ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

A. TOGNOLI

L'analogo del teorema delle matrici olomorfe invertibili nel caso analitico reale

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 22, nº 4 (1968), p. 527-558

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1968_3_22_4_527_0>

L'ANALOGO DEL TEOREMA DELLE MATRICI OLOMORFE INVERTIBILI NEL CASO ANALITICO REALE

A. TOGNOLI (*)

Introduzione.

Nel 1957 H. Grauert ha dimostrato che la classificazione dei fibrati olomorfi aventi per gruppo strutturale un gruppo di Lie complesso L^* e base uno spazio di Stein V è equivalente alla classificazione dei fibrati topologici di gruppo strutturale L^* e base V (vedi [2], [3], [4]).

L'autore ha provato un analogo risultato per gli spazi analitici reali ([7]).

Uno degli strumenti più potenti usati da H. Grauert è una generalizzazione che egli dà del teorema delle matrici olomorfe invertibili.

Nel caso reale i teoremi di approssimazione di H. Whitney ed il passaggio al complessificato permettono di evitare l'analogo reale del teorema delle matrici olomorfe invertibili (vedi [7]).

Tale teorema è però interessante di per sè e serve, ad esempio, per provare, nel caso di fibrati analitici reali, criteri di approssimabilità di sezioni continue con sezioni analitiche.

Scopo di questo lavoro è provare l'analogo del teorema delle matrici olomorfe invertibili nel caso reale e dimostrare che in un fibrato analitico reale, avente per fibra una varietà, ogni sezione continua è approssimabile con sezioni analitiche.

Più precisamente: nel paragrafo 1 si dimostra il seguente

TEOREMA. *Sia W un insieme analitico reale coerente definito in un intorno del parallelepipedo*

$$C = \{ \{x_i\} \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| \leq a_i ,\, a_i > 0,\ i = 1, \dots, n \}$$

ed $F \xrightarrow{\pi} W$ un fibrato analitico reale di gruppi.

Pervenuto alla Redazione il 28 Marzo 1968.

(*) Lavoro eseguito nel Gruppo di Ricerca n. 35 del comitato nazionale per la Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche per l'anno 1968-69.

Sia L^* il gruppo strutturale di F, L la fibra e supponiamo L, L^* siano complessificabili.

Sia $C_1 = \{\{x_i\} \in C \mid x_1 \leq 0\}$, $C_2 = \{\{x_i\} \in C \mid x_1 \geq 0\}$ $C_0 = C_1 \cap C_2$ ed F_0 una sezione analitica di F su un intorno di $W \cap C_0$ in W.

Se F_0 è omotopa alla sezione identità esistono due sezioni analitiche F_1, F_2 definite su due intorni di $W \cap C_1$, $W \cap C_2$ tali che, ove le applicazioni sono definite risulti: $F_0 = F_1 \cdot F_2^{-1}$ ed F_1, F_2 sono omotope alla sezione identità.

Sia $F \xrightarrow{\pi} V$ un fibrato analitico reale di gruppi avente per base uno spazio analitico reale coerente ogni componente connessa del quale abbia dimensione finita e $d: F \times F \to \mathbb{R}$ una metrica compatibile con la topologia di F. Supponiamo inoltre il gruppo strutturale di F sia riducibile (topologicamente) ad un gruppo di Lie compatto.

Nel paragrafo 2 si dimostra il seguente

TEOREMA. *Sia $\gamma: V \to F$ una sezione continua ed $\varepsilon > 0$, esiste allora una sezione analitica $\gamma_a: V \to F$ che è omotopa a γ ed inoltre $d(\gamma(x), \gamma_a(x)) < \varepsilon$, $\forall x \in V$.*

Siano γ_1, γ_2 due sezioni analitiche di F, se esiste un'omotopia di sezioni continue fra γ_1 e γ_2 allora esiste anche un'omotopia di sezioni analitiche fra γ_1 e γ_2.

In un lavoro di prossima pubblicazione l'autore, usando i due teoremi enunciati, prova un teorema che riunisce i risultati di [4] e di [7].

L'autore ringrazia il professor A. Andreotti ed il professor R. Narasimhan dai quali ha ricevuti numerosi suggerimenti durante la stesura del lavoro.

§ 1. Il teorema delle matrici olomorfe invertibili nel caso analitico reale.

Per le definizioni di spazio analitico reale coerente, complessificazione, antiinvoluzione, fibrato analitico reale, il lettore veda [7].

Sia (F, π, V, L, L^*) un fibrato analitico di gruppi (reale o complesso) di base V, spazio totale F, fibra L e gruppo strutturale L^*.

Fissato un sistema di coordinate normali su L è determinato un fibrato vettoriale analitico che denoteremo:

$$(\check{F}, \check{\pi}, V, \mathbb{R}^n, GL(n, \mathbb{R})) \qquad (\text{oppure} \quad (\check{F}, \check{\pi}, V, \mathbb{C}^n, GL(n, \mathbb{C})),$$

ove $n = \dim L$, ed un'applicazione analitica:

$$(1) \qquad \hat{\delta}: \check{F} \to F \qquad (\text{vedi [2] e [7]}).$$

L'applicazione $\hat{\delta}$ definisce un omeomorfismo bianalitico fra un intorno $U(0)$ della sezione nulla $U(o)$ di $\hat{F}$ ed un intorno $U(E)$ della sezione identità $U(e)$ di F (vedi [2]).

Sia (F, π, V, L, L^*) un fibrato analitico ~~reale~~ di gruppi avente per base uno spazio analitico reale coerente V e supponiamo la coppia (L, L^*) abbia $(\tilde{L}, \tilde{L}^*)$ come complessificata (per la definizione di complessificata della coppia (L, L^*) vedasi [7]).

In queste ipotesi esistono due complessificati $(\tilde{F}, \tilde{\pi}, \tilde{V}, \tilde{L}, \tilde{L}^*)$, $(\tilde{\check{F}}, \tilde{\check{\pi}}, \tilde{V}, \mathbb{C}^n, GL(n, \mathbb{C}))$ di F, $\check{F}$ tali che, indicate con $\sigma : \tilde{F} \longrightarrow \tilde{F}$, $\hat{\sigma} : \tilde{\check{F}} \longrightarrow \tilde{\check{F}}$, $\alpha : \tilde{V} \longrightarrow \tilde{V}$ le antiinvoluzioni associate e con $\tilde{\hat{\delta}} : \tilde{\check{F}} \longrightarrow \tilde{F}$ l'applicazione definita dalla (1) si abbia:

i) $\tilde{\check{F}}$ si identifica al fibrato vettoriale $\check{\tilde{F}}$ associato ad $\tilde{F}$ tramite il sistema di coordinate normali che determinano $\check{F}$ estese ad $\tilde{L}$.

ii) $\tilde{\hat{\delta}}$ è un'estensione di $\hat{\delta}$ e si ha: $\sigma \circ \tilde{\hat{\delta}} = \tilde{\hat{\delta}} \circ \check{\sigma}$.

iii) $\tilde{V}$ è uno spazio di Stein.

Si prendano infatti come complessificati di F, $\check{F}$ due fibrati costruiti a partire da due cocicli $\{g_{i,j}\}$, $\{\check{g}_{i,j}\}$ associati ad F, $\check{F}$ (come fatto nel teorema 1 di [7]) e definiti sullo stesso ricoprimento.

I due complessificati $\tilde{F}$, $\tilde{\check{F}}$ sono quindi associati a dei cocicli $\{\tilde{g}_{i,j}\}$, $\{\tilde{\check{g}}_{i,j}\}$ che sono estensione dei cocicli $\{g_{i,j}\}$, $\{\check{g}_{i,j}\}$ associati ad F, $\check{F}$ e le argomentazioni dell'osservazione 1 del § 3 di [7] si possono ripetere dimostrando così l'asserto.

Nel seguito supporremo che i complessificati scelti soddisfino le i), ii), iii), inoltre il complessificato di un fibrato (F, π, V, L, L^*) spesso si noterà $(\tilde{F}, \tilde{\pi}, \tilde{V}, \tilde{L}, \tilde{L}^*)$.

Dato un fibrato olomorfo di gruppi $G \xrightarrow{\pi} W$, per cui siano definite delle antiinvoluzioni $\alpha : W \longrightarrow W$, $\sigma : G \longrightarrow G$ tali che $\pi \circ \sigma = \alpha \circ \pi$ ed un insieme U di W, con $\alpha(U) = U$, diremo che una sezione γ definita su U è σ-invariante se vale:

$$\gamma(\alpha(x)) = \sigma(\gamma(x)), \qquad \forall\, x \in U.$$

Noteremo con $\Gamma_U^c(G)$, $\Gamma_U(G)$ i gruppi delle sezioni continue, analitiche di G su U (se U non è aperto $\gamma \in \Gamma_U(G)$, significa che γ è restrizione di una sezione γ' analitica definita su un intorno aperto di U).

Indicheremo con ${}^\sigma\Gamma_U^c(G)$, ${}^\sigma\Gamma_U(G)$ i sottogruppi delle sezioni σ-invarianti. Supponiamo sia assegnata su $\check{G}$ una norma σ-invariante (cioè tale che

$\| x \| = \| \sigma(x) \|$ per ogni $x \in \check{G}$). Una tale norma induce sugli insiemi $\Gamma_U^c(\check{G})$, una struttura di gruppo topologico (prendendo la topologia della convergenza uniforme sui compatti). Ricordiamo che per ogni fibrato olomorfo vettoriale $\check{G}$ esiste una norma σ-invariante C^∞ (vedi [7]).

Tramite l'applicazione $\hat{\delta}$ la topologia di $\Gamma_U^c(\check{G})$ induce una topologia su $\Gamma_U^c(G)$ che verrà detta ancora della convergenza uniforme sui compatti. Analoga cosa accade nel caso reale, per i dettagli vedasi [2] e [7].

Se G è un fibrato vettoriale olomorfo allora $\Gamma_U^c(G)$, $\Gamma_U(G)$, ${}^\sigma\Gamma_U^c(G)$, ${}^\sigma\Gamma_U(G)$ sono spazi di Frechet e su ognuno, dei primi due spazi le antiinvoluzioni σ, α definiscono l'applicazione antilineare

$$\sigma_* : \gamma \longrightarrow {}^\sigma\gamma, \qquad \text{ove} \quad {}^\sigma\gamma(x) = \frac{1}{2}(\gamma(x) + \sigma(\gamma(\alpha(x)))).$$

Sia W uno spazio analitico $G \xrightarrow{\pi} W$ un fibrato analitico di gruppi (reale o complesso) T uno spazio topologico compatto $\mathcal{A}, \mathcal{U}, \mathcal{A} \supset \mathcal{U}$ due chiusi di T.

Un'applicazione continua $\varphi: W \times T \longrightarrow G$ è detta $(u - a)$-applicazione a valori in G se

I) $\pi(\varphi(x, t)) = x, \ \forall\, x \in W, \ t \in T$,

II) $\varphi(x, t) =$ identità di $\pi^{-1}(x)$, se $t \in \mathcal{U}$,

III) $\varphi_{|W \times \{t\}}$ è analitica per ogni $t \in \mathcal{A}$.

Se il fibrato G è banale, cioè se $G = W \times L$, e se φ verifica le proprietà I), II), III) allora φ è detta $(u - a)$-applicazione a valori in L.

Sia ora $G \xrightarrow{\pi} W$ un fibrato olomorfo e siano definite delle antiinvoluzioni $\sigma: G \longrightarrow G$, $\alpha: W \longrightarrow W$ tati che $\pi \circ \sigma = \alpha \circ \pi$.

Sia $\varphi: W \times T \longrightarrow G$ una $(u - a)$-applicazione per cui $\varphi_{|W \times \{t\}}$ è σ-invariante per ogni $t \in T$ allora φ è detta $(u - a)$-applicazione σ-invariante.

È immediato poi il senso delle espressioni $(u - a)$-applicazione a valori in $U(E)$ (od in $U(0)$).

Sia $G \xrightarrow{\pi} W$ un fibrato vettoriale olomorfo e supponiamo sia fissata una norma σ-invariannte su G.

Diremo $(u - a)$-omeomorfismo (rispetto a $T, \mathcal{A}, \mathcal{U}$) di G in sè un'applicazione continua $\lambda(x, t) = \lambda: G \times T \longrightarrow G$ tale che:

a) per ogni $t \in T, x \in W$ $\lambda_{|\pi^{-1}(x) \times \{t\}}$ è un isomorfismo lineare di $\pi^{-1}(x)$ in sè,

b) per $t \in \mathcal{A}$ $\lambda_{|G \times \{t\}}$ è olomorfa,

c) per $t \in \mathcal{U}$ $\lambda_{|G \times \{t\}}$ è l'applicazione identica.

Diremo che λ è σ-invariante se $\sigma \circ \lambda_{|G \times \{t\}} = \lambda \circ \sigma_{|G \times \{t\}}$ per ogni $t \in T$.

Poniamo infine:

$$\| \lambda \|_V = \sup_{\substack{t \in T, \ \|x\|=1 \\ x \in \pi^{-1}(V)}} \| x - \lambda(x) \|$$

per ogni sottoinsieme V di W.

Sia $G \xrightarrow{\pi} W$ un fibrato analitico di gruppi, reale o complesso e supponiamo su $\check{G}$ sia definita una norma. Per ogni insieme $U \subset W$ i gruppi $\Gamma_U^c(G)$, $\Gamma_U(G)$ sono quindi dotati di una topologia.

Date due sezioni γ_1, γ_2 di $\Gamma_U^c(G)$ diremo che esse sono omotope (o continuamente omotope) se esiste un'applicazione continua $\alpha : I \longrightarrow \Gamma_U^c(G)$, $I = [0, 1]$ tale che: $\alpha(0) = \gamma_1$, $\alpha(1) = \gamma_2$.

Se γ_1, γ_2 sono elementi di $\Gamma_U(G)$ diremo che essi sono analiticamente omotopi se esiste un'applicazione continua $\alpha : I \longrightarrow \Gamma_U(G)$ tale che $\alpha(0) = \gamma_1$, $\alpha(1) = \gamma_2$.

Supponiamo G sia un fibrato olomorfo e siano definite due antiinvoluzioni $\sigma : G \longrightarrow G$, $\alpha : W \longrightarrow W$ tali che $\pi \circ \sigma = \alpha \circ \pi$; date due sezioni γ_1, γ_2 di ${}^\sigma\Gamma_U^c(G)$ (oppure di ${}^\sigma\Gamma_U(G)$) esse si dicono σ-omotope (oppure σ-analiticamente omotope) se esiste un'applicazione continua $\alpha : I \longrightarrow {}^\sigma\Gamma^c(G)$ (oppure $\alpha : I \longrightarrow {}^\sigma\Gamma_U(G)$) tale che $\alpha(0) = \gamma_1$, $\alpha(1) = \gamma_2$.

Analogamente si definisce il concetto di $(u - a)$-applicazioni omotope e σ-omotope (due $(u - a)$-applicazioni definite rispetto agli insiemi T, $\mathcal{A}$, $\mathcal{U}$, sono omotope se esiste un cammino continuo di $(u - a)$-applicazioni, rispetto agli insiemi T, $\mathcal{A}$, $\mathcal{U}$, che le congiunge).

OSSERVAZIONE 1. Sia (F, π, V, L, L^*) un fibrato analitico reale di gruppi $(\tilde{F}, \tilde{\pi}, \tilde{V}, \tilde{L}, \tilde{L}^*)$ un suo complessificato e $\sigma : \tilde{F} \longrightarrow \tilde{F}$, $\alpha : \tilde{V} \longrightarrow \tilde{V}$ le antiinvoluzioni associate.

Detti $\check{F}$, $\check{\tilde{F}}$ i fibrati vettoriali associati supponiamo valgano le proprietà i), ii), ed iii).

Sia γ una sezione continua (od analitica) σ-invariante definita su $\tilde{V}$ e valga $\gamma(\tilde{V}) \subset U(E)$, allora γ è σ-omotopa (σ-analiticamente omotopa) alla sezione identità.

Consideriamo infatti la famiglia di sezioni:

$\gamma_t(x) = \tilde{\hat{\delta}}(t(\tilde{\hat{\delta}}^{-1}(\gamma(x))))$ per ogni $x \in \tilde{V}$; per l'analiticità di $\tilde{\hat{\delta}}$ le γ_t risultano olomorfe se tale è γ ed inoltre risulta $\gamma_t(\alpha(x)) = \tilde{\hat{\delta}}(t\sigma(\tilde{\hat{\delta}}^{-1}(\gamma(x)))) = \sigma(\tilde{\hat{\delta}}(t\tilde{\hat{\delta}}^{-1}(\gamma(x))))$ per cui γ_t è σ-invariante per ogni $t \in [0, 1]$.

È poi immediato che $\gamma_1 = \gamma$, $\gamma_0 =$ sezione identità e la tesi è così provata.

Si può quindi concludere con l'affermazione seguente: se γ è σ-invariante ed ha valori in $U(E)$ allora $\gamma_{|V}$ è omotopa in F (analiticamente omotopa se γ è olomorfa) alla sezione identità.

In $\mathbb{C}^n$ siano assegnate le coordinate $z_1 = x_1 + iy_1, \ldots, z_n = x_n + iy_n$ poniamo:

$$\widetilde{C} = \{\{z_j\} \in \mathbb{C}^n \mid |x_j| \leq a_j,\ |y_j| \leq b_j,\ a_j > 0,\ b_j > 0,\ j = 1 \ldots n\}$$

$$\widetilde{C}_1 = \{\{z_j\} \in \widetilde{C} \mid -a_1 \leq x_1 \leq 0\},\ \widetilde{C}_2 = \{\{z_j\} \in \widetilde{C} \mid 0 \leq x_1 \leq a_1\}$$

$$\widetilde{C}_0 = \widetilde{C}_1 \cap \widetilde{C}_2,\quad C_i = \widetilde{C}_i \cap \mathbb{R}^n,\quad i = 0, 1, 2.$$

Nel seguito quando diremo insieme analitico di C_i (oppure di $\widetilde{C}_i$) $i = 0, 1, 2$ intenderemo insieme analitico di un intorno aperto di C_i (o di $\widetilde{C}_i$) ed analogamente $(u-a)$-applicazione definita su C_i (oppure su $\widetilde{C}_i$) significa $(u-a)$-applicazione definita su un intorno di $C_i \times T$ in $\mathbb{R}^n \times T$ (oppure di $\widetilde{C}_i \times T$ in $\mathbb{C}_n \times T$), $i = 0, 1, 2$.

Se W è un insieme analitico di C, (oppure di $\widetilde{C}$), spesso noteremo:

$$W_i = W \cap C_i,\ i = 0, 1, 2 \text{ (oppure } W_i = W \cap \widetilde{C}_i).$$

Sia assegnato un fibrato analitico di gruppi $G \xrightarrow{\pi} W$ (reale o complesso), sia $\check{G} \xrightarrow{\check{\pi}} W$ il fibrato vettoriale associato e $\| \ \|$ una norma su $\check{G}$.

Dato un insieme U di W e $\gamma \in \Gamma_U^c(G)$, nel seguito scrivendo $\|\gamma\|_U = \varepsilon$ intenderemo dire che valgono i fatti seguenti:

$$\gamma(U) \subset U(E),\ \|\hat{\delta}^{-1} \circ \gamma\|_U = \varepsilon.$$

PROPOSIZIONE 1. *Sia assegnato il fibrato olomorfo di gruppi $G \xrightarrow{\pi} W$ avente per base l'insieme analitico W del parallelepipedo $\widetilde{C}$ di $\mathbb{C}^n$.*

Sia T uno spazio topologico compatto $\mathcal{A} \supset \mathcal{U}$ due sottoinsiemi chiusi di T.

Sia fissata una norma su $\check{G}$ ed un intorno U di W_0 in W; per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\eta > 0$ tale che, per ogni $(u-a)$-applicazione $F_0 : U \times T \to G$, con $\|\hat{\delta}^{-1} \circ F_0\|_{U \times T} < \eta$ esistano due $(u-a)$ applicazioni $F_i : U(W_i) \times T \to G$, $i=1, 2$ definite su due intorni $U(W_i)$ di W_i in W tali che ove le applicazioni sono definite si abbia:

(1) $$F_0 = F_1 \cdot F_2^{-1} \text{ ed inoltre } \|\hat{\delta}^{-1} \circ F_i\|_{W_i \times T} < \varepsilon,\ i = 1, 2.$$

Le $(u - a)$*-applicazioni* F_i *soddisfacenti alla* (1) *si possono costruire come in* [3].

PROVA *a*) Dimostriamo prima la proposizione quando il fibrato G è banale con fibra eguale a $GL(m, \mathbb{C})$.

Per l'Hilfsatz 4 di [3] basta allora dimostrare l'asserto nel caso in cui W sia un intorno aperto di $\widetilde{C}$; in questo numero supporremo verificata questa ipotesi.

Se G è lineare, oltre che banale, la tesi si prova esaminando l'epressione che usualmente si dà alle F_1, F_2 (tale dimostrazione si trova ad esempio in [3] pagg. 458-460).

Sia ora $GL(m, \mathbb{C})$, $m > 1$, la fibra di G.

Ogni elemento X di $GL(m, \mathbb{C})$ si può scrivere nella forma

$$X = e + X', \quad e = \{\delta_{i,j}\}_{i,j=1,\dots,m}, \quad X' = \{x_{i,j}\}_{i,j=1,\dots,m},$$

ove e è la matrice identità.

Consideriamo in $GL(m, \mathbb{C})$ il sistema di coordinate

$$\varphi : GL(m, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^{m^2} \text{ definito da } \varphi(X) = \{x_{i,j}\} \in \mathbb{C}^{m^2}.$$

Nelle coordinate indotte da φ il prodotto fra due elementi $\varphi(X) = \{x_{i,j}\}_{i,j=1,\dots m}$, $\varphi(Y) = \{y_{i,j}\}_{i,j=1,\dots,m}$ si esprime

$$z_{i,j} = x_{i,j} + y_{i,j} + \sum_{k=1}^{m} x_{i,k}\, y_{k,j} \tag{2}$$

ove $z' = \varphi(X \cdot Y) = \{z_{i,j}\}_{i,j=1,\dots,m}$.

Per ogni $X \in GL(m, \mathbb{C})$ poniamo $|X| = \sup\limits_{i,j=1,\dots,m} |x_{i,j}|$, ove $\varphi(X) = \{x_{i,j}\}$.

Se $|X| \leq 1$ dalla (2) risulta:

$$|X \cdot Y| \leq |X| + |Y| + m\,|Y|. \tag{3}$$

Ritorniamo al nostro problema e consideriamo, nel caso particolare che il gruppo di Lie L sia $GL(m, \mathbb{C})$, le F_1, F_2 costruite in [3] pag. 459.

Con le notazioni ivi introdotte, se $\| F_0 \|_{U \times T}$ è abbastanza piccolo si ha:

$$F_i = \lim_{p \to \infty} F_i^{(1)} F_i^{(2)} \dots F_i^{(p)}, \quad i = 1, 2.$$

ove le $F_i^{(p)}$ sono definite su un intorno di W_i e risulta:

$$\text{(4)} \qquad \| F_i^{(\mu)} \|_{W_i \times T} < 2^{2-\mu} \cdot \varepsilon' \cdot K_0, \; i = 1, 2.$$

ove K_0 è una costante maggiore di uno ed ε' è un qualsiasi numero maggiore di $\| F_0 \|_{U \times T}$.

Se ε' è abbastanza piccolo si può applicare la (3) e dalla (4) si ottiene:

$$\| F_i \|_{W_i \times T} \leq \lim_{p \to \infty} \| F_i^{(1)} \|_{W_i \times T} + (m+1) \| F_i^{(2)} \|_{W_i \times T} + \dots + (m+1) \| F_i^{(p)} \|_{W_i \times T}$$

e quindi per la (4)

$$\| F_i \|_{W_i \times T} < 4\, \varepsilon' K_0 + 2\,(m+1)\, \varepsilon' K_0 = \varepsilon' (4 K_0 + 2\,(m+1)\, K_0)$$

da cui segue l'asserto.

b) Sia W un insieme analitico di $\widetilde{C}$ e $G \xrightarrow{\pi} W$ un fibrato vettoriale olomorfo, $\lambda : \pi^{-1}(U) \times T \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ un $(u - a)$-omomorfismo di $\pi^{-1}(U)$ in sè ed ${}^*F_0 : U \times T \longrightarrow G$ una $(u - a)$-applicazione, ove U è un intorno di W_0 in W.

Vogliamo provare che fissato $\varepsilon^* > 0$ e l'intorno U di W_0 esiste $\eta^* > 0$ tale che se $\| \lambda \|_{U \times T} < \eta^*$ ed $\| {}^*F_0 \|_{U \times T} < \eta^*$ allora esistono due $(u - a)$-applicazioni ${}^*F_i : U(W_i) \times T \longrightarrow G$, $i = 1, 2$, definite su degli intorni $U(W_i)$ di W_i tali che, ove le applicazioni sono definite si abbia:

$${}^*F_0 = {}^*F_1 - \lambda\, {}^*F_2 \text{ ed inoltre } \| {}^*F_i \|_{W_i \times T} < \varepsilon^*.$$

Seguiamo le notazioni del teorema 9 di [3].

Le q-uple di applicazioni $h^{(\chi)}$, $\chi = 1, \dots, q$ si possono prendere piccole in valore assoluto, ne segue che si può supporre $\check{h}^{(\chi)} \equiv 0$.

Essendo W_1, W_2 compatti esistono due costanti K_1, K_2 tali che:

$$\text{(5)} \qquad \left\| \sum_{j=1}^{q} f_j(v)\, H_j(v) \right\|_{W_i \times T} < K_i \left(\sum_{j=1}^{q} | f_j |_{W_i \times T} \right), \; i = 1, 2,$$

ove le $H_j(v)$ sono le sezioni definite nel teorema 9 di [3] ed $| f_j |_{W_i \times T} = \sup_{v \in W_i \times T} | f_j(v) |$.

Per quanto dimostrato in [3], Hilfsatz 4, si può applicare il punto *a*), fissato $\varepsilon^* > 0$ esiste perciò $\eta^* > 0$ tale che se $\| {}^*F_0 \|_{U\times T} < \eta^*$, $\| \lambda \|_{U\times T} < \eta^*$ allora (con le notazioni del teorema 9 di [3]) si ha:

$$\left| G_1 (h_1^{(\chi)}) \right|_{W_1} < \frac{\varepsilon^*}{K_1}, \quad \left| G_2^{-1} \cdot (h_2^{(\chi)}) \right|_{W_2} < \frac{\varepsilon^*}{K_2}.$$

Le $(u - a)$ applicazioni ${}^*F_i$ hanno l'espressione

$${}^*F_i = \sum_{\chi=1}^{q} f_i^{(\chi)} H_\chi, \quad i = 1, 2, \text{ ove } (f_1^{(\chi)}) = G_1 \cdot (h_1^{(\chi)}), \; f_2^{(\chi)} = G_2^{-1} \cdot (h_2^{(\chi)})$$

si ha quindi, per la (5): $\| {}^*F_i \|_{W_i \times T} < \varepsilon^*$, $i = 1, 2$ e la tesi è provata.

c) Rimane da dimostrare il caso generale; supporremo che le F_i che risolvono il nostro problema siano costruite come nell'Hilfsatz 5 di [3]. Esse quindi soddisfano alle relazioni

$$(6) \qquad {}^*F_i(z, t, s) = \lim_{s' \to s} \frac{1}{s' - s} \hat{\delta}^{-1} (F_i(z, t, s') \, F_i(z, t, s)^{-1}), \quad i = 0, 1, 2$$

ove le ${}^*F_i$, $i = 1, 2$, sono delle $(u - a)$-applicazioni che risolvono, sul fibrato vettoriale $\check{G}$, il problema esposto in b) quando si ponga $F_i(z, t, s) = \hat{\delta} (s \cdot \hat{\delta}^{-1} (F_i(z, t)))$, $i = 0, 1, 2$,

$$\lambda (z, t, s) : x \longrightarrow \hat{\delta}^{-1} (F_0 (z, t, s) \cdot \hat{\delta} (x) \cdot F_0(z, t, s)^{-1}), \quad \forall\, x \in \pi^{-1} (U), \; \pi (x) = z$$

ed ${}^*F_0 (z, t, s)$ sia dato dalla (6) per $i = 0$.

Per quanto provato in b) la tesi sarà dimostrata se proveremo i fatti seguenti:

I) fissati gli intorni U, U', $U \supseteq U'$ di W_0 ed $\varepsilon_1 > 0$ esiste $\eta_1 > 0$ tale che:

$$\| F_0 \|_U < \eta_1 \Longrightarrow \| {}^*F_0 \|_{U'} < \varepsilon_1$$

II) fissato $\varepsilon_2 > 0$ esiste $\eta_2 > 0$ tale che:

$$\| {}^*F_i \|_{W_i} < \eta_2 \Longrightarrow \| F_i \|_{W_i} < \varepsilon_2, \quad i = 1, 2.$$

Essendo gli insiemi W_i, $i = 0, 1, 2$, compatti basta provare le proprietà I) e II) nel caso in cui il fibrato G sia banale; supporremo nel seguito soddisfatta questa ipotesi.

Sia dunque $F_i(x, t, s)$ $i = 0, 1, 2$, una delle $(u - a)$-applicazioni $z_1, \dots, z_m$ il sistema di coordinate normali della fibra L di G rispetto alle quali è stato definito $\hat{\delta}$.

Fissiamo il punto (x_0, t_0, s_0) e supponiamo $F_i(x_0, t_0, s_0)$ sia nell'aperto A_{x_0} di $\pi^{-1}(x_0)$ su cui sono definite le coordinate normali. Si ha dunque:

$$F_i(x_0, t_0, s) = \{z_j(s)\}_{j=1, \dots, m} \tag{7}$$

e la $F_i(x_0, t_0, s)$ è determinata in un intorno di (x_0, t_0, s_0) dalle funzioni $z_j(s)$.

Consideriamo ora il punto (x_0, t_0) fisso ed s variabile in modo che $F_i(x_0, t_0, s) \in A_{x_0}$.

Dette $w_1, \dots, w_m$ le coordinate del punto $F_i(x_0, t_0, s') \cdot F_i(x_0, t_0, s_0)^{-1}$ si ha:

$$w_j(s_0, s') = \psi_j(z_1'(s'), \dots, z_m'(s'), z_1''(s_0), \dots, z_m''(s_0))$$

in cui $z_l'(s) = z_l''(s) = z_l(s)$, $l = 1, \dots, m$, e le $\psi_j(z_1', \dots z_m', z_1'', \dots, z_m'')$ sono le funzioni olomorfe che esprimono nelle coordinate scelte l'applicazione $l' \times l'' \longrightarrow l'(l'')^{-1}$ fra gli elementi del gruppo $\pi^{-1}(x_0)$.

Ponendo $s' = s_0$ si ha:

$$\sum_{l=1}^{m} \left[\frac{\partial \psi_j}{\partial z_l'}\right]_{z_l' = z(s_0)} \left[\frac{d z_l}{d s'}\right]_{s'=s_0} = \left[\frac{d w_j(s', s_0)}{d s'}\right]_{s'=s_0}, \quad j = 1, \dots m. \tag{8}$$

Dal problema si hanno le seguenti condizioni:
$z_l(0) = 0$, $l = 1, \dots, m$ (vedi Hilfsatz 5 di [3]) ed inoltre det. $\left(\left[\frac{\partial \psi_j}{\partial z_l'}\right]_{z_l'}\right) \neq 0$ in quanto l'equazione $l'(l'')^{-1} = l'''$ fra elementi del gruppo $\pi^{-1}(x_0)$ è sempre risolubile in l'.

Avendo fatta l'ipotesi che G sia banale e $z_1, \dots, z_m$ siano le coordinate normali della fibra di G rispetto alle quali è definito $\hat{\delta}$ si può considerare su $\check{G}$ la norma:

$$\| \hat{\delta}^{-1}(F_i(x_0, t_0, s_0)) \|' = \sup_{j=1, \dots, m} | z_j(s_0) |$$

$$\| {}^*F_i(x_0, t_0, s_0) \|' = \sup_{j=1, \dots, m} \left| \left[\frac{d w_j(s, s_0)}{d s}\right]_{s=s_0} \right|$$

e porre come solito

$$\| F_i(x_0, t_0, s_0) \|' = \| \hat{\delta}^{-1}(F_i(x_0, t_0, s_0)) \|'.$$

Ogni altra norma su G induce, nell'insieme delle sezioni di G, la stessa topologia di $\| \ \|'$ quindi per provare la tesi basterà dimostrare le proprietà I) e II) rispetto alla norma $\| \ \|'$.

Essendo $z_1, \ldots, z_m$ le coordinate normali che inducono $\hat{\delta}$ se $z_l(s)$, $l = 1, \ldots, m$ sono le funzioni che figurano nella (7) per $i = 0$ si ha:

$$\left[\frac{dz_l(s')}{ds'}\right]_{s'=s} = z_l(s), \ s \in [0, 1] \tag{9}$$

La (8) e la (9) provano il punto I).

Dalle condizioni $z_l(0) = 0$ si deduce $z_l(s) = \int_0^s \frac{dz_l}{ds'} \, ds'$ e quindi:

$$\sup_{s \in [0,1]} |z_1(s)| \leq \sup_{s \in [0,1]} \left[\frac{dz_l}{ds'}\right]_{s'=s} \tag{10}$$

Per dimostrare l'affermazione II) si ragioni nel modo seguente: per la (10) basta provare che:

$$\| {}^*F_i \|'_{W_i \times T} < \eta_2 \Longrightarrow \sup_{s \in [0,1]} \left| \left[\frac{dz_l}{ds'}\right]_{s'=s} \right| < \varepsilon_2 \tag{11}$$

La (11) è immediata conseguenza della (8) se si suppone che la matrice $\left(\left[\frac{\partial \psi_j}{\partial z_l'}\right]_{z_l' = z_l'(s_0)}\right)$ rimanga (al variare di s_0) in un opportuno intorno B della matrice $\left(\left[\frac{\partial \psi_j}{\partial z_l'}\right]_{z_l' = 0}\right)$.

D'altra parte esiste $\beta > 0$ tale che

$$\sup_{j=1,\ldots m} |z_j'| < \beta \Longrightarrow \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial z_l'}\right) \in B.$$

Basta perciò scegliere ${}^*F_i$ in modo che $\| {}^*F_i \|_{W_i \times T}$ sia abbastanza piccolo da far si che, valendo $\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial z_l'}\right) \in B$, risulti $\sup_{j=1 \ldots m} |z_j| < \beta$ e successivamente, usando la (8), determinare η_2 in modo che valga la (11).

La proposizione è così interamente provata.

LEMMA 1. *Sia W un insieme analitico complesso di $\widetilde{C}$, $G \xrightarrow{\pi} W$ un fibrato olomorfo vettoriale, $\sigma: G \to G$, $\alpha: W \to W$ due antiinvoluzioni tali che $\pi \circ \sigma = \alpha \circ \pi$.*

Sia $F_0(x,t)$ una $(u - a)$-applicazione σ-invariante definita su un intorno $B_0 \times T$ di $W_0 \times T$ in $W \times T$ a valori in G e $\lambda(x,t): \pi^{-1}(B_0) \times T \longrightarrow \pi^{-1}(B_0)$ un $(u - a)$-omomorfismo σ-invariante di $\pi^{-1}(B_0)$ in sè.

Se $\|\lambda\|_{B_0 \times T}$ è abbastanza piccolo esistono degli intorni B_i, $B_i = \alpha(B_i)$, di $W_i = W \cap C_i$ in W, $i = 1, 2$ e due $(u - a)$-applicazioni σ-invarianti $F_i: B_i \times T \longrightarrow \pi^{-1}(B_i)$ tali che, ove le applicazioni sono definite si abbia:

$$F_1(x, t) - \lambda(t)(F_2(x, t)) = F_0(x, t).$$

PROVA. Per il teorema 9 di [3] esistono due intorni B_i di W_i, $i = 1, 2$ e due $(u - a)$-applicazioni $F'_i: B_i \times T \longrightarrow \pi^{-1}(B_i)$ tali che, ove le applicazioni sono definite si abbia:

$$F'_1(x, t) - \lambda(t)(F'_2(x, t)) = F_0(x, t). \tag{1}$$

Risulta:

$$\sigma(F'_1(\alpha(x), t) - \lambda(t)(F'_2(\alpha(x), t)) = \sigma(F_0(\alpha(x), t)); \tag{2}$$

tenendo conto che $\lambda(t)$ è σ-invariante e sommando la (2) alla (1) si ha:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}((F'_1(x, t) + \sigma F'_1(\alpha(x), t)) - \lambda(t)(F'_2(x, t) + \sigma F'_2(\alpha(x), t))) = \\ = \dfrac{1}{2}(F_0(x, t) + \sigma F_0(\alpha(x), t)) = F_0(x, t). \end{cases} \tag{3}$$

Ponendo $F_i = {}^{\sigma}F'_i$, $i = 1, 2$ dalla (3) segue la tesi.

Sia (F, π, W, L, L^*) un fibrato analitico reale di gruppi sull'insieme analitico reale coerente W di C ed $(\tilde F, \tilde\pi, \tilde W, \tilde L, \tilde L^*)$ un suo complessificato. Supponiamo $\tilde W$ sia un insieme analitico complesso di $\tilde C$ e $\sigma: \tilde F \longrightarrow \tilde F$, $\alpha: \tilde W \longrightarrow \tilde W$ siano le antiinvoluzioni associate.

Sia $\check{\tilde F}$ lo spazio fibrato vettoriale associato ad $\tilde F$ e su esso sia definita una norma $\check\sigma$-invariante.

Supporremo infine siano verificate le ipotesi i), ii), iii) per i fibrati F, $\check F$, $\tilde F$, $\check{\tilde F}$.

Nelle ipotesi ora enunciate possiamo formulare la

PROPOSIZIONE 2. *Sia $F_0: B_0 \times T \longrightarrow \tilde\pi^{-1}(B_0)$ una $(u - a)$-applicazione σ-invariante definita in un intorno $B_0 \times T$ di $\tilde W_0 \times T$ in $\tilde W \times T$.*

Sia inoltre $F_0(B_0 \times T) \subset U(E)$ e $\|\tilde{\check\delta}^{-1} \cdot F_0\|_{B_0 \times T} < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Esiste allora

$\varepsilon_0 > 0$ tale che, se $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ vi sono due intorni B_i, $\alpha(B_i) = B_i$, di $\tilde{W}_i \cap C$ in $\tilde{W}$, $i = 1, 2$ e due $(u - a)$-applicazioni F_1, F_2 σ-invarianti ed omotope alle $(u - a)$-applicazioni identiche tali che, ove le applicazioni sono definite si abbia:

$$F_1 \cdot F_2^{-1} = F_0 .$$

PROVA *a*). Poniamo $s \cdot F_0(x, t) = \tilde{\hat{\delta}}(s \cdot (\tilde{\hat{\delta}}^{-1}(F_0(x, t))))$, $s \in [0, 1] = I$ Ovviamente $F_0(x, t, s) = s \cdot F_0(x, t)$ è una $(u - a)$-applicazione di $B_0 \times T \times I$ a valori in $\tilde{\pi}^{-1}(B_0)$ quando si considerino $\mathcal{A} \times I$, $\mathcal{U} \times I$ come sottoinsiemi di $T \times I$. Come pure è una $(u - a)$-applicazione la restrizione di $F_0(x, t, s)$ ad un insieme del tipo $B_0 \times T \times \{s\}$, $s \in I$, considerando i sottoinsiemi $\mathcal{A}_s = \mathcal{A} \times \{s\}$, $\mathcal{U}_s = \mathcal{U} \times \{s\}$ di $T_s = T \times \{s\}$.

Dalla $\mathbb{R}$-linearità di $\check{\sigma}$ e dalle relazioni $\tilde{\hat{\delta}}^{-1} \circ \sigma = \check{\sigma} \circ \tilde{\hat{\delta}}^{-1}$, $\tilde{\hat{\delta}} \circ \check{\sigma} = \sigma \circ \tilde{\hat{\delta}}$ si ha:

$$F_0(\alpha(x), t, s) = \tilde{\hat{\delta}}(s \cdot \tilde{\hat{\delta}}^{-1}(\sigma F_0(x, t))) = \tilde{\hat{\delta}}(\check{\sigma} \cdot (s \cdot \tilde{\hat{\delta}}^{-1}(F_0(x, t)))) =$$

$$= \sigma(\tilde{\hat{\delta}} \cdot (s \cdot \tilde{\hat{\delta}}^{-1}(F_0(x, t)))) = \sigma(F_0(x, t, s)),$$

quindi dalla σ-invarianza di $F_0(x, t)$ segue la σ-invarianza di $F_0(x, t, s)$.

La $(u - a)$-applicazione $F_0(x, t, s)$ definisce un'omotopia fra $F_0(x, t)$ e la $(u - a)$-applicazione ${}^1F_0 : B_0 \times T \to U(e)$ si ha infatti $F_0(x, t, 1) = F_0(x, t)$, $F_0(x, t, 0) = e_x$ ove e_x è l'identità di $\tilde{\pi}^{-1}(x)$.

La proposizione sarà dimostrata se proveremo l'esistenza di due intorni B_i di $\tilde{W}_i$ in $\tilde{W}$ e di due $(u - a)$-applicazioni σ-invarianti $F_i : B_i \times T \times I \to \tilde{\pi}^{-1}(B_i)$ tali che:

$$(1) \qquad \begin{cases} F_1(x, t, s)\, F_2^{-1}(x, t, s) = F_0(x, t, s) \quad \text{su } B_0' \times T \times \{s\},\ s \in I, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad B_0' = B_0 \cap B_1 \cap B_2, \\ F_i(x, t, 0) = e(x) \quad \text{su } B_i \times T \times \{0\}, \quad i = 1, 2. \end{cases}$$

Infatti la (1) per $s = 1$ dà la tesi della proposizione.

Consideriamo l'applicazione

$$\lambda(t, s) : \check{\tilde{\pi}}^{-1}(B_0) \times T \times I \to \check{\tilde{\pi}}^{-1}(B_0)$$

definita da

$$\lambda(t, s) : y \to \tilde{\hat{\delta}}^{-1}(F_0(\tilde{\pi}(y), t, s) \cdot \tilde{\hat{\delta}}(y) \cdot F_0(\tilde{\pi}(y), t, s)^{-1}).$$

Fissati t, s e la fibra l'applicazione $\lambda(t, s)$, letta, tramite $\tilde{\hat{\delta}}$, nel fibrato $\tilde{F}$ è un automorfismo interno e quindi un omomorfismo di gruppi. Ne segue che la sua espressione nelle coordinate normali è lineare perciò $\check{\lambda}(t, s)$ induce fissati t ed s, un automorfismo lineare invertibile su ogni fibra di $\tilde{F}$.

È poi immediato che $\lambda_{|\{t\}\times\{s\}}$ è olomorfo per ogni $t \in \mathcal{A}$ e $\lambda_{|\{t\}\times\{s\}} = id$ per ogni $t \in \mathcal{U}$, $s \in I$, quindi $\check{\lambda}(t, s)$ è un $(u - a)$-automorfismo di $\tilde{\pi}^{-1}(B_0)$ in sè.

Vogliamo provare che $\lambda(t, s)$ è $\check{\sigma}$-invariante.

Tenendo conto del fatto che $F_0(x, t, s)$ è σ-invariante e $\tilde{\check{\pi}}(\check{\sigma}(y)) = \check{\alpha}(\tilde{\pi}(y))$, $\forall\, y \in \tilde{\pi}^{-1}(x)$, $x \in B_0$ si ha:

$$F_0(\tilde{\check{\pi}}(\check{\sigma}(y)), t, s) = \sigma F_0(\tilde{\check{\pi}}(y), t, s).$$

Ne segue, per la commutatività di σ e $\tilde{\hat{\delta}}$:

$$\lambda(t, s)(\check{\sigma}(y)) = \tilde{\hat{\delta}}^{-1}(\sigma(F_0(\tilde{\check{\pi}}(y), t, s))\, \sigma(\tilde{\hat{\delta}}(y))\, \sigma(F_0(\tilde{\check{\pi}}(y), t, s))^{-1}) =$$

$$= \check{\sigma}(\tilde{\hat{\delta}}^{-1}(F_0(\tilde{\check{\pi}}(y), t, s)\, \tilde{\hat{\delta}}(y)\, F_0(\tilde{\check{\pi}}(y), t, s)^{-1})) = \check{\sigma}(\lambda(t, s)(y))$$

che prova la $\check{\sigma}$-invarianza di $\lambda(t, s)$.

Dalla definizione di $\lambda(t, s)$ è immediato che esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che, se $\| \tilde{\hat{\delta}}^{-1}(F_0(x, t)) \|_{B_0} < \varepsilon_0$ allora $\| \lambda \|_{B_0}$ è abbastanza piccolo da soddisfare le ipotesi del lemma 1.

Supporremo dunque nel seguito $\| \tilde{\hat{\delta}}^{-1}(F_0(x, t)) \|_{B_0} < \varepsilon_0$.

b) Siano ${}^*F_i(x, t, s)\colon B_i' \times T \times I \to \check{\tilde{F}}$, $i = 1, 2$ due $(u - a)$-applicazioni σ-invarianti definite su due intorni $B_i' \times T \times I$ di $(\tilde{W}_i \cap C) \times T \times I$, $i = 1, 2$ tali che ${}^*F_i(x, t, 0) = 0_x$ per ogni $x \in B_i'$, $t \in T$.

Vogliamo ora provare che esiste $\varepsilon > 0$ tale che se $\| {}^*F_i \|_{B_i' \times T \times I} < \varepsilon$ allora vi sono due $(u - a)$-applicazioni σ-invarianti $F_i\colon B_i \times T \times I \to \tilde{F}$, $i = 1, 2$ definite su degli intorni B_i di $\tilde{W}_i \cap C$ in $\tilde{W}$, tali che per ogni $s \in I$ si abbia:

$$(2)\quad \begin{cases} \lim\limits_{s' \to s} \dfrac{1}{s' - s}\, \tilde{\hat{\delta}}^{-1}(F_i(x, t, s')\, F_i(x, t, s)^{-1}) = {}^*F_i(x, t, s), \\[2ex] \text{ed inoltre } F_i(x, t, 0) = e_x,\ x \in B_i,\ t \in T \text{ ed } e_x = \text{identità di } \pi^{-1}(x). \end{cases}$$

Tanto per fissare le idee supponiamo $i = 1$.

Notiamo le cose seguenti:

i) detta $\alpha^* : \widetilde{L} \to \widetilde{L}$ l'antiinvoluzione di $\widetilde{L}$ (per ipotesi $\widetilde{L}$ è un complessificato di L) esiste un sistema di coordinate normali $z_1, \dots, z_m$ definito in un intorno U_e della identità e di $\widetilde{L}$ tale che $\alpha^*(\{z_j\}) = \{\bar{z}_j\}$ per ogni punto $\{z_j\}_{j=1 \dots m}$ di U_e.

Infatti α^* induce un'involuzione antilineare α' sull'algebra di Lie $\mathcal{J}$ di $\widetilde{L}$; per il teorema 19 di [6] il luogo dei punti fissi di α' è uno spazio vettoriale $\mathcal{J}'$ (su $\mathbb{R}$) di dimensione m.

Si verifica immediatamente che $\mathcal{J}'$ ha una base formata da n vettori $v_1, \dots, v_m$ linearmente indipendenti su $\mathbb{C}$.

Identificando $\mathcal{J}$ a $\mathbb{C}^m$ tramite tale base si osserva che α' ha lo stesso luogo dei punti fissi dell'antiinvoluzione indotta dal coniugio e quindi le due antiinvoluzioni coincidono. Prendendo dunque le coordinate normali indotte su $\widetilde{L}$ dalla base $v_1, \dots, v_m$ si prova l'asserto.

ii) Usiamo ora le notazioni del punto c) della proposizione 1; si osservi che per ogni punto $\{x_0\} \times \{t\} \in B_i' \times T$ le (8) sono un sistema di equazioni differenziali quando si considerino le $\left[\dfrac{dw_j(s', s_0)}{ds'}\right]_{s'=s_0}, j=1,\dots,m$, come funzioni note della variabile s_0 e le $z_l(s_0)$, $l = 1, \dots, m$ funzioni incognite.

Supponiamo il fibrato sia banale e su $\widetilde{L}$ siano fissate, una volta per tutte delle coordinate normali $z_1, \dots, z_m$ con le proprietà dette in i). In queste ipotesi fissato $(x_0, t) \in B_1' \times T$, F_1 si esprime: $F_1(x_0, t, s_0) = \{z_l(s_0)\}_{l=1,\dots,m}$ ove le $z_l(s)$ soddisfano la (8) della proposizione 1.

Il sistema di equazioni differenziali dato dalla (8) e le condizioni iniziali $z_l(0) = 0$, $l = 1, \dots, m$, determinano completamente le $z_l(s)$.

iii) Per provare la nostra affermazione basta dimostrare che esiste un ricoprimento di $\widetilde{W}_1 \cap C$ con aperti T_λ di $\widetilde{W}$ tali che per ogni aperto T_λ si abbia $T_\lambda = \alpha(T_\lambda)$, $\widetilde{F}$ su T_λ sia banale e la F_1 individuata da ${}^*F_1$ su T_λ sia σ-invariante.

Restringiamoci dunque ad un aperto T_λ aventi tali proprietà.

Siano $w_j = \psi_j(z_1', \dots, z_m', z_1'', \dots, z_m'')$, $j = 1, \dots, m$, le funzioni che, nelle coordinate normali $z_1, \dots, z_m$ scelte in ii), danno l'applicazione $l' \times l'' \to l'(l'')^{-1}$ fra elementi di U_e, $U_e \subset \widetilde{L}$.

Per ipotesi l'antiinvoluzione α^* è un omomorfismo di gruppi, quindi si ha:

$$\alpha^*(l'(l'')^{-1}) = \alpha^*(l')(\alpha^*(l''))^{-1} \tag{3}$$

per come sono state scelte le coordinate $z_1, \dots, z_m$, la (3) equivale a

$$\bar{w}_j = \psi_j(\bar{z}_1', \dots, \bar{z}_m', \bar{z}_1'', \dots, \bar{z}_m'') \quad \text{per ogni } (l', l'') \in U_e \times U_e. \tag{4}$$

Notiamo: $F_1(x, t, s) = \{z_l^{x,t}(s)\}$ $l = 1, \dots, m$; per quanto provato nella parte c) della proposizione 1 se ε è abbastanza piccolo possiamo supporre $\{z_l^{x,t}(s)\} \in U_\varepsilon$, $\forall\, x \in T_\lambda$, $s \in I$, $t \in T$.

Per dimostrare il nostro asserto dobbiamo provare:

$$z_l^{x,t}(s) = \overline{z_l^{\alpha(x),t}(s)}, \quad l = 1, \dots, m, \; x \in T_\lambda, \; t \in T. \tag{5}$$

È immediato che:

$$z_l^{x,t}(s) = \overline{z_j^{\alpha(x),t}(s)} \iff \left[\frac{dz_j^{x,t}(s)}{ds}\right]_{s \in I} = \left[\frac{d\overline{z_j^{\alpha(x,t}}}{ds}\right]_{s \in I}. \tag{6}$$

Sia dunque F_1 l'applicazione determinata dalla ${}^*F_1$ ed $x_0 \in T_\lambda$; poniamo

$${}^*z_j^{\alpha(x_0),t}(s) = \overline{z_j^{x_0,t}(s)}, \; j = 1, \dots, m; \tag{7}$$

per quanto abbiamo via via osservato le funzioni ${}^*z_j^{\alpha(x_0),t}(s)$ soddisfano, nel punto $\alpha(x_0)$, il sistema di equazioni differenziali dato dalle (8) della proposizione 1 con i dati iniziali voluti.

Per l'unicità delle soluzioni si ha dunque

$${}^*z_j^{\alpha(x_0),t}(s) = z_j^{\alpha(x_0),t}(s), \; j = 1, \dots, m$$

e l'asserto è dimostrato.

c) Trovare delle $(u-a)$-applicazioni σ-invarianti $F_i(x, t, s)$, $i = 1, 2$, che soddisfino la (1) equivale a determinare delle $(u-a)$-applicazioni σ-invarianti F_i che soddisfino le relazioni:

$$(8)\quad \begin{cases} F_0(x, t, s')\, F_0(x, t, s)^{-1} = (F_0(x, t, s')(F_2(x, t, s')(F_2(x, t, s)^{-1})^{-1} \cdot \\ \qquad \cdot F_0(x, t, s')^{-1} \cdot F_1(x, t, s') \cdot F_1(x, t, s)^{-1} \\ \text{per } (\{x\} \times \{t\}) \in B_0 \times T,\; 0 \le s \le 1,\; |s - s'| \le \varepsilon^*,\; \varepsilon^* \text{ abbastanza} \\ \text{piccolo} \\ F_i(x, t, 0) = e(x) \text{ su } B_i \times T \times \{0\},\; i = 1, 2. \end{cases}$$

Infatti dalla (1) si prova la (8) sostituendo, nella (8), ad $F_0(x, t, s')$ l'espressione $F_1(x, t, s')\, F_2(x, t, s')^{-1}$.

Osserviamo che se vale la (8) ed inoltre:

$$F_0(x, t, s') = F_1(x, t, s') \cdot F_2(x, t, s')^{-1} \tag{9}$$

allora

$$F_0(x, t, s) = F_1(x, t, s)\, F_2(x, t, s)^{-1}. \tag{10}$$

La (9) vale per $s' = 0$ quindi la (10) vale per $s \leq \varepsilon^*$, prendendo $s' = \varepsilon^*$ si prova che vale la (10) per $s \leq 2\varepsilon^*$; procedendo così si dimostra che dalla (8) segue la (1).

Poniamo ora ${}^*F_0(x, t, s) = \lim\limits_{s' \to s} \dfrac{1}{s' - s} \tilde{\hat{\delta}}^{-1}(F_0(x, t, s')\, F_0(x, t, s)^{-1})$; essendo F_0 σ-invariante tale è anche ${}^*F_0$ e l'$(u - a)$ omomorfismo λ definito da F_0.

Per il lemma 1 esistono due $(u - a)$-applicazioni σ-invarianti ${}^*F_i(x, t, s)$ definiti su due intorni $B_i \times T \times I$ di $\widetilde{W}_i \times T \times I$ tali che

$$ {}^*F_0(x, t, s) = {}^*F_1(x, t, s) - \lambda(t, s)\, {}^*F_2(x, t, s), \quad {}^*F_i(x, t, 0) = 0_x, \quad i = 1, 2. \tag{11}$$

Per quanto provato nella parte *b*) e *c*) della proposizione 1 possiamo supporre, tenendo conto del punto *b*) di questa proposizione, che esistano due intorni $B_i \times T \times I$ di

$$(\widetilde{W}_i \cap C) \times T \times I \text{ in } \widetilde{W} \times T \times I, \; i = 1, 2, \text{ e due } (u - a) -$$

applicazioni σ-invarianti F_1, F_2 legate alle ${}^*F_1, {}^*F_2$ dalla (2).

Vogliamo ora provare che F_1, F_2 soddisfano alle (8) e quindi alle (1). Si ha per la (11):

$$\begin{aligned} {}^*F_0(x, t, s) &= \lim_{s' \to s} \frac{1}{s' - s} \cdot \tilde{\hat{\delta}}^{-1}(F_0(x, t, s')\, F_2(x, t, s)\, F_2(x, t, s')^{-1}\, F_0(x, t, s')^{-1}) + \\ &+ \lim_{s' \to s} \frac{1}{s' - s} \tilde{\hat{\delta}}^{-1}(F_1(x, t, s')\, F_1(x, t, s)^{-1}). \end{aligned} \tag{12}$$

Tenendo conto del fatto che vicino all'identità $\tilde{\hat{\delta}}$ è un omomorfismo, a meno di infinitesimi di ordine superiore rispetto ad $s' - s$, la (12) può scriversi:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{s' \to s} -\frac{1}{s' - s} \tilde{\hat{\delta}}^{-1}(F_0(x, t, s')\, F_0(x, t, s)^{-1}) + \\ &+ \lim_{s' \to s} \frac{1}{s' - s} \cdot \tilde{\hat{\delta}}^{-1}(F_0(x, t, s')\, F_2(x, t, s)\, F_2(x, t, s')^{-1}\, F_0(x, t, s')^{-1}) + \end{aligned} \tag{13}$$

$$+ \lim_{s' \to s} \frac{1}{s' - s} \tilde{\hat{\delta}}^{-1} (F_1 (x, t, s') F_1 (x, t, s)^{-1}) =$$

$$= \lim_{s' \to s} \frac{1}{s' - s} \tilde{\hat{\delta}}^{-1} (F_0 (x, t, s) F_0 (x, t, s')^{-1} F_0 (x, t, s') F_2 (x, t, s) F_2 (x, t, s')^{-1} \cdot$$

$$\cdot F_0 (x, t, s')^{-1} F_1 (x, t, s') F_1 (x, t, s)^{-1}) =$$

$$= \lim_{s' \to s} \frac{1}{s' - s} \tilde{\hat{\delta}}^{-1} (F_0 (x, t, s) F_2 (x, t, s) F_2 (x, t, s')^{-1} \cdot$$

$$\cdot F_0 (x, t, s')^{-1} F_1 (x, t, s') F_1 (x, t, s)^{-1}).$$

Rimane da provare la prima delle (8) la quale si può scrivere:

$$F_0 (x, t, s)^{-1} = F_2 (x, t, s) F_2 (x, t, s')^{-1} F_0 (x, t, s')^{-1} F_1 (x, t, s') F_1 (x, t, s)^{-1}$$

per $|s - s'| < \varepsilon^*$
od anche

$$F_2 (x, t, s)^{-1} F_0 (x, t, s)^{-1} F_1 (x, t, s) = F_2 (x, t, s')^{-1} F_0 (x, t, s')^{-1} F_1 (x, t, s') \tag{14}$$

per $|s - s'| < \varepsilon^*$.

Per provare la (8) basta quindi provare che l'espressione della (14) non dipende da s e quindi è eguale alla $(u - a)$-applicazione identità per ogni $s \in I$, (in quanto $F_2 (x, t, 0) = F_1 (x, t, 0) = F_0 (x, t, 0) = e_x$).

Per il teorema della media basterà quindi provare che la derivata rispetto ad s della funzione che compare nella (14), letta in $\check{\tilde{F}}$, è identicamente nulla.

Ponendo $s' = s + \Delta s$ basta dunque dimostrare:

$$\lim_{s \to s'} \frac{1}{s' - s} \tilde{\hat{\delta}}^{-1} (F_1 (x, t, s)^{-1} F_0 (x, t, s) F_2 (x, t, s) F_2 (x, t, s')^{-1} \cdot$$

$$\cdot F_0 (x, t, s')^{-1} F_1 (x, t, s')) = 0$$

per ogni $s \in [0, 1]$,
od anche, equivalentemente:

$$\lim_{s' \to s} \frac{1}{s' - s} \tilde{\hat{\delta}}^{-1} (F_0 (x, t, s) F_2 (x, t, s) F_2 (x, t, s')^{-1} F_0 (x, t, s')^{-1} \cdot$$

$$\cdot F_1 (x, t, s') F_1 (x, t, s)^{-1}) = 0$$

che è la (13); la proposizione è così completamente dimostrata.

OSSERVAZIONE 2. Nelle ipotesi della proposizione 2 supponiamo inoltre sia $\mathcal{A} = T$ ed ogni componente irriducibile di $\widetilde{W}$ incontri C; in questo caso le due $(u - a)$-applicazioni σ-invarianti F_i si possono supporre definite su due intorni $B_i' \times T$ di $\widetilde{W}_i \times T$.

Si noti infatti che si è dovuto restringere il campo di definizione delle F_i costruite in [3] soltanto per provare che se le $^*F_i$ sono σ-invarianti anche le F_i, ad esse legate dalla (2) del punto *b*) della proposizione 2, sono tali.

Osserviamo ora che se una sezione analitica definita su un insieme analitico irriducibile è σ-invariante su un aperto (stabile per l'antiinvoluzione) è σ-invariante su tutta la componente irriducibile quindi, nelle ipotesi fatte all'inizio di questa osservazione la proposizione 2 prova l'asserto.

COROLLARIO 1. *Nelle ipotesi della proposizione* 2 *fissato* $\varepsilon > 0$ *ed un intorno* $B_0 \times T$ *di* $\widetilde{W}_0 \times T$ *esiste* $\eta > 0$ *tale che se* $\| \hat{\tilde{\delta}}^{-1} \circ F_0 \|_{B_0 \times T} < \eta$ *allora le* $(u - a)$*-applicazioni* σ*-invarianti* F_1, F_2 *che soddisfano la relazione* $F_0 = F_1 \cdot F_2^{-1}$ *si possono prendere in modo che valga* $\| F_i \|_{B_i \times T} < \varepsilon$, $i = 1, 2$, *ove* B_i *sono intorni di* $\widetilde{W}_i \cap C$ *in* $\widetilde{W}$.

PROVA. Le $(u - a)$-applicazioni F_i determinate nella proposizione 2 sono costruite come nell'Hilfsatz 5 di [3] quindi si possono ripetere gli argomenti della proposizione 1 ed il corollario risulta provato.

Siamo ora in grado di provare il

TEOREMA 1. *Sia* W *un insieme analitico reale coerente di* C *ed* (F, π, W, L, L^*) *un fibrato analitico reale di gruppi in cui* (L, L^*) *sia complessificabile. Sia definita su* $\check{F}$ *una norma e sui gruppi di sezioni di* F *si consideri la topologia della convergenza uniforme sui compatti.*

Sia B_0 *un intorno aperto di* $W_0 = W \cap C_0$ *in* W *ed* $F_0 : B_0 \to F$ *una sezione analitica continuamente omotopa alla sezione identità.*

Esistono allora due intorni B_1, B_2 *di* W_1, W_2 *in* W *e due sezioni analitiche omotope alla sezione identità:* $F_i : B_i \to \pi^{-1}(B_i)$, $i = 1, 2$, *tali che ove le applicazioni sono definite si abbia:* $F_0 = F_1 \cdot F_2^{-1}$.

PROVA. Sia C' un intorno di C in $\mathbb{R}^n$ e $\widetilde{C}'$ un intorno di $\widetilde{C}$ in $\mathbb{C}^n$.

Per i teoremi 17 e 18 di [6] l'identità $i : W \to C'$ si estende ad un isomorfismo $\tilde{i} : \widetilde{W} \to \tilde{i}(\widetilde{W}) \subset \widetilde{C}'$ fra un complessificato $\widetilde{W}$ di W ed un insieme analitico $\tilde{i}(\widetilde{W})$ di un intorno del parallelepipedo $\widetilde{C}$ di $\mathbb{C}^n$. Identificheremo nel seguito $\widetilde{W}$ con $\tilde{i}(\widetilde{W})$.

Per la proposizione 1 di [8] si può supporre che il coniugio di $\mathbb{C}^n$ trasformi $\widetilde{W}$ in sè e W sia il luogo dei punti fissi di $\widetilde{W}$.

Sia dunque:

$$\widetilde{C} = \{\{z_j\} \in \mathbb{C}^n \mid |x_j| \leq a_j, |y_j| \leq b_j, a_j > 0, b_j > 0, j = 1, 2, \dots, n\} \tag{1}$$

ove $z_j = x_j + iy_j, j = 1, \dots, n$ sono le coordinate di $\mathbb{C}^n$.

Sia $(\widetilde{F}, \widetilde{\pi}, \widetilde{W}, \widetilde{L}, \widetilde{L}^*)$ una complessificazione di F e $\sigma : \widetilde{F} \to \widetilde{F}$ la sua antiinvoluzione (una complessificazione di F esiste, per il teorema 1 di [7], supporremo inoltre $\widetilde{W}$ sia uno spazio di Stein).

La F_0, per ipotesi è omotopa alla sezione identità, esiste quindi un intorno B_0' di W_0 in W ed un numero finito $F_0^1 \dots F_0^p$, di sezioni analitiche definite su B_0' tali che su B_0' si abbia $F_0 = F_0^1 \cdots F_0^p\ F_0^i(B_0') \subset U(E)$, $i = 1, \dots, p$ (è immediato che F_0 è prodotto di un numero finito di sezioni continue a valori in $U(E)$.

Essendo dette sezioni approssimabili con sezioni analitiche (vedi [7]) segue l'asserto).

Esiste un intorno $\widetilde{B}_0'$ di B_0 in $\widetilde{W}$ su cui sono definite delle estensioni σ-invarianti $\widetilde{F}_0^i$ di F_0^i $i = 1, \dots, p$.

Se i $b_j, j = 1, \dots, n$, che compaiono nella (1) sono abbastanza piccoli $\widetilde{B}_0'$ è un insieme analitico di $\widetilde{C}$ e possiamo anche supporre, restringendo eventualmente l'intorno, valga: $\widetilde{F}_0^i(\widetilde{B}_0') \subset \widetilde{U}(E)$.

L'intorno $\widetilde{B}_0'$ può essere preso di Runge rispetto a $\widetilde{W}$; per i risultati di H. Grauert ([2]) possiamo approssimare arbitrariamente $\widetilde{F}_0'$ con sezioni olomorfe G_i definite su tutto $\widetilde{W}$ e tali che $G^i(\widetilde{W}) \subset \widetilde{U}(E)$. È immediato poi vedere che le G^i si possono prendere anche in ${}^\sigma\Gamma_{\widetilde{W}}(\widetilde{F})$ (se risulta $\lim\limits_{n \to \infty} G_n^i = \widetilde{F}_0^i$ si ha: $\lim\limits_{n \to \infty} \widetilde{\hat{\delta}}(\sigma(\widetilde{\hat{\delta}}^{-1} G_n^i)) = \widetilde{F}_0^i$).

Fissato $\varepsilon > 0$ esiste quindi $G = G^1 \dots G^p \in {}^\sigma\Gamma_{\widetilde{W}}(\widetilde{F})$ tale che $\|G^{-1} \cdot \widetilde{F}_0\|_{\widetilde{B}_0'} < \varepsilon$ ed inoltre $G^i(\widetilde{W}) \subset \widetilde{U}(E)$, $G^i \in {}^\sigma\Gamma_{\widetilde{W}}(\widetilde{F})$.

Se ε è abbastanza piccolo per il corollario 1 esistono due sezioni olomorfe σ-invarianti G_1, G_2 definite su due intorni di, W_1, W_2 tali che $G_i(W_i) \subset \widetilde{U}(E), i = 1, 2$, ed inoltre, ove le applicazioni sono definite risulti: $G^{-1} \cdot \widetilde{F}_0 = G_1 \cdot G_2^{-1}$.

Posto $\widetilde{F}_1 = G \cdot G_1$, $\widetilde{F}_2 = G_2$ si ha dunque $\widetilde{F}_0 = \widetilde{F}_1 \cdot \widetilde{F}_2^{-1}$.

La sezione G è prodotto di un numero finito di sezioni olomorfe σ-invarianti $G^1 \dots G^p$ che sono a valori in $\widetilde{U}(E)$, come provato nell'osservazione 1 esse sono σ-analiticamente omotope alla sezione identità.

Ne segue che $\widetilde{F}_1$, $\widetilde{F}_2$ sono σ-analiticamente omotope alla sezione identità e quindi $F_i = \widetilde{F}_{i|W_i}$, $i = 1, 2$ soddisfano alla tesi del teorema che è così dimostrato.

COROLLARIO 2. *Usando le notazioni della proposizione 2 supponiamo che $F_0 : B_0 \times T \rightarrow \widetilde{\pi}^{-1}(B_0)$ sia una $(u - a)$-applicazione σ-invariante e σ-omotopa alla $(u - a)$-applicazione identità (cioè esiste una omotopia $\varphi : B_0 \times T \times I \rightarrow \rightarrow \widetilde{\pi}^{-1}(B_0)$ tale che $\varphi_{|t=0} = F_0$, $\varphi_{|t=1} = (u - a)$-applicazione identità, $\varphi_{|t}$ è σ-invariante per ogni $t \in [0, 1]$).*

Esistono allora due $(u - a)$-applicazioni σ-invarianti F_i, $i = 1, 2$, definite su degli intorni B_i di $\widetilde{W}_i \cap C$ tali che, ove le applicazioui sono definite si abbia: $F_0 = F_1 \cdot F_2^{-1}$ ed inoltre le F_i siano σ-omotope alla $(u - a)$-applicazione identità.

PROVA. Con ragionamenti analoghi a quelli svolti nel teorema 1 ci si riduce a risolvere il problema delle matrici olomorfe invertibili vicino all'identità; il corollario 1 dimostra quindi l'asserto.

§ 2. Teoremi di approssimazione per le sezioni continue di un fibrato analitico reale di gruppi.

Sia (F, π, W, L, L^*) un fibrato analitico reale di gruppi avente per base uno spazio analitico reale coerente ogni cui componente connessa abbia dimensione finita.

Indichiamo con $\pi_c(W, F)$, $\pi_a(W, F)$ gli insiemi delle classi di omotopia delle sezioni continue ed analitiche di F.

Scopo di questo paragrafo è provare che ogni sezione continua di F è uniformemente approssimabile con sezioni analitiche e che l'immersione $\Gamma_W(F) \rightarrow \Gamma_W^c(F)$ induce un'applicazione bigettiva $\pi_a(W, F) \rightarrow \pi_c(W, F)$.

La dimostrazione dei fatti enunciati si svolge sostanzialmente in due tappe:

I) si prova l'asserto nel caso senza singolarità

II) ci si riduce al caso senza singolarità estendendo il fibrato assegnato e la sezione ad una varietà che contiene W.

Sia V un insieme analitico reale coerente, localmente chiuso di $\mathbb{R}^n$ e $\widetilde{V}$ un suo complessificato definito in un aperto di $\mathbb{C}^n$.

Detta $\alpha(\{z_j\}) = \{\bar{z}_j\}$ l'antiinvoluzione indotta dal coniugio in $\mathbb{C}^n$ supponiamo $\alpha(\widetilde{V}) = \widetilde{V}$.

Sia (F, π, V, L, L^*) un fibrato analitico reale di gruppi e la coppia (L, L^*) sia complessificabile.

Notiamo infine con $(\widetilde{F}, \widetilde{\pi}, \widetilde{V}, \widetilde{L}, \widetilde{L}^*)$ una complessificazione di F costruita come nel teorema 1 di [7] (cioè tale che $\widetilde{F}$ sia associato ad un cociclo che ristretto a V sia a valori in L^*) e con $\sigma: \widetilde{F} \to \widetilde{F}$ l'antiinvoluzione associata.

LEMMA 2. *Sia $\gamma: V \to F$ una sezione continua.*

Esiste un intorno $\widetilde{V}'$ di V in $\widetilde{V}$ ed una sezione continua σ-invariante $\widetilde{\gamma}: \widetilde{V} \to \widetilde{F}$ che estende γ.

Se nel fibrato F L^* è riducibile (topologicamente) ad un gruppo di Lie compatto allora esistono un fibrato analitico reale $(F', \pi'$ $U, L, L^*)$ che estende F ad un aperto U di $\mathbb{R}^n$, un fibrato olomorfo $(\widetilde{F}', \widetilde{\pi}', \widetilde{U}, \widetilde{L}, \widetilde{L}^*)$ che estende $\widetilde{F}$ ad un intorno $\widetilde{U}$ di $\mathbb{C}^n$ ed una sezione continua $\widetilde{\gamma}': \widetilde{U} \to \widetilde{F}'$ che estende γ ed è σ-invariante (σ si estende ad $\widetilde{F}'$).

Il fibrato $\widetilde{F}'$ si può scegliere in modo che sia un complessificato di F'.

PROVA *a*) Dimostriamo prima la seconda parte del lemma. Essendo il gruppo strutturale di F riducibile ad un gruppo di Lie compatto $'L^*$ esiste un fibrato analitico reale principale $p: B \to X$ ed un'applicazione analitica reale $f: V \to X$ tale che $f^*(B)$ è un fibrato analitico principale associato ad F (vedi [7] corollari 1 e 2 del paragrafo 4).

L'applicazione $f: V \to X$ si può estendere ad un'applicazione analitica $f': U_V \to X$ definita su un intorno U_V di V in $\mathbb{R}^n$. Infatti X è una varietà analitica reale (vedi [5] pag. 103) e si può perciò identificare ad una sottovarietà analitica reale chiusa di $\mathbb{R}^m$.

In $\mathbb{R}^m$ esiste un intorno W di X ed un'applicazione analitica $r: W \to X$ tale che $r_{|X} = \text{id.}$; l'applicazione $f: V \to X \subset \mathbb{R}^m$ si estende ad una applicazione analitica $f'': U'_V \to \mathbb{R}^m$, esiste perciò un intorno U_V di V in $\mathbb{R}^n$ tale che $U_V \subset U'_V$, $f''(U_V) \subset W$.

L'applicazione $f' = r \circ f'': U_V \to X$ è analitica ed estende f.

Il fibrato $B \xrightarrow{p} X$ ha come gruppo strutturale $'L^*$ che è complessificabile in quanto sottogruppo del gruppo ortogonale, quindi il fibrato B è complessificabile (vedi [7] § 2).

Sia $\widetilde{B} \xrightarrow{\widetilde{p}} \widetilde{X}$ una complessificazione di B fatta come nel teorema 1 di [7] ed $\widetilde{f}': \widetilde{U}_V \to \widetilde{X}$ un'estensione olomorfa di f' ad un intorno $\widetilde{U}_V$ di U_V in $\mathbb{C}^n$.

Il fibrato analitico $f'^*(B)$ è un fibrato principale associato ad un fibrato analitico reale (F', π', U_V, L, L^*) che estende F.

Il fibrato $\widetilde{f}'^{*}(\widetilde{B})$ è un fibrato principale associato ad un fibrato olomorfo $(\widetilde{F}', \widetilde{\pi}', \widetilde{U}_V, \widetilde{L}, \widetilde{L}^*)$. Per definizione di immagine inversa di un fibrato tramite un'applicazione esiste un cociclo olomorfo associato ad $\widetilde{F}'$ che ristretto ad U_V è a valori in L^* ed è associato ad F', quindi, per il corollario 2 del paragrafo 2 di [7] esiste un intorno $\widetilde{U}'_V$ di U_V in $\widetilde{U}_V$ tale che $(\widetilde{\pi}')^{-1}(\widetilde{U}'_V) \xrightarrow{\widetilde{\pi}'} \widetilde{U}'_V$ è un complessificato di F'.

Segue anche, dal citato corollario 2 del paragrafo 2 di [7] che $(\widetilde{\pi}')^{-1}(\widetilde{U}'_V)$ può essere scelto in modo da prolungare $\widetilde{F}$.

b) Sia U''_V un intorno aperto di V in U'_V che sia contrattile su V (tale intorno esiste per i noti teorèmi sulla triangolabilità degli insiemi semianalitici reali).

Esiste perciò un'applicazione continua $q: U''_V \longrightarrow V$ tale che $q_{|V} = \text{id.}$, $q: U''_V \longrightarrow U''_V$ è omotopa all'applicazione identica.

Dal fatto che q è omotopa all'applicazione identica segue che il fibrato $q^*(F)$ è equivalente al fibrato F' ristretto ad U''_V, esiste perciò un'applicazioni di fibrati $q_*: (\pi')^{-1}(U''_V) \longrightarrow F$ tale che $\pi \circ q_* = q \circ \pi'$ (vedi [5] pagg. 47-48) (ricordiamo che dire q_* applicazione di fibrati equivale a dire che q_* ristretto alle fibre è un isomorfismo).

Ogni sezione continua $\gamma: V \longrightarrow F$ ammette un'estensione continua γ': $U''_V \longrightarrow F'$; basta infatti porre:
$\gamma'(x) = y$ ove y è l'elemento di $(\pi')^{-1}(x)$ tale che $q_*(y) = \gamma(q(x))$; tale elemento esiste, ed è unico perchè q_* induce degli isomorfismi fra le fibre.

c) Per quanto provato nei punti *a*) e *b*) basterà dimostrare il lemma nell'ipotesi in cui V sia un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $\widetilde{V}$ un aperto di $\mathbb{C}^n$.

Siano $z_j = x_j + iy_j, j = 1, \dots, n$ le coordinate di $\mathbb{C}^n$; per ipotesi se $\{z_j\} \in V$, allora $y_1 = y_2 = \dots = y_n = 0$.

Sia $\gamma: V \longrightarrow F$ una sezione continua.

Ragionando come in *b*) si prova che esiste un intorno $\widetilde{V}_1$, con $\alpha(\widetilde{V}_1) = \widetilde{V}_1$, di V in $\widetilde{V}$ ed una sezione $\widetilde{\gamma}_1: \widetilde{V}_1 \longrightarrow \widetilde{F}$ che estende γ.

Consideriamo l'insieme $W_1 = \{\{z_j\} \in \widetilde{V}_1 \mid y_2 = \dots = y_n = 0\}$ e definiamo in W_1 la sezione

$$\gamma^1(\{z_j\}) = \begin{cases} \widetilde{\gamma}_1(\{z_j\}) & \text{se } y_1 \geq 0 \\ \sigma(\gamma_1(\alpha\{z_j\})) & \text{se } y_1 < 0 \end{cases}$$

Ragionando come sopra si deduce che esiste un intorno $\widetilde{V}_2$ di W_1 in $\widetilde{V}$, con $\alpha(\widetilde{V}_2) = \widetilde{V}_2$, ed una sezione $\gamma_2: \widetilde{V}_2 \longrightarrow \widetilde{F}$ che estende γ^1.

Consideriamo l'insieme $W_2 = \{\{z_j\} \in \widetilde{V}_2 \mid y_3 = \dots = y_n = 0\}$ e definiamo su W_2 la sezione

$$\gamma^2(\{z_j\}) = \begin{cases} \gamma_2(\{z_j\}) \text{ se } y_2 \geq 0 \\ \sigma(\gamma_2(\alpha(\{z_j\}))) \text{ se } y_2 < 0. \end{cases}$$

La sezione γ^2 risulta continua e σ-invariante perchè γ^1 era tale ed inoltre, γ^2 estende γ^1.

Procedendo così dopo $n-1$ passi si definisce su un intorno W_n di V in $\widetilde{V}$ un'estensione continua e σ-invariante di γ e la seconda parte del lemma è così dimostrata.

La prima parte del lemma si dimostra ragionando esattamente come in questo punto, tenendo presente che $\alpha(\widetilde{V}) = \widetilde{V}$ e $\widetilde{V}$ è chiuso di un aperto di $\mathbb{C}^n$.

LEMMA 3. *Sia $\pi: G \longrightarrow W$ un fibrato analitico reale avente come base e come spazio totale delle varietà analitiche reali. Sia $d: G \times G \longrightarrow \mathbb{R}$ una metrica che induca la topologia di G ed $\varepsilon: G \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^+ =]0 + \infty[$ una funzione continua.*

Data una sezione continua $\gamma: W \longrightarrow G$ esiste una sezione analitica γ': $W \longrightarrow G$ tale che $d(\gamma(x), \gamma'(x)) < \varepsilon(x)$ per ogni $x \in W$.

PROVA. Per quanto provato in [5] pagg. 25-28 esiste una sezione C^∞: $\gamma'': W \longrightarrow G$ tale che $d(\gamma(x), \gamma''(x)) < \frac{\varepsilon(x)}{2}$ per ogni $x \in W$ (in [5] il risultato è enunciato nel caso in cui ε sia una funzione costante ma, con la medesima dimostrazione si ottiene il risultato da noi riportato).

Per i noti teoremi di immersione W e G si possono identificare con due sottovarietà analitiche chiuse di $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ ed in $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ esistono due intorni U_W, U_G e due retrazioni analitiche $q: U_W \longrightarrow W$, $q': U_G \longrightarrow G$.

Si possono applicare gli argomenti della proposizione II. 15.4 del libro « Analysis on real and complex manyfolds » (D. V. Nostrand, Princeton) di R. Narasimhan e dedurre che, per i risultati di [9], esiste un'applicazione analitica $\gamma^*: W \longrightarrow G$ tale che: $\Delta = \pi \circ \gamma^*: W \longrightarrow W$ sia un'applicazione bigettiva analitica insieme all'inversa e posto $\gamma' = \gamma^* \circ \Delta^{-1}$ valga:

$$d(\gamma'(x), \gamma''(x)) < \frac{\varepsilon(x)}{2}, \ \forall x \in W.$$

Si verifica che γ' è una sezione analitica e vale. $d(\gamma(x), \gamma'(x)) < \varepsilon(x)$.

Il lemma è così provato ([1]).

([1]) Questo lemma è dovuto al prof. R. Narasimhan.

OSSERVAZIONE 1. Nelle ipotesi del lemma precedente se γ è una sezione C^r o C^∞ la sezione analitica γ' si può scegliere in modo che approssimi γ insieme alle sue derivate (nel senso definito nel citato libro di R. Narasimhan).

TEOREMA 2. *Sia (F, π, V, L, L^*) un fibrato analitico reale, V sia uno spazio analitico reale coerente ogni componente connessa del quale abbia dimensione finita, L^* sia riducibile, (topologicamente), ad un gruppo di Lie compatto ed L sia una varietà.*

Sia $d: F \times F \longrightarrow \mathbb{R}$ una metrica che induca la topologia di F ed $\varepsilon : V \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^+ =]\,0, +\infty\,[$ una funzione continua.

Per ogni sezione continua γ di F esiste una sezione analitica γ_a tale che $d(\gamma_a(x), \gamma(x)) < \varepsilon(x)$, per ogni $x \in V$. Se F è un fibrato di gruppi si può inoltre supporre che γ_a sia omotopa a γ.

PROVA *a*) Evidentemente basta dimostrare il teorema nel caso in cui V sia connesso ed L^* sia un gruppo di Lie compatto.

Nel seguito supporremo verificate queste ipotesi.

Per quanto provato in [6] esiste una complessificazione $\widetilde{V}$ di V tale che $\widetilde{V}$ sia uno spazio di Stein ed è definita un'antiinvoluzione $\widehat{\alpha} : \widetilde{V} \longrightarrow \widetilde{V}$ per cui si ha $V = \{x \in \widetilde{V} \mid \widehat{\alpha}(x) = x\}$.

Esiste inoltre un'applicazione olomorfa, iniettiva, propria $\widetilde{\varphi} : \widetilde{V} \longrightarrow \mathbb{C}^r$ tale che $\widetilde{\varphi} \circ \widehat{\alpha} = \alpha^* \circ \widetilde{\varphi}$ ove α^* è l'antiinvoluzione indotta dal coniugio.

Vogliamo ora provare che $\widetilde{V}' = \widetilde{\varphi}(\widetilde{V})$ è un complessificato di $V' = \widetilde{\varphi}(V)$ e quindi V' è un insieme analitico reale coerente. Osserviamo che per ogni punto $x \in \widetilde{V}$ il germe $\widetilde{V}_x$ di $\widetilde{V}$ in x ha lo stesso numero di componenti irriducibili del germe di $\widetilde{V}'$ in $\widetilde{\varphi}(x)$. Infatti $\widetilde{\varphi}$ è propria quindi, se $\widetilde{V}_x^i$ è una componente irriducibile di $\widetilde{V}_x$, allora $\widetilde{\varphi}(\widetilde{V}_x^i)$ è, per un noto teorema di Remmert, un germe $'\widetilde{V}^i_{\widetilde{\varphi}(x)}$ di insieme analitico di $\widetilde{V}'_{\widetilde{\varphi}(x)}$. Se $'\widetilde{V}^i_{\widetilde{\varphi}(x)}$ fosse riducibile le immagini inverse delle sue componenti irriducibili scomporrebbero $\widetilde{V}_x^i$ il che è assurdo quindi $\widetilde{V}_x$ e $\widetilde{V}'_{\widetilde{\varphi}(x)}$ hanno lo stesso numero di componenti irriducibili.

Dimostriamo ora che per ogni $x \in V$ il germe V_x di V in x ha lo stesso numero di componenti irriducibili del germe $V'_{\widetilde{\varphi}(x)}$ di V' in $\widetilde{\varphi}(x)$.

Infatti $V'_{\widetilde{\varphi}(x)}$ non può avere più componenti di V_x (l'immagine inversa di un germe di insieme analitico è un germe di insieme analitico).

Se $V'_{\widetilde{\varphi}(x)}$ avesse meno componenti irriducibili di V_x allora per una almeno: $'\widetilde{V}^i_{\widetilde{\varphi}(x)}$ delle componenti irriducibili di $\widetilde{V}'_{\widetilde{\varphi}(x)}$ (che sono tante quante sono quelle di V_x) dovrebbe essere:

$'\widetilde{V}^{i}_{\tilde{\varphi}(x)} \cap V \subset (\overline{\widetilde{V}'_{\tilde{\varphi}(x)} - '\widetilde{V}^{i}_{\tilde{\varphi}(x)}}) \cap V$ e questo non avviene perchè $\widetilde{V}$ è un complessificato di V e $\widetilde{\varphi}$ è iniettivo.

Per quanto osservato si può applicare il lemma 13 di [6] e si conclude che $V' = \widetilde{\varphi}(V)$ è coerente.

b) Sia $B \xrightarrow{P} X$ il fibrato universale rispetto al gruppo L^* ed alla dimensione $n = \dim. V$ (vedi [5]).

Esiste un'applicazione continua $f_c : V \longrightarrow X$ tale che il fibrato $f_c^*(B)$ sia topologicamente equivalente al fibrato principale associato ad F.

L'applicazione $g_c = f_c \circ \varphi^{-1} : V' \longrightarrow X$, ove $\varphi = \widetilde{\varphi}_{|V}$, induce un fibrato topologico principale $g_c^*(B)$ di base V'.

Sia $g_a : V' \longrightarrow X$ un'applicazione analitica omotopa a g_c (tale applicazione esiste, vedi [7] pag. 738); essendo $f_a = g_a \circ \varphi$, $f_c = g_c \circ \varphi$ l'applicazione f_a è omotopa ad f_c.

$F_b' = g_a^*(B)$, $F_b = f_a^*(B)$ sono fibrati analitici principali di base V', V: notiamo con $F_a' \xrightarrow{\pi_a'} V'$, $F_a \xrightarrow{\pi_a} V$ i fibrati di fibra L associati ad essi.

Per i risultati di [7] il fibrato F_a, che è topologicamente equivalente ad F è anche analiticamente equivalente ad esso.

Identicheremo dunque F_a ad F.

Si ha inoltre:

$$F_b = (g_a \circ \varphi)^*(B) = \varphi^*(g_a^*(B)) = \varphi^*(F_b').$$

Esiste perciò un ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i \in I}$ di V ed un cociclo $g_{i,j}$: $U_i \cap U_j \longrightarrow L^*$ associato ad F_a tale che il cociclo $g'_{i,j} = g_{i,j} \circ \varphi^{-1} : \varphi(U_i) \cap \varphi(U_j) \longrightarrow L^*$ definito sul ricoprimento $\{\varphi(U_i)\}_{i \in I}$ sia associato ad F_a'.

Siano $\varrho_i : \pi_a^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times L$, $\varrho_i' : (\pi_a')^{-1}(\varphi(U_i)) \longrightarrow \varphi(U_i) \times L$, $i \in I$, delle carte di F_a, F_a' rispetto alle quali sono definiti i cocicli $\{g_{i,j}\}$, $\{g'_{i,j}\}$.

Le applicazioni $\varrho_j'^{-1} \circ \chi_{i,j} \circ \varrho_i : \pi_a^{-1}(U_i) \longrightarrow (\pi_a')^{-1}(\varphi(U_i))$ definite da $\chi_{i,j}(x, l) = (\varphi(x), l)$ $x \in U_i$, $l \in L$, $i \in I$, inducono, per incollamento, un'applicazione analitica di fibrati: $\chi : F_a \longrightarrow F_a'$.

Assegnare una sezione analitica γ_a^* di F_a' equivale a fissare delle applicazioni analitiche
$\gamma_{a,i}^* : \varphi(U_i) \longrightarrow \varphi(U_i) \times L$, $i \in I$, tali che:
$\gamma_{a,i}^*(x) = (x, l_i(x))$ e si abbia: $l_i(x) = g'_{i,j}(x) \cdot l_j(x)$, $x \in \varphi(U_i \cap U_j)$, $i, j \in I$.

Le applicazioni $\gamma_i^* : U_i \longrightarrow U_i \times L$ definite da:
$\gamma_i^*(\varphi^{-1}(x)) = (\varphi^{-1}(x), l_i(\varphi^{-1}(x)))$ sono analitiche e vale: $l_i(y) = g_{i,j}(y)\, l_j(y)$, I, $x \in \varphi(U_i) \cap \varphi(U_j)$ quindi le γ_i^* definiscono una sezione analitica $\gamma^* : V \longrightarrow F_a$ che $\gamma^* = \chi^{-1} \circ \gamma_a^* \circ \varphi$.

c) Da quanto visto fin ora segue che per provare il teorema basta dimostrare che ogni sezione continua $\gamma'_c : V' \to F'_a$ può essere approssimata (nel senso dell'enunciato del teorema) con una sezione analitica $\gamma'_a : V' \to F'_a$.

Data infatti la sezione $\gamma : V \to F_a$ sia $\gamma'_c = \chi \circ \gamma \circ \varphi^{-1}$ e $\gamma'_a : V' \to F'_a$ la sezione analitica approssimante γ'_c allora si può costruire la sezione analitica $\gamma_a : V \to F_a$, $\gamma_a = \chi^{-1} \circ \gamma'_a \circ \varphi$ e γ_a approssima γ (si può supporre χ sia un'isometra fissando una metrica su F_a ed inducendola su F'_a tramite χ).

Ci siamo dunque ridotti a provare il teorema nel caso in cui la base del fibrato sia un insieme analitico reale coerente di $\mathbb{R}^n$.

Supponiamo dunque $V \subset \mathbb{R}^n$.

Per il lemma 2 esiste un fibrato analitico $(\hat{F}, \hat{\pi}, U_V\, L, L^*)$ che estende F ad un intorno U_V di V in $\mathbb{R}^n$.

Per il medesimo lemma esiste una sezione continua $\hat{\gamma} : U'_V \to F$ definita su un intorno U'_V di V in U_V che estende γ.

Per il lemma 3 $\hat{\gamma}$ e quindi γ si possono approssimare con sezioni analitiche e la prima parte del teorema è provata.

Rimane da dimostrare che se F è un fibrato di gruppi la sezione analitica γ_a può essere scelta omotopa a γ. Per provare questo basta dimostrare che $(\gamma_a \circ \gamma^{-1})(V) \subset U(E)$ e questo è conseguenza immediata di quanto dimostrato nella prima parte del teorema.

PROPOSIZIONE 3. *Sia $F \xrightarrow{\pi} V$ un fibrato analitico reale di gruppi e V uno spazio analitico reale coerente ogni componente connessa del quale abbia dimensione finita e sia fissata una norma su $\check{F}$.*

Siano γ_1, γ_2 due elementi di $\Gamma_V(F)$ continuamente omotopi (cioè esista un'applicazione continua $a : I \to \Gamma^c_V(F)$ tale che $a(0) = \gamma_1$, $a(1) = \gamma_2$), allora γ_1 e γ_2 sono analiticamente omotopi (cioè esiste un'applicazione continua $a' : I \to \Gamma_V(F)$ tale che $a'(0) = \gamma_1$, $a'(1) = \gamma_2$).

PROVA a) Sia K un compatto di V e $\gamma_K \in \Gamma^c_K(F)$; se γ_K è omotopa alla sezione identità e_K di $\Gamma^c_K(F)$ allora γ_K è nella componente connessa di e_K. Ne segue che dato un intorno U di e_K esiste un numero finito $\gamma^K_1, \dots, \gamma^K_i$ di elementi di U tali che:

$$\gamma_K = \gamma^K_1 \dots \gamma^K_i . \tag{1}$$

Dalla compattezza di K si deduce che:

$$W_K = \{\gamma \in \Gamma^c_K(F) \mid \gamma(K) \subset U(E)\}$$

è un intorno di e_K nella topologia della convergenza uniforme sui compatti.

Si è così provato che se γ_K è continuamente omotopa ad e_K nella (1) si può supporre che $\gamma_1^K, \dots, \gamma_i^K$ siano in W_K.

Sia $\gamma \in \Gamma_V^c(F)$, γ continuamente omotopa alla sezione identità.

Vogliamo provare che dato un compatto K di V ed un numero positivo ε esiste una sezione analitica $\gamma', \gamma' \in \Gamma_V(F)$ tale che:

(2) γ' è analiticamente omotopa alla sezione identità ed inoltre $\|\gamma' \cdot \gamma^{-1}\|_K < \varepsilon$.

$\gamma_{|K}$ è omotopa ad e_K, quindi esistono $\gamma_1^K, \dots, \gamma_i^K$ elementi di W_K tali che $\gamma_{|K} = \gamma_1^K \dots \gamma_i^K$.

Le sezioni $\gamma_1' = \hat{\delta}^{-1} \circ \gamma_1^K, \dots, \gamma_i' = \hat{\delta}^{-1} \circ \gamma_i^K$ si possono approssimare arbitrariamente con elementi $\check{\gamma}_1, \dots, \check{\gamma}_i$ di $\Gamma_V(F)$ tali che $\check{\gamma}_j(V) \subset U(0)$, $j = 1, \dots, i$ (vedi lemma 5 di [7]).

Ne segue che, fissato $\varepsilon > 0$, si possono scegliere le sezioni $\check{\gamma}_1, \dots, \check{\gamma}_i$ in modo che, posto $\gamma_j = \hat{\delta} \circ \check{\gamma}_j$, $j = 1, \dots, n$, risulti $\|\gamma' \cdot \gamma^{-1}\|_K < \varepsilon$, ove $\gamma' = \gamma_1 \cdot \gamma_2 \dots \gamma_i$.

Le sezioni $\check{\gamma}_j$ sono analiticamente omotope alla sezione nulla, di conseguenza le γ_j e quindi γ' è analiticamente omotopa alla sezione identità.

La (2) è così dimostrata.

b) Osserviamo che due elementi γ_1, γ_2 di $\Gamma_V(F)$ sono continuamente (od analiticamente) omotopi se, e solo se $\gamma_1 \cdot \gamma_2^{-1}$ è continuamente (od analiticamente) omotopa alla sezione identità e_V di F.

Per provare la proposizione basta dunque dimostrare che se $\gamma \in \Gamma_V(F)$ è continuamente omotopa ad e_V allora è anche analiticamente omotopa ad e_V.

Sia $\{K_n\}_{n \in N}$ una successione di compatti di V tali che:

$$\overset{\circ}{K}_{n+1} \supset K_n, \quad \forall\, n \in N \quad \text{ed} \quad \bigcup_{n \in N} K_n = V.$$

Per quanto provato in *a*) esiste $\gamma^1 \in \Gamma_V(F)$ tale che $\|\gamma^1 \cdot \gamma^{-1}\|_{K_1} < \frac{1}{2}$ e γ^1 è analiticamente omotopa ad e_V.

La sezione $\gamma^1 \cdot \gamma^{-1}$ è continuamente omotopa ad e_V, esiste quindi $\gamma^2 \in \Gamma_V(F)$ tale che:

$\|\gamma^2 \cdot \gamma^1 \cdot \gamma^{-1}\|_{K_2} < \dfrac{1}{4}$ e γ^2 è analiticamente omotopa ad e_V.

In generale esisterà $\gamma^n \in \Gamma_V(F)$ tale che:

$\|\gamma^n \cdot \gamma^{n-1} \dots \gamma^1 \cdot \gamma^{-1}\|_{K_n} < \dfrac{1}{2^n}$ e γ^n sia analiticamente omotopa ad e_V.

Risulta: $\gamma = \lim\limits_{n \to \infty} \gamma^n \cdot \gamma^{n-1} \dots \gamma^1$ e quindi, essendo ogni γ^i e perciò ogni $\gamma^n \cdot \gamma^{n-1} \dots \gamma^1$ analiticamente omotopa ad e_V si ha che γ è analiticamente omotopa ad e_V.

La proposizione è così dimostrata.

Nelle ipotesi della proposizione 3 per ogni insieme U, $U \subset V$ considereremo in $\Gamma_U^c(F)$ la relazione di equivalenza:

$\gamma_1 \overset{\mathcal{R}}{\sim} \gamma_2$ se e solo se γ_1 è continuamente omotopa a γ_2.

In $\Gamma_U(F)$ sia $\mathcal{R}_a$ la relazione di equivalenza:

$\gamma_1 \overset{\mathcal{R}_a}{\sim} \gamma_2$ se e solo se γ_1 è analiticamente omotopa a γ_2.

Gli insiemi $\pi(U, F) = \Gamma_U^c(F)_{/\mathcal{R}}$, $\pi_a(U, F) = \Gamma_U(F)_{/\mathcal{R}_a}$ verranno detti gli insiemi delle classi di omotopia continua ed analitica.

L'immersione $i: \Gamma_U(F) \to \Gamma_U^c(F)$ induce, per passaggio al quoziente un'applicazione $i_*: \pi_a(U, F) \to \pi(U, F)$.

Il teorema 2 e la proposizione 3 dimostrano il seguente

COROLLARIO 3. *Sia (F, π, L, L^*) un fibrato analitico reale di gruppi avente per base lo spazio analitico reale coerente V ogni cui componente connessa abbia dimensione finita.*

In queste ipotesi l'applicazione $i_*: \pi_a(V, F) \to \pi(V, F)$ è iniettiva, se L^* è riducibile (topologicamente) ad un gruppo di Lie compatto allora i_* è surgettiva.

OSSERVAZIONE 2. H. Grauert dimostra, nel caso complesso, con V spazio di Stein, la bigettività di $i_*: \pi_a(V, F) \to \pi(V, F)$ per mezzo di un unico teorema piuttosto tecnico (il teorema 7 di [3]).

Si può dare una forma « σ-invariante » di tale teorema e con essa dimostrare il corollario 3 nel caso in cui V sia compatto.

Riportiamo qui l'enunciato di tale teorema lasciando i dettagli al lettore.

Premettiamo alcune definizioni: sia (F, π, V, L, L^*) un fibrato analitico (reale o complesso) di gruppi. Sia T uno spazio topologico compatto ed $\mathcal{A}$, $\mathcal{U}$ due chiusi di T con $\mathcal{U} \subset \mathcal{A}$.

Posto $I = [0, 1]$ sia $T_1 = T \times I$ ed $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{U}_1$ due chiusi di T_1 tali che:

$$\mathcal{A}_1 \supset \mathcal{U}_1 \quad \text{ed inoltre} \quad \mathcal{A}_1 \cap (T \times]0, 1[) = \mathcal{A} \times (]0, 1[)$$

$$\mathcal{U}_1 \cap T \times (]0, 1[) = \mathcal{U} \times (]0, 1[). \tag{1}$$

Indichiamo con $\mathcal{A}_1^0$ l'insieme

$$\mathcal{A}_1^0 = \mathcal{A}_1 \cup (T' \times \{1\}) \cup (T \times \{0\})$$

ove T' è l'insieme dei $\tau \in T$ tali che $\tau \times \{1\} \in \mathcal{A}_1$.

Sia ora $H: V \times T_1 \to F$ una $(u - a)$-applicazione rispetto agli insiemi $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{U}_1$ di T_1; H si dice una $(u - a^0)$-applicazione se $H_{|V \times \{\tau\}}$ è analitica per ogni $\tau \in \mathcal{A}_1^0$.

Date due $(u - a)$-applicazioni $H_i(v, T, t)$, $H_i: V \times T \times I \to F$, $i = 1, 2$, diremo che esse sono $(u - a^0)$-omotope se esiste una $(u - a)$-deformazione $H'(v, \tau, t, s)$, $H': V \times T \times I \times I \to F$ tale che:

$$H'(v, \tau, t, 1) = H_1(v, \tau, t), \; H'(v, \tau, t, 0) = H_2(v, \tau, t)$$

$$H'(v, \tau, 1, s) = H_1(v, \tau, 1) = H_2(v, \tau, 1) \quad \text{per} \quad v \in V, \; \tau \in T, \; t, s \in I.$$

Sia (F, π, V, L, L^*) un fibrato olomorfo e siano definite due antiinvoluzioni $\sigma: \widetilde{F} \to \widetilde{F}$, $\alpha: \widetilde{V} \to \widetilde{V}$ tali che $\widetilde{\pi} \circ \sigma = \alpha \circ \widetilde{\pi}$.

Diremo che una $(u - a)$-applicazione $H: V \times T \times I \to F$ è una $(u - a^0)$-applicazione σ-invariante se è una $(u - a^0)$-applicazione ed inoltre è σ-invariante come $(u - a)$-applicazione.

Date due $(u - a)$-applicazioni $H_i: V \times T \times I \to F$, $i = 1, 2$, diremo che esse sono $(u - a^0 - \sigma)$-omotope se esiste un'omotopia $H: \widetilde{V} \times T \times I \times I \to \widetilde{F}$ fra H_1 ed H_2 tale che $H_{|V \times T \times I \times \{s\}}$ sia invariante per ogni $s \in I$ ed inoltre H stabilisca una $(u - a^0)$-omotopia fra H_1 ed H_2.

Siano $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, \dots, n$ delle coordinate di $\mathbb{C}^n$ e

$$\widetilde{C} = \{\{z_j\} \in \mathbb{C}^n \mid |x_j| \leq a_j, \; |y_j| \leq b_j, \; a_j, b_j > 0, \; j = 1, \dots, n\}.$$

Sia $\alpha(\{z_j\}) = \{\bar{z}_j\}$ l'antiinvoluzione di $\mathbb{C}^n$ indotta dal coniugio, V un insieme analitico reale coerente definito in un intorno di $\widetilde{C} \cap \mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$, (F, π, V, L, L^*) un fibrato analitico reale di gruppi.

Sia $\widetilde{V}$ un insieme analitico complesso definito in un intorno di $\widetilde{C}$; supponiamo inoltre che $\widetilde{V}$ sia un complessificato di V e si abbia $\alpha(\widetilde{V}) = \widetilde{V}$, $V = \{x \in \widetilde{V} \mid \alpha(x) = x\}$.

Notiamo infine con $(\widetilde{F}, \widetilde{\pi}, \widetilde{V}, \widetilde{L}, \widetilde{L}^*)$ un complessificato di F avente l'antiinvoluzione $\sigma: \widetilde{F} \to \widetilde{F}$.

Con le notazioni ora introdotte possiamo enunciare la:

PROPOSIZIONE 4. *Sia T uno spazio compatto, $\mathcal{A}$, $\mathcal{U}$ due chiusi di T, $\mathcal{A} \supset \mathcal{U}$, ed $H: V \times T \times I \to \widetilde{F}$, $I = [0, 1]$. una $(u - a)$-applicazione rispetto a due insiemi $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{U}_1$ soddisfacenti la* (1)

Se H è σ-invariante esiste un intorno $\widetilde{U}$ di $V = \widetilde{V} \cap \mathbb{R}^n \cap \widetilde{C}$ in $\widetilde{V}$, con $\alpha(\widetilde{U}) = \widetilde{U}$, ed una $(u - a^0)$-applicazione σ-invariante ${}^0H: \widetilde{U} \times T \times I \to \widetilde{F}$ che è $(u - a^0 - \sigma)$-omotopa ad $H_{|\widetilde{U} \times T \times I}$.

PROVA. Si ragioni come nell'Hilfastz 6 di [3] usando la proposizione 2 ed applicando il processo di induzione solo agli assi reali, $x_1, \dots, x_n$.

Per ridimostrare il corollario 3 nel caso compatto si ragioni come in [3] tenendo conto del lemma 2.

OSSERVAZIONE 3. Il teorema 2 afferma che ogni sezione continua di un fibrato analitico reale di gruppi avente per base uno spazio analitico reale coerente di dimensione finita è approssimabile, uniformemente con sezioni analitiche.

Si pone naturale il seguente problema: sia V una varietà analitica reale W uno spazio analitico reale coerente ed $f: V \longrightarrow W$ un'applicazione continua; esistono delle applicazioni analitiche $f_n: V \longrightarrow W$ tali che: fissata una metrica $d: W \times W \longrightarrow \mathbb{R}$ si abbia $d: (f_n(x), f(x)) < \frac{1}{n}$, $\forall\, x \in V$?

Diamo un esempio che mostra come la risposta a tale questione, in generale, sia negativa.

Sia

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1\}, \qquad W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$$

$$f: (1, y) \longrightarrow (|y|, y).$$

Sia ora $\varphi: V \longrightarrow W$ un'applicazione analitica, dimostriamo che $\varphi(V)$ è contenuto interamente in una delle due rette R_1, R_2 di equazione $x - y = 0$, $x + y = 0$.

Per ragioni di connessione infatti se così non fosse esisterebbero due aperti U_1, U_2 di V tali che $f(U_1) \subset R_1$, $f(U_2) \subset R_2$.

La funzione $\psi = g_1 \circ \varphi: V \longrightarrow \mathbb{R}$, ove $g_1: (x, y) \longrightarrow x - y$ è analitica su V, identicamente nulla su U_1 ma non su V e questo è assurdo perchè V è irriducibile.

Da quanto detto è immediato che f non può essere approssimata con applicazioni analitiche.

Istituto Matematico
Università, Pisa

BIBLIOGRAFIA

[0] H. CARTAN, *Espaces fibres analytiques*. Symposium Internacional de topologia algebraica 1958 (Mexico).

[1] J. FRENKEL, *Cohomologie non abelienne et expaces fibres*, Bull. Soc. Math. France 85 (1957) pp. 136-220.

[2] H. GRAUERT, *Approximationssätze fur Holomorphe Funktionen mit Werten in Komplexen Räumen*, Math. Annalen 133 (1957) pp. 139-159.

[3] H. GRAUERT, *Holomorphe Funktionen mit Werten in Komplexen Lieschen Gruppen*, Math. Annalen 133 (1957) pp. 450-472.

[4] H. GRAUERT, *Analytische Farserungen uber holomorphvollstandingen Räumen*, Math. Annalen 135 (1958) pp. 263-273.

[5] N. STEENROD, *The topology of fibre bundles*, Princeton Univ. Press 1951.

[6] A. TOGNOLI, *Proprietà globali degli spazi analitici reali*, Annali di Matematica LXXV (1967) pp. 143-218.

[7] A. TOGNOLI, *Sulla classificazione dei fibrati analitici reali*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Vol. XXI 1967 pp. 709-744.

[8] A. TOGNOLI, *Immagine di un insieme analitico reale per un'applicazione analitica*, Ricerche di Matematica Vol. XVII 1968 pagg. 79-94.

[9] H. WHITNEY, *Analytic extension of differentiable functions defined on closed sets*, Trans. Amer. Math. Soc. 36 (1934) pp. 63-89.