) \, e^{\lambda \vartheta_k}] - \lambda \, \Sigma_{ij} \, a_{ij} \, D_i u(t) \cdot D_j \vartheta_k \cdot u(t) \, e^{\lambda \vartheta_k}.$$

Integrando su Ω ed osservando che $u(t) \, e^{\lambda \vartheta_k} \in H^1_0(\Omega)$, $| D_j \vartheta_k | \leq 1$, $| a_{ij} | \leq \Lambda_0$, si ottiene

$$\lambda_0 \, \Sigma_i \int_\Omega | D_i u(t) |^2 \, e^{\lambda \vartheta_k} \, dx \leq \left| \int_\Omega \frac{du(t)}{dt} \, u(t) \, e^{\lambda \vartheta_k} \, dx \right|$$

$$+ \, n \lambda \, \Lambda_0 \, \Sigma_i \left| \int_\Omega D_i u(t) \cdot u(t) \, e^{\lambda \vartheta_k} \, dx \right|$$

$$\leq \left(\left\| \frac{du(t)}{dt} \right\|_{L^2} + n \lambda \, \Lambda_0 \, \Sigma_i \, \| D_i u(t) \|_{L^2} \right) \| u(t) \, e^{\lambda \vartheta_k} \|_{L^2}.$$

Utilizzando allora la (15) e la (16), si ha, per $\lambda \geq 1$, $t \leq 1$, :

$$\Sigma_i \int |D_i u(t)|^2 e^{\lambda \vartheta_k} dx \leq C(n, \lambda_0, \Lambda_0) \frac{\lambda}{\sqrt{t}} e^{2\lambda^2 t} \| \varphi \|^2_{H^1}$$

e quindi, passando al limite per $k \to \infty$, la (17).

Dalle (16), (17) si ricavano i seguenti risultati :

LEMMA 1. *Sia* $(a_{ij}) \in M(\lambda_0, \Lambda_0)$, $u(t, x; \varphi)$ *la soluzione di* (11) *corrispondente ad* (a_{ij}), Ω_0 *un aperto di* Ω, $\psi_0 \in H_0^1(\Omega)$.
Allora

$$\Sigma_{ij} D_i (a_{ij} D_j \psi_0) \equiv 0 \qquad su \quad \Omega_0$$

se e solo se

$$(18) \qquad \left| \int_\Omega [\varphi(x) - u(t, x; \varphi)] \, \psi_0(x) \, dx \right| \leq C \sqrt{t} \, e^{-\varrho/\sqrt{t}} \| \varphi \|_{H^1} \| \psi_0 \|_{H^1}$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_0), \quad 0 < t \leq \operatorname{Inf}\{1, \varrho^2\}$$

dove $\varrho = \operatorname{dist}(\complement \Omega_0, supp(\varphi))$ [1] *e* $C = C(n, \lambda_0, \Lambda_0, \Omega_0, supp(\varphi))$.

Dim. i) Dalla (18), dividendo entrambi i membri per t e passando al limite per $t \to 0+$, si ottiene, per la (14):

$$\Sigma_{ij} \int_\Omega a_{ij} D_i \varphi \, D_j \psi_0 \, dx = 0, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_0),$$

da cui

$$\Sigma_{ij} D_i (a_{ij} D_j \psi_0) \equiv 0 \qquad \text{su} \quad \Omega_0 ;$$

ii) Supponiamo viceversa che $\Sigma_{ij} D_i (a_{ij} D_j \psi_0) \equiv 0$ su Ω_0. Fissato $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_0)$ e posto $u(t) = u(t, x; \varphi)$, consideriamo la funzione

$$\Phi(t) = \int_\Omega [\varphi - u(t)] \, \psi_0 \, dx.$$

(1) Se $\Omega = \Omega_0 = R^n$, ϱ è un arbitrario numero > 0

Si ha

$$\Phi'(t) = -\int_\Omega \frac{du(t)}{dt}\,\psi_0\,dx = \Sigma_{ij}\int_\Omega a_{ij}\,D_i\,u(t)\,D_j\,\psi_0\,dx.$$

Ora sia $\vartheta(x) = \operatorname{dist}(x, \operatorname{supp}(\varphi))$ e indichiamo C_i le costanti dipendenti solo da n, λ_0, Λ_0, Ω_0, $\operatorname{supp}(\varphi)$.

Scelta una $w \in \mathcal{D}(\Omega_0)$ tale che $w(x) = 1$ per $\vartheta(x) \leq \frac{\varrho}{2}$, poichè $\operatorname{supp}(wu(t)) \subseteq \Omega_0$ e $(1 - w)\,u(t)$ è diversa da zero solo per $\vartheta(x) - \frac{\varrho}{2} \geq 0$, si ha

$$| \Phi'(t) | = \left| \Sigma_{ij}\int_\Omega a_{ij}\,D_i(wu(t))\,D_j\,\psi_0\,dx + \Sigma_{ij}\int_\Omega a_{ij}\,D_i[(1 - w)\,u(t)]\,D_j\,\psi_0\,dx \right|$$

$$\leq \left| \Sigma_{ij}\int_{\vartheta(x)\geq\varrho/2} a_{ij}\,D_i[(1 - w)\,u(t)]\,D_j\,\psi_0\,e^{\lambda(\vartheta-\varrho/2)}\,dx \right|$$

$$\leq \Lambda_0\,C_1\,e^{-\lambda\varrho/2}\,\|\psi_0\|_{H^1}(\|u(t)\,e^{\lambda\vartheta}\|_{L^2} + \Sigma_i\|D_i\,u(t)\cdot e^{\lambda\vartheta}\|_{L^2}).$$

Quindi, per le (16), (17),

$$| \Phi'(t) | \leq C_2\sqrt{\frac{\lambda}{\sqrt{t}}}\,e^{-\lambda\varrho/2+4\lambda^2 t}\,\|\varphi\|_{H^1}\,\|\psi_0\|_{H^1}, \qquad \forall\ \lambda \geq 1,\ \ t \leq 1$$

e, scegliendo $\lambda = \frac{2}{\sqrt{t}}$,

$$| \Phi'(t) | \leq C_3\,\frac{1}{\sqrt{t}}\,e^{-\varrho/\sqrt{t}}.$$

Applicando il teorema della media $(\Phi(0) = 0)$ si ottiene

$$| \Phi(t) | \leq t \sup_{0<\xi<t} | \Phi'(\xi) |$$

e quindi $\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\,e^{-\varrho/\sqrt{t}}\ \text{è crescente per}\ 0 < t < \varrho^2\right)$ la (18).

LEMMA 2. *Sia a un operatore lineare, continuo, simmetrico e positivo su $H_0^1(\Omega)$ verificante la* (3), *b l'operatore su $H_0^1(\Omega)$ definito dalla* (9) *ed $u(t, x; \varphi)$ la soluzione di* (4) *relativamente ad $\{a, b\}$.*

Allora

$$a \text{ è } D\text{-locale (cioè verifica la (1))}$$

se e solo se

$$\left| \int_\Omega [\varphi(x) - u(t, x; \varphi)]\, \psi(x)\, dx \right| \leq C \sqrt{t}\, e^{-\varrho/\sqrt{t}}, \quad 0 < t < \operatorname{Inf}\{1, \varrho^2\} \tag{19}$$

per ogni $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *tale che* ψ *è costante in un intorno di* supp (φ); *dove* $\varrho = \varrho(\varphi, \psi) > 0$, $C = C(n, \lambda_0, \Lambda_0, \varphi, \psi)$ ».

Dim. i) Dalla (19), dividendo entrambi i membri per t e passando al limite per $t \to 0+$, si ottiene (per la (7)) che $(a\varphi, \psi) = 0$ se ψ è costante in un intorno di supp (φ), cioè che a è D-locale.

ii) Sia viceversa a un operatore D-locale e siano $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tali che ψ è costante in un intorno Ω_0 di supp (φ).

Per il Teor. 1 esiste allora $(a_{ij}) \in M(\lambda_0, \Lambda_0)$ tale che a si esprime attraverso la (10), di modo che $\Sigma_{ij} D_i (a_{ij} D_j \psi) \equiv 0$ su Ω_0.

Di qui, per il Lemma 1, la (19).

TEOREMA 3. *Sia* $(a_{ij}^{(k)}) \in M(\lambda_0, \Lambda_0)$ *ed* $u_k(t, x; \varphi)$ *la soluzione corrispondente di* (11), k *intero* ≥ 1.

Se, per ogni $t > 0$ *ed ogni* $\varphi \in \overset{0}{H_1}(\Omega)$, *esiste* $\tilde{u}(t, x; \varphi) \in L^2(\Omega)$ *per cui*

$$\lim_k \int_\Omega | u_k(t, x; \varphi) - \tilde{u}(t, x; \varphi)|^2\, dx = 0, \tag{20}$$

allora $\tilde{u}(t, x; \varphi)$ *è la soluzione di* (11) *per qualche* $(\widetilde{a_{ij}}) \in M(\lambda_0, \Lambda_0)$.

Dim. Segue dal Teor. 2 e dal Lemma 2, osservando che la (19) si conserva per il passaggio al limite (20).

§ 2. La G-convergenza.

Sull'insieme $M(\lambda_0, \Lambda_0)$ delle matrici simmetriche (a_{ij}) con elementi in $L^\infty(\Omega)$ verificanti la (2), $\lambda_0 > 0$, si introduce una struttura di convergenza nel modo seguente:

DEFINIZIONE. *Sia* $(a_{ij}^{(k)}) \in M(\lambda_0, \Lambda_0)$ *ed* $u_k(t, x; \varphi)$ *la corrispondente soluzione di* (11), k *intero* ≥ 1.

Diremo che $(a_{ij}^{(k)})$ *è G-fondamentale se la successione di funzioni della* x:

$$\{u_k(t, x; \varphi)\}_k$$

è di Cauchy in $L^2(\Omega)$, *per ogni* $t > 0$, $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Diremo che $(a_{ij}^{(k)})$ *è G-convergente verso* $(a_{ij}) \in M(\lambda_0, \Lambda_0)$ *se, detta* $u(t, x; \varphi)$ *la soluzione di* (11) *relativamente ad* (a_{ij}),

$$\lim_k \int_\Omega |u_k(t, x; \varphi) - u(t, x; \varphi)|^2 \, dx = 0, \quad \forall\, t > 0, \quad \varphi \in \overset{\circ}{H}{}_0^1(\Omega), \tag{21}$$

Osserviamo subito che, a causa della (12), la precedente definizione non cambia se si impone che $\{u_k(t, x; \varphi)\}$ sia di Cauchy, o convergente, in $L^2(\Omega)$ per ogni $t > 0$ ed ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Mostriamo ora alcune proprietà della G-convergenza:

PROPOSIZIONE 1 (unicità del limite). *Il limite di una successione G-convergente è unico.*

Dim. Supponiamo che $\{(a_{ij}^{(k)})\}$ sia una successione di $M(\lambda_0, \Lambda_0)$ G-convergente verso (b_{ij}) e (c_{ij}), $u_k(t, x; \varphi)$ la soluzione di (11) corrispondente ad $(a_{ij}^{(k)})$ ed $u(t) = u(t, x; \varphi)$ il limite in $L^2(\Omega)$ di $u_k(t, x; \varphi)$.

Si ha allora, per ogni $\psi \in H_0^1(\Omega)$:

$$\int_\Omega b_{ij} D_i u(t) D_j \psi \, dx = \int_\Omega c_{ij} D_i u(t) D_j \psi \, dx = -\int_\Omega \frac{du(t)}{dt} \psi \, dx$$

e, passando al limite per $t \to 0+$,

$$\int_\Omega b_{ij} D_i \varphi D_j \psi \, dx = \int_\Omega c_{ij} D_i \varphi D_j \psi \, dx, \qquad \forall\, \varphi, \psi \in H_0^1(\Omega).$$

Da qui, scegliendo φ, ψ come nella nota [2] con $\sigma = 1$, segue

$$b_{ij} = c_{ij}, \qquad \forall\, i, j.$$

---

[2] Sia $a_{ij} = a_{ji} \in L^\infty(\Omega)$. In relazione ad una $w \in \mathcal{D}(\Omega)$, e ad un numero $\sigma > 0$, consideriamo le funzioni seguenti:

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = \dfrac{1}{\sigma} w(x) \operatorname{sen}(\sigma x_r) \operatorname{sen}(\sigma x_s) \\ \psi_1(x) = -\dfrac{1}{\sigma} w(x) \cos(\sigma x_r) \cos(\sigma x_s) \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi_2(x) = \dfrac{1}{\sigma} w(x) \operatorname{sen}(\sigma x_r) \cos(\sigma x_s) \\ \psi_2(x) = \dfrac{1}{\sigma} w(x) \cos(\sigma x_r) \operatorname{sen}(\sigma x_s). \end{cases}$$

Le norme in $H^1(\Omega)$ di tali funzioni sono maggiorate da

PROPOSIZIONE 2. (completezza). *Ogni successione G-fondamentale è G-convergente.*

Dim.: è il Teor. 3.

PROPOSIZIONE 3. (compattezza). *Ogni successione di $M(\lambda_0, \Lambda_0)$ ha sottosuccessioni G-convergenti.*

Dim. Sia $(a_{ij}^{(k)}) \in M(\lambda_0, \Lambda_0)$, $\bar{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega)$ ed $u_k(t) = u_k(t, x; \bar{\varphi})$ la corrispondente soluzione di (11).

Posto

$$K_r = \{x \in R^n : \operatorname{dist}(x, \operatorname{supp}(\bar{\varphi})) < r\},$$

consideriamo la decomposizione

$$u_k(t) = w u_k(t) + (1 - w)\, u_k(t)$$

dove $w \in \mathcal{D}(R^n)$ è tale che $w \equiv 1$ su K_r, $w \equiv 0$ su $R^n - K_{r+1}$.

Dalla (16), con $\lambda = 1$, segue allora

$$\int_\Omega |(1 - w)\, u_k(t)|^2\, dx \leq C e^{-r} e^t \|\bar{\varphi}\|_{L^2}^2 .$$

D'altra parte $\{w u_k(t)\}$ è una successione limitata in $H_0^1(\Omega \cap K_r)$, per la (13), ed ammette quindi (teor. di Rellich) una sottosuccessione $\{w u_{k_p}(t)\}_p$ di Cauchy in $L^2(\Omega \cap K_r)$.

Allora, scegliendo r abbastanza grande, si dimostra che $\{u_{k_p}(t, x; \bar{\varphi})\}_p$ è di Cauchy in $L^2(\Omega)$, $\forall\, t > 0$.

A questo punto, detto Y un sottoinsieme numerabile di $\mathcal{D}(\Omega)$ che generi un sottospazio lineare denso in $L^2(\Omega)$, si può costruire col procedimento diagonale una successione di interi $\{k_p\} \xrightarrow{p} +\infty$ tale che $\{u_{k_p}(t, x; \varphi)\}_p$ è di Cauchy in $L^2(\Omega)$, per ogni t razionale ed ogni $\varphi \in Y$.

$$\left(4\, \|w\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\sigma^2}\, \|w\|_{H^1}^2\right)^{1/2}.$$

Inoltre si ha

$$\Sigma_{ij} \left[\int_\Omega a_{ij}\, D_i \varphi_1 \cdot D_j \psi_1\, dx + \int_\Omega a_{ij}\, D_i \varphi_2 \cdot D_j \psi_2\, dx \right] = \int_\Omega a_{rs}\, w^2\, dx,$$

e lo spazio lineare generato da $\{w^2 : w \in \mathcal{D}(\Omega)\}$ è denso in $L^1(\Omega)$.

Ma per la (12) e la (15) (che implica l'equicontinuità delle $u_k(t)$, come funzioni a valori in $L^2(\Omega)$, per $t > 0$), si può concludere che $\{u_{k_p}(t, x; \varphi)\}_p$ è di Cauchy in $L^2(\Omega)$, $\forall\, t > 0$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

PROPOSIZIONE 4. *Una successione di $M(\lambda, \Lambda_0)$ è G-convergente se (e solo se) tutte le sue sottosuccessioni G-convergenti hanno lo stesso limite.*

Dim. Sia $(a_{ij}^{(k)}) \in M(\lambda_0, \Lambda_0)$, $u_k(t, x; \varphi)$ la corrispondente soluzione di (11), (a_{ij}) il limite comune a tutte le sottosuccessioni G-convergenti di $(a_{ji}^{(k)})$ (di tali sottosuccessioni ne esiste qualcuna, per la Prop. 3) ed $u(t, x; \varphi)$ la soluzione di (11) relativamente ad (a_{ij}).

Allora $(a_{ij}^{(k)})$ è G-convergente verso (a_{ij}).

In caso contrario, infatti si troverebbe $\bar{t} > 0$, $\bar{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varepsilon > 0$, ed una successione di interi $\{k_p\} \xrightarrow{p} +\infty$, per cui

$$\| u_{k_p}(\bar{t}, x; \bar{\varphi}) - u(\bar{t}, x; \bar{\varphi}) \|_{L^2} \geq \varepsilon, \quad \forall\, p.$$

Ma ciò contrasta con la Prop. 3 e l'ipotesi, che assicurano l'esistenza di qualche sottosuccessione di $\{(a_{ij}^{(k_p)}\}_p$ G-convergente verso (a_{ij}).

Terminiamo il paragrafo osservando che la (21) è equivalente alle:

$$(21)_1 \qquad \lim_k \int_\Omega [u_k(t, x; \varphi) - u(t, x; \varphi)]\, \psi(x)\, dx = 0, \qquad \forall\, t > 0;\ \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

$$(21)_2 \qquad \lim_k \int_\Omega | u_k(t, x; \varphi) - u(t, x; \varphi) |^2\, dx = 0, \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

uniform. per $t \in (0, \delta)$, $\forall\, \delta > 0$.

$$(21)_3 \qquad \lim_k | u_k(t, x; \varphi) - u(t, x; \varphi) | = 0, \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

uniform. per $t \in (0, \delta)$, $\forall\, \delta > 0$, e per $x \in K$, $\forall\, K \subset\subset \Omega$.

Dim. $(21)_2 \Longrightarrow (21) \Longrightarrow (21)_1$: ovvio.

$(21)_1 \Longrightarrow (21)$: segue dall'applicazione opposta e dalla Prop. 4.

$(21) \Longrightarrow (21)_2$: fissato $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e posto $u_k(t) = u_k(t, x; \varphi)$, $u(t) = u(t, x; \varphi)$, sia $\Phi_k(t) = \| u_k(t) - u(t) \|_{L^2}^2$.

Dalla (12) segue che $|\Phi_k(t)| \leq 2 \| \varphi \|_{L^2}^2$ e dalla (13) segue:

$$| \Phi'_k(t) | = \left| 2 \int_\Omega \left[\frac{du_k(t)}{dt} - \frac{du(t)}{dt} \right] (u_k(t) - u(t))\, dx \right| =$$

$$= \left| 2\, \Sigma_{ij} \int_\Omega [a_{ij}^{(k} D_i u_k(t) - a_{ij} D_i u(t)]\, D_j (u_k(t) - u(t))\, dx \right|$$

$$\leq C(\lambda_0, \Lambda_0) \| \varphi \|_{H^1}^2 .$$

In particolare le funzioni $\Phi_k(t)$ sono equilimitate ed equicontinue per $t \geq 0$; allora, dalla (21), la $(21)_2$ si ottiene facilmente.

$(21) \Longrightarrow (21)_3$: segue dall'equihölderianità delle $u_k(t, x; \varphi)$ rispetto alle variabili t ed x (teor. di Nash).

$(21)_3 \Longrightarrow (21)$: segue dall'implicazione opposta e dalla Prop. 4.

§ 3. La G-convergenza sui problemi di Dirichlet.

Ad ogni $(a_{ij}) \in M(\lambda_0, \Lambda_0)$ si può associare l'operatore lineare e continuo

$$A = - \Sigma_{ij} D_i (a_{ij} D_j) : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega).$$

Poichè A individua gli a_{ij} in modo univoco (vedi nota [2] a pie' di pag. 11) identificheremo (a_{ij}) con A.

Per $\varphi, \psi \in H_0^1(\Omega)$ si ha

$$\langle A\varphi, \psi \rangle = \langle A\psi, \varphi \rangle = \Sigma_{ij} \int_\Omega a_{ij} D_i \varphi\, D_j \psi\, dx$$

e quindi per la (2)

$$\lambda_0\, \Sigma_i \| D_i \varphi \|_{L^2}^2 \leq \langle A\varphi, \varphi \rangle \leq \Lambda_0\, \Sigma_i \| D_i \varphi \|_{L^2}^2, \qquad \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Da ciò segue che, per ogni $\lambda > 0$, gli operatori $\lambda I + A$, dove I è l'immersione canonica di $H_0^1(\Omega)$ in $H^{-1}(\Omega)$, sono isomorfismi di $H_0^1(\Omega)$ sopra $H^{-1}(\Omega)$. Si ha inoltre, per $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, $f \in H^{-1}(\Omega)$:

$$\| (\lambda I + A)\varphi \|_{H^{-1}} \leq \operatorname{Sup} \{\lambda, \Lambda_0\} \| \varphi \|_{H^1}, \qquad \lambda \geq 0 \tag{22}$$

$$\| (\lambda I + A)^{-1} f \|_{H^1} \leq \operatorname{Sup} \left\{ \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda_0} \right\} \| f \|_{H^{-1}}, \qquad \lambda > 0. \tag{23}$$

Nel caso che Ω *sia limitato*, è ben noto che la norma H^1, su $H_0^1(\Omega)$, è equivalente alla norma $\varphi \rightsquigarrow [\Sigma_i \| D_i \varphi \|_{L^2}^2]^{1/2}$.

Esiste allora una costante positiva $\gamma = \gamma(\Omega)$, per cui

$$\gamma \lambda_0 \| \varphi \|_{H^1}^2 \leq \langle A \varphi, \varphi \rangle, \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

In tal caso, quindi, anche A è un isomorfismo di $H_0^1(\Omega)$ su $H^{-1}(\Omega)$ e si ha, per $f \in H^{-1}(\Omega)$ (e Ω *limitato*):

$$\| (\lambda I + A)^{-1} f \|_{H^1} \leq \frac{1}{\gamma \lambda_0} \| f \|_{H^{-1}} \qquad \lambda \geq 0 . \tag{24}$$

Inoltre, detta $u(t, x; \varphi)$ la soluzione di (11) relativamente ad (a_{ij}), si ha

$$\frac{du}{dt}(t, x; \varphi) = - A u(t, x; \varphi) \qquad t > 0, \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{25}$$

Dalla (25) si ricava poi, facilmente, la *formula del risolvente*:

$$[(\lambda I + A)^{-1} \varphi](x) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} u(t, x; \varphi)\, dt, \qquad \lambda > 0, \varphi \in H_0^1(\Omega), \tag{26}$$

dove l'integrale converge sullo spazio $H_0^1(\Omega)$, e quindi anche su $L^2(\Omega)$, in quanto si ha, per la (13),

$$\| e^{-\lambda t} u(t, x; \varphi) \|_{H^1} \leq e^{-\lambda t} \sqrt{\frac{\Lambda_0}{\lambda_0}} \| \varphi \|_{H^1} .$$

La (26) permette di interpretare la G-convergenza come la convergenza in $L^2(\Omega)$ delle soluzioni del problema di Dirichlet con dato al contorno nullo e secondo membro fisso. Precisamente:

TEOREMA 4. *Sia $\lambda > 0$. Una successione $\{A_k\}$ di $M(\lambda_0, \Lambda_0)$ è G-convergente verso A se e solo se*

$$\lim_k \| (\lambda I + A_k)^{-1} f - (\lambda I + A)^{-1} f \|_{L^2} = 0, \qquad \forall f \in H^{-1}(\Omega). \tag{27}$$

Se inoltre Ω è limitato, un'altra condizione necessaria e sufficiente perchè $\{A_k\} \xrightarrow{G} A$ è che valga la

$$\lim_k \| A_k^{-1} f - A^{-1} f \|_{L^2} = 0, \qquad \forall f \in H^{-1}(\Omega). \tag{28}$$

Dim. i) Sia $\{A_k\} \xrightarrow{G} A$ ed $u_k(t) = u_k(t, x; \varphi), u(t) = u(t, x; \varphi)$ siano le corrispondenti soluzioni di (11) per un fissato $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Utilizzando la (26) e la $(21)_2$ si ha, per $\lambda > 0$ e per δ, k abbastanza grandi,

$$\| (\lambda I + A_k)^{-1} \varphi - (\lambda I + A)^{-1} \varphi \|_{L^2} = \left\| \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}(u_k(t) - u(t))\, dt \right\|_{L^2} \leq$$

$$\leq \int_0^{\delta} e^{-\lambda t} \| u_k(t) - u(t) \|_{L^2}\, dt + \varepsilon \leq 2\varepsilon.$$

ii) (³) Supponiamo valida la (27) per qualche $\lambda > 0$. Se B è il limite di una sottosuccessione G-convergente di $\{A_k\}$, $\{A_{k_p}\}$, allora per quanto provato $(\lambda I + B)^{-1} f$ è il limite in $L^2(\Omega)$ di $\{(\lambda I + A_{k_p})^{-1} f\}_p$ per ogni $f \in H^{-1}(\Omega)$.

Confrontando con la (26), si ha allora $(\lambda I + A)^{-1} f = (\lambda I + B)^{-1} f$ e quindi $A = B$.

Ma allora, per la Prop. 4, $\{A_k\}$ è G-convergente verso A.

Sia ora *Ω limitato.*

i) Supponiamo che $\{A_k\} \xrightarrow{G} A$. Si ha, $\forall \lambda > 0$:

$$A_k^{-1} - A^{-1} = [A_k^{-1} - (\lambda I + A_k)^{-1}] - [A^{-1} - (\lambda I + A)^{-1}] +$$

$$+ [(\lambda I + A_k)^{-1} - (\lambda I + A)^{-1}] = A_k^{-1} [(\lambda I + A_k) - A_k] (\lambda I + A_k)^{-1} -$$

$$- A^{-1} [(\lambda I + A) - A] (\lambda I + A)^{-} + [(\lambda I + A_k)^{-1} - (\lambda I + A)^{-1}] =$$

$$= \lambda A_k^{-1} I (\lambda I + A_k)^{-1} - \lambda A^{-1} I (\lambda I + A)^{-1} + [(\lambda I + A_k)^{-1} - (\lambda I + A)^{-1}].$$

Quindi, per la (24), si ha, $\forall f \in H^{-1}(\Omega)$,

$$\| A_k^{-1} f - A^{-1} f \|_{L^2} \leq \frac{2\lambda}{(\gamma \lambda_0)^2} \| f \|_{H^{-1}} + \| (\lambda I + A_k)^{-1} f - (\lambda I + A)^{-1} f \|_{L^2}.$$

(³) Questa parte del Teorema ($\lambda \neq 0$) si potrebbe ottenere anche col teorema di Trotter-Kato (vedi [6] pag. 269): tuttavia in questo caso particolare la dimostrazione diretta è più semplice.

Passando tale relazione al limite per $k \to +\infty$ e poi per $\lambda \to 0+$ si ha la (28).

ii) Dalla (28) si ottiene che $\{A_k\} \xrightarrow{G} A$ procedendo come nel caso di Ω qualsiasi.

Da questo teorema, utilizzando ancora le (23), (24), segue il

COROLLARIO 1. *Se $\{A_k\}$ è G-convergente verso A ed $f_k, f \in H^{-1}(\Omega)$ sono tali che*

$$\lim_k \| f_k - f \|_{H^{-1}} = 0$$

allora si ha

$$\lim_k \| (\lambda I + A_k)^{-1} f_k - (\lambda I + A)^{-1} f \|_{L^2} = 0$$

per ogni $\lambda > 0$, ed anche per $\lambda = 0$ se Ω è limitato.

Dal Cor. 1 e dalla Prop. 3 si ricava infine il

COROLLARIO 2. *Sia $\mathcal{K}$ una parte compatta di $H^{-1}(\Omega)$.*
Allora l'insieme

$$\{u \in H_0^1(\Omega) : \lambda u + Au \in \mathcal{K} ; A \in M(\lambda_0, \Lambda_0)\}$$

è compatto in $L^2(\Omega)$, $\forall \lambda > 0$, ed anche per $\lambda = 0$ se Ω è limitato.

Caso particolare: $\mathcal{K} = \{f\}$.

§ 4. Altri tipi di convergenza.

Vediamo quali sono i legami fra la G-convergenza ed altre possibili convergenze su $M(\lambda_0, \Lambda_0)$.

Siano $(a_{ij}^{(k)}), (a_{ij}) \in M(\lambda_0, \Lambda_0)$ ed $A_k = -\Sigma_{ij} D_i (a_{ij}^{(k)} D_j)$, $A = -\Sigma_{ij} D_i (a_{ij} D_j)$ i corrispondenti operatori di $H_0^1(\Omega)$ su $H^{-1}(\Omega)$, k intero ≥ 1.

Si può allora definire la convergenza $\{(a_{ij}^{(k)})\} \xrightarrow{k} (a_{ij})$ in uno dei modi seguenti:

(I) $\qquad \lim_k \| A_k \varphi - A\varphi \|_{H^{-1}} = 0, \qquad$ uniform. per $\| \varphi \|_{H_0^1} \leq 1$.

(II) $\qquad \lim_k \| A_k \varphi - A\varphi \|_{H^{-1}} = 0, \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$.

(III) $\qquad \lim_k | \langle A_k \varphi - A\varphi, \psi \rangle | = 0, \qquad \forall \varphi, \psi \in H_0^1(\Omega)$.

1. La (I) è equivalente alla

$$\text{(I)}' \qquad \lim_k \| a_{ij}^{(k)} - a_{ij} \|_{L^\infty} = 0, \qquad \forall\, i, j.$$

Dim. (I) $\Longleftrightarrow$ (I)$'$. Sia

$$\| A \|_{1,-1} = \operatorname*{Sup}_{\varphi,\, \psi \in V} \left| \int_\Omega a_{ij} D_i \varphi\, D_j \psi\, dx \right|,$$

dove V è la sfera unitaria di $H_0^1(\Omega)$.

Si ha allora facilmente

$$\| A \|_{1,-1} \leq \Sigma_{ij} \| a_{ij} \|_{L^\infty}.$$

D'altra parte, utilizzando le funzioni φ_i, ψ_i, della nota (2) a pie' di pag. 11, con $\sigma = \| w \|_{L^2} / \| w \|_{H^1}$, si ottiene

$$\| a_{rs} \|_{L^\infty} \leq 24 \, \| A \|_{1,-1}, \qquad \forall\, r, s.$$

2. La (II) è equivalente, per ogni $\lambda > 0$, ed anche per $\lambda = 0$ se Ω è limitato, alla

$$\text{(II)}' \qquad \lim_k \| (\lambda I + A_k)^{-1} f - (\lambda I + A)^{-1} f \|_{H^1} = 0, \qquad \forall\, f \in H^{-1}(\Omega).$$

ed alla

$$\text{(II)}'' \qquad \lim_k \| u_k(t, x; \varphi) - u(t, x; \varphi) \|_{H^1} = 0, \qquad \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

$$\text{uniform. per } t \in (0, \delta),\ \forall\, \delta > 0;$$

dove $u_k(t, x; \varphi)$ ed $u(t, x; \varphi)$ sono le soluzioni di (11) relative ad $(a_{ij}^{(k)})$ ed (a_{ij}) rispettivamente.

Dim. (II)$'$ $\Longleftrightarrow$ (II) segue dalle (22), (23), (24), osservando che

$$A_k - A = (\lambda I + A_k) - (\lambda I + A) = (\lambda I + A_k) [(\lambda I + A)^{-1} - (\lambda I + A_k)^{-1}] (\lambda I + A).$$

(II)$''$ $\Longrightarrow$ (II)$'$: segue dalla (26) come nella dim. del Teor. 4, (i).

(II)$'$ $\Longrightarrow$ (II)$''$: si ottiene applicando il teorema. di Trotter-Kato ([6], pag. 269) sulla convergenza dei semigruppi astratti; si può infatti verificare che $T_t : \varphi(x) \rightsquigarrow u(t, x; \varphi)$ è un semigruppo equicontinuo di operatori su $H_0^1(\Omega)$, di generatore $-A$.

La (II)′ e quindi la (II), e a fortiori la (I), sono convergenze più forti della G-convergenza: $M(\lambda_0, \Lambda_0)$ è completo rispetto alla (II) ma non compatto.

Osserviamo anche che la (II) è più debole della convergenza dei coefficienti $\{a_{ij}^{(k)}\}$ verso a_{ij} in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ (ovvero in ogni $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, dato che $|a_{ij}^{(k)}| \leq \Lambda_0$): si verifica infatti facilmente la

PROPOSIZIONE 5. *Se* $(a_{ij}^{(k)})$, $(a_{ij}) \in M(\lambda_0, \Lambda_0)$ *sono tali che*

$$\lim_k \int_K |a_{ij}^{(k)} - a_{ij}|\, dx = 0, \qquad \forall\, i, j,\ \forall\, K \subset\subset \Omega, \tag{29}$$

allora vale la (II).

Si osservi che la (II) non implica la (29), per $n > 1$, :

ESEMPIO

$$A_k = \Delta + \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\beta_k(x_2)\frac{\partial}{\partial x_1}\right]$$

dove $\Delta = \Sigma_i\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)^2$ e $\{\beta_k\}$ è una successione di funzioni $\geq -\dfrac{1}{2}$ e C^∞, convergente a zero in $H^{-1}(\Omega)$ ma non in $L^2(\Omega)$ $\left(\text{ex.: } \beta_k(\xi) = \dfrac{1}{2}\cos(k\xi) = = \dfrac{1}{2k} D(\operatorname{sen}(k\xi))\right)$.

Si ha

$$A_k = \Delta + \beta_k(x_2)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2$$

cosicchè $\{A_k\} \xrightarrow{k} \Delta$ secondo la (II), mentre la (29) non vale.

3. La (III) è equivalente alla

$$\lim_k \int_\Omega (a_{ij}^k - a_{ij})\, w\, dx = 0, \qquad \forall\, w \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{III$'$}$$

Dim. (III) $\Longleftrightarrow$ (III)′; basta utilizzare le funzioni φ_i, ψ_i della nota (²) a pie' di pag. 11, con $\sigma = 1$.

La (III) non è confrontabile con la G-convergenza: esistono successioni convergenti ad un certo limite secondo la (III) ma G-convergenti verso un altro limite (vedi Esempio in [4] pag. 661).

§ 5. Soluzioni locali e natura locale della G-convergenza.

Sia $A = -\Sigma_{ij} D_i(a_{ij} D_j)$; si dice che $\psi \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ è una *soluzione locale* dell'equazione $A\psi = 0$ se $\Sigma_{ij} D_i(a_{ij} D_j \psi) = 0$ su Ω, cioè

$$\Sigma_{ij} \int_\Omega a_{ij} D_i \psi \, D_j \varphi \, dx = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Mostreremo ora che, qualora i coefficienti a_{ij} siano convergenti in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, la convergenza delle soluzioni locali in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ comporta la convergenza di tali soluzioni in $H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Precisamente:

Teorema 5. *Sia* $(a^{(k)}_{ij})$, $(a_{ij}) \in M(\lambda_0, \Lambda_0)$ e ψ_k, $\psi \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, k *intero* ≥ 1, *tali che*

$$\Sigma_{ij} D_i(a^{(k)}_{ij} D_j \psi_k) = 0, \qquad \Sigma_{ij} D_i(a_{ij} D_j \psi) = 0 \quad \text{su } \Omega.$$

Se, per ogni $K \subset\subset \Omega$, *si ha*

$$\text{(i)} \qquad \lim_k \int_K |a^{(k)}_{ij} - a_{ij}| \, dx = 0$$

$$\text{(ii)} \qquad \lim_k \int_K |\psi_k - \psi| \, dx = 0 \text{ [4]}$$

allora

$$\{\psi_k\} \xrightarrow{k} \psi \quad \textit{in } H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega).$$

Dim. Data la natura locale del teorema, non è restrittivo supporre Ω limitato.

Per arrivare alla tesi, utilizzeremo la formula seguente;

$$(30) \qquad \lim_k \| A_k(\varphi\psi_k) - A(\varphi\psi) \|_{H^{-1}} = 0, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

---

[4] Si noti che, a causa dell'equihölderianità delle ψ_k sui compatti di Ω, la (ii) è equivalente alla convergenza di $\{\psi_k\}$ verso ψ in ogni $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$.

dove $A_k = -\Sigma_{ij} D_i(a_{ij}^{(k)} D_j)$, $A = -\Sigma_{ij} D_i(a_{ij} D_j)$ sono isomorfismi di $H_0^1(\Omega)$ sopra $H^{-1}(\Omega)$.

Supponiamo vera la (30).

Allora, posto $f_k = A_k(\varphi\psi_k)$, $f = A(\varphi\psi)$, si ha

$$\|\varphi\psi_k - \varphi\psi\|_{H^1} \leq \|A_k^{-1}(f_k - f)\|_{H^1} + \|A_k^{-1} f - A^{-1} f\|_{H^1} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\gamma\lambda_0} \|f_k - f\|_{H^{-1}} + \|A_k^{-1} f - A^{-1} f\|_{H^1}$$

e quindi, per la Prop. 5, $\lim_k \|\varphi(\psi_k - \psi)\|_{H^1} = 0$, cioè la tesi.

Proviamo dunque la (30).

Con facili calcoli si ottiene lo sviluppo seguente:

$$A_k(\varphi\psi_k) = \Sigma_{ij}[D_i(a_{ij}^{(k)} D_j \psi_k)\varphi + (a_{ij}^{(k)}\psi_k) D_i D_j \varphi +$$

$$+ D_i(a_{ij}^{(k)}\psi_k) D_j \varphi + a_{ij}^{(k)} D_i \varphi D_j \psi_k].$$

Esaminiamo i quattro addendi in parentesi quadra:

Il primo di essi è nullo per ipotesi; mentre, utilizzando la formula

$$\lim_k \|a_{ij}^{(k)}\psi_k - a_{ij}\psi\|_{L^2(K)} = 0, \qquad \forall K \subset\subset \Omega$$

(facilmente ricavabile da (i) ed (ii)), si ottiene che il 2^0 ed il 3^0 termine convergono in $H^{-1}(\Omega)$, per $k \to +\infty$, ai corrispondenti termini dello sviluppo di $A(\varphi\psi)$.

Resta quindi da provare soltanto che

$$\lim_k \|a_{ij}^{(k)} D_i \varphi D_j \psi_k - a_{ij} D_i \varphi D_j \psi_k\|_{H^{-1}} = 0.$$

A questo proposito, osserviamo che, per la diseguaglianza di Harnack relativa a soluzioni locali (vedi [5], pag. 202) e l'ipotesi (i), si ha

$$\|\psi_k\|_{H^1(K)} \leq C_K \qquad \forall k, \forall K \subset\subset \Omega. \tag{31}$$

Pertanto la successione $\{a_{ij}^{(k)} D_i \varphi D_j \psi_k\}$ è limitata in $L^2(\Omega)$; inoltre tale successione ha supporto compatto in Ω, cosicchè basterà provare (teor. di Rellich) che

$$\lim_k (a_{ij}^{(k)} D_j \psi_k - a_{ij} D_j \psi) \cdot D_i \varphi \cdot w\, dx = 0, \qquad \forall w \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{32}$$

Scegliendo $\tilde{a}_{ij} \in C^\infty(\Omega)$ in modo che sia $\| \tilde{a}_{ij} - a_{ij} \|_{L^2} \leq \varepsilon$ ed utilizzando ancora la (31), si ha, per k abbastanza grande, :

$$\left| \int_\Omega (a_{ij}^{(k)} D_j \psi_k - a_{ij} D_j \psi) D_i \varphi \cdot w \, dx \right| \leq \left| \int_\Omega (a_{ij}^{(k)} - \tilde{a}_{ij}) D_j \psi_k \cdot D_i \varphi \cdot w \, dx \right| +$$

$$+ \left| \int_\Omega (a_{ij} - \tilde{a}_{ij}) D_j \psi \cdot D_i \varphi \cdot w \, dx \right| + \left| \int_\Omega \tilde{a}_{ij} D_j (\psi_k - \psi) D_i \varphi \cdot w \, dx \right|$$

$$\leq C\varepsilon + \left| \int_\Omega (\psi_k - \psi) \cdot D_j (\tilde{a}_{ij} D_i \varphi \cdot w) \, dx \right|$$

$$\leq C' \varepsilon$$

e quindi la (32).

Un altro risultato sulle soluzioni locali è il seguente :

TEOREMA 6. *Siano* $(a_{ij}^{(k)})$, $(a_{ij}) \in M(\lambda_0, \Lambda_0)$, Ω_0 *un aperto di* Ω *e* $\psi_k \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\psi \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, k *intero* ≥ 1, *tali che* :

(i) $$\{(a_{ij}^{(k)})\} \xrightarrow{G} (a_{ij})$$

(ii) $$\Sigma_{ij} D_i (a_{ij}^{(k)} D_j \psi_k) \equiv 0 \quad su \ \Omega_0, \qquad \forall k$$

(iii) $$\lim_k \int_K | \psi_k - \psi | \, dx = 0, \qquad \forall K \subset\subset \Omega_0 .$$

Si ha allora

$$\Sigma_{ij} D_i (a_{ij} D_j \psi) \equiv 0 \quad su \ \Omega_0 .$$

Dim. Dalla diseguaglianza di Harnack e dalla (iii) segue

(33) $$\| \psi_k \|_{H^1(K)} \leq C_K \qquad \forall k, \forall K \subset\subset \Omega_0 .$$

In particolare $\{\psi_k\}$ è debolmente rel. compatta in $H^1(K)$ e allora si ricava che $\psi \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega_0)$.

Ora, in relazione ad un arbitrario aperto Ω_1 di Ω_0, sia $w \in \mathcal{D}(\Omega_0)$ tale che $\psi \equiv 1$ su Ω_1.

L'ipotesi (ii) implica che

$$\Sigma_{ij} D_j (a_{ij}^{(k)} D_j (\psi_k \cdot w)) \equiv 0 \quad \text{su } \Omega_1,$$

mentre la tesi seguirà da

$$\Sigma_{ij} D_i (a_{ij} D_j (\psi w)) \equiv 0 \quad \text{su } \Omega_1 .$$

Indicate $u_k(t, x; \varphi)$ ed $u(t, x; \varphi)$ le soluzioni di (11) relativamente ad $(a_{ij}^{(k)})$, (a_{ij}), si ha per il Lemma 1 ($\psi_k \cdot w$, $\psi w \in H_0^1(\Omega)$):

$$\left| \int_\Omega [\varphi(x) - u_k(t, x; \varphi)] \psi_k(x) w(x) dx \right| \leq C \sqrt{t}\, e^{-\varrho/\sqrt{t}} \cdot \| \psi_k w \|_{H^1}$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1), \; 0 < t < \operatorname{Inf}\{1, \varrho^2\}$$

dove le costanti C e $\varrho > 0$ sono indipendenti da k.

Passando al limite per $k \to +\infty$ ed applicando la (21), l'ipotesi (iii) e la (33), si ottiene, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$, :

$$\int_\Omega [\varphi(x) - u(t, x; \varphi)] \psi(x) w(x) dx \leq C' \sqrt{t}\, e^{-\varrho/\sqrt{t}}$$

da cui, dividendo entrambi i membri per t e passando al limite per $t \to 0+$,

$$\Sigma_{ij} D_i (a_{ij} D_j \psi) \equiv 0 \text{ su } \Omega_1 .$$

Utilizzando la Prop. 3, si ha allora il

COROLLARIO 1. *L'insieme di tutte le soluzioni locali*

$$L(\lambda_0, \Lambda_0) = \{\psi \in H_{\mathrm{loc}}^1(\Omega) : \; \Sigma_{ij} D_i (a_{ij} D_j \psi) = 0 \text{ su } \Omega ; \; (a_{ij}) \in M(\lambda_0, \Lambda_0)\}$$

è un chiuso di $L_{\mathrm{loc}}^1(\Omega)$.

Si può osservare che $L(\lambda_0, \Lambda_0)$ non è compatto in $L_{\mathrm{loc}}^1(\Omega)$ in quanto non è limitato. Si ha tuttavia:

COROLLARIO 2. *Ogni successione* $\{\psi_k\} \in L(\lambda_0, \Lambda_0)$ *limitata in* $L_{\mathrm{loc}}^1(\Omega)$ *ammette una sottosuccessione convergente, in* $L_{\mathrm{loc}}^1(\Omega)$, *verso qualche* $\psi \in L(\lambda_0, \Lambda_0)$.

Dim. Per la diseguaglianza di Harnack, $\{\psi_k\}$ è limitata anche in $H^1_{\rm loc}(\Omega)$. Ma allora (teor. di Rellich) esiste una sottosuccessione convergente in $L^1_{\rm loc}(\Omega)$, il cui limite apparterrà a $L(\lambda_0, \Lambda_0)$ per il Cor. 1.

Utilizzando il Teor. 6, possiamo ricavare alcuni risultati in merito alla G-convergenza, che chiariscono il carattere *locale* di essa.

Per questo, indichiamo, per ogni aperto U di Ω, $\lambda_0 > 0$, $M(\lambda_0, \Lambda_0; U)$ l'insieme di tutte le matrici simmetriche ad elementi in $L^\infty(U)$ verificanti la (2) su U.

Se $\tilde{\Omega}$ è un aperto di Ω, $\tilde{g}$ è la restrizione ad $\tilde{\Omega}$ di una funzione g su Ω, ed $(a_{ij}^{(k)})$, $(a_{ij}) \in M(\lambda_0, \Lambda_0; \Omega)$, diremo che

$$\{(a_{ij}^{(k)})\} \text{ è } G\text{-convergente ad } (a_{ij}) \text{ su } \tilde{\Omega}$$

se

$$\{(\tilde{a}_{ij}^{(k)})\} \text{ è } G\text{-convergente ad } (\tilde{a}_{ij}) \text{ in } M(\lambda_0, \Lambda_0; \tilde{\Omega}).$$

Vale allora il

TEOREMA 7. *Sia Ω_0 un aperto di Ω, $\{\Omega_p\}$ un ricoprimento con aperti di Ω ed $(a_{ij}^{(k)})$, $(a_{ij}) \in M(\lambda_0, \Lambda_0; \Omega)$, k interno ≥ 1.*

Si ha allora:

$$\text{(i)}\quad \{(a_{ij}^{(k)})\} \xrightarrow{G} (a_{ij}) \ \ su\ \ \Omega \qquad \Longrightarrow \qquad \{(a_{ij}^{(k)})\} \xrightarrow{G} (a_{ij}) \ \ su\ \ \Omega_0$$

$$\text{(ii)}\quad \{(a_{ij}^{(k)}) \xrightarrow{G} (a_{ij}) \ \ su\ \ \Omega_p \ \forall\, p \qquad \Longrightarrow \qquad \{(a_{ij}^{(k)}) \xrightarrow{G} (a_{ij}) \ \ su\ \ \Omega.$$

Dim. Osserviamo subito che basta verificare la (i) con Ω_0 limitato. Infatti da essa discende facilmente, utilizzando la Prop. 4, la (ii) e da quest'ultima segue la (i) con Ω_0 arbitrario.

Sia dunque Ω_0 limitato, e proviamo la (i).

Per la Prop. 3 si può supporre che $\{(a_{ij}^{(k)})\} \xrightarrow{G} (b_{ij})$ su Ω_0, limitandoci a verificare che $(a_{ij}) \equiv (b_{ij})$ su Ω_0.

Fissato $\lambda > 0$ ed $f \in H^{-1}(\Omega)$, siano $\varphi_k, \varphi \in H_0^1(\Omega)$ tali che

$$\lambda\varphi_k - \Sigma_{ij} D_i (a_{ij}^{(k)} D_j \varphi_k) = f,$$

$$\lambda\varphi - \Sigma_{ij} D_i (a_{ij} D_j \varphi) = f, \qquad \text{su } \Omega;$$

e siano $\psi_k, \psi \in H_0^1(\Omega_0)$ tali che

$$-\Sigma_{ij} D_i (a_{ij}^{(k)} D_j \psi_k) = f - \lambda\varphi_k,$$

$$-\Sigma_{ij} D_i (b_{ij} D_j \psi) = f - \lambda\varphi, \qquad \text{su } \Omega_0.$$

Per il Teor. 4, $\{\varphi_k\} \xrightarrow{k} \varphi$ in $L^2(\Omega)$ ed anche (Cor. 1 del Teor. 4) $\{\psi_k\} \xrightarrow{k} \psi$ in $L^2(\Omega_0)$, quindi

$$\{\psi_k - \varphi_k\} \xrightarrow{k} \psi - \varphi \quad \text{in } L^2(\Omega_0).$$

Inoltre

$$\Sigma_{ij} D_i [a_{ij}^{(k)} D_j (\psi_k - \varphi_k)] \equiv 0 \quad \text{su } \Omega_0$$

quindi, per il Teor. 6, si ha

$$\Sigma_{ij} D_i [a_{ij} D_j (\psi - \varphi)] \equiv 0 \quad \text{su } \Omega_0.$$

In conclusione si ha

$$\Sigma_{ij} D_i (b_{ij} D_j \psi) \equiv \Sigma_{ij} D_i (a_{ij} D_j \psi) \quad \text{su } \Omega_0.$$

Ma, al variare di $f \in H^{-1}(\Omega)$, φ assume tutti i possibili valori in $H_0^1(\Omega)$ e quindi anche in $\mathcal{D}(\Omega_0)$, cosicchè l'insieme delle restrizioni ad Ω_0 delle funzioni $\{f - \lambda\varphi\} = \{-\Sigma_{ij} D_i (a_{ij} D_j \varphi)\}$ è denso in $H^{-1}(\Omega_0)$.

Ma allora anche l'insieme delle $\{\psi\}$ è denso in $H_0^1(\Omega_0)$, e si ha la tesi:

$$b_{ij} \equiv a_{ij} \qquad \text{su } \Omega_0, \ \forall j, i.$$

Applicando il Teor. 7, si ha in particolare:

COROLLARIO. *Sia Ω_0 un aperto di Ω, $(a_{ij}^{(k)})$, $(b_{ij}^{(k)})$, (a_{ij}), $(b_{ij}) \in M(\lambda_0, \Lambda_0; \Omega)$, k intero ≥ 1.*

Se

$$\{(a_{ij}^{(k)})\} \xrightarrow{G} (a_{ij}) \qquad \text{su } \Omega$$

$$\{(b_{ij}^{(k)})\} \xrightarrow{G} (b_{ij}) \qquad \text{su } \Omega$$

$$a_{ij}^{(k)} \equiv b_{ij}^{(k)} \qquad \text{su } \Omega_0, \ \forall k, \ \forall i, j,$$

allora

$$a_{ij} \equiv b_{ij} \qquad \text{su } \Omega_0, \ \forall i, j.$$

Nel caso particolare $n = 1$ (Ω aperto di R), $M(\lambda_0, \Lambda_0; \Omega)$ è l'insieme delle funzioni reali misurabili su Ω tali che

$$\lambda_0 \leq a(x) \leq \Lambda_0, \qquad \forall\, x \in \Omega.$$

In questo caso la G-convergenza si può descrivere esplicitamente·

PROPOSIZIONE 6. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè*

$$\{a_k(x)\} \xrightarrow{G} a(x) \quad \text{in } M(\lambda_0, \Lambda_0; \Omega)$$

è che

$$\lim_k \int_\Omega \left[\frac{1}{a_k(x)} - \frac{1}{a(x)}\right] w(x)\, dx = 0, \qquad \forall\, w \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Dim Per il Teor. 7, si può supporre che Ω sia un intervallo limitato. A causa della compattezza di $M(\lambda_0, \Lambda_0; \Omega)$ rispetto alla G-convergenza e della limitatezza di $\left\{\frac{1}{a_k}\right\}$ in $L^\infty(\Omega)$, si tratta di provare che, da

$$\{a_k(x)\} \xrightarrow{G} b(x)$$

$$\lim_k \int_\Omega \left[\frac{1}{a_k(x)} - \frac{1}{a(x)}\right] g(x)\, dx = 0, \qquad \forall\, g \in L^1(\Omega),$$

segue

$$a(x) = b(x), \qquad \forall\, x \in \Omega.$$

Sia $f \in H^{-1}(\Omega)$; poichè $D^2: H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ è un isomorfismo, si può scrivere $f = Dg$ per qualche $g \in L^2(\Omega)$.

Siano φ_k, $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ tali che

$$-D(a_k D\varphi_k) = Dg, \quad -D(b\, D\varphi) = Dg, \quad \text{su } \Omega;$$

si ha allora

$$-D\varphi_k = \frac{g}{a_k} + \frac{C_k}{a_k} \tag{34}$$

dove la costante C_k è determinabile in base alla condizione $\int_\Omega D\varphi_k\, dx = 0$:

$$C_k = -\frac{\int_\Omega \frac{g}{a_k}\, dx}{\int_\Omega \frac{dx}{a_k}}.$$

Ma per le nostre ipotesi e per il Teor. 4, si ha

$$\{\varphi_k\} \xrightarrow{k} \varphi \quad \text{in } L^2(\Omega)$$

$$\lim_k \{C_k\} = -\frac{\int\limits_\Omega \frac{g}{a}\,dx}{\int\limits_\Omega \frac{dx}{a}},$$

quindi, moltiplicando i due membri della (34) per $w \in \mathcal{D}(\Omega)$ e passando al limite per $k \longrightarrow +\infty$, si ottiene:

$$-\int\limits_\Omega D\varphi \cdot w\,dx = \int\limits_\Omega \frac{g}{a}\,w\,dx - \int\limits_\Omega \frac{w}{a}\,dx \cdot \frac{\int\limits_\Omega \frac{g}{a}\,dx}{\int\limits_\Omega \frac{dx}{a}}$$

da cui

$$-D(a\,D\varphi) = Dg.$$

Ma allora, data l'arbitrarietà di $g \in L^2(\Omega)$, $a = b$.

Scuola Normale Superiore
Pisa, Italia

BIBLIOGRAFIA

[1] De Giorgi, E. « *Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari* ». Mem. Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., Ser. 3, Vol. 3 (1957) 25-43.

[2] Nash, J. « *Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations* ». Amer. J. Math., Vol. 80 (1958) 931-954.

[3] Spagnolo, S. « *Una caratterizzazione degli operatori differenziali autoaggiunti del 2⁰ ordine a coefficienti misurabili e limitati* ». Rend. Sem. Mat. Padova, Vol. 39 (1967) 56-64.

[4] Spagnolo, S. « *Sul limite delle soluzioni di problemi di Cauchy relativi all'equazione del calore* ». Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Vol. 21, Fasc. 4 (1967) 657-699.

[5] Stampacchia, G. « *Équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus* ». Sém. de Math. Sup., Université de Montreal (1965).

[6] Yosida, K. « *Functional Analysis* ». Springer-Verlag (1965).