ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

CALOGERO VINTI

L'integrale di Fubini-Tonelli nel senso di Weierstrass. II. Caso ordinario

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 22, nº 3 (1968), p. 355-376

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1968_3_22_3_355_0>

L'INTEGRALE DI FUBINI-TONELLI NEL SENSO DI WEIERSTRASS

II. CASO ORDINARIO

di CALOGERO VINTI (*)

1. Introduzione.

Per l'integrale di Fubini-Tonelli

$$(1) \qquad I(\mathcal{C}) = \int_{a_0}^{b_0}\int_{c_0}^{d_0} F[x_1(u), y_1(u), x_2(v), y_2(v);\ x_1'(u), y_1'(u), x_2'(v), y_2'(v)]\, du\, dv,$$

$$\mathcal{C} \equiv (\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2), \quad \mathcal{C}_1 \equiv \{x_1 = x_1(u),\ y_1 = y_1(u),\ a_0 \leq u \leq b_0\},$$

$$\mathcal{C}_2 \equiv \{x_2 = x_2(v),\ y_2 = y_2(v),\ c_0 \leq v \leq d_0\},$$

inteso nel senso di Weierstrass ($I_{W}(\mathcal{C})$), ho recentemente stabilito [21] dei teoremi di esistenza e di approssimazione e queste proposizioni sono state raggiunte introducendo per le funzioni di rettangolo $\Phi(R)$, $R \subset R_0$, una definizione d'integrale di Weierstrass, che richiamerò al N. 2, « intermedia » tra le due ben note proposte da J. C. Burkill [2]: quella in senso « esteso » operando con suddivisioni di R_0 in classi $\{R_i\}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, ciascuna data da un prodotto cartesiano di suddivisioni di due lati consecutivi di R_0; quella in senso « stretto » operando con decomposizioni di R_0 in classi

Pervenuto alla Redazione il 10 Ottobre 1967.

(*) « Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo di ricerca n. 18 del Comitato per la Matematica del C. N. R. per l'anno 1966/67.

Ringrazio i Professori E. Baiada, E. De Giorgi, E. Magenes, ai quali avevo comunicato ed illustrato questi risultati insieme a quelli del caso parametrico [21], per le utili conversazioni avute durante la stesura definitiva di entrambi i lavori ».

$\{R_i\}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, con gli R_i disposti come R_0, ma senza il vincolo precedente.

In questo lavoro mi propongo di studiare l'integrale di Fubini-Tonelli (1)

$$I(y_1, y_2) = \int_{a_0}^{b_0}\int_{c_0}^{d_0} f(x_1, y_1(x_1), x_2, y_2(x_2); \; y_1'(x_1), y_2'(x_2))\, dx_1\, dx_2,$$

nel senso di Weierstrass $(I_W(y_1, y_2))$, integrale che S. Faedo [7], adoperando la definizione in senso « esteso » di integrale di Weierstrass, ha introdotto con l'ausilio di un opportuno integrale in forma parametrica (2) e per il quale ha dato una condizione necessaria per la semicontinuità inferiore che è anche sufficiente quando f è continua in (x_1, y_1, x_2, y_2) uniformemente rispetto a y_1', y_2'.

Definita nel N. 3, tramite la f, la funzione G con la legge

$$G[x_1, y_1, x_2, y_2; \; x_1', y_1', x_2', y_2'] = x_1' \cdot x_2' \cdot f\left(x_1, y_1, x_2, y_2; \frac{y_1'}{x_1'}, \frac{y_2'}{x_2'}\right),$$
$$\text{per} \quad x_1' > 0, \quad x_2' > 0,$$

che chiamerò funzione associata alla f, la f si dirà integrabile nel senso $(\mathcal{I})$-Weierstrass (cioè secondo la definizione d'integrale di Weierstrass in senso « intermedio »), relativamente alla coppia di curve $(y_1, y_2) \equiv \{y_1 = y_1(x_1), a_0 \leq x_1 \leq b_0; \; y_2 = y_2(x_2), c_0 \leq x_2 \leq d_0\}$, se lo è la G relativamente a (y_1, y_2).

Dai teoremi di esistenza e approssimazione stabiliti nel caso parametrico in [21] segue che l'integrale $I_W(y_1, y_2)$, nel senso $(\mathcal{I})$-Weierstrass, della f, relativamente a una coppia (y_1, y_2) continua e rettificabile, esiste finito se la f oltre ad essere continua globalmente sia tale che la G si possa definire con continuità per $x_1' \geq 0$, $x_2' \geq 0$, e si ha:

$$I_W(y_1, y_2) = \lim_{(h,k)\to 0} \int_{a_0}^{b_0-h}\int_{c_0}^{d_0-k} f\left(x_1, y_1(x_1), x_2, y_2(x_2); \right.$$
$$\left. \frac{y_1(x_1+h) - y_1(x_1)}{h}, \frac{y_2(x_2+k) - y_2(x_2)}{k}\right) dx_1\, dx_2.$$

(1) Lo studio sistematico dell'integrale $I(y_1, y_2)$ è stato iniziato, con il metodo diretto del Tonelli, da S. Faedo ([3], [4], [5]) e successivamente proseguito da E. Magenes ([12], ..., [17]) e poi da L. Lombardi ([9], [10]).

(2) Questa idea di ricondurre il caso ordinario a quello parametrico è di McShane [11] ed è stata da me sfruttata in [19] per introdurre l'integrale del Calcolo delle Variazioni in una variabile nel senso di Weierstrass.

Senza la restrizione sulla f che permette di poter definire la sua funzione associata con continuità per $x_1' \geq 0$, $x_2' \geq 0$, in generale nulla si può dire sull'esistenza (finito) dell'integrale $I_W(y_1, y_2)$ anche quando (y_1, y_2) sia continua e rettificabile mentre sussiste l'inversa di tale situazione, e questa condizione necessaria per l'esistenza (finito) di $I_W(y_1, y_2)$ verrà dimostrata al n. 5 adoperando un lemma che viene stabilito al n. 4.

Nel n. 7 poi si mostrerà che tra gli integrali $I(y_1, y_2)$, $I_W(y_1, y_2)$ e le approssimazioni

$$I(h, k) = \int_{a_0}^{b_0-h} \int_{c_0}^{d_0-k} f\left(x_1, y_1(x_1), x_2, y_2(x_2);\right.$$

$$\left. \frac{y_1(x_1+h) - y_1(x_1)}{h} \cdot \frac{y_2(x_2+k) - y_2(x_2)}{k}\right) dx_1\, dx_2,$$

sussiste, quando f è definita non negativa, la seguente limitazione:

$$I(y_1, y_2) \leq \lim_{(h,k)\to 0}{}^{*} I(h, k) \leq I_W(y_1, y_2) \tag{2}$$

(ove lim* indica una qualsivoglia operazione di limite), limitazione questa che si deduce come conseguenza di un lemma (n. 6) che mette in evidenza una proprietà dell'integrale ($\mathcal{G}$)-Weierstrass di una funzione di rettangolo.

Si osservi che nel caso parametrico la (2) si traduce nella

$$I(\mathcal{C}) = \lim_{(h,k)\to 0} \int_{a_0}^{b_0-h} \int_{c_0}^{d_0-k} F\left[x_1(u), y_1(u), x_2(v), y_2(v);\ \frac{x_1(u+h) - x_1(u)}{h},\right.$$

$$\left.\frac{y_1(u+h) - y_1(u)}{h},\ \frac{x_2(v+k) - x_2(v)}{k},\ \frac{y_2(v+k) - y_2(v)}{k}\right] du\, dv = I_W(\mathcal{C}),$$

ove in $I(\mathcal{C})$ le parametrizzazioni di $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ sono espresse in funzione del parametro lunghezza d'arco rettificato, e l'esistenza dell'integrale $I_W(\mathcal{C})$ è determinante per stabilire la prima uguaglianza dato che, per la particolare parametrizzazione adoperata, si ha $I(\mathcal{C}) = I_W(\mathcal{C})$; cioè è la circostanza che risulta $I(\mathcal{C}) = I_W(\mathcal{C})$ che permette la validità della

$$I(\mathcal{C}) = \lim_{(h,k)\to 0} \int_{a_0}^{b_0-h} \int_{c_0}^{d_0-k} F\left[x_1(u), y_1(u), x_2(v), y_2(v);\ \frac{x_1(u+h) - x_1(u)}{h},\right. \tag{3}$$

$$\left.\frac{y_1(u+h) - y_1(u)}{h},\ \frac{x_2(v+k) - x_2(v)}{k},\ \frac{y_2(v+k) - y_2(v)}{k}\right] du\, dv.$$

Questa situazione è messa meglio in rilievo nel caso ordinario dalla (2) perchè essa mostra che torna ad essere valida l'analoga della (3) quando è $I(y_1, y_2) = I_W(y_1, y_2)$.

2. Premettiamo la definizione d'integrale di Weierstrass in senso « intermedio » ($(\mathcal{I})$-Weierstrass) ([3]).

Chiamiamo: « rettangolo » un intervallo chiuso dello spazio euclideo 2-dimensionale (x, y), cioè un insieme del tipo $\{a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$; « classe elementare » generata da un rettangolo $R = \{a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$ un insieme finito di rettangoli che costituisce una suddivisione di R ottenuta come prodotto di due suddivisioni rispettivamente degli intervalli 1-dimensionale $\{a \leq x \leq b,\ y = 0\}$, $\{x = 0,\ c \leq y \leq d\}$.

In particolare un rettangolo R è il generatore della classe elementare costituita soltanto da R.

Con il simbolo « $D(R)$ » denotiamo una suddivisione del rettangolo R in un numero finito di rettangoli, che possa realizzarsi a partire da una classe elementare avente per generatore R, sostituendo poi ciascun rettangolo di questa classe con una classe elementare da esso generata e così proseguendo, cioè sostituendo ciascun rettangolo delle classi elementari del passo precedente con una classe elementare da esso generata fino ad ottenere, dopo un numero finito di passi del tipo detto, tutti i rettangoli di $D(R)$.

Ovviamente una classe elementare avente per generatore R è una particolare suddivisione $D(R)$.

I simboli $|R|$, $\|R\|$, $\|D(R)\|$ stanno ad indicare rispettivamente l'area del rettangolo R, il diametro di R, il massimo diametro dei rettangoli di $D(R)$. Data una funzione di rettangolo $\Phi(R)$, $R \subset R_0$, chiamiamo *integrale inferiore* $(\mathcal{I})$-*Weierstrass e integrale superiore* $(\mathcal{I})$-*Weierstrass* della Φ su R_0 rispettivamente i numeri (finiti o no)

$$(\mathcal{I})\underline{\int_{R_0}} \Phi \equiv \min \lim_{\|D(R_0)\| \to 0} \Phi[D(R_0)], \qquad (\mathcal{I})\overline{\int_{R_0}} \Phi \equiv \max \lim_{\|D(R_0)\| \to 0} \Phi[D(R_0)],$$

avendo posto

$$\Phi[D(R_0)] = \sum_{i=1}^{n} \Phi(R_i), \quad \text{con} \quad D(R_0) = \{R_1, R_2, \dots, R_n\}.$$

Se $(\mathcal{I})\underline{\int_{R_0}} \Phi = (\mathcal{I})\overline{\int_{R_0}} \Phi$, il valore comune lo denoteremo $(\mathcal{I})\int_{R_0} \Phi$ e lo chiameremo *l'integrale* $(\mathcal{I})$-Weierstrass della Φ su R_0.

([3]) Questa definizione è stata posta in [21].

Quando $(\mathcal{J})\int_{R_0}\Phi$ esiste ed è finito la Φ la diremo $(\mathcal{J})$-*Weierstrass integrabile* su R_0.

Si ha ovviamente:

$$(\mathcal{S})\underline{\int_{R_0}}\Phi\leq(\mathcal{J})\underline{\int_{R_0}}\Phi\leq(\mathcal{E})\underline{\int_{R_0}}\Phi\leq(\mathcal{E})\overline{\int_{R_0}}\Phi\leq(\mathcal{J})\overline{\int_{R_0}}\Phi\leq(\mathcal{S})\overline{\int_{R_0}}\Phi,$$

ove le lettere $\mathcal{E}$ ed $\mathcal{S}$ sono poste per indicare gli integrali (inferiori e superiori) di Weierstrass in senso « esteso » e in senso « stretto ».

3. Introduciamo l'integrale di Fubini-Tonelli nel senso $(\mathcal{J})$-Weierstrass. Siano A_1, A_2 due insiemi chiusi rispettivamente dei piani (x_1, y_1), (x_2, y_2) ed $A = A_1 \times A_2$ l'insieme chiuso prodotto cartesiano di A_1 con A_2.

Denotiamo con (y_1, y_2) una coppia di curve:

$$y_1 = y_1(x_1),\ a_0 \leq x_1 \leq b_0;\quad y_2 = y_2(x_2),\ c_0 \leq x_2 \leq d_0;\quad \text{con } y_1 \in A_1,\ y_2 \in A_2.$$

La curva (y_1, y_2) la diremo continua se le componenti y_1, y_2 sono continue; la (y_1, y_2) la diremo rettificabile se le componenti y_1, y_2 sono rettificabili. Sia poi $f(x_1, y_1, x_2, y_2; y_1', y_2') \equiv f(P; y_1', y_2')$ una funzione definita per ogni punto $P \equiv (P_1, P_2) \equiv (x_1, y_1, x_2, y_2) \in A$ e per ogni valore di y_1', y_2'.

Chiamiamo funzione associata alla f la funzione $G[x_1, y_1, x_2, y_2; x_1', y_1', x_2', y_2']$, definita per $x_1' > 0$, $x_2' > 0$, dalla

$$G[x_1, y_1, x_2, y_2; x_1', y_1', x_2', y_2'] = x_1'\cdot x_2'\cdot f\left(x_1, y_1, x_2, y_2; \frac{y_1'}{x_1'}, \frac{y_2'}{x_2'}\right). \tag{4}$$

Posto $R_0 = \{a_0 \leq x_1 \leq b_0,\ c_0 \leq x_2 \leq d_0\}$, denotiamo con $\Phi_G(R)$, $R = \{u' \leq x_1 \leq u'',\ v' \leq x_2 \leq v''\} \subset R_0$, la funzione di rettangolo definita dalla

$$\begin{aligned}(5)\qquad &\Phi_G(R) =\\ &= G[u', y_1(u'), v', y_2(v'); u''-u', y_1(u'')-y_1(u'), v''-v', y_2(v'')-y_2(v')] =\\ &= (u''-u')\cdot(v''-v')\cdot f\left(u', y_1(u'), v', y_2(v'); \frac{y_1(u'')-y_1(u')}{u''-u'}, \frac{y_2(v'')-y_2(v')}{v''-v'}\right).\end{aligned}$$

Gli integrali $(\mathcal{J})\underline{\int_{R_0}}\Phi_G(R)$, $(\mathcal{J})\overline{\int_{R_0}}\Phi_G(R)$, $(\mathcal{J})\int_{R_0}\Phi_G(R)$ li chiameremo rispettivamente integrale inferiore, integrale superiore, integrale (quando esiste) di Fubini-Tonelli nel senso $(\mathcal{I})$-Weierstrass della f relativamente alla curva (y_1, y_2) e li denoteremo $I_{\underline{W}}(y_1, y_2)$, $I_{\overline{W}}(y_1, y_2)$, $I_W(y_1, y_2)$.

OSSERVAZIONE. Se A_1, A_2 sono limitati e la f è continua globalmente nel suo insieme di definizione e inoltre è tale che la sua funzione associata G si possa definire con continuità in tutto $E = \{(P; x_1', y_1', x_2', y_2'): P \in A, x_1' \geq 0, x_2' \geq 0, \forall y_1', y_2'\}$, poichè la G è positivamente omogenea di grado 1 separatamente rispetto alle coppie (x_1', y_1'), (x_2', y_2'), per ogni curva (y_1, y_2) continua e rettificabile, in virtù dei Teoremi 5,7 di [21], esiste finito l'integrale $I_W(y_1, y_2)$ e si ha:

$$I_W(y_1, y_2) = \lim_{(h,k)\to 0} \int_{a_0}^{b_0-h} \int_{c_0}^{d_0-k} f\left(x_1, y_1(x_1), x_2, y_2(x_2); \frac{y_1(x_1+h)-y_1(x_1)}{h}, \frac{y_2(x_2+k)-y_2(x_2)}{k}\right) dx_1\, dx_2 .$$

La classe delle funzioni f che godono di queste proprietà è abbastanza ampia.

4. Stabiliamo un lemma che ci permetterà nel successivo numero di dare una condizione necessaria per l'esistenza finito di $I_W(y_1, y_2)$ (4).

LEMMA 1. *Se* $f(P_1, P_2; y_1', y_2')$, $P_1 \in A_1$, $P_2 \in A_2$, $\forall y_1', y_2'$, *soddisfa le condizioni:*

i) *sia continua* (5) *in* $A_1\,[A_2]$ *uniformemente rispetto ad* $y_1'\,[y_2']$ *quando si fissino* $P_2 \in A_2\,[P_1 \in A_1]$ ed $y_2'\,[y_1']$;

ii) *per ogni* $P \in A = A_1 \times A_2$ *e per ogni* $y_2'\,[y_1']$ *sia continua e convessa rispetto ad* $y_1'\,[y_2']$;

iii) *in nessun punto* $P \in A$ *e per nessun valore* $y_2'\,[y_1']$ *si riduca ad una funzione lineare rispetto a* $y_1'\,[y_2']$;

fissati comunque un punto $\overline{P} = (\overline{P}_1, \overline{P}_2) \in A_1 \times A_2$ *ed un valore* $\overline{y_2'}\,[\overline{y_1'}]$ *esistono un intorno* $C(\overline{P}_1, \varrho_1) = \{P_1 : \text{dist.}(P_1, \overline{P}_1) \leq \varrho_1\}$ $[C(\overline{P}_2, \varrho_2)]$ *e tre numeri*

(4) La condizione necessaria per l'esistenza finito dell'integrale 1-dimensionale in forma ordinaria del Calcolo delle Variazioni nel senso di Weierstrass, stabilita in [19], viene notevolmente migliorata se invece di adoperare un lemma del Tonelli si adopera il Lemma 1.

(5) Facilmente si vede, nel corso della dimostrazione, che la continuità in i) si può sostituire con la semicontinuità inferiore.

$p_1\,[p_2]$, $q_1\,[q_2]$, $\nu_1\,[\nu_2]$, *con* $\nu_1 > 0\,[\nu_2 > 0]$, *tali che :*

$$(6)\qquad f(P_1\,,\overline{P}_2\,;y_1'\,,\overline{y_2'}) - (p_1 + q_1\,y_1') > \nu_1\,|\,y_1'\,|, \qquad \forall\; P_1 \in A_1 \cap C(\overline{P}_1\,,\varrho_1),\ \forall y_1'.$$

$$[(6')\qquad f(\overline{P}_1\,,P_2\,;\overline{y_1'}\,,y_2') - (p_2 + q_2\,y_2') > \nu_2\,|\,y_2'\,|, \qquad \forall\; P_2 \in A_2 \cap C(\overline{P}_2,\varrho_2),\ \forall\, y_2']$$

Mostriamo la (6), analogo è il ragionamento per la (6′).

Fissati un punto $\overline{P} = (\overline{P}_1\,,\overline{P}_2) \in A$ ed un valore $\overline{y_2'}$, cambiando, per semplicità di notazioni, la variabile y_1' in x, e posto

$$(7)\qquad g\,(x) = f\,(\overline{P}_1\,,\overline{P}_2\,;\,x,\,\overline{y_2'}),$$

consideriamo nel piano cartesiano (x, u) la curva di equazione

$$(8)\qquad u = g\,(x).$$

Per la ii) a cui soddisfa la f, la $g\,(x)$ è continua e convessa e quindi per note proprietà [6] le derivate $g_s'(x)$, $g_d'(x)$, sinistra e destra rispettivamente, esistono in ogni punto x, sono entrambe non decrescenti e inoltre:

$$(9)\qquad g_s'(x) \le g_d'(x), \qquad \forall\; x\,;$$

$$(10)\qquad g_d'(x_1) \le g_s'(x_2), \qquad \text{se } x_1 < x_2\,;$$

$$(11)\qquad g\,(x) \ge g\,(x_0) + g_d'(x_0)\ (x - x_0), \qquad \text{per } x \ge x_0\,,\ \forall\; x_0\,;$$

$$(11')\qquad g\,(x) \ge g\,(x_0) + g_s'(x_0)\ (x - x_0), \qquad \text{per } x \le x_0\,,\ \forall\; x_0\,.$$

Siano $Q_1\,(x_1\,g\,(x_1))$, $Q_2\,(x_2\,,g\,(x_2))$, con $x_1 < x_2$, due punti della (8) tali che

$$(12)\qquad g_d'(x_1) < g_s'(x_2),$$

punti che certamente esistono perchè per la iii) a cui soddisfa la f la (8) non è una retta, e denotiamo con r_1 la retta per Q_1 di coefficiente angolare $g_d'(x_1)$ e con r_2 la retta per Q_2 di coefficente angolare $g_s'(x_2)$.

Le rette $r_1\,,r_2$, per la (12), non sono parallele. Sia $R\,(\alpha, \beta)$ il loro punto a comune e $\tau_1\,,\tau_2$ le semirette

$$(13)\qquad \tau_1 : u = \beta + g_d'(x_1)\ (x - \alpha),\ x \le \alpha\,,$$

$$(13')\qquad \tau_2 : u = \beta + g_s'(x_2)\ (x - \alpha),\ x \ge \alpha\,,$$

---

[6] Cfr. ad esempio [8] pag. 91.

passanti rispettivamente per Q_1 e Q_2 e di origine R. La (8) giace, se si tiene conto oltre che delle (11), (11′) anche della (9), nell'angolo convesso determinato da τ_1 e τ_2.

Considerata allora la retta per R di coefficiente angolare

$$q_1 = \frac{1}{2}(g'_d(x_1) + g'_s(x_2)), \tag{14}$$

se $u = p + q_1 x$ è la sua equazione, risulta:

$$g(x) - (p + q_1 x) \geq 0, \qquad \forall x,$$

e di conseguenza, fissato un $k > 0$ e posto $p_1 = p - k$ si ha

$$g(x) - (p_1 + q_1 x) \geq k, \qquad \forall x. \tag{15}$$

Osserviamo ora che, poichè la (8) cade all'angolo convesso determinato dalle semirette τ_1, τ_2, risulta (si tengano presenti le (13), (13′)):

$$g(x) - (p_1 + q_1 x) \geq \beta + g'_d(x_1)(x - \alpha) - (p_1 + q_1 x), \qquad \text{per } x \leq \alpha; \tag{16}$$

$$g(x) - (p_1 + q_1 x) \geq \beta + g'_s(x_2)(x - \alpha) - (p_1 + q_1 x), \qquad \text{per } x \geq \alpha. \tag{16′}$$

E poichè per la (14) è:

$$\beta + g'_d(x_1)(x - \alpha) - (p_1 + q_1 x) = \beta - p_1 - \alpha g'_d(x_1) - \frac{1}{2}(g'_s(x_2) - g'_d(x_1))\, x,$$

$$\beta + g'_s(x_2)(x - \alpha) - (p_1 + q_1 x) = \beta - p_1 - \alpha g'_s(x_2) + \frac{1}{2}(g'_s(x_2) - g'_d(x_1))\, x,$$

posto

$$M_1 = \beta - p_1 - \alpha g'_d(x_1), \quad M_2 = \beta - p_1 - \alpha g'_s(x_2), \quad \bar{M} = \frac{1}{2}(g'_s(x_2) - g'_d(x_1)),$$

con $\bar{M} > 0$ (in virtù della (12)), la (16) e (16′) si scrivono rispettivamente

$$g(x) - (p_1 + q_1 x) \geq M_1 - \bar{M}x, \qquad \text{per } x \leq \alpha, \tag{17}$$

$$g(x) - (p_1 + q_1 x) \geq M_2 + \bar{M}x, \qquad \text{per } x \geq \alpha. \tag{17′}$$

Detto allora $L > 0$ un numero con le proprietà:

$$L > |\alpha|, \qquad L > 3\frac{|M_1|}{\overline{M}}, \qquad L > 3\frac{|M_2|}{\overline{M}},$$

dalla (17), per $x \leq -L$, si deduce:

$$g(x) - (p_1 + q_1 x) \geq -x\left(-\frac{M_1}{x} + \overline{M}\right) \geq -x\left(-\frac{\overline{M}}{3} + \overline{M}\right) > -x\frac{\overline{M}}{2},$$

mentre dalla (17′), per $x \geq L$, segue:

$$g(x) - (p_1 + q_1 x) \geq x\left(\frac{M_2}{x} + \overline{M}\right) \geq x\left(-\frac{\overline{M}}{3} + \overline{M}\right) > x\frac{\overline{M}}{2},$$

e quindi:

$$g(x) - (p_1 + q_1 x) > \frac{\overline{M}}{2}|x|, \qquad \text{per } |x| \geq L. \tag{18}$$

Teniamo ora presente il significato della variabile x e la (7); la (15) e la (18) si scrivono rispettivamente

$$f(\overline{P}_1, \overline{P}_2; y_1', \overline{y_2'}) - (p_1 + q_1 y_1') \geq k, \qquad \forall\, y_1', \tag{15′}$$

$$f(\overline{P}_1, \overline{P}_2; y_1', \overline{y_2'}) - (p_1 + q_1 y_1') > \frac{\overline{M}}{2}|y_1'|, \qquad \text{per } |y_1'| \geq L. \tag{18′}$$

Ma per la proprietà i) a cui soddisfa la f in corrispondenza ad $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \min\left(\frac{k}{3}, \frac{\overline{M}}{4}L\right)$, esiste un intorno $C(\overline{P}_1, \varrho_1)$ tale che

$$f(P_1, \overline{P}_2; y_1', \overline{y_2'}) > f(\overline{P}_1, \overline{P}_2; y_1', \overline{y_2'}) - \varepsilon, \quad \forall\, P_1 \in A_1 \cap C(\overline{P}_1, \varrho_1), \quad \forall y_1'. \tag{19}$$

Dalla (15′) e dalla (19) segue allora:

$$f(P_1, \overline{P}_2; y_1', \overline{y_2'}) - (p_1 + q_1 y_1') > k - \varepsilon > k - \frac{k}{3} > \frac{k}{2}, \tag{20}$$

$$\forall\, P_1 \in A_1 \cap C(\overline{P}_1, \varrho_1), \quad \forall\, y_1';$$

mentre dalla (18′) e (19) si deduce:

$$f(P_1, \overline{P}_2; y_1, \overline{y_2'}) - (p_1 + q_1 y_1') > \frac{\overline{M}}{2}|y_1'| - \varepsilon > \frac{\overline{M}}{2}|y_1'| - \frac{\overline{M}}{4}L > \tag{20′}$$

$$> \frac{\overline{M}}{2}|y_1'| - \frac{\overline{M}}{4}|y_1'| = \frac{\overline{M}}{4}|y_1'|, \quad \forall\, P_1 \in A_1 \cap C(\overline{P}_1, \varrho_1), \quad \forall |y_1'| \geq L.$$

E poichè la (20), per $|y_1'| \leq L$, ci dà

$$(20'') \qquad f(P_1, \overline{P}_2; y_1', \overline{y}_2') - (p_1 + q_1 y_1') > \frac{k}{2L} |y_1'|,$$

$$\forall P_1 \in A_1 \cap C(\overline{P}_1, \varrho_1), \quad \forall |y_1'| \leq L,$$

posto

$$\nu_1 = \min\left(\frac{k}{2L}, \frac{\overline{M}}{4}\right),$$

dalle (20'), (20'') si ottiene:

$$f(P_1, \overline{P}_2; y_1', \overline{y}_2') - (p_1 + q_1 y_1') > \nu_1 |y_1'|, \qquad \forall P_1 \in A_1 \cap C(\overline{P}_1, \varrho_1), \quad \forall y_1',$$

e quindi la (6) è provata.

5. Diamo una condizione necessaria per l'esistenza (finito) dell'integrale $I_W(y_1, y_2)$.

TEOREMA 1. *Se* $f(P_1, P_2; y_1', y_2')$, $P_1 \in A_1$, $P_2 \in A_2$, $\forall y_1', y_2'$, *soddisfa le condizioni:*

i') *sia continua in* A_1 *uniformemente rispetto ad* y_1' *e continua in* A_2 *uniformemente rispetto ad* y_2', *quando rispettivamente si fissino le coppie* $(P_2 \in A_2, y_2')$, $(P_1 \in A_1, y_1')$ (⁷);

ii') *per ogni* $P \in A = A_1 \times A_2$ *sia continua e convessa rispetto ad* y_1', y_2' *separatamente*;

iii') *in nessun punto* $P \in A$ *si riduca a una funzione lineare rispetto ad* y_1', y_2' *separatamente*;

e se l'integrale $I_W(y_1, y_2)$, *con* (y_1, y_2) *continua, esiste finito, la* (y_1, y_2) *è a variazione limitata.*

Siano:

$$y_1 = y_1(x_1), \ a_0 \leq x_1 \leq b_0; \ y_2 = y_2(x_2), \ c_0 \leq x_2 \leq d_0,$$

le componenti della coppia (y_1, y_2) e mostriamo che $y_1(x_1)$ è a variazione limitata in (a_0, b_0); analogo è il ragionamento per mostrare che $y_2(x_2)$ è a variazione limitata in (c_0, d_0).

Dalla definizione d'integrale $I_W(y_1, y_2)$ segue che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni $D(R_0)$, $R_0 = \{a_0 \leq x_1 \leq b, c_0 \leq x_2 \leq d_0\}$, $|D(R_0)| < \delta$, si abbia

(⁷) La continuità in i') si può sostituire con la semicontinuità inferiore.

$$(21) \qquad | \Phi_G [D(R_0)] - I_W(y_1, y_2) | < \varepsilon,$$

con Φ_G definita dalla (5).

Fissiamo un punto $\bar{x}_1 \in [a_0, b_0]$ e sia $\bar{R}$, $\bar{R} \subset R_0$, un rettangolo

$$(22) \qquad \bar{R} = \{\bar{x}_1 - \alpha \leq x_1 \leq \bar{x}_1 + \beta,\ c_0 \leq x_2 \leq c_0 + \delta'\},$$

con α, β, δ' soddisfacenti le condizioni:

$1^0)$ $0 < \alpha \leq \min\left\{\frac{\delta}{4}, \bar{x}_1 - a_0\right\}$, $0 < \beta \leq \min\left\{\frac{\delta}{4}, b_0 - \bar{x}_1\right\}$,

se $a_0 < \bar{x}_1 < b_0$;

$2^0)$ $\alpha = 0$, $0 < \beta \leq \frac{\delta}{2}$, se $\bar{x}_1 = a_0$;

$3^0)$ $0 < \alpha \leq \frac{\delta}{2}$, $\beta = 0$, se $\bar{x}_1 = b_0$;

$4^0)$ $0 < \delta' \leq \frac{\delta}{2}$.

Fissato un $\bar{R}$ del tipo (22) scegliamo m rettangoli $R_j, j = 1, 2, \dots, m$, $R_j \subset R_0$, in modo che esista una suddivisione $D(R_0) = \{\bar{R}, R_1, R_2, \dots, R_m\}$, con $\| D(R_0) \| < \delta$, e sia poi $D(\bar{R})$ una arbitraria suddivisione di $\bar{R}$.

Poichè la totalità dei rettangoli costituita dai rettangoli $R_j, j = 1, \dots m$, e da quelli contenuti in $D(\bar{R})$ rappresenta una suddivisione $D^*(R_0)$, con $\| D^*(R_0) \| < \delta$, risulta per la (21):

$$(21') \qquad \Phi_G[D(\bar{R})] < I_W(y_1, y_2) - \sum_{j=1}^{m} \Phi_G(R_j) + \varepsilon,$$

e questa ci dice che per ogni $\bar{R}$ del tipo (22) esiste un $M > 0$ tale che qualunque sia $D(\bar{R})$ si abbia

$$(23) \qquad \Phi_G [D(\bar{R})] < M.$$

Fissiamo ora un $\bar{x}_2 \in [c_0, d_0]$, $c_0 < \bar{x}_2 < c_0 + \frac{\delta}{2}$, e osserviamo che in virtù del Lemma 1, visto che f soddisfa le condizioni i), ii), iii) di tale lemma, esistono, quando in esso si prendono $\bar{P}_1 = (\bar{x}_1, y_1(\bar{x}_1))$, $\bar{P}_2 = (c_0, y_2(c_0))$, $\bar{y}'_2 = \dfrac{y_2(\bar{x}_2) - y_2(c_0)}{\bar{x}_2 - c_0}$, un intorno $C(\bar{P}_1, \varrho_1)$, $0 < \varrho_1 < \frac{\delta}{4}$, e tre numeri p_1, q_1,

$\nu_1, \nu_1 > 0$, tali che

(24) $$f(P_1, \bar{P}_2; y_1', \bar{y}_2') - (p_1 + q_1 y_1') > \nu_1 |y_1'|, \ \forall P_1 \in A_1 \cap C(\bar{P}_1, \varrho_1), \ \forall y_1'.$$

Consideriamo nel piano cartesiano (x_1, y_1) la circonferenza γ di centro $\bar{P}_1 = (\bar{x}_1, y_1(\bar{x}_1))$ e raggio ϱ, con $\varrho < \min\{\varrho_1, \bar{x}_1 - a_0, b_0 - \bar{x}_1\}$ quando è $a_0 < \bar{x}_1 < b_0$, con $\varrho < \min\{\varrho_1, b_0 - a_0\}$ se è $\bar{x}_1 = a_0$ oppure $\bar{x}_1 = b_0$, e si osservi che la retta r passante per $\bar{P}_1$ e parallela all'asse x_1 divide la γ in due semicirconferenze γ_1, γ_2 di equazioni

$$y_1 = h(x_1), \quad \bar{x}_1 - \varrho \leq x_1 \leq \bar{x}_1 + \varrho,$$

$$y_1 = k(x_1), \quad \bar{x}_1 - \varrho \leq x_1 \leq \bar{x}_1 + \varrho.$$

Se è $\bar{x}_1 < b_0$, denotiamo con $\{x_d\}$ la classe dei punti x_d, ciascuno dei quali soddisfa una almeno delle due relazioni

$$h(x_1) - y_1(x_1) = 0, \quad \bar{x}_1 \leq x_1 \leq \bar{x}_1 + \varrho,$$

$$k(x_1) - y_1(x_1) = 0, \quad \bar{x}_1 \leq x_1 \leq \bar{x}_1 + \varrho.$$

Essendo le funzioni $y_1(x_1), h(x_1), k(x_1)$ continue, la classe $\{x_d\}$ è chiusa e inoltre il minimo $\sigma(\bar{x}_1)$ di tale classe è manifestamente maggiore di $\bar{x}_1$.

Se è $\bar{x}_1 > a_0$, denotiamo con $\{x_s\}$ la classe dei punti x_s ciascuno dei quali soddisfa una almeno delle due relazioni

$$h(x_1) - y_1(x_1) = 0, \quad \bar{x}_1 - \varrho \leq x_1 \leq \bar{x}_1.$$

$$k(x_1) - y_1(x_1) = 0, \quad \bar{x}_1 - \varrho \leq x_1 \leq \bar{x}_1.$$

Tale classe $\{x_s\}$ è pure chiusa e il suo massimo $\tau(\bar{x}_1)$ è minore di $\bar{x}_1$. Con questo procedimento ad ogni punto $\bar{x}_1 \in [a_0, b_0]$ si associa: l'intervallo $[\tau(\bar{x}_1), \sigma(\bar{x}_1)]$, $\tau(\bar{x}_1) < \bar{x}_1 < \sigma(\bar{x}_1)$, se $a_0 < \bar{x}_1 < b_0$; l'intervallo $[\bar{x}_1, \sigma(\bar{x}_1)]$ se $\bar{x}_1 = a_0$; l'intervallo $[\tau(\bar{x}_1), \bar{x}]$ se $\bar{x}_1 = b_0$.

Supposto $a_0 < \bar{x}_1 < b_0$ mostriamo che in $[\tau(\bar{x}_1), \sigma(\bar{x}_1)]$ la $y_1(x_1)$ è a variazione limitata; analogo è il ragionamento per mostrare che $y_1(x_1)$ è a variazione limitata in $[\bar{x}_1, \sigma(\bar{x}_1)]$ o in $[\tau(\bar{x}_1), \bar{x}_1]$ secondo che $\bar{x}_1 = a_0$ oppure $\bar{x}_1 = b_0$.

Osserviamo intanto che per $x_1 \in [\tau(\bar{x}_1), \sigma(\bar{x}_1)]$ è $P_1 = (x_1, y(x_1)) \in A_1 \cap C(\bar{P}_1, \varrho_1)$, essendo il raggio ϱ della γ minore di ϱ_1.

Detta quindi $\{x_1^{(j)}\}_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, $\tau(\bar{x}_1) = x_1^{(0)} < x_1^{(1)} < \dots < x_1^{(n)} = \sigma(\bar{x}_1)$, una arbitraria suddivisione dell'intervallo $[\tau(\bar{x}_1), \sigma(\bar{x}_1)]$, dalla (24) segue:

$$f\left(x_1^{(j)}, y_1(x_1^{(j)}), c_0, y_2(c_0); \frac{y_1(x_1^{(j+1)}) - y_1(x_1^{(j)})}{x_1^{(j+1)} - x_1^{(j)}}, \frac{y_2(\bar{x}_2) - y_2(c_0)}{\bar{x}_2 - c_0}\right) -$$

$$-\left(p_1 + q_1 \frac{y_1(x_1^{(j+1)}) - y_1(x_1^{(j)})}{x_1^{(j+1)} - x_1^{(j)}}\right) > \nu_1 \left|\frac{y_1(x_1^{(j+1)}) - y_1(x_1^{(j)})}{x_1^{(j+1)} - x_1^{(j)}}\right|, \quad j = 0, 1, \dots, n-1,$$

dalla quale, moltiplicando ambo i membri per $(\bar{x}_2 - c_0)(x_1^{(j+1)} - x_1^{(j)})$ e poi sommando rispetto all'indice j si ha:

$$(25) \qquad \sum_{j=0}^{n-1} f\left(x_1^{(j)}, y_1(x_1^{(j)}), c_0, y_2(c_0); \frac{y_1(x_1^{(j+1)}) - y_1(x_1^{(j)})}{x_1^{(j+1)} - x_1^{(j)}},\right.$$

$$\left.\frac{y_2(\bar{x}_2) - y_2(c_0)}{\bar{x}_2 - c_0}\right)(\bar{x}_2 - c_0)(x_1^{(j+1)} - x_1^{(j)}) -$$

$$-\Big(p_1(\sigma(\bar{x}_1) - \tau(\bar{x}_1)) + q_1(y_1(\sigma(\bar{x}_1)) - y_1(\tau(\bar{x}_1)))\Big)(\bar{x}_2 - c_0) >$$

$$> (\bar{x}_2 - c_0)\,\nu_1 \sum_{j=0}^{n-1} |\, y_1(x_1^{(j+1)}) - y_1(x_1^{(j)}) \,| .$$

Ricordiamo ora che è

$$0 < \varrho_1 < \frac{\delta}{4}, \; 0 < \varrho < \min\{\varrho_1, \bar{x}_1 - a_0, b_0 - \bar{x}_1\}, \; c_0 < \bar{x}_2 \le c_0 + \frac{\delta}{2},$$

e quindi, poichè $\bar{x}_1 - \varrho \le \tau(\bar{x}_1) < \bar{x}_1 < \sigma(\bar{x}_1) \le \bar{x}_1 + \varrho$, il rettangolo $\bar{R} = \{\tau(\bar{x}_1) \le x_1 \le \sigma(\bar{x}_1), c_0 \le x_2 \le \bar{x}_2\}$ è del tipo (22).

Dalla (23) allora, che vale qualunque sia $D(\bar{R})$ e quindi in particolare quando per $D(\bar{R})$ si prenda una qualunque suddivisione di $\bar{R}$ ottenuta come prodotto di una arbitraria suddivisione $\{x_1^{(j)}\}_j$ di $[\tau(\bar{x}_1), \sigma(\bar{x}_1)]$ per $[c_0, \bar{x}_2]$, si ha:

$$(26) \qquad \sum_{j=0}^{n-1} f\left(x_1^{(j)}, y_1(x_1^{(j)}), c_0, y_2(c_0); \frac{y_1(x_1^{(j+1)}) - y_1(x_1^{(j)})}{x_1^{(j+1)} - x_1^{(j)}},\right.$$

$$\left.\frac{y_2(\bar{x}_2) - y_2(c_0)}{\bar{x}_2 - c_0}\right)(\bar{x}_2 - c_0)(x_1^{(j+1)} - x_1^{(j)}) < M,$$

qualunque sia la suddivisione $\{x_1^{(j)}\}_j$ dell'intervallo $[\tau(\bar{x}_1), \sigma(\bar{x}_1)]$. Dalle (25), (26) segue dunque l'esistenza di un $N > 0$ tale che:

$$\sum_{j=0}^{n-1} | y_1(x_1^{(j+1)}) - y_1(x_1^{(j)}) | < N,$$

qualunque sia la suddivisione $\{x_1^{(j)}\}_j$ dell'intervallo $[\tau(\bar{x}_1), \sigma(\bar{x}_1)]$. La $y_1(x_1)$ è quindi a variazione limitata in $[\tau(\bar{x}_1), \sigma(\bar{x}_1)]$.

Osservando infine che al variare di $\bar{x}_1$ in $[a_0, b_0]$ si ottiene una classe $\{T\}$ di infiniti intervalli $T \equiv [\tau(\bar{x}_1), \sigma(\bar{x}_1)]$, con $\tau(\bar{x}_1) \equiv \bar{x}_1$ se $\bar{x}_1 = a_0$ e con $\sigma(\bar{x}_1) \equiv \bar{x}_1$ se $\bar{x}_1 = b_0$, la quale classe ricopre $[a_0, b_0]$ e in ciascun intervallo T la $y_1(x_1)$ è a variazione limitata, in virtù del noto teorema di copertura di Borel esiste una sottoclasse finita della $\{T\}$ che ricopre $[a_0, b_0]$ e quindi $y_1(x_1)$ è a variazione limitata in $[a_0, b_0]$.

OSSERVAZIONE I. Il teorema sussiste anche se non esiste $I_W(y_1, y_2)$ purchè però sia finito $I_{\overline{W}}(y_1, y_2)$; difatti in tal caso continua ad essere vera la (21′) quando in essa si cambi $I_W(y_1, y_2)$ in $I_{\overline{W}}(y_1, y_2)$.

OSSERVAZIONE II. Le condizioni ii′), iii′) sono soddisfatte se l'integrale $I_W(y_1, y_2)$ è quasi regolare positivo seminormale (S. Faedo [6] pp; 80-81).

OSSERVAZIONE III. Facilmente si vede che senza la condizione iii′) non sussiste il teorema. Consideriamo ad esempio le funzioni

$$f_1(P; y_1', y_2') = y_1' + y_2', \quad f_2(P; y_1', y_2') = y_1' \cdot y_2',$$
$$f_3(P; y_1', y_2') = y_1' + y_2'^2, \quad f_4(P; y_1', y_2') = y_1' \cdot y_2'^2,$$

che soddisfano le i′), ii′) senza soddisfare la iii′).

Dette G_1, G_2 rispettivamente le funzioni associate a f_1, f_2, e fissata una coppia di curve (y_1, y_2), $\{y_1 = y_1(x_1), a_0 \leq x_1 \leq b_0\}$, $\{y_2 = y_2(x_2), c_0 \leq x_2 \leq b_0\}$, se $D(R_0)$, $R_0 = \{a_0 \leq x_1 \leq b_0, c_0 \leq x_2 \leq d_0\}$, è una suddivisione di R_0 ottenuta come prodotto delle suddivisioni $a_0 = x_1^{(0)} < x_1^{(1)} < \ldots, x_1^{(m)} = b_0$, $c_0 = x_2^{(0)} < x_2^{(1)} < \ldots x_2^{(n)} = d_0$, posto $R_{i,j} = \{x_1^{(i)} \leq x_1 \leq x_1^{(i+1)}, x_2^{(j)} \leq x_2 \leq x_2^{(j+1)}\}$, si ha:

$$\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \Phi_{G_1}(R_{i,j}) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{y_1(x_1^{(i+1)}) - y_1(x_1^{(i)})}{x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)}} + \right.$$
$$\left. + \frac{y_2(x_2^{(j+1)}) - y_2(x_2^{(j)})}{x_2^{(j+1)} - x_2^{(j)}} \right) (x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)})(x_2^{(j+1)} - x_2^{(j)}) =$$
$$= \big(y_1(b_0) - y_1(c_0)\big)(d_0 - c_0) + \big(y_2(d_0) - y_2(c_0)\big)(b_0 - c_0),$$

$$\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} \Phi_{G_2}(R_{i,j}) = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{y_1(x_1^{(i+1)}) - y_1(x_1^{(i)})}{x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)}} \cdot$$

$$\cdot \frac{y_2(x_2^{(j+1)}) - y_2(x_2^{(j)})}{x_2^{(j+1)} - x_2^{(j)}} \cdot (x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)})(x_2^{(j+1)} - x_2^{(j)}) =$$

$$= \big(y_1(b_0) - y_1(c_0)\big)\big(y_2(d_0) - y_2(c_0)\big).$$

E analogamente, se $D(R_0)$ è una generica suddivisione di R_0, si ha:

$$\Phi_{G_1}[D(R_0)] = \big(y_1(b_0) - y_1(a_0)\big)(d_0 - c_0) + \big(y_2(d_0) - y_2(c_0)\big)(b_0 - a_0),$$

$$\Phi_{G_2}[D(R_0)] = \big(y_1(b_0) - y_1(a_0)\big)\big(y_2(d_0) - y_2(c_0)\big).$$

Esistono quindi finiti gli integrali

$$(\mathcal{G})\int_{R_0} \Phi_{G_1}, \quad (\mathcal{G})\int_{R_0} \Phi_{G_2},$$

senza alcuna ipotesi sulle funzioni $y_1(x_1)$, $y_2(x_2)$.

Analogamente si vede che l'integrale $I_W(y_1, y_2)$ sia della f_3 che della f_4 esiste finito qualunque sia $y_1 = y_1(x_1)$, $x_1 \in [a_0, b_0]$, e con $y_2 = y_2(x_2)$, $x_2 \in [c_0, d_0]$, costante.

OSSERVAZIONE IV. La condizione necessaria espressa dal teorema non è sufficiente. Si consideri infatti la funzione

$$f(P; y_1', y_2') = y_1'^4 + y_2'^4$$

che soddisfa le condizioni i'), ii'), iii') e si prenda per coppia (y_1, y_2), $y_1 = y_1(x_1)$, $0 \le x_1 \le 1$, $y_2 = y_2(x_2)$, $0 \le x_2 \le 1$, quella con $y_1(x_1)$, $y_2(x_2)$ coincidenti entrambe con la nota funzione di Cantor-Vitali, $y = y(x)$, $0 \le x \le 1$, che è continua, a variazione limitata ma non assolutamente continua. Per tale funzione $y(x)$ del Vitali si ha (8) che $\forall M > 0 \;\; \exists \delta(M) > 0$ per cui risulti:

$$\frac{(y(1) - y(x))^4}{(1 - x)^3} > M, \qquad \forall x : 1 - \delta \le x < 1. \tag{27}$$

Considerata allora una generica suddivisione $D(R_0)$, $R_0 = \{0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le 1\}$, con $\| D(R_0) \| < \delta$, sia $\bar{R} \in D(R_0)$ il rettangolo

$$\bar{R} = \{\bar{x}_1 \le x_1 \le 1, \;\; \bar{x}_2 \le x_2 \le 1\}$$

(8) C. Vinti [19] pp. 26-27.

È ovviamente $1-\delta<\bar{x}_1<1$, $1-\delta<\bar{x}_2<1$, e se Φ_G è la funzione associata alla f si ha per la (27):

$$\Phi_G(\bar{R})=\frac{(y_1(1)-y_1(\bar{x}_1))^4}{(1-\bar{x}_1)^3}+\frac{(y_2(1)-y_2(\bar{x}_2))^4}{(1-\bar{x}_2)^3}>2M$$

Osservato che gli addenti della somma $\Phi_G[D(R_0)]$ sono non negativi, e tra questi c'è $\Phi_G(\bar{R})$, si deduce, per l'arbitrarietà di $M>0$, che:

$$(\mathcal{J})\int_{R_0}^{\cdot}\Phi_G=+\infty$$

6. Stabiliamo un lemma che verrà adoperato per dimostrare il teorema del numero successivo.

LEMMA 2. ***Se la funzione di rettangolo $\Phi(x_1', x_1''; x_2', x_2'')$, definita non negativa per $R=\{x_1'\le x_1\le x_1'', x_2'\le x_2\le x_2''\}\subset R_0=\{a_0\le x_1\le b_0, c_0\le x_2\le d_0\}$, è tale che $\forall\, h,k$: $0<h<b_0-a_0$, $0<k<d_0-c_0$, la $\Phi(x_1, x_1+h; x_2, x_2+k)$, $(x_1, x_2)\in R_{h,k}=\{a_0\le x_1\le b_0-h, c_0\le x_2\le d_0-k\}$, risulta integrabile secondo Riemann su $R_{h,k}$, si ha:***

$$\lim_{(h,k)\to 0}\int_{R_{h,k}}\frac{\Phi(x_1, x_1+h; x_2, x_2+k)}{hk}\,dx_1\,dx_2\le(\mathcal{J})\overline{\int_{R_0}}\Phi. \tag{28}$$

Supponiamo $(\mathcal{J})\overline{\int_{R_0}}\Phi<+\infty$, in caso contrario la (28) è manifestamente vera,

e si osservi che essendo Φ non negativa è $0\le(\mathcal{J})\overline{\int_{R_0}}\Phi<+\infty$, e quindi

$\forall\,\varepsilon>0$ $\exists\,\delta(\varepsilon)>0$ tale che per ogni suddivisione $D(R_0)$, $\|D(R_0)\|<\delta$, si abbia

$$\Phi[D(R_0)]<(\mathcal{J})\overline{\int_{R_0}}\Phi+\varepsilon. \tag{29}$$

Fissiamo h, k, $0<h<\delta/2$, $0<k<\delta/2$, e poniamo

$$I(h,k)=\int_{R_{h,k}}\frac{\Phi(x_1, x_1+h; x_2, x_2+k)}{hk}\,dx_1\,dx_2.$$

Dalla stessa definizione d'integrale di Riemann esiste un $\sigma_{h,k}(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni classe elementare $D(R_{h,k})$, $\| D(R_{h,k}) \| < \sigma_{h,k}$, una qualunque somma di Riemann della $\Phi(x_1, x_1 + h; x_2, x_2 + k)/hk$ relativa a $D(R_{h,k})$ differisce in modulo da $I(h, k)$ per meno di ε.

Sia m un intero positivo con la condizione $\dfrac{h}{m} < \dfrac{1}{2}\sigma_{h,k}$, $\dfrac{k}{m} < \dfrac{1}{2}\sigma_{h,k}$ e

$$\mathcal{D}^{(x_1)} \equiv \{a_0 = x_1^{(1,1)} < x_1^{(1,2)} < \dots < x_1^{(1,m)} < x_1^{(2,1)} < x_1^{(2,2)} < \dots < x_1^{(2,m)} < \dots$$

$$\dots < x_1^{(p,1)} < x_1^{(p,2)} < \dots < x_1^{(p,q)} < x_1^{(p,q+1)} = b_0 - h\},$$

$$\mathcal{D}^{(x_2)} \equiv \{c_0 = x_2^{(1,1)} < x_2^{(1,2)} < \dots < x_2^{(1,m)} < x_2^{(2,1)} < x_2^{(2,2)} < \dots < x_2^{(2,m)} < \dots$$

$$\dots < x_2^{(p',1)} < x_2^{(p',2)} < \dots < x_2^{(p',q')} < x_2^{(p',q'+1)} = d_0 - k\},$$

due suddivisioni rispettivamente di $[a_0, b_0 - h]$, $[c_0, c_0 - k]$, con le proprietà:

$$\begin{cases} q \leq m, \quad q' \leq m; \\ x_1^{(\alpha,\beta+1)} - x_1^{(\alpha,\beta)} = x_1^{(\alpha+1,1)} - x_1^{(\alpha,m)} = x_1^{(p,i+1)} - x_1^{(p,i)} = h/m, \\ \qquad \alpha = 1, 2, \dots, p-1, \ \beta = 1, \dots, m-1, \ i = 1, \dots, q-1; \\ x_2^{(\gamma,\tau+1)} - x_2^{(\gamma,\tau)} = x_2^{(\gamma+1,1)} - x_2^{(\gamma,m)} = x_2^{(p',j+1)} - x_2^{(p',j)} = k/m, \\ \qquad \gamma = 1, 2, \dots, p'-1, \ \tau = 1, \dots, m-1, \ j = 1, \dots, q'-1; \\ x_1^{(p,q+1)} - x_1^{(p,q)} = A \leq h/m, \quad x_2^{(p',q'+1)} - x_2^{(p',q')} = B \leq k/m. \end{cases}$$

Sia poi S la somma di Riemann della $\Phi(x_1, x_1 + h; x_2, x_2 + k)/hk$ relativamente alla suddivisione prodotto $\mathcal{D}^{(x_1)} \times \mathcal{D}^{(x_2)}$ quando per valore della $\Phi(x_1, x_1 + h; x_2, x_2 + k)/hk$ in ciascun rettangolo di $\mathcal{D}^{(x_1)} \times \mathcal{D}^{(x_2)}$ si prende il valore che essa assume nel vertice sinistro in basso.

Si ha ovviamente

$$I(h, k) - \varepsilon < S < I(h, k) + \varepsilon. \tag{30}$$

Posto

$$S^{(\beta,\tau)} = \sum_{\gamma=1}^{p'} \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\Phi(x_1^{(\alpha,\beta)}, x_1^{(\alpha,\beta)} + h; x_2^{(\gamma,\tau)}, x_2^{(\gamma,\tau)} + k)}{hk} C^{(\alpha,\beta)} \cdot E^{(\gamma,\tau)} \tag{31}$$

con $C^{(\alpha,\beta)}$, $E^{(\gamma,\tau)}$ definite dalle

$$(31_1)\qquad C^{(\alpha,\beta)}=\begin{cases} h/m & \text{per}\quad \alpha=1,\dots,p-1,\ \beta=1,\dots,m,\\ & \qquad\qquad \text{e per}\quad \alpha=p,\ \beta=1,\dots,q-1;\\ A & \text{per}\quad \alpha=p,\ \beta=q;\\ 0 & \text{per}\quad \alpha=p,\ \beta=q+1,\dots,m,\end{cases}$$

$$(31_2)\qquad E^{(\gamma,\tau)}=\begin{cases} k/m & \text{per}\quad \gamma=1,\dots,p'-1,\ \tau=1,\dots,m,\\ & \qquad\qquad \text{e per}\quad \gamma=p',\ \tau=1,\dots,q'-1;\\ B & \text{per}\quad \gamma=p',\ \tau=q';\\ 0 & \text{per}\quad \gamma=p',\ \tau=q'+1,\dots,m,\end{cases}$$

risulta:

$$(32)\qquad S=\sum_{\tau=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{m}S^{(\beta,\tau)}.$$

Confrontiamo ora le somme $S^{(\beta,\tau)}$ con le somme $\Phi[D^{(\beta,\tau)}(R_0)]$, essendo $D^{(\beta,\tau)}(R_0)$ la classe elementare prodotto delle due suddivisioni

$$a_0=x_1^{(1,1)}\le x_1^{(1,\beta)}<x_1^{(2,\beta)}<\dots<x_1^{(r,\beta)}<x_1^{(r+1,\beta)}<x_1^{(r+2,\beta)}=b_0,$$

$$c_0=x_2^{(1,1)}\le x_2^{(1,\tau)}<x_2^{(2,\tau)}<\dots<x_2^{(s,\tau)}<x_2^{(s+1,\tau)}<x_2^{(s+2,\tau)}=d_0,$$

ove è

$$(33)\qquad r=\begin{cases} p & \text{se}\quad \beta\le q\\ p-1 & \text{se}\quad \beta>q\end{cases},\qquad s=\begin{cases} p' & \text{se}\quad \tau\le q',\\ p'-1 & \text{se}\quad \tau>q'\end{cases}$$

e avendo posto

$$(34)\qquad \begin{cases} x_1^{(p+1,\beta)}=x_1^{(p,\beta)}+h & \text{per}\quad \beta\le q,\\ x_1^{(p,\beta)}\ \ =x_1^{(p-1,\beta)}+h & \text{per}\quad \beta>q,\\ x_2^{(p'+1,\tau)}=x_2^{(p',\tau)}+k & \text{per}\quad \tau\le q',\\ x_2^{(p',\tau)}\ \ =x_2^{(p'-1,\tau)}+k & \text{per}\quad \tau>q'.\end{cases}$$

È manifestamente

$$(35)\qquad \Phi[D^{(\beta,\tau)}(R_0)] = \sum_{\alpha=1}^{r+1}\sum_{\gamma=1}^{s+1} \Phi(x_1^{(\alpha,\beta)}, x_1^{(\alpha+1,\beta)}; x_2^{(\gamma,\tau)}, x_2^{(\gamma+1,\tau)}) +$$

$$+ \sum_{\gamma=1}^{s+1} \Phi(x_1^{(1,1)}, x_1^{(1,\beta)}; x_2^{(\gamma,\tau)}, x_2^{(\gamma+1,\tau)}) + \sum_{\alpha=1}^{r+1} \Phi(x_1^{(\alpha,\beta)}, x_1^{(\alpha+1,\beta)}; x_2^{(1,1)}, x_2^{(1,\tau)}) +$$

$$+ \Phi(x_1^{(1,1)}, x_1^{(1,\beta)}; x_2^{(1,1)}, x_2^{(1,\tau)}),$$

con l'avvertenza di porre

$$\Phi(x_1^{(1,1)}, x_1^{(1,\beta)}; x_2^{(\gamma,\tau)}, x_2^{(\gamma+1,\tau)}) = 0 \quad \text{se} \quad \beta = 1,$$

$$\Phi(x_1^{(\alpha,\beta)}, x_1^{(\alpha+1,\beta)}; x_2^{(1,1)}, x_2^{(1,\tau)}) = 0 \quad \text{se} \quad \tau = 1,$$

$$\Phi(x_1^{(1,1)}, x_1^{(1,\beta)}; x_2^{(1,1)}, x_2^{(1,\tau)}) = 0 \qquad \text{se almeno uno dei due indici } \beta, \tau \text{ è } 1.$$

Ma dalla (31), tenendo presente le (31_1), (31_2), (33), (34) e ricordando che Φ è non negativa e che inoltre $0 < A \leq h/m$, $0 < B \leq k/m$, segue:

$$S^{(\beta,\tau)} \leq \sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{\gamma=1}^{s} \frac{\Phi(x_1^{(\alpha,\beta)}, x_1^{(\alpha+1,\beta)}; x_2^{(\gamma,\tau)}, x_2^{(\gamma+1,\tau)})}{m^2},$$

che confrontata con la (35) ci dà:

$$(36)\qquad S^{(\beta,\tau)} \leq \frac{1}{m^2}\,\Phi[D^{(\beta,\tau)}(R_0)].$$

E poichè è $\| D^{(\beta,\tau)}(R_0) \| < \delta$, $\forall\, \beta, \tau = 1, 2, \ldots, m$, dalla (32), tenendo presente le (29), (36), si deduce:

$$S < (\mathcal{G}) \overline{\int_{R_0}} \Phi + \varepsilon,$$

e quindi dalla (30):

$$I(h, k) < (\mathcal{G}) \overline{\int_{R_0}} \Phi + 2\varepsilon, \qquad \forall\, h, k : 0 < h < \delta/2,\ 0 < k < \delta/2,$$

che ci dà l'asserto del teorema.

OSSERVAZIONE. Invece della (28) sussisterebbe la

$$\min_{(h,k)\to 0} \lim \int\limits_{R_{h,k}} \frac{\Phi(x_1, x_1+h; x_2, x_2+k)}{hk}\, dx_1\, dx_2 \geq (\mathcal{G}) \underline{\int\limits_{R_0}} \Phi,$$

se la Φ fosse definita non positiva.

7. In questo numero stabiliamo una proposizione che mette in relazione l'integrale $I(y_1, y_2)$ di Fubini-Tonelli, l'integrale superiore $I_{\overline{W}}(y_1, y_2)$ di Fubini-Tonelli nel senso $(\mathcal{G})$-Weiestrass e le approssimazioni

$$\int\limits_{R_{h,k}} f\left(x_1, y_1(x_1), x_2, y_2(x_2); \frac{y_1(x_1+h)-y_1(x_1)}{h}, \frac{y_2(x_2+k)-y_2(x_2)}{k}\right) dx_1\, dx_2 .$$

TEOREMA 2. *Se $f(P_1, P_2; y_1', y_2')$, $P_1 \in A_1$, $P_2 \in A_2$, $\forall\, y_1', y_2'$, è continua e non negativa, per ogni (y_1, y_2) continua, $\{y_1 = y_1(x_1),\ a_0 \leq x_1 \leq b_0\}$, $\{y_2 = y_2(x_2),\ c_0 \leq x_2 \leq d_0\}$, con $y_1'(x_1)$ ed $y_2'(x_2)$ esistenti quasi ovunque e sommabili rispettivamente in $[a_0, b_0]$, $[c_0, d_0]$, risulta:*

$$(37) \qquad I(y_1, y_2) \leq \lim_{(h,k)\to 0}{}^{*} \int\limits_{R_{h,k}} f\Bigg(x_1, y_1(x_1), x_2, y_2(x_2);$$

$$\frac{y_1(x_1+h)-y_1(x_1)}{h}, \frac{y_2(x_2+k)-y_2(x_2)}{k}\Bigg) dx_1\, dx_2 \leq I_{\overline{W}}(y_1, y_2),$$

ove $\lim^*$ *indica una qualsivoglia operazione di limite ed* $R_{h,k} = \{a_0 \leq x_1 \leq b_0 - h,\ c_0 \leq x_2 \leq d_0 - k\}$.

Detta G la funzione associata alla f definita dalla (4) ed Φ_G la funzione di rettangolo definita dalla (5), in virtù del Lemma 2, quando in esso si cambi Φ con Φ_G, si ha

$$\max_{(h,k)\to 0} \lim \int\limits_{R_{h,k}} f\left(x_1, y_1(x_1), x_2, y_2(x_2); \frac{y_1(x_1+h)-y_1(x_1)}{h}, \frac{y_2(x_2+k)-y_2(x_2)}{k}\right) dx_1\, dx_2 \leq$$

$$\leq (\mathcal{G}) \overline{\int\limits_{R_0}} \Phi_G \equiv I_{\overline{W}}(y_1, y_2)$$

con $R_0 = \{a_0 \leq x_1 \leq b_0,\ c_0 \leq x_2 \leq d_0\}$.

Fissati ora $\bar{h}, \bar{k}$, $0 < \bar{h} < b_0 - a_0$, $0 < \bar{k} < d_0 - c_0$, potendo supporre $0 < h < \bar{h}$, $0 < k < \bar{k}$, e adoperando, essendo f non negativa, il noto lemma di Fatou, risulta:

$$I_{\overline{W}}(y_1, y_2) \geq$$

$$\geq \max_{(h,k)\to 0} \lim \int_{R_{h,k}} f\left(x_1, y_1(x_1), x_2, y_2(x_2);\ \frac{y_1(x_1+h)-y_1(x_1)}{h},\ \frac{y_2(x_2+k)-y_2(x_2)}{k}\right) dx_1 dx_2 \geq$$

$$\geq \min_{(h,k)\to 0} \lim \int_{R_{h,k}} f\left(x_1, y_1(x_1), x_2, y_2(x_2);\ \frac{y_1(x_1+h)-y_1(x_1)}{h},\ \frac{y_2(x_2+k)-y_2(x_2)}{k}\right) dx_1 dx_2 \geq$$

$$\geq \min_{(h,k)\to 0} \lim \int_{R_{\bar h, \bar k}} f\left(x_1, y_1(x_1), x_2, y_2(x_2);\ \frac{y_1(x_1+h)-y_1(x_1)}{h},\ \frac{y_2(x_2+k)-y_2(x_2)}{k}\right) dx_1 dx_2 \geq$$

$$\geq \int_{R_{\bar h, \bar k}} f(x_1, y_1(x_1), x_2, y_2(x_2);\ y_1'(x_1), y_2'(x_2))\, dx_1\, dx_2 ,$$

e da questa che è vera qualunque siano $\bar h, \bar k : 0 < \bar h < b_0 - a_0$, $0 < \bar k < d_0 - c_0$, segue la (37).

Osservazione. Con le stesse ipotesi sulla f e sulla (y_1, y_2) sussistono come immediata conseguenza del teorema le seguenti proposizioni:

α) *Se* $I_{\overline{W}}(y_1, y_2) = I(y_1, y_2)$, *risulta*:

$$I_{\overline{W}}(y_1, y_2) = I(y_1, y_2) =$$

$$= \lim_{(h,k)\to 0} \int_{R_{h,k}} f\left(x_1, y_1(x_1), x_2, y_2(x_2);\ \frac{y_1(x_1+h)-y_1(x_1)}{h},\ \frac{y_2(x_2+k)-y_2(x_2)}{k}\right) dx_1\, dx_2 .$$

β) *Se* $I_W(y_1, y_2)$ *esiste* (*finito o no*) *e risulta* $I_W(y_1, y_2) = I(y_1, y_2)$, *si ha*:

$$I_W(y_1, y_2) = I(y_1, y_2) =$$

$$= \lim_{(h,k)\to 0} \int_{R_{h,k}} f\left(x_1, y_1(x_1), x_2, y_2(x_2);\ \frac{y_1(x_1+h)-y_1(x_1)}{h},\ \frac{y_2(x_2+k)-y_2(x_2)}{k}\right) dx_1\, dx_2 .$$

BIBLIOGRAFIA

[1] E. BAIADA-G. TRIPICIANO, *Un integrale analogo a quello di Weierstrass nel Calcolo delle Variazioni in una variabile*. Rend. Circolo Mat. Palermo, vol. VI, 1957, pp. 263-270.

[2] J. C. BURKILL, *Functions of intervals*. Proc. London Math. Soc. vol. 22, 1923, pp. 275-310.

[3] S. FAEDO, *Un nuovo tipo di funzionali continui*. Rend. di Mat. e delle sue appli. vol. 4, 1943, pp. 223-249.

[4] S. FAEDO, *Condizioni necessarie per la semicontinuità di un nuovo tipo di funzionali*. Annali di Mat. Pura e Appli. vol. XXIII, 1944, pp. 69-121.

[5] S. FAEDO, *Sulle condizioni di Legendre e Weierstrass per gli integrali di Fubini-Tonelli*. Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, vol. XV, 1950, pp. 127-135.

[6] S. FAEDO, *Il Calcolo delle Variazioni per gli integrali di Fubini-Tonelli*. Atti del Convegno Lagrangiano, Accad. Scienze Torino 1964, pp. 61-82.

[7] S. FAEDO, *Semicontinuità e quasi-regolarità per gli integrali di Fubini-Tonelli*. Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, vol. XVIII, 1964, pp. 361-383.

[8] G. H. HARDY-J. E. LITTLEWOOD-G. POLYA, *Inequalities*. Cambridge University Press 1952.

[9] L. LOMBARDI, *Sulla semicontinuità degli integrali di Fubini-Tonelii*. Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, vol. XII, 1958, pp. 129-153.

[10] L. LOMBARDI, *Sull'esistenza del minimo per gli integrali di Fubini-Tonelli*. Ist. Lombardo, Acc. Scienze e Lett. (A), vol. 92, 1958, pp. 446-458.

[11] E. J. MCSHANE, *Existence theorems for ordinary problems of the Calculus of Variations*. Annali Scuola Norm. Sup, Pisa, vol. III, 1934, pp. 183-211.

[12] E. MAGENES, *Intorno agli integrali di Fubini-Tonelli: I - Condizioni sufficienti per la semicontinuità*. Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, vol. II, 1948, pp. 1-38.

[13] E. MAGENES, *Intorno agli integrali di Fubini-Tonelli: II - Teoremi di esistenza dell'estremo*. Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, vol. III, 1949, pp. 95-131.

[14] E. MAGENES, *Sul minimo relativo degli integrali di Fubini-Tonelli*. Giornale di Mat. di Battaglini, vol. LXXIX, 1949-50, pp. 144-168.

[15] E. MAGENES, *Un'osservazione sulle condizioni necessarie per la semicontinuità degli integrali di Fubini-Tonelli*. Rend. Sem. Mat. Padova, vol. XIX, 1950, pp. 44-53.

[16] E. MAGENES, *Sulle equazioni di Eulero relative ai problemi di Calcolo delle Variazioni degli integrali di Fubini-Tonelli*. Rend. Sem. Mat. Padova, vol. XIX, 1950, pp. 62-102.

[17] E. MAGENES, *Sul minimo semi-forte degli integrali di Fubini-Tonelli*. Rend. Sem. Mat. Padova, vol. XX, 1951, pp. 401-424.

[18] C. VINTI, *L'integrale di Weierstrass*. Ist. Lombardo Accad. Scienze e Lett. (A) vol. 92, 1958, pp. 423-434.

[19] C. VINTI, *L'integrale di Weierstrass e l'integrale del Calcolo delle Variazioni in forma ordinaria*. Atti Accad. Scienze Lett. Arti Palermo, vol. XIX, 1958-59, pp. 51-82.

[20] C. VINTI, *L'integrale di Weierstrass e l'integrale del Calcolo delle Variazioni in forma parametrica*. Ist. Lombardo Accad. Scienze e Lett. (A), vol. 97, 1963, pp. 101-114.

[21] C. VINTI, *L'integrale di Fubini-Tonelli nel senso di Weierstrass. I - Caso parametrico*. Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, vol. XXII, 1968, pp. 229-263.