ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

CALOGERO VINTI

L'integrale di Fubini-Tonelli nel senso di Weierstrass. I. Caso parametrico

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 22, nº 2 (1968), p. 229-263

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1968_3_22_2_229_0>

L' INTEGRALE DI FUBINI-TONELLI NEL SENSO DI WEIERSTRASS

I. CASO PARAMETRICO

di CALOGERO VINTI (*)

Introduzione.

È noto che lo studio sistematico del funzionale

$$I(y_1, y_2) = \int_a^b \int_c^d f[x_1, y_1(x_1), x_2, y_2(x_2); y_1'(x_1), y_2'(x_2)]\, dx_1\, dx_2,$$

con il metodo diretto del Tonelli, è stato iniziato da S. Faedo ([4], [5], [6]), successivamente proseguito da E. Magenes ([14], ... , [19]), che ne ha tracciato le linee fondamentali del Calcolo delle Variazioni, e più recentemente da L. Lombardi ([11], [12]).

Una esposizione dello sviluppo della teoria si trova in una relazione tenuta da S. Faedo [7] in occasione di un simposio lagrangiano e in quell'occasione sono stati enunciati nuovi risultati e le dimostrazioni di alcuni di essi sono apparse in [8]. Il Faedo [8], seguendo un'idea di McShane (1), definisce l'integrale $I_W(y_1, y_2)$ di Fubini-Tonelli nel senso di Weierstrass e dà, nella classe delle curve continue e tali che $I_W(y_1, y_2)$ esista finito, delle condizioni necessarie per la semicontinuità inferiore di $I_W(y_1, y_2)$ che sono anche sufficienti quando f è continua in (x_1, y_1, x_2, y_2) uniformemente rispetto a y_1', y_2'.

Questi recenti lavori di Faedo e la circostanza che la stessa idea di McShane era stata da me ([28]) sfruttata per introdurre l'integrale del

---

Pervenuto alla Redazione il 10 Ottobre 1967.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematici del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(1) L'idea di McShane [13], ripresa da una di H. Lewy [10,] consiste nell'associare all'integrale del C.d.V. in forma ordinaria in una variabile un conveniente integrale in forma parametrica.

Calcolo delle Variazioni in una variabile nel senso di Weierstrass, mi hanno spinto a contribuire al proposito di S. Faedo di costruire la teoria degli integrali di Fubini-Tonelli nel senso di Weierstrass, il cui interesse è notevole perchè il sostituire l'algoritmo di Lebesgue con quello di Weierstrass permetterà di sviluppare la teoria in una classe di curve più ampia di quelle assolutamente continue.

A questo scopo, volendo seguire l'idea di McShane, la teoria va iniziata dal caso parametrico, per poi ricondurre a questo il caso ordinario.

Studierò in questo lavoro l'integrale

$$I(\mathcal{C}) = \int_{a_0}^{b_0} \int_{c_0}^{d_0} F[x_1(u), y_1(u), x_2(v), y_2(v); x_1'(u), y_1'(u), x_2'(v), y_2'(v)]\, du\, dv,$$

con $\mathcal{C} \equiv (\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$, $\mathcal{C}_1 \equiv \{x_1 = x_1(u), y_1 = y_1(u), a_0 \leq u \leq b_0\}$, $\mathcal{C}_2 \equiv \{x_2 = x_2(v), y_2 = y_2(v), c_0 \leq v \leq d_0\}$, inteso nel senso di Weierstrass e che denoterò $I_W(\mathcal{C})$.

I principali risultati sono espressi dai Teoremi 5, 6, 7.

Quando F è continua globalmente nel suo campo di definizione e positivamente omogenea di grado 1 separatamente rispetto alle coppie (x_1', y_1'), (x_2', y_2'), l'integrale $I_W(\mathcal{C})$ esiste finito (²) (Teorema 5) se $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ sono continue e rettificabili e si ha (Teorema 6):

$$(1) \qquad I_W(\mathcal{C}) = \int_0^{L_{\mathcal{C}_1}} \int_0^{L_{\mathcal{C}_2}} F[x_1^0(s), y_1^0(s), x_2^0(\tau), y_2^0(\tau); x_1^{0\prime}(s), y_1^{0\prime}(s), x_2^{0\prime}(\tau), y_2^{0\prime}(\tau)]\, ds\, d\tau,$$

avendo denotato con $\{x_1 = x_1^0(s), y_1 = y_1^0(s), 0 \leq s \leq L_{\mathcal{C}_1}\}$ e con $\{x_2 = x_2^0(\tau), y_2 = y_2^0(\tau), 0 \leq \tau \leq L_{\mathcal{C}_2}\}$ le parametrizzazioni rispettive di $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ facendo uso della loro lunghezza d'arco come parametro; inoltre risulta (Teorema 7):

$$(2) \qquad I_W(\mathcal{C}) = \lim_{(h,k)\to 0^+} \int_{a_0}^{b_0-h} \int_{c_0}^{d_0-k} F\Big[x_1(u), y_1(u), x_2(v), y_2(v);$$

$$\frac{x_1(u+h)-x_1(u)}{h}, \frac{y_1(u+h)-y_1(u)}{h}, \frac{x_2(v+k)-x_2(v)}{k}, \frac{y_2(v+k)-y_2(v)}{k}\Big]\, du\, dv,$$

(²) La dimostrazione del Teorema 5 è ricondotta, seguendo un ragionamento del Tonelli ([26], N. 5), a quella dell'esistenza finito di $I_W(\mathcal{C})$ quando F oltre a soddisfare le ipotesi dette sia anche convessa separatamente rispetto alle coppie (x_1', y_1'), (x_2', y_2') (Teorema 4).

Si osservi che la (1) è una proposizione di rappresentazione e non dà un algoritmo agevole per il calcolo di $I_W(\mathcal{C})$ perchè interviene la particolare parametrizzazione della $\mathcal{C}$, così come avviene per il calcolo della lunghezza di una curva con l'integrale classico quando come parametro si prende la lunghezza d'arco e per il calcolo dell'area di una superficie con i teoremi di rappresentazione di C. B. Morrey [20] e di L. Cesari [3].

Questo inconveniente viene ovviato dalla (2) che rappresenta una proposizione di approssimazione, analoga a quella di E. Baiada (3) per l'integrale del Calcolo delle Variazioni in una variabile, nella quale non interviene la particolare parametrizzazione della $\mathcal{C}$ e non si fa uso dell'integrale di Lebesgue.

Per stabilire le proposizioni dette s'è presentata una alternativa nella scelta tra le due note definizioni d'integrale di Weierstrass, date da J. C. Burkill [2], per una funzione di rettangolo $\Phi(R)$, $R \subset R_0$: quella ottenuta operando con suddivisioni di R_0 in classi $\{R_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, ciascuna data da un prodotto cartesiano di suddivisioni di due lati consecutivi di R_0, definizione che chiameremo in senso «esteso»; quella ottenuta operando con decomposizioni di R_0 in classi $\{R_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, con gli R_i disposti come R_0 ma senza il vincolo della precedente, definizione che chiameremo in senso «stretto».

Entrambe le due definizioni si sono mostrate non adatte per ottenere la (1) e la (2) con un procedimento diretto, cioè come conseguenza di un teorema di esistenza e di uno di approssimazione per l'integrale di Weierstrass di una funzione di rettangolo. La prima perchè l'integrale non gode di quel minimo di proprietà indispensabili per lavorare con un algoritmo d'integrazione (ad es. l'esistenza dell'integrale su R_0 non porta di conseguenza l'esistenza su ogni $R \subset R_0$), la seconda perchè nei teoremi di esistenza interviene la subadditività della funzione integranda rispetto allo stesso tipo di decomposizioni che intervengono nella definizione di integrale e di questa proprietà non gode la funzione di rettangolo definita dalla F tramite la $\mathcal{C}$.

Ho proposto allora, per le funzioni di rettangolo, una definizione d'integrale di Weierstrass che è «intermedia» tra quella in senso esteso e quella in senso stretto, nel senso che l'integrabilità secondo questa definizione implica quella in senso esteso e l'integrabilità in senso stretto implica quella in senso «intermedio».

Questa definizione permette di raggiungere la (1) e la (2).

---

(3) La proposizione di E. Baiada [1], che ha dato inizio a un insieme di ricerche nel Gruppo N. 18, è stata successivamente ampliata (C. Vinti [27]) con un procedimento diretto, e questo procedimento è di guida per ottenere la (2).

Nel § 1 dopo aver definito l'integrale di Weierstrass in senso « intermedio » stabilisco per esso alcune proprietà e poi un teorema di esistenza (Teorema 1) e uno di approssimazione (Teorema 2); da questi risultati dedurrò nel § 2 i Teoremi 4, 5, 6, 7.

§ 1

L'INTEGRALE DI WEIERSTRASS IN SENSO « INTERMEDIO » (($\mathcal{I}$) - WEIERSTRASS) DI UNA FUNZIONE DI RETTANGOLO

1. Definizioni.

Per rettangolo intendiamo un intervallo chiuso dello spazio euclideo 2-dimensionale (x, y), cioè un insieme del tipo $\{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$.

Chiamiamo « *classe elementare* » un insieme finito di rettangoli che costituisce una suddivisione di un rettangolo $R = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, ottenuta come prodotto di due suddivisioni rispettivamente degli intervalli 1-dimensionale $\{a \leq x \leq b, y = 0\}$, $\{x = 0, c \leq y \leq d\}$. Il rettangolo R lo chiameremo il « *generatore* » della classe elementare.

In particolare un rettangolo R è il generatore della classe elementare costituita soltanto da R.

Con il simbolo $D(R)$ denotiamo una suddivisione del rettangolo R in un numero finito di rettangoli, che possa realizzarsi a partire da una classe elementare avente per generatore R, sostituendo poi ciascun rettangolo di questa classe con una classe elementare da esso generata e così proseguendo, cioè sostituendo ciascun rettangolo delle classi elementari del passo precedente con una classe elementare da esso generata fino ad ottenere, dopo un numero finito di passi del tipo detto, tutti i rettangoli di $D(R)$.

Se $R_1, R_2, \ldots, R_m$ sono i rettangoli che costituiscono una suddivisione $D(R)$, scriveremo $D(R) = \{R_1, R_2, \ldots, R_m\}$.

Ovviamente una classe elementare avente per generatore R è una particolare suddivisione $D(R)$.

Con $|R|$, $\|R\|$, $\|D(R)\|$ denotiamo rispettivamente l'area del rettangolo R, il diametro di R, il massimo diametro dei rettangoli di $D(R)$.

Le funzioni di rettangolo che prenderemo in esame in tutto il lavoro saranno definite, a valori reali, in un rettangolo e verranno indicate con uno dei simboli Φ, Ψ, Λ.

Per una $\Phi(R)$, $R \subset R_0$, porremo

$$\Phi[D(R)] = \sum_{i=1}^{m} \Phi(R_i), \quad |\Phi|[D(R)] = \sum_{i=1}^{m} |\Phi(R_i)|,$$

ove $D(R) = \{R_1, R_2, \ldots, R_m\}$.

Data una $\Phi(R)$, $R \subset R_0$, chiameremo *integrale inferiore* $(\mathcal{I})$-*Weierstrass* e *integrale superiore* $(\mathcal{I})$-*Weierstrass* della Φ su R_0, rispettivamente i numeri (finiti o no)

$$(\mathcal{I})\underline{\int_{R_0}} \Phi \equiv \min_{\|D(R_0)\| \to 0} \lim \Phi[D(R_0)], \qquad (\mathcal{I})\overline{\int_{R_0}} \Phi \equiv \max_{\|D(R_0)\| \to 0} \lim \Phi[D(R_0)]$$

Se $(\mathcal{I})\underline{\int_{R_0}} \Phi = (\mathcal{I})\overline{\int_{R_0}} \Phi$, il valore comune lo denoteremo $(\mathcal{I})\int_{R_0} \Phi$ e lo chiameremo *integrale* $(\mathcal{I})$-*Weierstrass* della Φ su R_0.

Quando $(\mathcal{I})\int_{R_0} \Phi$ esiste ed è finito la Φ la diremo $(\mathcal{I})$ *Weierstrass integrabile* su R_0.

Si ha ovviamente:

$$(\mathcal{S})\underline{\int_{R_0}} \Phi \le (\mathcal{I})\underline{\int_{R_0}} \Phi \le (\mathcal{E})\underline{\int_{R_0}} \Phi \le (\mathcal{E})\overline{\int_{R_0}} \Phi \le (\mathcal{I})\overline{\int_{R_0}} \Phi \le (\mathcal{S})\overline{\int_{R_0}} \Phi,$$

ove le lettere $\mathcal{E}$ ed $\mathcal{S}$ sono poste per indicare gli integrali (inferiori e superiori) di Weierstrass in senso «esteso» e in senso «stretto», e queste disuguaglianze giustificano il senso «intermedio» dato alle precedenti definizioni con l'uso della lettera $\mathcal{I}$.

2. Proprietà dell'integrale $(\mathcal{I})$-Weierstrass.

PROPRIETÀ 1ª. *Se $\Phi(R)$, $R \subset R_0$, è $(\mathcal{I})$-Weierstrass integrabile su R_0, risulta anche $(\mathcal{I})$-Weierstrass integrabile su ogni $R \subset R_0$.*

Dall'esistenza finito dell'integrale $(\mathcal{I})$-Weierstrass della Φ su R_0 segue che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ tale che

$$\left| (\mathcal{I})\int_{R_0} \Phi - \Phi[D(R_0)] \right| < \varepsilon, \tag{3}$$

qualunque sia $D(R_0)$ con $\|D(R_0)\| < \delta$.

Fissato $R \subset R_0$ siano $R_1, R_2, \ldots, R_m$ m rettangoli tali che esista una suddivisione $D^*(R_0) = \{R, R_1, R_2, \ldots, R_m\}$, e per ogni i, $i = 1, 2, \ldots, m$, denotiamo con $D(R_i)$ una suddivisione di R_i con

$$\| D(R_i) \| < \delta, \qquad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{4}$$

Osserviamo ora che dalla integrabilità $(\mathcal{G})$-Weierstrass della Φ su R_0 segue che gli integrali inferiore e superiore $(\mathcal{G})$-Weierstrass della Φ su R sono finiti; esistono quindi due suddivisioni $\overline{D}(R)$, $\underline{D}(R)$ con le proprietà

$$\| \overline{D}(R) \| < \delta, \qquad \| \underline{D}(R) \| < \delta, \tag{4'}$$

$$(\mathcal{G}) \overline{\int_R} \Phi - \varepsilon < \Phi[\overline{D}(R)], \qquad \Phi[\underline{D}(R)] < \underline{\int_R} \Phi + \varepsilon. \tag{5}$$

Ma i rettangoli delle suddivisioni $\overline{D}(R)$, $D(R_1), \ldots, D(R_m)$ e quelli delle suddivisioni $\underline{D}(R)$, $D(R_1), \ldots, D(R_m)$ costituiscono rispettivamente due suddivisioni $D'(R_0)$, $D''(R_0)$ le quali per le (4), (4') sono tali che

$$\| D'(R_0) \| < \delta, \qquad \| D''(R_0) \| < \delta,$$

e di conseguenza, per la (3), risultano soddisfatte le disuguaglianze:

$$\left| (\mathcal{G}) \int_{R_0} \Phi - \Phi[\overline{D}(R)] - \Phi[D(R_1)] - \Phi[D(R_2)] - \ldots - \Phi[D(R_m)] \right| < \varepsilon,$$

$$\left| (\mathcal{G}) \int_{R_0} \Phi - \Phi[\underline{D}(R)] - \Phi[D(R_1)] - \Phi[D(R_2)] - \ldots - \Phi[D(R_m)] \right| < \varepsilon.$$

Da queste due disuguaglianze, tenendo conto delle (5), segue immediatamente che la Φ è $(\mathcal{G})$-Weierstrass integrabile su R.

PROPRIETÀ 2ª. *Se $\Phi(R)$, $R \subset R_0$, è $(\mathcal{G})$-Weierstrass integrabile su R_0, l'integrale indefinito $(\mathcal{G}) \int_R \Phi$, $(\mathcal{G})$-Weierstrass della Φ su R_0, è additivo rispetto alle suddivisioni $D(R)$.*

Sia $D(R) = \{R_1, R_2, \ldots, R_m\}$, con $R \subset R_0$, e per ogni i, $i = 1, 2, \ldots, m$, denotiamo con $\{D_n(R_i)\}_n$ una successione di suddivisioni di R_i con la proprietà

$$\| D_n(R_i) \| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

Poichè per ogni n la totalità dei rettangoli che sono contenuti in $D_n(R_1)$,

$D_n(R_2), \dots, D_n(R_m)$ rappresenta una suddivisione $D_n(R)$, con

$$\| D_n(R) \| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$$

ed è

$$\Phi[D_n(R)] = \sum_{i=1}^{m} \Phi[D_n(R_i)],$$

da questa per $n \to \infty$, tenendo presente che per la Proprietà 1ª esistono finiti gli integrali $(\mathcal{I})$-Weierstrass della Φ su $R, R_1, R_2, \dots, R_m$, segue:

$$(\mathcal{I}) \int_R \Phi = \sum_{i=1}^{m} (\mathcal{I}) \int_{R_i} \Phi.$$

PROPRIETÀ 3ª. *Se $\Phi(R)$, $R \subset R_0$, è $(\mathcal{I})$-Weierstrass integrabile su R_0, $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \sigma(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni $D(R)$, $R \subset R_0$, $\|D(R)\| < \sigma$, risulta:*

$$\left| \Phi[D(R)] - (\mathcal{I}) \int_R \Phi \right| < \varepsilon.$$

Dalla integrabilità $(\mathcal{I})$-Weierstrass della Φ su R_0 segue che fissato $\varepsilon > 0$ è determinato un $\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) > 0$ tale che

$$\left| (\mathcal{I}) \int_{R_0} \Phi - \Phi[D(R_0)] \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{6}$$

qualunque sia $D(R_0)$, con $\| D(R_0) \| < \delta$.

Considerata una suddivisione $D(R) = \{R_1, R_2, \dots, R_m\}$, $R \subset R_0$, $\|D(R)\| < \delta$, è possibile scegliere k rettangoli $R_{m+1}, R_{m+2}, R_{m+3}, \dots, R_{m+k}$ in modo che esista una suddivione $D(R_0) = \{R_1, \dots, R_m, R_{m+1}, \dots, R_{m+k}\}$, con $\| D(R_0) \| < \delta$, e per ogni j, $j = 1, 2, \dots, k$, sia $\{D_n(R_{m+j})\}_n$ una successione di suddivisioni di R_{m+j} con la proprietà

$$\| D_n(R_{m+j}) \| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0, \qquad \forall\, j = 1, 2, \dots, k.$$

Poichè per ogni n l'insieme dei rettangoli contenuti in $D(R)$, $D_n(R_{m+1})$, $D_n(R_{m+2}), \dots, D_n(R_{m+k})$ costituisce una suddivisione $D_n(R_0)$, con $\| D_n(R_0) \| < \delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, dalla (6) segue:

$$\left| (\mathcal{I}) \int_{R_0} \Phi - \Phi[D(R)] - \sum_{j=1}^{k} \Phi[D_n(R_{m+j})] \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall\, n = 1, 2, \dots. \tag{7}$$

Ma per le Proprietà 1ª e 2ª è

$$\Phi\,[D_n\,(R_{m+j})] \xrightarrow[n\to\infty]{} (\mathcal{J}) \int_{R_{m+j}} \Phi, \qquad \forall\, j = 1, 2, \ldots, k,$$

$$(\mathcal{J}) \int_{R_0} \Phi = (\mathcal{J}) \int_{R} \Phi + \sum_{j=1}^{k} (\mathcal{J}) \int_{R_{m+j}} \Phi,$$

e quindi dalla (7) segue l'asserto con $\sigma\,(\varepsilon) \equiv \delta\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$.

PROPRIETÀ 4ª. *Se $\Phi\,(R)$, $R \subset R_0$, è continua ed $(\mathcal{J})$-Weierstrass integrabile su R_0, l'integrale indefinito $(\mathcal{J}) \int_R \Phi$ è continuo su R_0.*

Per la Proprietà 3ª in corrispondenza ad $\varepsilon > 0$ $\exists\, \sigma\,(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni $D\,(R)$, $R \subset R_0$, $\|\, D\,(R) \,\| < \sigma\,(\varepsilon)$, si abbia

$$\left|\, \Phi\,[D\,(R)] - (\mathcal{J}) \int_R \Phi \,\right| < \varepsilon. \tag{8}$$

Detto k un intero tale che $\|\, R_0 \,\| < \sigma\,(\varepsilon) \cdot k$, per la continuità di $\Phi\,(R)$ esiste un $\tau\,(\varepsilon) > 0$ per cui è

$$|\, \Phi\,(R) \,| < \varepsilon / k^2, \qquad \forall\, R \subset R_0,\ |\, R \,| < \tau\,(\varepsilon), \tag{9}$$

e mostriamo che risulta:

$$\left|\, (\mathcal{J}) \int_R \Phi \,\right| < 2\varepsilon, \qquad \forall\, R \subset R_0,\ |\, R \,| < \tau\,(\varepsilon). \tag{9'}$$

Fissato infatti un rettangolo $R \subset R_0$, $|\, R \,| < \tau\,(\varepsilon)$, sia $D_k\,(R)$ le classe elementare costituita da k^2 rettangoli e ottenuta come prodotto cartesiano di due suddivisioni, in k parti uguali, rispettivamente di due lati consecutivi di R. È ovviamente $\|\, D_k\,(R) \,\| = \dfrac{\|\, R_0 \,\|}{k} < \sigma\,(\varepsilon)$ e quindi per la (8) risulta:

$$\left|\, \Phi\,[D_k\,(R)] - (\mathcal{J}) \int_R \Phi \,\right| < \varepsilon. \tag{8'}$$

Ma se R_i è un rettangolo della suddivisione $D_k\,(R)$, essendo $|\, R_i \,| \leq |\, R \,| < \tau$, per la (9) si ha

$$|\, \Phi\,(R_i) \,| < \varepsilon / k^2,$$

e di conseguenza:

$$\Phi\,[D_k(R)] < \varepsilon.$$

Quest'ultima assieme alla (8′) mostra la (9′) e quindi l'asserto.

3. Sull'esistenza dell'integrale $(\mathcal{J})$-Weierstrass.

Per l'esistenza dell'integrale $(\mathcal{J})$-Weierstrass premettiamo un lemma e una definizione.

LEMMA 1. *Se* $\Phi(R)$, $R \subset R_0 = \{a_0 \leq x \leq b_0,\, c_0 \leq y \leq d_0\}$, *è tale che* $(\mathcal{J})\overline{\int_{R_0}} |\Phi| < +\infty$, *esiste al più una infinità numerabile di segmenti verticali* [*orizzontali*] $\{x = x_i,\, c_0 \leq y \leq d_0 : a_0 < x_i < b_0\}_i$ $[\{a_0 \leq x \leq b_0,\, y = y_i : c_0 < y_i < d_0\}_i]$ *per ciascuno dei quali non è vera la seguente proprietà*:

$\mathcal{P}$) $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta(\varepsilon, x_i) > 0$ $[\delta(\varepsilon, y_i) > 0]$ *tale che per ogni rettangolo*

$$R' = \{a' \leq x \leq b',\, c_0 \leq y \leq d_0 : a_0 \leq a' \leq x_i \leq b' \leq b_0\}$$

$$[R' = \{a_0 \leq x \leq b_0,\, c' \leq y \leq d' : c_0 \leq c' \leq y_i \leq d' \leq d_0\}],$$

con $b' - a' < \delta(\varepsilon, x_i)$ $[d' - c' < \delta(\varepsilon, y_i)]$, *risulti*:

$$(\mathcal{J})\overline{\int_{R'}} |\Phi| < \varepsilon.$$

Limitandoci a dimostrare il lemma per i segmenti verticali (analoga è la dimostrazione per quelli orizzontali) basta far vedere che, detta $\{\varepsilon_n\}_n$ una successione di numeri positivi decrescenti e convergente a zero, per ogni ε_n i segmenti verticali per i quali non è vera la proprietà $\mathcal{P}$) per $\varepsilon = \varepsilon_n$ sono un numero finito. Supposto allora che tali segmenti non siano in numero finito consideriamone k di essi, con $k > \varepsilon_n^{-1} \cdot (\mathcal{J})\overline{\int_{R_0}} |\Phi|$, e siano

$$\{x = x_i^{(n)},\, c_0 \leq y \leq d_0 : a_0 < x_i^{(n)} < b_0\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, k, \tag{10}$$

con $a_0 = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \ldots x_k^{(n)} < x_{k+1}^{(n)} = b_0$.

Preso un $\delta > 0$, con $\delta < \min\left\{\frac{1}{2}(x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}),\, i = 0, 1, 2, \ldots, k\right\}$, esisterà per ogni segmento (10) un rettangolo $R_i = \{a_i \leq x \leq b_i, c_0 \leq y \leq d_0 : a_i \leq \leq x_i^{(n)} \leq b_i\}$, con $b_i - a_i < \delta$, tale che

$$(11) \qquad (\mathcal{G}) \overline{\int_{R_i}} |\Phi| \geq \varepsilon_n.$$

Poichè i rettangoli R_i, $i = 1, 2, \dots, k$, sono a due a due senza punti a comune, considerata la classe elementare $D(R_0)$, ottenuta come prodotto cartesiano delle due suddivisioni $a_0 < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots a_k < b_k < b_0$, $c_0 < d_0$, classe elementare contenente i rettangoli R_i, essendo manifestamente

$$(\mathcal{G}) \overline{\int_{R_0}} |\Phi| \geq \sum_{i=1}^{k} (\mathcal{J}) \overline{\int_{R_i}} |\Phi|,$$

risulta, in virtù della (11):

$$(\mathcal{G}) \overline{\int_{R_0}} |\Phi| \geq k \cdot \varepsilon_n > \varepsilon_n \cdot \varepsilon_n^{-1} (\mathcal{J}) \overline{\int_{R_0}} |\Phi| = (\mathcal{G}) \overline{\int_{R_0}} |\Phi|,$$

che è un assurdo.

DEFINIZIONE. *Una $\Phi(R)$, $R \subset R_0$, la diremo approssimativamente subadditiva* (4) *in R_0 se $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni $R \subset R_0$, con $\| R \| < \delta$, risulti :*

$$(12) \qquad \Phi(R) \leq \Phi[D(R)] + \varepsilon \cdot |R|,$$

qualunque sia $D(R)$.

TEOREMA 1. *Una $\Phi(R)$, $R \subset R_0 = \{a_0 \leq x \leq b_0, c_0 \leq y \leq d_0\}$, continua e approssimativamente subadditiva in R_0, è $(\mathcal{G})$-Weierstrass integrabile su R_0 oppure l'integrale superiore $(\mathcal{J})$-Weierstrass del suo valore assoluto non è finito.*

Basta dimostrare che supposto $(\mathcal{J}) \overline{\int_{R_0}} |\Phi| < +\infty$ la $\Phi(R)$ è $(\mathcal{G})$-Weierstrass integrabile su R_0.

(4) La definizione di approssimata subadditività per le funzioni di intervallo (1-dimensionale) è stata data da L. Tonelli in [26].

Osserviamo intanto che risultano finiti gli integrali inferiore e superiore $(\mathcal{G})$-Weierstrass della $\Phi(R)$ su R_0 perchè è:

$$-\infty < -(\mathcal{G})\overline{\int_{R_0}}|\Phi| \leq (\mathcal{G})\underline{\int_{R_0}}\Phi \leq (\mathcal{G})\overline{\int_{R_0}}\Phi \leq (\mathcal{G})\overline{\int_{R_0}}|\Phi| < +\infty.$$

Fissato un $\varepsilon > 0$ sia $\delta(\varepsilon) > 0$ quel numero determinato dalla approssimata subadditività della Φ per cui è vera la (12), e sia $D(R_0)$, $\| D(R_0) \| < \delta$, una suddivisione di R_0 per la quale si abbia

$$(\mathcal{G})\overline{\int_{R_0}}\Phi - \varepsilon < \Phi[D(R_0)]. \tag{13}$$

Prolunghiamo i lati dei rettangoli della suddivisione $D(R_0) = \{R_1, R_2, \dots, R_m\}$ fino ad incontrare i lati di R_0; si ottiene in tal modo una suddivisione $\overline{D}(R_0)$ che è una classe elementare generata da R_0, ed ogni rettangolo $R_i \in D(R_0)$ o appartiene a $\overline{D}(R_0)$ oppure viene ad essere decomposto in un numero finito di rettangoli R_{i_j}, $R_{i_j} \in \overline{D}(R_0), j = 1, 2, \dots, n(i)$, i quali rettangoli $R_{i_j}, j = 1, 2, \dots, n(i)$, costituiscono una suddivisione $D(R_i)$ di R_i. Essendo $\| R_i \| < \delta$, per la (12) si ha

$$\Phi(R_i) \leq \sum_{j=1}^{n(i)} \Phi(R_{i_j}) + \varepsilon\,|R_i|, \qquad i = 1, 2, \dots, m,$$

e da questa segue:

$$\Phi[D(R_0)] \leq \Phi[\overline{D}(R_0)] + \varepsilon \cdot |R_0|. \tag{14}$$

La (13) assieme alla (14) ci dà:

$$\Phi[\overline{D}(R_0)] > (\mathcal{G})\overline{\int_{R_0}}\Phi - \varepsilon - \varepsilon\,|R_0|. \tag{15}$$

Osserviamo ora che se $\overline{R}_i$ e $\overline{R}_j$, sono due rettangoli di $\overline{D}(R_0)$ aventi in comune un lato verticale [orizzontale],

$$\overline{R}_i = \{a_i \leq x \leq h, c \leq y \leq d\} \qquad [\overline{R}_i = \{a \leq x \leq b, c_i \leq y \leq h\}],$$

$$\overline{R}_j = \{h \leq x \leq b_j, c \leq y \leq d\} \qquad [\overline{R}_j = \{a \leq x \leq b, h \leq y \leq d_j\}],$$

$\forall\ \sigma > 0 \ \exists\ \gamma(\sigma) > 0$ tale che comunque si prendano h_1, h_2, con $a_i < h_1 < < h < h_2 < b_j \ [c_i < h_1 < h < h_2 < d_j]$, $h - h_1 < \gamma$, $h_2 - h < \gamma$, posto

$$\overline{R}'_i = \{a_i \leq x \leq h_1, c \leq y \leq d\} \qquad [\overline{R}'_i = \{a \leq x \leq b, c_i \leq y \leq h_1\}],$$

$$\overline{R}'_j = \{h_2 \leq x \leq b_j, c \leq y \leq d\} \qquad [\overline{R}'_j = \{a \leq x \leq b, h_2 \leq y \leq d_j\}],$$

$$\overline{R}_{i,j} = \{h_1 \leq x \leq h_2, c \leq y \leq d\} \qquad [\overline{R}_{i,j} = \{a \leq x \leq b, h_1 \leq y \leq h_2\}],$$

risulta:

$$\Phi(\overline{R}'_i) + \Phi(\overline{R}'_j) + \Phi(\overline{R}_{i,j}) \geq \Phi(\overline{R}_i) + \Phi(\overline{R}_j) - \sigma - \varepsilon\cdot(|\overline{R}_i| + |\overline{R}_j|). \tag{16}$$

Limitiamoci a dimostrare la (16) nel caso che $\overline{R}_i$ e $\overline{R}_j$ abbiano a comune il lato verticale, analoga è la dimostrazione nell'altro caso.

Comunque si fissino $h_1, h_2, a_i < h_1 < h < h_2 < b_j$, posto

$$\overline{R}^*_i = \{h_1 \leq x \leq h, c \leq y \leq d\}, \qquad \overline{R}^*_j = \{h \leq x \leq h_2, c \leq y \leq d\},$$

vale l'uguaglianza:

$$\begin{aligned}\Phi(\overline{R}'_i) + \Phi(\overline{R}'_j) + \Phi(\overline{R}_{i,j}) = \Phi(\overline{R}'_i) + \Phi(\overline{R}^*_i) + \Phi(\overline{R}'_j) + \\ + \Phi(\overline{R}^*_j) + \Phi(\overline{R}_{i,j}) - \Phi(\overline{R}^*_i) - \Phi(\overline{R}^*_j).\end{aligned} \tag{17}$$

E poichè, per l'approssimata subadditività della Φ, si ha:

$$\Phi(\overline{R}_i) \leq \Phi(\overline{R}'_i) + \Phi(\overline{R}^*_i) + \varepsilon\,|\overline{R}_i|,$$

$$\Phi(\overline{R}_j) \leq \Phi(\overline{R}'_j) + \Phi(\overline{R}^*_j) + \varepsilon\,|\overline{R}_j|,$$

e dalla (17) segue:

$$\begin{aligned}\Phi(\overline{R}'_i) + \Phi(\overline{R}'_j) + \Phi(\overline{R}_{i,j}) \geq \Phi(\overline{R}_i) + \Phi(\overline{R}_j) - \\ - \varepsilon\cdot(|\overline{R}_i| + |\overline{R}_j|) + \Phi(\overline{R}_{i,j}) - \Phi(\overline{R}^*_i) - \Phi(\overline{R}^*_j).\end{aligned} \tag{17'}$$

Ma per la continuità della Φ esiste un $\gamma'\left(\frac{\sigma}{3}\right) > 0$ tale che per $R \subset R_0$, $|R| < \gamma'$, si ha

$$|\Phi(R)| < \frac{\sigma}{3}, \tag{18}$$

e quindi, posto $\gamma(\sigma) = \gamma'/2\,(1 + b_0 - a_0 + d_0 - c_0)$, per $h - h_1 < \gamma$, $h_2 - h < \gamma$, risulta $|\bar{R}_{i,j}| < \gamma'$, $|\bar{R}_i^*| < \gamma'$, $|\bar{R}_j^*| < \gamma'$, e dalla (17′), tenuto conto della (18), segue la (16).

Riprendiamo la $\bar{D}(R_0)$ che è un prodotto di due suddivisioni:

$$a_0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_p < x_{p+1} = b_0\,,$$

$$c_0 = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_q < y_{q+1} = d_0\,.$$

Nel caso che qualcuno dei segmenti $\{x = x_i\,,\, c_0 \leq y \leq d_0\}_i$, $i = 1, 2, \dots, p$, o qualcuno dei segmenti $\{a_0 \leq x \leq b_0\,,\, y = y_j\}_j$, $j = 1, 2, \dots, q$, non godesse della proprietà $\mathcal{P}$) del Lemma 1, sostituiamo ciascuno di questi segmenti con una coppia di segmenti, ad esso simmetrici e equipollenti, per i quali sussista la proprietà $\mathcal{P}$) (ciò è possibile farlo in virtù del Lemma 1), e adoperando un numero finito di volte la (16) quando in essa si prenda $\sigma = \varepsilon/p^2 \cdot q^2$, scegliendo cioè ciascuna coppia di segmenti con distanza minore di $2\gamma(\sigma)$, si ottiene una classe elementare $D'(R_0)$, con $\|D'(R_0)\| < \delta$, tale che:

$$\Phi[D'(R_0)] \geq \Phi[\bar{D}(R_0)] - \varepsilon - 4\varepsilon\,|R_0|.$$

Dalla (15), in virtù di quest'ultima, si ha di conseguenza:

$$(15') \qquad \Phi[D'(R_0)] \geq (\mathcal{G}) \overline{\int_{R_0}} \Phi - 2\varepsilon - 5\varepsilon\,|R_0|.$$

Ma la $D'(R_0)$ è un prodotto di due suddivisioni,

$$a_0 = x'_0 < x'_1 < x'_2 < \dots < x'_{p'} = b_0\,,\; c_0 = y'_0 < y'_1 < y'_2 < \dots < y'_{q'} = d_0\,,$$

e poichè sia i segmenti $\{x = x'_i\,,\, c_0 \leq y \leq d_0\}_i$, $i = 1, 2, \dots, p' - 1$, che i segmenti $\{a_0 \leq x \leq b_0\,,\, y = y'_j\}_j$, $j = 1, 2, \dots, q' - 1$, godono della proprietà $\mathcal{P}$) del Lemma 1, in corrispondenza ad $\varepsilon/2p' \cdot q'$ esiste un $\delta' > 0$, e possiamo supporre $\delta' < \min\{x'_{i+1} - x'_i\,,\, y'_{j+1} - y'_j : i = 0, 1, \dots, p' - 1\,;\, j = 0, 1, \dots, q' - 1\}$, tale che, posto

$$R_{x'_i} = \left\{ x'_i - \frac{\delta'}{2} \leq x \leq x'_i + \frac{\delta'}{2}\,,\, c_0 \leq y \leq d_0 \right\},$$

$$R_{y'_j} = \left\{ a_0 \leq x \leq b_0\,,\, y'_j - \frac{\delta'}{2} \leq y \leq y'_j + \frac{\delta'}{2} \right\},$$

risulti :

$$(\mathcal{I})\overline{\int_{R_{x'_i}}} |\Phi| < \varepsilon/2p'\cdot q', \quad (\mathcal{I})\overline{\int_{R_{y'_j}}} |\Phi| < \varepsilon/2\, p'\cdot q',$$

$$i = 1, 2, \ldots, p' - 1\,; j = 1, 2, \ldots, q' - 1,$$

e da queste, che sono in numero finito, segue, in virtù della definizione di integrale superiore $(\mathcal{I})$-Weierstrass, che esiste un $\delta''(\varepsilon/2\, p'\cdot q') > 0$, e possiamo supporre $\delta'' < \delta'/2$, tale che comunque si scelgano le suddivisioni $D(R_{x'_i})$, $D(R_{y'_j})$, con $\| D(R_{x'_i}) \| < \delta''$, $\| D(R_{y'_j}) \| < \delta''$, si abbia :

$$|\Phi[D(R_{x'_i})]| \leq |\Phi|[D(R_{x'_i})] < \varepsilon/p'\cdot q', \quad i = 1, 2, \ldots, p' - 1, \tag{19}$$

$$|\Phi[D(R_{y'_j})]| \leq |\Phi|[D(R_{y'_j})] < \varepsilon/p'\cdot q', \quad j = 1, 2, \ldots, q' - 1. \tag{19'}$$

Consideriamo allora una arbitraria suddivisione $D''(R_0)$, con $\| D''(R_0) \| < \delta''$, e siano $R''_1, R''_2, \ldots, R''_s$ quei rettangoli di $D''(R_0)$ che hanno punti a comune con i lati di qualche rettangolo di $D'(R_0) = \{R'_1, R'_2, \ldots, R'_r\}$, a prescindere da quei lati che giacciono sulla frontiera di R_0.

Si ha :

$$\left| \sum_{j=1}^{s} \Phi(R''_j) \right| < \varepsilon, \tag{20}$$

ciò perchè se ad es. $R''_{s_1}, R''_{s_2}, \ldots, R''_{s_l}$ sono quei rettangoli di $D''(R_0)$ che hanno punti a comune con il segmento $\{x = x'_i, c_0 \leq y \leq d_0\}$, $i \neq 0, p'$, essendo $\| R''_{s_j} \| < \delta'' < \delta'/2, j = 1, 2, \ldots, l$, risulta $R''_{s_j} \subset R_{x'_i}$ e quindi, poichè i rettangoli $R''_{s_j}, j = 1, 2, \ldots, l$, possono considerarsi facenti parte di una opportuna suddivisione $D(R_{x'_i})$, con $\| D(R_{x'_i}) \| < \delta''$, dalla (19) segue :

$$\left| \sum_{j=1}^{l} \Phi(R''_{s_j}) \right| < \varepsilon/p'\cdot q'.$$

Analogamente si ha :

$$\left| \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \Phi[R'_i \cap R''_j] \right| < \varepsilon, \tag{21}$$

con l'avvertenza di porre $\Phi[R'_i \cap R''_j] = 0$ quando l'intersezione $R'_i \cap R''_j$ è il vuoto o un intervallo 1-dimensionale.

Dalla (15'), ricordando che $\| D'(R_0) \| < \delta$ e tenuto conto della approssimata subadditività della Φ, segue:

$$(\mathcal{G})\overline{\int_{R_0}} \Phi - 2\varepsilon - 5\varepsilon\,|R_0| \leq \Phi[D'(R_0)] \leq \Phi[D''(R_0)] - \sum_{j=1}^{s} \Phi(R_j'') + \\ + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} \Phi[R_i' \cap R_j''] + \varepsilon\,|R_0|,$$

dalla quale, in virtù delle (20), (21), si deduce:

$$\Phi[D''(R_0)] > (\mathcal{G})\overline{\int_{R_0}} \Phi - 4\varepsilon - 6\varepsilon\,|R_0|,$$

e poichè quest'ultima è vera per ogni suddivisione $D''(R_0)$, con $\| D''(R_0) \| < \delta''(\varepsilon)$, la Φ risulta $(\mathcal{G})$-Weierstrass integrabile su R_0.

4. Sull'approssimazione dell'integrale $(\mathcal{G})$-Weierstrass.

Sussiste il seguente

TEOREMA 2. *Se la funzione di rettangolo $\Phi(x', x''; y', y'')$, definita per ogni $R = \{x' \leq x \leq x'', y' \leq y \leq y''\} \subset R_0 = \{a_0 \leq x \leq b_0, c_0 \leq y \leq d_0\}$, soddisfa le condizioni:*

1°) *è continua in R_0;*

2°) *è $(\mathcal{G})$-Weierstrass integrabile su R_0;*

3°) *$\forall\, h, k$: $0 < h < b_0 - a_0$, $0 < k < d_0 - c_0$, la $\Phi(x, x+h; y, y+k)$, $(x, y) \in R_{h,k} = \{a_0 \leq x \leq b_0 - h, c_0 \leq y \leq d_0 - k\}$, è integrabile secondo Riemann su $R_{h,k}$;*

risulta:

$$(\mathcal{G})\int_{R_0} \Phi = \lim_{(h,k)\to 0} \int_{R_{h,k}} \frac{\Phi(x, x+h; y, y+k)}{hk}\, dx\, dy.$$

Dall'esistenza finito dell'integrale $(\mathcal{G})$-Weierstrass della Φ su R_0 e dalla continuità della Φ segue, in virtù della Proprietà 4ª (N. 2), che l'integrale indefinito $(\mathcal{G})\int_R \Phi$ è continuo, e quindi $\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta'(\varepsilon) > 0$ tale che

$$\left|(\mathcal{G})\int_R \Phi\right| < \varepsilon, \qquad \forall\, R \subset R_0 : |R| < \delta'. \tag{22}$$

D'altra parte, per la Proprietà 3ª (N. 2), $\exists\, \delta''(\varepsilon) > 0$, e possiamo supporre $\delta'' < \delta'/(1 + b_0 - a_0 + d_0 - c_0)$, tale che per ogni $D(R)$, $R \subset R_0$, $\| D(R) \| < \delta''$, risulti

$$\left| \Phi [D(R)] - (\mathcal{G}) \int_{R} \Phi \right| < \varepsilon. \tag{23}$$

Inoltre, per l'esistenza dell'integrale $(\mathcal{G})$-Weierstrass della Φ su R_0, esiste un $\delta(\varepsilon) > 0$, e possiamo supporre $\delta < \delta''$, tale che per ogni suddivisione $D(R_0)$, $\| D(R_0) \| < \delta$, si abbia

$$\left| \Phi [D(R_0)] - (\mathcal{G}) \int_{R_0} \Phi \right| < \varepsilon. \tag{24}$$

Fissiamo h, k, $0 < h < \delta/2$, $0 < k < \delta/2$, poniamo

$$I(h, k) = \int_{R_{h,k}} \frac{\Phi(x, x+h; y, y+k)}{hk} dx\, dy,$$

e ricordiamo che, per la definizione d'integrale di Riemann, $\exists\, \sigma_{h,k}(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni classe elementare $D(R_{h,k})$, $\| D(R_{h,k}) \| < \sigma_{h,k}$, una qualunque somma di Riemann della $\Phi(x, x+h; y, y+k)/hk$ relativa a questa suddivisione differisce in modulo da $I(h, k)$ per meno di ε.

Sia m un intero positivo con le condizioni $\dfrac{h}{m} < \dfrac{1}{2} \sigma_{h,k}$, $\dfrac{k}{m} < \dfrac{1}{2} \sigma_{h,k}$, e

$$\mathcal{D}^{(x)} \equiv \{ a_0 = x_{1,1} < x_{1,2} < \dots < x_{1,m} < x_{2,1} < x_{2,2} < \dots < x_{2,m} < \dots < x_{p,1} < \\ < x_{p,2} < \dots < x_{p,q} < x_{p,q+1} = b_0 - h \},$$

$$\mathcal{D}^{(y)} \equiv \{ c_0 = y_{1,1} < y_{1,2} < \dots < y_{1,m} < y_{2,1} < y_{2,2} < \dots < y_{2,m} < \dots < y_{p',1} < \\ < y_{p',2} < \dots < y_{p',q'} < y_{p',q'+1} = d_0 - k \},$$

due suddivisioni rispettivamente di $[a_0, b_0 - h]$, $[c_0, d_0 - k]$ con le proprietà

$$\begin{cases} q \leq m \quad q' \leq m; \\ x_{\alpha,\beta+1} - x_{\alpha,\beta} = x_{\alpha+1,1} - x_{\alpha,m} = x_{p,i+1} - x_{p,i} = h/m, \\ \qquad \alpha = 1, 2, \dots, p-1, \quad \beta = 1, \dots, m-1, \quad i = 1, \dots, q-1; \\ y_{\gamma,\tau+1} - y_{\gamma,\tau} = y_{\gamma+1,1} - y_{\gamma,m} = y_{p',j+1} - y_{p',j} = k/m, \\ \qquad \gamma = 1, 2, \dots, p'-1, \quad \tau = 1, \dots, m-1 \quad j = 1, \dots, q'-1; \\ x_{p,q+1} - x_{p,q} = A \leq h/m, \qquad y_{p',q'+1} - y_{p',p'} = B \leq k/m. \end{cases}$$

Sia poi S la somma di Riemann della $\Phi(x, x+h; y, y+k)/hk$, relativamente alla suddivisione prodotto $\mathcal{D}^{(x)} \times \mathcal{D}^{(y)}$ quando per valore della $\Phi(x, x+ + h; y, y+k)/hk$ in ciascun rettangolo di $\mathcal{D}^{(x)} \times \mathcal{D}^{(y)}$ si prende il valore che tale funzione assume nel vertice sinistro in basso.

È ovviamente:

$$I(h, k) - \varepsilon < S < I(h, k) + \varepsilon. \tag{25}$$

Posto

$$S^{(\beta, \tau)} = \sum_{\gamma=1}^{p'} \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\Phi(x_{\alpha,\beta}, x_{\alpha,\beta}+h;\ y_{\gamma,\tau}, y_{\gamma,\tau}+k)}{hk} C^{(\alpha, \beta)} . E^{(\gamma, \tau)}, \tag{26}$$

con $C^{(\alpha, \beta)}$, $E^{(\gamma, \tau)}$ definite dalle

$$C^{(\alpha, \beta)} = \begin{cases} h/m \text{ per } \alpha=1, \dots, p-1, \beta=1, \dots, m, \text{ e per } \alpha=p, \beta=1, \dots, q-1; \\ A \quad \text{per } \alpha = p, \beta = q; \\ 0 \quad \text{per } \alpha = p, \beta = q+1, \dots, m, \end{cases} \tag{26_1}$$

$$E^{(\gamma, \tau)} = \begin{cases} k/m \text{ per } \gamma=1, \dots, p'-1, \tau=1, \dots, m, \text{ e per } \gamma=p', \tau=1, \dots, q'-1; \\ B \quad \text{per } \gamma = p', \tau = q'; \\ 0 \quad \text{per } \gamma = p', \tau = q'+1, \dots, m, \end{cases} \tag{26_2}$$

risulta:

$$S = \sum_{\tau=1}^{m} \sum_{\beta=1}^{m} S^{(\beta, \tau)}. \tag{27}$$

Confrontiamo ora le somme $S^{(\beta, \tau)}$ con le somme $\Phi[D^{(\beta, \tau)}(R_0)]$, essendo $D^{(\beta, \tau)}(R_0)]$ la classe elementare prodotto delle due suddivisioni

$$a_0 = x_{1,1} \leq x_{1,\beta} < x_{2,\beta} < \dots < x_{r,\beta} < x_{r+1,\beta} < x_{r+2,\beta} = b_0,$$

$$c_0 = y_{1,1} \leq y_{1,\tau} < y_{2,\tau} < \dots < y_{s,\tau} < y_{s+1,\tau} < y_{s+2,\tau} = d_0,$$

ove è

$$r = \begin{cases} p & \text{se } \beta \leq q \\ p-1 & \text{se } \beta > q, \end{cases} \qquad s = \begin{cases} p' & \text{se } \tau \leq q' \\ p'-1 & \text{se } \tau > q', \end{cases}$$

e avendo posto

$$x_{p+1,\beta} = x_{p,\beta} + h \qquad \text{per} \qquad \beta \leq q,$$

$$x_{p,\beta} = x_{p-1,\beta} + h \qquad \text{per} \qquad \beta > q,$$

$$y_{p'+1,\tau} = y_{p',\tau} + k \qquad \text{per} \qquad \tau \leq q',$$

$$y_{p',\tau} = y_{p'-1,\tau} + k \qquad \text{per} \qquad \tau > q'.$$

Si ha:

$$(28) \qquad \Phi[D^{(\beta,\tau)}(R_0)] = \sum_{\alpha=1}^{r+1}\sum_{\gamma=1}^{s+1} \Phi(x_{\alpha,\beta}, x_{\alpha+1,\beta}; y_{\gamma,\tau}, y_{\gamma+1,\tau}) +$$

$$+ \sum_{\gamma=1}^{s+1} \Phi(x_{1,1}, x_{1,\beta}; y_{\gamma,\tau}, y_{\gamma+1,\tau}) + \sum_{\alpha=1}^{r+1} \Phi(x_{\alpha,\beta}, x_{\alpha+1,\beta}; y_{1,1}, y_{1,\tau}) +$$

$$+ \Phi(x_{1,1}, x_{1,\beta}; y_{1,1}, y_{1,\tau}),$$

con l'avvertenza di porre

$\Phi(x_{1,1}, x_{1,\beta}; y_{\gamma,\tau}, y_{\gamma+1,\tau}) = 0$ se $\beta = 1$, $\quad \Phi(x_{\alpha,\beta}, x_{\alpha+1,\beta}; y_{1,1}, y_{1,\tau}) = 0$ se $\tau = 1$,

$\Phi(x_{1,1}, x_{1,\beta}; y_{1,1}, y_{1,\tau}) = 0$ se almeno uno dei due indici β, τ è 1.

Dalle (26), (28) segue allora:

$$(29) \qquad S^{(\beta,\tau)} = \frac{1}{m^2}\Phi[D^{(\beta,\tau)}(R_0)] - \frac{1}{m^2}\left\{\sum_{\gamma=1}^{s+1}[\Phi(x_{1,1}, x_{1,\beta}; y_{\gamma,\tau}, y_{\gamma+1,\tau}) +\right.$$

$$+ \Phi(x_{r+1,\beta}, x_{r+2,\beta}; y_{\gamma,\tau}, y_{\gamma+1,\tau})] + \sum_{\alpha=1}^{r+1}[\Phi(x_{\alpha,\beta}, x_{\alpha+1,\beta}; y_{1,1}, y_{1,\tau}) +$$

$$\left. + \Phi(x_{\alpha,\beta}, x_{\alpha+1,\beta}; y_{s+1,\tau}, y_{s+2,\tau})] + \Phi(x_{1,1}, x_{1,\beta}; y_{1,1}, y_{1,\tau})\right\} -$$

$$- \Delta_q^\beta \cdot \left(\frac{1}{m^2} - \frac{A}{mh}\right) \cdot \sum_{\gamma=1}^{s} \Phi(x_{p,q}, x_{p+1,q}; y_{\gamma,\tau}, y_{\gamma+1,\tau}) -$$

$$- \Delta_{q'}^\tau \cdot \left(\frac{1}{m^2} - \frac{B}{mk}\right) \cdot \sum_{\alpha=1}^{r} \Phi(x_{\alpha,\beta}, x_{\alpha+1,\beta}; y_{p',q'}, y_{p'+1,q'}) +$$

$$+ \Delta_{q,q'}^{\beta,\tau}\left[\left(\frac{1}{m^2}-\frac{A}{mh}\right)\cdot \Phi(x_{p,q}, x_{p+1,q}; y_{p',q'}, y_{p'+1,q'}) + \right.$$

$$+\left(\frac{1}{m^2}-\frac{B}{mk}\right)\cdot \Phi(x_{p,q}, x_{p+1,q}; y_{p',q'}, y_{p'+1,q'}) -$$

$$\left. -\left(\frac{1}{m^2}-\frac{AB}{hk}\right)\cdot \Phi(x_{p,q}, x_{p+1,q}; y_{p',q'}, y_{p'+1,q'})\right],$$

ove è

$$(30) \qquad \Delta_q^\beta = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad \beta = q \\ 0 & \text{per} \quad \beta \neq q \end{cases}, \qquad \Delta_{q'}^\tau = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad \tau = q' \\ 0 & \text{per} \quad \tau \neq q' \end{cases},$$

$$\Delta_{q,q'}^{\beta,\tau} = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad (\beta,\tau) = (q,q') \\ 0 & \text{per} \quad (\beta,\tau) = (q,q'). \end{cases}$$

Osserviamo ora che essendo $0 < h < \delta''/2$, $0 < k < \delta''/2$, i rettangoli

$$\{x_{1,1} \leq x \leq x_{1,\beta}, y_{1,1} \leq y \leq y_{1,\tau}\}, \quad \{x_{1,1} \leq x \leq x_{1,\beta}, y_{\gamma,\tau} \leq y \leq y_{\gamma+1,\tau}\}_\gamma,$$

$$\gamma = 1, \dots, s+1,$$

hanno diametro minore di δ'' e inoltre costituiscono una suddivisione $D(R)$ di un rettangolo R, con $|R| < \delta'$; dalle (22), (23) segue dunque:

$$\left|\sum_{\gamma=1}^{s+1} \Phi(x_{1,1}, x_{1,\beta}; y_{\gamma,\tau}, y_{\gamma+1,\tau}) + \Phi(x_{1,1}, x_{1,\beta}; y_{1,1}, y_{1,\tau})\right| < 2\varepsilon,$$

e analogamente:

$$\left|\sum_{\gamma=1}^{s} \Phi(x_{r+1,\beta}, x_{r+2,\beta}; y_{\gamma,\tau}, y_{\gamma+1,\tau})\right| < 2\varepsilon,$$

$$\left|\sum_{\alpha=1}^{r+1} [\Phi(x_{\alpha,\beta}, x_{\alpha+1,\beta}; y_{1,1}, y_{1,\tau}) + \Phi(x_{\alpha,\beta}, x_{\alpha+1,\beta}; y_{s+1,\tau}, y_{s+2,\tau})]\right| < 4\varepsilon,$$

$$\left|\sum_{\gamma=1}^{s} \Phi(x_{p,q}, x_{p+1,q}; y_{\gamma,\tau}, y_{\gamma+1,\tau})\right| < 2\varepsilon, \qquad \left|\sum_{\alpha=1}^{r} \Phi(x_{\alpha,\beta}, x_{\alpha+1,\beta}; y_{p',q'}, y_{p'+1,q'})\right| < 2\varepsilon,$$

$$|\Phi(x_{p,q}, x_{p+1,q}; y_{p',q'}, y_{p'+1,q'})| < \varepsilon.$$

Dalla (29), in virtù di queste disuguaglianze, tenendo presente le (30) e le limitazioni

$$0 \leq \frac{1}{m^2} - \frac{A}{mh} < \frac{1}{m^2}, \qquad 0 \leq \frac{1}{m^2} - \frac{B}{mk} < \frac{1}{m^2}, \qquad 0 \leq \frac{1}{m^2} - \frac{AB}{hk} < \frac{1}{m^2}$$

si deduce:

$$\left| S^{(\beta,\tau)} - \frac{1}{m^2} \Phi \left[D^{(\beta,\tau)}(R_0) \right] \right| < \frac{13\,\varepsilon}{m^2}. \tag{31}$$

Ma è $\| D^{(\beta,\tau)}(R_0) \| < \delta$, $\forall\, \beta, \tau = 1, 2, \dots, m$, e quindi per la (24) si ha:

$$\left| \Phi \left[D^{(\beta,\tau)}(R_0) \right] - (\mathcal{J}) \int_{R_0} \Phi \right| < \varepsilon, \qquad \forall\, \beta, \tau = 1, 2, \dots, m.$$

Dalla (31) allora, tenuto conto della (27) e di quest'ultima, segue:

$$\left| S - (\mathcal{J}) \int_{R_0} \Phi \right| < 14\varepsilon,$$

che assieme alla (25) ci dà:

$$\left| I(h, k) - (\mathcal{J}) \int_{R_0} \Phi \right| < 15\varepsilon, \qquad \forall\, h, k:\ 0 < h < \delta/2,\ 0 < k < \delta/2,$$

e quindi l'asserto del teorema.

§ 2.

L'INTEGRALE DI FUBINI-TONELLI NEL SENSO ($\mathcal{J}$) WEIERSTRASS.

5. Siano A_1, A_2 due insiemi chiusi e limitati, rispettivamente dei piani (x_1, y_1), (x_2, y_2), ed $A = A_1 \times A_2$ l'insieme chiuso prodotto cartesiano di A_1 con A_2.

Denotiamo con $\mathcal{C} \equiv (\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ una coppia di curve:

$$\mathcal{C}_1 \equiv \{ x_1 = x_1(u),\ y_1 = y_1(u),\ a_0 \leq u \leq b_0 \},$$

$$\mathcal{C}_2 \equiv \{ x_2 = x_2(v),\ y_2 = y_2(v),\ c_0 \leq v \leq d_0 \},$$

con $\mathcal{C}_1 \subset A_1$, $\mathcal{C}_2 \subset A_2$.

La $\mathcal{C}$ la diremo continua se le componenti $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ sono continue; la $\mathcal{C}$ la diremo rettificabile se le componenti $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ sono rettificabili.

Sia poi $F[x_1, y_1, x_2, y_2; x_1', y_1', x_2', y_2'] \equiv F(P; x_1', y_1', x_2', y_2']$ una funzione definita per ogni punto $P(x_1, y_1, x_2, y_2) \in A$ e per ogni valore di x_1', y_1', x_2', y_2', con

$$(32) \qquad F[P; 0, 0, x_2', y_2'] = 0, \qquad \forall\, P \in A,\ x_2', y_2';$$

$$(32') \qquad F[P; x_1', y_1', 0, 0] = 0, \qquad \forall\, P \in A,\ x_1', y_1'.$$

Posto $R_0 = \{a_0 \leq u \leq b_0, c_0 \leq v \leq d_0\}$ denotiamo con $\psi_F(R)$, $R = \{u' \leq u \leq u'', v' \leq v \leq v''\} \subset R_0$, la funzione di rettangolo definita dalla

$$(33) \qquad \psi_F(R) = F[x_1(u'), y_1(u'), x_2(v'), y_2(v');$$
$$x_1(u'') - x_1(u'), y_1(u'') - y_1(u'), x_2(v'') - x_2(v'), y_2(v'') - y_2(v')].$$

Se esiste (finito o no) l'integrale $(\mathcal{G})\int_{R_0} \psi_F(R)$, tale integrale lo chiameremo l'integrale di Fubini-Tonelli, nel senso $(\mathcal{G})$-Weierstrass, della F relativamente a $\mathcal{C}$ e lo denoteremo anche $I_W(\mathcal{C})$.

Se $\mathcal{C}$ è continua e rettificabile, considerate le equazioni parametriche di $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ quando in entrambe come parametro si assume la lunghezza d'arco rettificato:

$$\mathcal{C}_1 = \{x_1 = x_1^0(s), y_1 = y_1^0(s), 0 \leq s \leq L_{\mathcal{C}_1}\}, \mathcal{C}_2 = \{x_2 = x_2^0(\tau), y_2 = y_2^0(\tau), \ 0 \leq \tau \leq L_{\mathcal{C}_2}\},$$

e posto $R_{0,0} = \{0 \leq s \leq L_{\mathcal{C}_1}, 0 \leq \tau \leq L_{\mathcal{C}_2}\}$, denoteremo con $A_F(R)$, $R = \{s' \leq s \leq s'', \tau' \leq \tau \leq \tau''\} \subset R_{0,0}$, la funzione di rettangolo definita dalla

$$(34) \qquad A_F(R) = F[x_1^0(s'), y_1^0(s'), x_2^0(\tau'), y_2^0(\tau');$$
$$x_1^0(s'') - x_1^0(s'), y_1^0(s'') - y_1^0(s'), x_2^0(\tau'') - x_2^0(\tau'), y_2^0(\tau'') - y_2^0(\tau')].$$

Sussiste il seguente

TEOREMA 3. *Se $\mathcal{C} \equiv (\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ è continua e rettificabile ed esiste (finito o no) l'integrale $(\mathcal{G})$-Weierstrass della $A_F(R)$ su $R_{0,0}$, con F soddisfacente le* (32), (32'), *tale integrale non dipende dalla parametrizzazione della $\mathcal{C}$, cioè esiste l'integrale $(\mathcal{G})$-Weierstrass della $\psi_F(R)$ su R_0, e risulta:*

$$(\mathcal{G})\int_{R_{0,0}} A_F(R) = (\mathcal{G})\int_{R_0} \psi_F(R).$$

Osserviamo prima che se almeno uno dei due numeri $L_{\mathcal{C}_1}$, $L_{\mathcal{C}_2}$ è nullo il rettangolo $R_{0,0}$ degenera in un segmento o in un punto; posto in tal caso, per convenzione, $(\mathcal{J})\int\limits_{R_{0,0}} A_F(R) = 0$, convenzione questa giustificata dal fatto che, in virtù delle (32), (32′), è $A_F(R) = 0$, $\forall\ R \subset R_{0,0}$, risulta, sempre in virtù delle (32), (32′):

$$(\mathcal{J})\int\limits_{R_0} \psi_F(R) = 0.$$

Supponiamo allora $L_{\mathcal{C}_1} > 0$, $L_{\mathcal{C}_2} > 0$.

Per ogni insieme $\{u_i\}_i\,[\{v_i\}_i]$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$, con $a_0 = u_0 < u_1 < \dots < u_n = b_0$ $[c_0 = v_0 < v_1 < \dots < v_n = d_0]$, l'insieme $\{s_i = s(u_i)\}_i\,[\{\tau_i = \tau(v_i)\}_i]$, con $0 = s_0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n = L_{\mathcal{C}_1}$ $[0 = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_n = L_{\mathcal{C}_2}]$, individuato tramite la $s = s(u)\,[\tau = \tau(v)]$, è tale che

$$\text{(35)}\qquad \begin{cases} x_1^0(s_i) = x_1(u_i) \quad [x_2^0(\tau_i) = x_2(v_i)], \\ y_1^0(s_i) = y_1(u_i) \quad [y_2^0(\tau_i) = y_2(v_i)]. \end{cases}$$

Detto quindi $\{s'_j\}_j\,[\{\tau'_l\}_l]$, $j = 1, 2, \dots, p$ $[l = 1, 2, \dots, q]$, $0 = s'_0 < s'_1 < \dots < s'_p = L_{\mathcal{C}_1}$ $[0 = \tau'_0 < \tau'_1 < \tau'_2 < \dots < \tau'_q = L_{\mathcal{C}_2}]$, il sottoinsieme di $\{s_i\}_i\,[\{\tau_i\}_i]$ costituito dai punti di $\{s_i\}_i\,[\{\tau_i\}_i]$ che sono a due a due distinti, chiamiamo $\{s'_j\}_j\,[\{\tau'_l\}_l]$ la suddivisone dell'intervallo $\{0 \leq s \leq L_{\mathcal{C}_1}\}$ $[\{0 \leq v \leq L_{\mathcal{C}_2}\}]$ corrispondente alla suddivisione $\{u_i\}_i\,[\{v_i\}_i]$ dell'intervallo $\{a_0 \leq u \leq b_0\}$ $[\{c_0 \leq v \leq d_0\}]$, e si tenga presente che

$$\text{(36)}\qquad \begin{cases} x_1(u_i) = x_1(u_{i+1}) \quad [x_2(v_i) = y_2(v_{i+1})], \\ y_1(u_i) = y_1(u_{i+1}) \quad [y_2(v_i) = y_2(v_{i+1})], \end{cases}$$

quando $s_i = s_{i+1}\,[\tau_i = \tau_{i+1}]$.

Considerata dunque una suddivisione $D(R_0)$, a questa corrisponde con il procedimento detto, tramite le $s = s(u)$, $\tau = \tau(v)$, una suddivisione $D(R_{0,0})$, e tenendo presenti le (32), (32′), (35), (36) si ha:

$$\text{(37)}\qquad \psi_F[D(R_0)] = A_F[D(R_{0,0})];$$

ma per la continuità delle $s = s(u)$, $\tau = \tau(v)$ risulta $\|D(R_{0,0})\| \to 0$ quando $\|D(R_0)\| \to 0$, e quindi dalla (37) e dall'esistenza (finito o no) dell'integrale $(\mathcal{J})$-Weierstrass della $A_F(R)$ su $R_{0,0}$ segue l'esistenza (finito o no) dell'inte-

grale $(\mathcal{G})$-Weiestrass della $\psi_F(R)$ su R_0 e inoltre:

$$(\mathcal{G})\int_{R_0}\psi_F(R)=(\mathcal{G})\int_{R_{0,0}}A_F(R).$$

6. In questo numero tratteremo dell'esistenza dell'integale di Fubini-Tonelli nel senso $(\mathcal{G})$-Weierstrass.

Sopponiamo che la $F[P;\, x_1',\, y_1',\, x_2',\, y_2']$, definita per ogni punto $P(x_1, y_1, x_2, y_2)\in A$ e per ogni valore di x_1', y_1', x_2', y_2', soddisfi le condizioni (5):

α) sia continua globalmente rispetto ad $(x_1, y_1, x_2, y_2;\ x_1', y_1', x_2', y_2')$ nel suo insieme di definizione;

β) sia positivamente omogenea di grado 1, separatamente rispetto alle coppie (x_1', y_1'), (x_2', y_2'), cioè, $\forall\, P\in A,\, k>0,\, x_1', y_1', x_2', y_2'$, si abbia

$$F[P;\, kx_1', ky_1', x_2', y_2'] = k\cdot F[P;\, x_1', y_1', x_2', y_2'],$$

$$F[P;\, x_1', y_1', kx_2', ky_2'] = k\cdot F[P;\, x_1', y_1', x_2', y_2'];$$

γ) sia convessa in senso lato secondo Jensen, separatamente rispetto alle coppie (x_1', y_1'), (x_2', y_2'), cioè si abbia

$$F\left[P;\, \frac{x_1'+\overline{x}_1'}{2}, \frac{y_1'+\overline{y}_1'}{2}, x_2', y_2'\right] \leq \frac{1}{2}\{F[P;\, x_1', y_1', x_2', y_2'] + F[P;\, \overline{x}_1', \overline{y}_1', x_2', y_2']\},$$

$$F\left[P;\, x_1', y_1', \frac{x_2'+\overline{x}_2'}{2}, \frac{y_2'+\overline{y}_2'}{2}\right] \leq \frac{1}{2}\{F[P;\, x_1', y_1', x_2', y_2'] + F[P;\, x_1', y_1', \overline{x}_2', \overline{y}_2']\},$$

la prima $\forall\, P\in A$, $x_1', y_1', \overline{x}_1', \overline{y}_1', x_2', y_2'$ e la seconda $\forall\, P\in A$, $x_1', y_1', x_2', y_2', \overline{x}_2', \overline{y}_2'$, le quali disuguaglianze, per la β), si scrivono rispettivamente

γ_1) $\quad F[P;\, x_1'+\overline{x}_1', y_1'+\overline{y}_1', x_2', y_2'] \leq F[P;\, x_1', y_1', x_2', y_2'] + F[P;\, \overline{x}_1', \overline{y}_1', x_2', y_2']$,

γ_2) $\quad F[P;\, x_1', y_1', x_2'+\overline{x}_2', y_2'+\overline{y}_2'] \leq F[P;\, x_1', y_1', x_2', y_2'] + F[P;\, x_1', y_1', \overline{x}_2', \overline{y}_2']$.

Sussiste il seguente

TEOREMA 4. *Se $\mathcal{C}\equiv(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ è continua e rettificabile ed F soddisfa le condizioni α), β), γ), esiste finito l'integrale $I_W(\mathcal{C})$.*

---

(5) Ovviamente la F, come conseguenza della β) soddisfa le (32), (32').

Basta mostrare, in virtù del Teorema 3, che esiste finito l'integrale $(\mathcal{J})$-Weierstrass della $\Lambda_F(R)$ su $R_{0,0}$ e questa esistenza è assicurata appena si mostra che $\Lambda_F(R)$ gode delle proprietà della $\Phi(R)$ del Teorema 1 e inoltre l'integrale superiore $(\mathcal{J})$-Weierstrass del suo valore assoluto è finito.

Osserviamo che la $\Lambda_F(R)$, data dalla (34), a causa della β) si scrive

$$\Lambda_F(R) = F\left[x_1^0(s'), y_1^0(s'), x_2^0(\tau'), y_2^0(\tau');\right.$$

$$\left.\frac{x_1^0(s'')-x_1^0(s')}{s''-s'}, \frac{y_1^0(s'')-y_1^0(s')}{s''-s'}, \frac{x_2^0(\tau'')-x_2^0(\tau')}{\tau''-\tau'}, \frac{y_2^0(\tau'')-y_2^0(\tau')}{\tau''-\tau'}\right]\cdot|R|,$$

con

$$\left[\frac{x_1^0(s'')-x_1^0(s')}{s''-s'}\right]^2 + \left[\frac{y_1^0(s'')-y_1^0(s')}{s''-s'}\right]^2 \leq 1,$$

$$\left[\frac{x_2^0(\tau'')-x_2^0(\tau')}{\tau''-\tau'}\right]^2 + \left[\frac{y_2^0(\tau'')-y_2^0(\tau')}{\tau''-\tau'}\right]^2 \leq 1,$$

e poichè nell'insieme chiuso e limitato

$$(38) \qquad E = \{(P; x_1', y_1', x_2', y_2') : P \in \mathcal{C},\ x_1'^2 + y_1'^2 \leq 1,\ x_2'^2 + y_2'^2 \leq 1\},$$

a causa della α), la F è limitata, esiste una costante $M > 0$ tale che

$$|\Lambda_F(R)| \leq M \cdot |R|,$$

e da questa segue immediatamente che la $\Lambda_F(R)$ è continua in $R_{0,0}$ e che inoltre $(\mathcal{J})\overline{\int\limits_{R_{0,0}}}|\Lambda_F(R)| < +\infty$.

Resta allora da provare che la $\Lambda_F(R)$ è approssimativamente subadditiva in $R_{0,0}$, cioè è soddisfatta la (12) quando in essa si cambi $\Phi(R)$ in $\Lambda_F(R)$ ed R_0 in $R_{0,0}$.

Conseguenza, intanto, delle γ_1), γ_2) è la seguente disuguaglianza:

$$(39) \qquad F[P; x_1' + \bar{x}_1', y_1' + \bar{y}_1', x_2' + \bar{x}_2', y_2' + \bar{y}_2'] \leq$$

$$\leq F[P; x_1' + \bar{x}_1', y_1' + \bar{y}_1', x_2', y_2'] + F[P; x_1' + \bar{x}_1', y_1' + \bar{y}_1', \bar{x}_2', \bar{y}_2'] \leq$$

$$\leq F[P; x_1', y_1', x_2', y_2'] + F[P; \bar{x}_1', \bar{y}_1', x_2', y_2'] + F[P; x_1', y_1', \bar{x}_2', \bar{y}_2'] +$$

$$+ F[P; \bar{x}_1', \bar{y}_1', \bar{x}_2', \bar{y}_2'].$$

Considerato allora il rettangolo $R = \{s' \leq s \leq s'', \tau' \leq \tau \leq \tau''\} \subset R_{0,0}$ e la suddivisione di R prodotto delle due suddivisioni $s' < s^* < s''$, $\tau' < \tau^* < \tau''$, dalla (39), quando in essa si pone

$$x_1' = x_1^0(s'') - x_1^0(s^*), \quad \bar{x}_1' = x_1^0(s^*) - x_1^0(s'),$$

$$y_1' = y_1^0(s'') - y_1^0(s^*), \quad \bar{y}_1' = y_1^0(s^*) - y_1^0(s'),$$

$$x_2' = x_2^0(\tau'') - x_2^0(\tau^*), \quad \bar{x}_2' = x_2^0(\tau^*) - x_2^0(\tau'),$$

$$y_2' = y_2^0(\tau'') - y_2^0(\tau^*), \quad \bar{y}_2' = y_2^0(\tau^*) - y_2^0(\tau'),$$

si ha:

$$F[P; x_1^0(s'') - x_1^0(s'), y_1^0(s'') - y_1^0(s'), x_2^0(\tau'') - x_2^0(\tau'), y_2^0(\tau'') - y_2^0(\tau')] \leq$$

$$\leq F[P; x_1^0(s'') - x_1^0(s^*), y_1^0(s'') - y_1^0(s^*), x_2^0(\tau'') - x_2^0(\tau^*), y_2^0(\tau'') - y_2^0(\tau^*)] +$$

$$+ F[P; x_1^0(s^*) - x_1^0(s'), y_1^0(s^*) - y_1^0(s'), x_2^0(\tau'') - x_2^0(\tau^*), y_2^0(\tau'') - y_2^0(\tau^*)] +$$

$$+ F[P; x_1^0(s'') - x_1^0(s^*), y_1^0(s'') - y_1^0(s^*), x_2^0(\tau^*) - x_2^0(\tau'), y_2^0(\tau^*) - y_2^0(\tau')] +$$

$$+ F[P; x_1^0(s^*) - x_1^0(s'), y_1^0(s^*) - y_1^0(s'), x_2^0(\tau^*) - x_2^0(\tau'), y_2^0(\tau^*) - y_2^0(\tau')],$$

e analogamente, se si considera una classe elementare generata da R ottenuta come prodotto delle due suddivisioni

$$s' = s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n = s'', \quad \tau' = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m = \tau'',$$

risulta:

(40) $$\Lambda_F(R) \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} F[P; x_1^0(s_{i+1}) - x_1^0(s_i), y_1^0(s_{i+1}) - y_1^0(s_i), x_2^0(\tau_{j+1}) - x_2^0(\tau_j), y_2^0(\tau_{j+1}) - y_2^0(\tau_j)].$$

Se allora $D(R) = \{R_1, R_2, \dots, R_q\}$, $R_i = \{s_i' \leq s \leq s_i'', \ \tau_i' \leq \tau \leq \tau_i''\}$, $i = 1, 2, \dots, q$, è una suddivisione di R, tenendo presente il modo di come si realizza, a partire dalla (40), applicando la stessa (40) a ciascun rettangolo della classe elementare generata da R e così proseguendo, cioè applicando la (40) a ciascun rettangolo delle classi elementari del passo precedente, dopo un numero finito di operazioni di questo tipo, cioè di maggiorazioni successive, si ottiene:

$$(41)\qquad \Lambda_F(R) \leq \sum_{i=1}^{q} F[P;\ x_1^0(s_i'')-x_1^0(s_i'),\ y_1^0(s_i'')-y_1^0(s_i'),\ x_2^0(\tau_i'')-x_2^0(\tau_i'),\ y_2^0(\tau_i'')-y_2^0(\tau_i'),]$$

che per la proprietà β) si scrive

$$(41')\qquad \Lambda_F(R) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{q} F\left[P;\ \frac{x_1^0(s_i'')-x_1^0(s_i')}{s_i''-s_i'},\ \frac{y_1^0(s_i'')-y_1^0(s_i')}{s_i''-s_i'},\ \frac{x_2^0(\tau_i'')-x_2^0(\tau_i')}{\tau_i''-\tau_i'},\ \frac{y_2^0(\tau_i'')-y_2^0(\tau_i')}{\tau_i''-\tau_i'}\right] \cdot |R_i| .$$

Osserviamo ora che per la continuità uniforme della F nell'insieme chiuso e limitato E dato dalla (38) e per la continuità uniforme delle $x_1^0(s)$, $y_1^0(s)$, $x_2^0(\tau)$, $y_2^0(\tau)$, $0 \leq s \leq L_{\mathcal{C}_1}$, $0 \leq \tau \leq L_{\mathcal{C}_2}$, in corrispondenza ad $\varepsilon > 0 \ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni $R = \{s' \leq s \leq s'',\ \tau' \leq \tau \leq \tau''\} \subset R_{0,0}$, con $\| R \| < \delta$, risulta:

$$(42)\qquad \Bigg| F\left[x_1^0(s'),\ y_1^0(s'),\ x_2^0(\tau'),\ y_2^0(\tau');\right.$$

$$\left.\frac{x_1^0(s_i'')-x_1^0(s_i')}{s_i''-s_i'},\ \frac{y_1^0(s_i'')-y_1^0(s_i')}{s_i''-s_i'},\ \frac{x_2^0(\tau_i'')-x_2^0(\tau_i')}{\tau_i''-\tau_i'},\ \frac{y_2^0(\tau_i'')-y_2^0(\tau_i')}{\tau_i''-\tau_i'}\right] -$$

$$- F\left[x_1^0(s_i'),\ y_1^0(s_i'),\ x_2^0(\tau_i'),\ y_2^0(\tau_i');\right.$$

$$\left.\frac{x_1^0(s_i'')-x_1^0(s_i')}{s_i''-s_i'},\ \frac{y_1^0(s_i'')-y_1^0(s_i')}{s_i''-s_i'},\ \frac{x_2^0(\tau_i'')-x_2^0(\tau_i')}{\tau_i''-\tau_i'},\ \frac{y_2^0(\tau_i'')-y_2^0(\tau_i')}{\tau_i''-\tau_i'}\right] \Bigg| < \varepsilon,$$

$$\forall\ s_i',\ s_i'',\ \tau_i',\ \tau_i'' :\ s' \leq s_i' \leq s'',\ s' \leq s_i'' \leq s'',\ \tau' \leq \tau_i' \leq \tau'',\ \tau' \leq \tau_i'' \leq \tau''.$$

Dalla (41') allora per $\| R \| < \delta$, tenendo presente che la stessa (41') è vera qualunque sia $P \in \mathcal{C}$ e quindi in particolare per $P = (x_1^0(s'), y_1^0(s'), x_2^0(\tau'), y_2^0(\tau'))$, in virtù della (42) si deduce:

$$\Lambda_F(R) \leq \Lambda_F[D(R)] + \varepsilon \cdot | R | ,$$

che vale qualunque sia $R \subset R_{0,0}$, con $\| R \| < \delta$, e qualunque sia $D(R)$.

La $\Lambda_F(R)$ è dunque anche approssimativamente subadditiva in $R_{0,0}$ e quindi è $(\mathcal{G})$-Weierstrass integrabile su $R_{0,0}$.

Da questo Teorema 4, adattando un ragionamento del Tonelli [6], si può dedurre un'altro teorema di esistenza per l'integrale $I_{W}(\mathcal{C})$ con ipotesi meno onerose sulla F.

Teorema 5. *Se $\mathcal{C} \equiv (\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ è continua e rettificabile ed F soddisfa le condizioni α), β), esiste finito l'integrale $I_{W}(\mathcal{C})$.*

Si osservi che:

1^0. Se F soddisfa le condizioni α), β) e $G[P; x_1', y_1', x_2', y_2']$, definita per $P \in A$ e per ogni valore di x_1', y_1', x_2', y_2', è un'altra funzione che oltre a soddisfare le condizioni α), β), γ) sia tale che $F + G$ soddisfi la γ), esiste finito l'integrale di Fubini-Tonelli, nel senso ($\mathcal{G}$)-Weierstrass, della F relativamente a $\mathcal{C}$, quando $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ è continua e rettificabile;

2^0. Se F soddisfa le condizioni α), β) e inoltre per ogni $P \in A$ e per $x_1'^2 + y_1'^2 = 1$, $x_2'^2 + y_2'^2 = 1$ ammette continue le derivate parziali $F_{x_1'}$, $F_{y_1'}$, $F_{x_2'}$, $F_{y_2'}$, $F_{x_1'x_1'}$, $F_{x_1'y_1'}$, $F_{y_1'y_1'}$, $F_{x_2'x_2'}$, $F_{x_2'y_2'}$, $F_{y_2'y_2'}$, allora esiste una funzione G come in 1^0.

La 1^0 si dimostra immediatamente. Tenendo infatti presente la definizione (33) si ha

$$\psi_F[D(R_0)] = \psi_{F+G}[D(R_0)] - \psi_G[D(R_0)], \tag{43}$$

e poichè in virtù del Teorema 4 esistono finiti i limiti

$$\lim_{\|D(R_0)\| \to 0} \psi_{F+G}[D(R_0)], \qquad \lim_{\|D(R_0)\| \to 0} \psi_G[D(R_0)],$$

dalla (43) segue l'asserto.

Dimostriamo la 2^0.

A causa della β) a cui soddisfa la F segue che le derivate parziali indicate in 2^0 esistono continue per ogni $P \in A$ e per $x_1'^2 + y_1'^2 \neq 0$, $x_2'^2 + y_2'^2 \neq 0$.

Dalla

$$F[P; kx_1', ky_2', x_2', y_2'] = k \cdot F[P; x_1', y_1', x_2', y_2'],$$

derivando rispetto a k e poi ponendo $k = 1$ si ha:

$$x_1' \cdot F_{x_1'} + y_1' \cdot F_{y_1'} = F,$$

e derivando ancora, separatamente, rispetto ad x_1', y_1':

$$x_1' \cdot F_{x_1'x_1'} + y_1' \cdot F_{y_1'x_1'} = 0,$$

$$x_1' \cdot F_{x_1'y_1'} + y_1' \cdot F_{y_1'y_1'} = 0.$$

---

[6] L. Tonelli ([26] n. 5).

Risulta allora, se x_1' ed y_1' sono entrambi diversi da zero,

$$\frac{F_{x_1' x_1'}}{y_1'^2} = - \frac{F_{x_1' y_1'}}{x_1' y_1'} = \frac{F_{y_1' y_1'}}{x_1'^2},$$

e si osservi che almeno uno di questi rapporti ha il denominatore diverso da zero se x_1' ed y_1' non sono entrambi nulli.

La funzione

$$F_1 [P ; x_1', y_1', x_2', y_2'] \equiv \frac{F_{x_1' x_1'}}{y_1'^2} = - \frac{F_{x_1' y_1'}}{x_1' y_1'} = \frac{F_{y_1' y_1'}}{x_1'^2}$$

è dunque definita e continua globalmente per $P \in A$ e per $x_1'^2 + y_1'^2 \neq 0$, $x_2'^2 + y_2'^2 \neq 0$.

Analogamente la funzione

$$F_2 [P ; x_1', y_1', x_2', y_2'] \equiv \frac{F_{x_2' x_2'}}{y_2'^2} = - \frac{F_{x_2' y_2'}}{x_2' y_2'} = \frac{F_{y_2' y_2'}}{x_2'^2}$$

è continua globalmente per $P \in A$ e per $x_1'^2 + y_1'^2 \neq 0$, $x_2'^2 + y_2'^2 \neq 0$. Posto ora

$$H [P ; x_1', y_1', x_2', y_2'] = \sqrt{x_1'^2 + y_1'^2} \cdot \sqrt{x_2'^2 + y_2'^2},$$

H soddisfa le condizioni α), β), γ) e inoltre è

$$H_1 \equiv \frac{\sqrt{x_2'^2 + y_2'^2}}{(x_1'^2 + y_1'^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad H_2 \equiv \frac{\sqrt{x_1'^2 + y_1'^2}}{(x_2'^2 + y_2'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

e poichè per $P \in A$ e per $x_1'^2 + y_1'^2 = 1$, $x_2'^2 + y_2'^2 = 1$ le funzioni F_1, F_2 sono limitate, esiste una costante $M > 0$ tale che si abbia:

$$F_1 + M \cdot H_1 > 0, \quad F_2 + M \cdot H_2 > 0 \tag{44}$$

per $P \in A$ e per $x_1'^2 + y_1'^2 = 1$, $x_2'^2 + y_2'^2 = 1$.

Ma a causa della β) a cui soddisfano sia F che H, le (44) sono soddisfatte per $P \in A$ e per $x_1'^2 + y_1'^2 \neq 0$, $x_2'^2 + y_2'^2 \neq 0$, e quindi posto $G = M \cdot H$ le (44) ci dicono [7] che la funzione $F + G$ soddisfa la γ).

---

(7) Cfr. L. TONELLI ([24], pag. 213).

Mostriamo ora il teorema come conseguenza immediata delle 1°, 2°.

Poichè F gode delle proprietà α), β), in corrispondenza ad $\varepsilon > 0$ possiamo determinare una $\bar{F}[P; x_1', y_1', x_2', y_2']$, definita per $P \in A$ e per qualsiasi valore di x_1', y_1', x_2', y_2', con le proprietà α), β), che, per $P \in A$ e per $x_1'^2 + y_1'^2 = 1$, $x_2'^2 + y_2'^2 = 1$, ammetta continue le derivate parziali $\bar{F}_{x_1'}$, $\bar{F}_{y_1'}$, $\bar{F}_{x_2'}$, $\bar{F}_{y_2'}$, $\bar{F}_{x_1' x_1'}$, $\bar{F}_{x_1' y_1'}$, $\bar{F}_{y_1' y_1'}$, $\bar{F}_{x_2' x_2'}$, $\bar{F}_{x_2' y_2'}$, $\bar{F}_{y_2' y_2'}$ e inoltre soddisfi la

$$|F - \bar{F}| < \varepsilon \tag{45}$$

per $P \in A$, $x_1'^2 + y_1'^2 = 1$, $x_2'^2 + y_2'^2 = 1$.

Possiamo dunque, per la 2° determinare un $M > 0$ tale che, posto

$$G = M \cdot \sqrt{x_1'^2 + y_1'^2} \cdot \sqrt{x_2'^2 + y_2'^2},$$

la funzione $F + G$ oltre a soddisfare la α), β) soddisfi la γ).

Tenendo allora presente la definizione (34), in virtù del Teorema 4, esistono finiti gli integrali:

$$(\mathcal{J}) \int_{R_{0,0}} A_{\bar{F}+G}(R), \qquad (\mathcal{J}) \int_{R_{0,0}} A_G(R).$$

Inoltre per la (45), che è vera per $P \in A$ e per $x_1'^2 + y_1'^2 \leq 1$, $x_2'^2 + y_2'^2 \leq 1$, perchè F ed $\bar{F}$ godono della proprietà β), si ha:

$$|A_{F-\bar{F}}[D(R_{0,0})]| < \varepsilon \cdot |R_{0,0}|, \qquad \forall\, D(R_{0,0}).$$

Dalla

$$A_F(R) = A_{F-\bar{F}}(R) + A_{\bar{F}+G}(R) - A_G(R), \qquad \forall\, R \subset R_{0,0},$$

segue quindi

$$(\mathcal{J}) \overline{\int_{R_{0,0}}} A_F(R) \leq \varepsilon\,|R_{0,0}| + (\mathcal{J}) \int_{R_{0,0}} A_{\bar{F}+G}(R) - (\mathcal{J}) \int_{R_{0,0}} A_G(R),$$

$$(\mathcal{J}) \underline{\int_{R_{0,0}}} A_F(R) \geq -\varepsilon\,|R_{0,0}| + (\mathcal{J}) \int_{R_{0,0}} A_{\bar{F}+G}(R) - (\mathcal{J}) \int_{R_{0,0}} A_G(R),$$

e di conseguenza:

$$(\mathcal{J}) \overline{\int_{R_{0,0}}} A_F(R) = (\mathcal{J}) \underline{\int_{R_{0,0}}} A_F(R) \neq \infty$$

L'asserto è provato tenuto conto del Teorema 3.

7. In questo numero stabiliremo un teorema di rappresentazione per l'integrale di Fubini-Tonelli nel senso $(\mathcal{I})$-Weierstrass e poi daremo per esso un algoritmo di calcolo mediante una proposizione di approssimazione.

TEOREMA 6. *Se F soddisfa le condizioni α), β) del N. 6, per ogni curva $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$, continua e rettificabile, risulta:*

$$I_W(\mathcal{C}) = \int_0^{L_{\mathcal{C}_1}} \int_0^{L_{\mathcal{C}_2}} F[x_1^0(s), y_1^0(s), x_2^0(\tau), y_2^0(\tau); x_1^{0\prime}(s), y_1^{0\prime}(s), x_2^{0\prime}(\tau), y_2^{0\prime}(\tau)]\, ds\, d\tau,$$

essendo $\{x_1 = x_1^0(s), y_1 = y_1^0(s), 0 \leq s \leq L_{\mathcal{C}_1}\}$, $\{x_2 = x_2^0(\tau), y_2 = y_2^0(\tau), 0 \leq \tau \leq L_{\mathcal{C}_2}\}$ *le parametrizzazioni rispettive di $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ con il parametro lunghezza d'arco.*

Riprendiamo la (34):

$$\Lambda_F(s', s''; \tau', \tau'') \equiv \Lambda_F(R) = F[x_1^0(s'), y_1^0(s'), x_2^0(\tau'), y_2^0(\tau');$$

$$x_1^0(s'') - x_1^0(s'), y_1^0(s'') - y_1^0(s'), x_2^0(\tau'') - x_2^0(\tau'), y_2^0(\tau'') - y_2^0(\tau')],$$

la quale, come conseguenza delle proprietà α), β) di cui gode la F, è una funzione di rettangolo continua [8] in $R_{0,0}$.

Osserviamo ora che $\forall\, h, k$: $0 < h < L_{\mathcal{C}_1}$, $0 < k < L_{\mathcal{C}_2}$, la

$$\Lambda_F(s, s+h; \tau, \tau+k) = F[x_1^0(s), y_1^0(s), x_2^0(\tau), y_2^0(\tau);$$

$$x_1^0(s+h) - x_1^0(s), y_1^0(s+h) - y_1^0(s), x_2^0(\tau+k) - x_2^0(\tau), y_2^0(\tau+k) - y_2^0(\tau)],$$

$(s, \tau) \in R_{h,k} = \{0 \leq s \leq L_{\mathcal{C}_1} - h,\ 0 \leq \tau \leq L_{\mathcal{C}_2} - k\} \subset R_{0,0}$, è una funzione di punto continua in $R_{h,k}$ a causa della continuità della F e della continuità delle $x_1^0(s)$, $y_1^0(s)$, $x_2^0(\tau)$, $y_2^0(\tau)$, $0 \leq s \leq L_{\mathcal{C}_1}$, $0 \leq \tau \leq L_{\mathcal{C}_2}$.

La $\Lambda_F(s', s''; \tau', \tau'')$ è poi, in virtù del Teorema 5, $(\mathcal{I})$-Weierstrass integrabile su $R_{0,0}$, e quindi, soddisfacendo le condizioni 1^0), 2^0), 3^0) del Teorema 2, risulta:

$$I_W(\mathcal{C}) = \lim_{(h,k)\to 0} \int_0^{L_{\mathcal{C}_1}-h} \int_0^{L_{\mathcal{C}_2}-k} \frac{1}{hk} F[x_1^0(s), y_1^0(s), x_2^0(\tau), y_2^0(\tau);$$

$$x_1^0(s+h) - x_1^0(s), y_1^0(s+h) - y_1^0(s), x_2^0(\tau+k) - x_2^0(\tau), y_2^0(\tau+k) - y_2^0(\tau)]\, ds\, d\tau,$$

---

[8] Vedi dimostrazione del Teorema 4.

la quale, tenuto conto della β) a cui soddisfa la F, si scrive

$$(46) \qquad I_W(\mathcal{C}) = \lim_{(h,k)\to 0} \int_0^{L_{C_1}-h} \int_0^{L_{C_2}-k} F\left[x_1^0(s), y_1^0(s), x_2^0(\tau), y_2^0(\tau);\right.$$

$$\left.\frac{x_1^0(s+h)-x_1^0(s)}{h}, \frac{y_1^0(s+h)-y_1^0(s)}{h}, \frac{x_2^0(\tau+k)-x_2^0(\tau)}{k}, \frac{y_2^0(\tau+k)-y_2^0(\tau)}{k}\right] ds d\tau.$$

Ma è quasi ovunque in $R_{0,0}$:

$$\lim_{(h,k)\to 0} F\left[x_1^0(s), y_1^0(s), x_2^0(\tau), y_2^0(\tau);\right.$$

$$\left.\frac{x_1^0(s+h)-x_1^0(s)}{h}, \frac{y_1^0(s+h)-y_1^0(s)}{h}, \frac{x_2^0(\tau+k)-x_2^0(\tau)}{k}, \frac{y_2^0(\tau+k)-y_2^0(\tau)}{k}\right] =$$

$$= F[x_1^0(s), y_1^0(s), x_2^0(\tau), y_2^0(\tau);\ x_1^{0\prime}(s), y_1^{0\prime}(s), x_2^{0\prime}(\tau), y_2^{0\prime}(\tau)],$$

e tenendo presente che $\forall\, h, k:\ 0 < h < L_{C_1},\ 0 < k < L_{C_2}$, è:

$$\left[\frac{x_1^0(s+h)-x_1^0(s)}{h}\right]^2 + \left[\frac{y_1^0(s+h)-y_1^0(s)}{h}\right]^2 \leq 1,$$

$$\left[\frac{x_2^0(\tau+k)-x_2^0(\tau)}{k}\right]^2 + \left[\frac{y_2^0(\tau+k)-y_2^0(\tau)}{k}\right]^2 \leq 1,$$

esiste, in virtù della continuità della F nell'insieme chiuso e limitato E dato dalla (38), una costante $M > 0$ tale che:

$$\left| F\left[x_1^0(s), y_1^0(s), x_2^0(\tau), y_2^0(\tau);\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{x_1^0(s+h)-x_1^0(s)}{h}, \frac{y_2^0(s+h)-y_1^0(s)}{h}, \frac{x_2^0(\tau+k)-x_2^0(\tau)}{k}, \frac{y_2^0(\tau+k)-y_2^0(\tau)}{k}\right]\right| < M,$$

$$\forall\, (s, \tau) \in R_{h,k} \text{ e } \forall\, h, k:\ 0 < h < L_{C_1},\ 0 < k < L_{C_2}.$$

È possibile quindi nella (46) passare il limite sotto il segno d'integrale e quindi l'asserto del teorema.

TEOREMA 7. *Se F soddisfa le condizioni α), β) del N. 6, e* $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$,

$$\mathcal{C}_1 = \{x_1 = x_1(u),\ y_1 = y_1(u),\ a_0 \leq u \leq b_0\},$$

$$\mathcal{C}_2 = \{x_2 = x_2(v),\ y_2 = y_2(v),\ c_0 \leq v \leq d_0\},$$

è una curva continua e rettificabile, risulta:

$$I_W(\mathcal{C}) = \lim_{(h,k)\to 0} \int_{a_0}^{b_0-h} \int_{c_0}^{d_0-k} F\left[x_1(u),\ y_1(u),\ x_2(v),\ y_2(v);\right.$$

$$\left.\frac{x_1(u+h)-x_1(u)}{h},\ \frac{y_1(u+h)-y_1(u)}{h},\ \frac{x_2(v+k)-x_2(v)}{k},\ \frac{y_2(v+k)-y_2(v)}{k}\right] du\, dv.$$

Riprendiamo la (33):

$$(47) \qquad \psi_F(u', u''; v', v'') \equiv \psi_F(R) =$$

$$= F[x_1(u'), y_1(u'), x_2(v'), y_2(v');$$

$$x_1(u'') - x_1(u'), y_1(u'') - y_1(u'), x_2(v'') - x_2(v'), y_2(v'') - y_2(v')]$$

la quale, in virtù dei Teoremi 3, 5, è $(\mathcal{I})$ Weierstrass integrabile in R_0.
Inoltre $\forall\, h, k:\ 0 < h < b_0 - a_0,\ 0 < k < d_0 - c_0$, la

$$\psi_F(u, u+h;\ v, v+k) = F[x_1(u), y_1(u), x_2(v), y_2(v);$$

$$x_1(u+h) - x_1(u), y_1(u+h) - y_1(u), x_2(v+k) - x_2(v), y_2(v+k) - y_2(v)],$$

$(u, v) \in R_{h,k} = \{a_0 \leq u \leq b_0 - h,\ c_0 \leq v \leq d_0 - k\} \subset R_0$, è una funzione di punto continua in $R_{h,k}$ a causa della continuità della F e della continuità delle $x_1(u),\ y_1(u),\ x_2(v),\ y_2(v),\ a_0 \leq u \leq b_0,\ c_0 \leq v \leq d_0$.

Mostriamo ora che la funzione di rettangolo (47) è continua in R_0.

Detto infatti $L > 0$ un numero tale che

$$|x_1(u)| \leq L,\ |y_1(u)| \leq L,\ |x_2(v)| \leq L,\ |y_2(v)| \leq L,\ \forall\, u \in [a_0, b_0], \forall\, v \in [c_0, d_0],$$

poichè nell'insieme chiuso e limitato

$$E^* = \{(P;\ x_1', y_1', x_2', y_2'):\ P \in \mathcal{C},\ |x_1'| \leq 2L,\ |y_1'| \leq 2L,\ |x_2'| \leq 2L,\ |y_2'| \leq 2L\}$$

la F è uniformemente continua, tenuto conto delle (32), (32′) e della continuità uniforme delle $x_1(u), y_1(u), x_2(v), y_2(v),\ u \in [a_0, b_0], v \in [c_0, d_0]$, si ha che in corrispondenza ad $\varepsilon > 0 \ \exists \, \delta(\varepsilon) > 0$ tale che:

$$(48) \qquad | F[x_1(u'), y_1(u'), x_2(v'), y_2(v');$$
$$x_1(u'') - x_1(u'), y_1(u'') - y_1(u'), x_2(v'') - x_2(v'), y_2(v'') - (y')] | < \varepsilon$$

$\forall \, u', u'' \in [a_0, b_0] : | u' - u'' | < \delta$ e $\forall \, v', v'' \in [c_0, d_0]$, oppure $\forall \, u', u'' \in [a_0, b_0]$ e $\forall \, v', v'' \in [c_0, d_0] : | v' - v'' | < \delta$.

Allora per ogni $R = \{u' \leq u \leq u'', \ v' \leq v \leq v''\} \subset R_0$, con $| R | < \delta^2$, essendo $u'' - u' < \delta$ oppure $v'' - v' < \delta$, dalla (47), in virtù della (48), si ha:

$$| \psi_F(R) | < \varepsilon.$$

La (47) soddisfa quindi le condizioni del Teorema 2 e l'asserto è provato tenendo conto della β) a cui soddisfa la F.

Università di Modena

BIBLIOGRAFIA

[1] E. BAIADA-G. TRIPICIANO, *Un integrale analogo a quello di Weierstrass nel Calcolo delle Variazioni in una variabile*. Rend. Circolo Mat. Palermo, vol. VI, 1957, pp. 263-270.

[2] J. C. BURKILL, *Functions of intervals*. Proc. London Math. Soc. vol. 22, 1923, pp. 275-310.

[3] L. CESARI, *On the representation of surfaces*. Amer. Journal Math. vol. 72, 1950, pp. 335-346.

[4] S. FAEDO, *Un nuovo tipo di funzionali continui*. Rend. di Mat. e delle sue appli. vol. 4, 1943, pp. 223-249.

[5] S. FAEDO, *Condizioni necessarie per la semicontinuità di un nuovo tipo di funzionali*. Annali di Mat. Pura e Appli. vol. XXIII, 1944, pp. 69-121.

[6] S. FAEDO, *Sulle condizioni di Legendre e Weierstrass per gli integrali di Fubini-Tonelli*. Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, vol. XV, 1950, pp. 127-135.

[7] S. FAEDO, *Il calcolo delle Variazioni per gli integrali di Fubini-Tonelli*. Atti del Convegno Lagrangiano, Accad. Scienze Torino 1964. pp. 61-82.

[8] S. FAEDO, *Semicontinuità e quasi-regolarità per gli integrali di Fubini-Tonelli*. Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, vol. XVIII, 1964, pp. 361-383.

[9] G. FUBINI, *Alcuni nuovi problemi di Calcolo delle Variazioni con applicazioni alla teoria delle equazioni integro-differenziali*. Annali di Mat. Pura e Appli. vol. XX, 1913, pp. 217-244.

[10] H. LEWY, *Über die Methode der Differenzengleichungen zur Lösung von Variations und Randwertproblemen*. Math. Annalen vol. 98, 1927, pp. 107-124.

[11] L. LOMBARDI, *Sulla semicontinuità degli integrali di Fubini-Tonelli*. Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, vol. XII, 1958, pp. 129-153.

[12] L. LOMBARDI, *Sull'esistenza del minimo degli integrali di Fubini-Tonelli*. Ist. Lombardo, Accad. Scienze e Lett. (A), vol. 92, 1958, pp. 446-458.

[13] E. J. MCSHANE, *Existence theorems for ordinary problems of the Calculus of Variations*. Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, vol. III, 1934, pp. 183-211.

[14] E. MAGENES, *Intorno agli integrali di Fubini-Tonelli : I - Condizioni sufficienti per la semicontinuità*. Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, vol. II, 1948. pp. 1-38.

[15] E. MAGENES, *Intorno agli integrali di Fubini-Tonelli : II-Teoremi di esistenza dell'estremo*. Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, vol. III, 1949, pp. 95-131.

[16] E. MAGENES. *Sul minimo relativo degli integrali di Fubini-Tonelli*. Giornale di Mat. di Battaglini, vol. LXXIX, 1949-50, pp. 144-168.

[17] E. MAGENES, *Un'osservazione sulle condizioni necessarie per la semicontinuità degli integrali di Fubini-Tonelli*. Rend. Sem. Mat. Padova, vol. XIX, 1950, pp. 44-53.

[18] E. MAGENES, *Sulle equazioni di Eulero relative ai problemi di Calcolo delle Variazioni degli integrali di Fubini-Tonelli*. Rend. Sem. Mat. Padova, vol. XIX, 1950, pp. 62-102.

[19] E. MAGENES, *Sul minimo semi-forte degli integrali di Fubini-Tonelli*. Rend. Sem. Mat. Padova, vol. XX, 1951, pp. 401-424.

[20] C. B. MORREY, *An analytic characterization of surfaces of finite Lebesgue area*. Amer. Journal Math. vol. 57, 1935, pp. 692-702.

[21] T. RADÓ, *Length and area*. Amer. Math Soc. Colloquium Publications, vol. XXX, 1948.

[22] S. SAKS, *Theory of the integral*. Hafner Publishing Company New York, 1937.

[23] L. TONELLI, *Sui massimi e minimi assoluti del Calcolo delle Variazioni*. Rend. Circolo Mat. Palermo, vol. XXXII, 1911, pp. 297-337.

[24] L. TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni I*. Zanichelli Bologna 1921.

[25] L. TONELLI, *Su alcuni funzionali*. Annali di Mat. Pura e Appli. vol. XVIII, 1939, pp. 1-21.

[26] L. TONELLI, *Sulle funzioni d'intervallo*. Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, vol. VIII, 1939, pp. 309-321.

[27] C. VINTI, *L'integrale di Weierstrass*, Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. (A), vol. 92, 1958, pp. 423-434.

[28] C. VINTI, *L'integrale di Weierstrass e l'integrale del Calcolo delle Variazioni in forma ordinaria*. Atti Accad. Sci. Lett. Arti Palermo, vol. XIX, 1958-59, pp. 51-82.

[29] C. VINTI, *L'integrale di Weierstrass e l'integrale del Calcolo delle Variazioni in forma parametrica*. Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. (A), vol. 97, 1963, pp. 101-114.