ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

MIROSLAV SOVA

Problème de Cauchy pour équations hyperboliques opérationnelles à coefficients constants non-bornés

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 22, nº 1 (1968), p. 67-100

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1968_3_22_1_67_0>

PROBLÈME DE CAUCHY POUR ÉQUATIONS HYPERBOLIQUES OPÉRATIONNELLES À COEFFICIENTS CONSTANTS NON-BORNES.

MIROSLAV SOVA

L'objectif de la présente communication est d'exposer les résultats nouveaux de l'unicité, de l'existence et de la croissance des solutions du problème de Cauchy pour les équations différentielles $u''(t) + Bu'(t) + Au(t) = 0$ dont les coefficients sont des opérateurs, en général non-bornés, dans un espace de Banach quelconque.

L'exposition est complète mais assez concise ; malgré cela, nous espérons que les démonstrations sont toujours compréhensibles. Certains résultats auxiliaires, bien connus, sont mentionnés dans la première section sans démonstrations (voir [1], [2]).

Le présent article est une suite du mémoire de l'auteur [4] sur les fonctions-cosinus d'opérateurs dont les résultats sont non seulement traités sous une forme différente comme problème de Cauchy, mais surtout essentiellement généralisés et munis des démonstrations complètement nouvelles. Par conséquent, l'exposition actuelle est entièrement indépendante de [4].

Il y a huit sections. 1. Préliminaires, 2. Résultats auxiliaires du problème parabolique, 3. Couples d'opérateurs, 4. Solutions du problème hyperbolique, 5. Unicité du problème hyperbolique, 6. Résolubilité stricte du problème hyperbolique, 7. Résolubilité modérée du problème hyperbolique, 8. Compléments et commentaire.

1. Préliminaires.

1,1 Soit (1) R le corps des nombres réels, (2) R^+ l'ensemble des nombres positifs, (3) E l'espace de Banach quelconque avec la norme $\|\cdot\|$, (4) $\mathfrak{L}^+(E)$ l'ensemble des opérateurs linéaires dont les domaines sont des sous

Pervenuto alla Redazione il 26 Agosto 1967.

ensembles linéaires non-vides de E et dont les valeurs appartiennent à E, (5) $\mathfrak{L}(E)$ l'espace de Banach de tous les opérateurs de $\mathfrak{L}^+(E)$, partout définis et continus, avec la norme usuelle, (6) $E \times E$ le carré cartésien de E dont les éléments seront représentés sous la forme $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, avec la norme $\| z \| = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = \| x \| + \| y \|$, (7) $M_1 \to M_2$ l'ensemble de toutes les applications (fonctions) définies sur l'ensemble M_1 avec valeurs dans l'ensemble M_2.

1,2 Le calcul différentiel pour les fonctions vectorielles d'une variable réelle est simple. Quant à l'intégration de ces fonctions, on n'aura besoin que de l'intégration des fonctions continues.

1,3 L'opérateur identique sera désigné par $\mathcal{I}$. La fermeture d'un opérateur préfermé $A \in \mathfrak{L}^+(E)$ sera désignée par $\bar{A}$.

Dans $\mathfrak{L}^+(E)$, on introduit les opérations algébriques $A_1 + A_2$, $A_1 A_2$. Les propriétés élémentaires de ces opérations voir [5], p. 28. Notons seulement $\mathfrak{D}(A_1 + A_2) = \mathfrak{D}(A_1) \cap \mathfrak{D}(A_2)$ et $\mathfrak{D}(A_1 A_2) = \{x : x \in \mathfrak{D}(A_2), A_2 x \in \mathfrak{D}(A_1)\}$. Pour plus de sûreté, soit $A^0 = \mathcal{I}$ pour tout $A \in \mathfrak{L}^+(E)$.

Si $\mathfrak{D}(A_1) \subseteq \mathfrak{D}(A_2)$ et $A_1 x = A_2 x$ pour $x \in \mathfrak{D}(A_1)$, on écrit $A_1 \subseteq A_2$ pour $A_1, A_2 \in \mathfrak{L}^+(E)$.

1,4 Un opérateur $A \in \mathfrak{L}^+(E)$ s'appelle ***régulier au point*** $\lambda \in R$ si $(\lambda \mathcal{I} + A)^{-1}$ existe et appartient à $\mathfrak{L}(E)$. L'ensemble de tous les points auxquels A est régulier sera désigné par $\mathfrak{M}(A)$.

1,5 PROPOSITION. *Soit* $A \in \mathfrak{L}^+(E)$. *Si* $\mathfrak{M}(A) \neq 0$, *alors l'opérateur* A *est fermé.*

1,6 PROPOSITION. *Soit* $A \in \mathfrak{L}^+(E)$ *et* $\lambda \in R$. *Si* (a) *l'opérateur* A *est fermé,* (b) $\lambda \mathcal{I} + A$ *est biunivoque,* (c) *il existe un sous-ensemble dense* $D \subseteq E$ *tel que* $D \subseteq \mathfrak{D}(\lambda \mathcal{I} + A)^{-1})$ *et l'opérateur* $(\lambda \mathcal{I} + A)^{-1}$ *est continu sur* D, *alors* A *est régulier en* λ.

1,7 PROPOSITION. *Soit* $A \in \mathfrak{L}^+(E)$, $\lambda \in R$. *Si* $\lambda \in \mathfrak{M}(A)$, *alors*

$$A(\lambda \mathcal{I} + A)^{-1} \in \mathfrak{L}(E) \tag{1}$$

$$(\lambda \mathcal{I} + A)^{-n} A^m \subseteq A^m (\lambda \mathcal{I} + A)^{-n} \quad \textit{pour } m, n = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

$$\lambda^n (\lambda \mathcal{I} + A)^{-n} = \mathcal{I} - \sum_{k=1}^{n} \lambda^{k-1} A (\lambda \mathcal{I} + A)^{-k} \quad \textit{pour } n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

1,8 Proposition. *Soit* $A \in \mathfrak{L}^+(E)$. *Si* $\mathfrak{M}(A) \neq 0$, *alors la fonctioni* $(\lambda \mathcal{I} + A)^{-1}$ *est indéfiniment dérivable sur* $\lambda \in \mathfrak{M}(A)$ *et*

(1) $$\frac{d^p}{d\lambda^p}(\lambda \mathcal{I} + A)^{-1} = (-1)^p p\,!\,(\lambda \mathcal{I} + A)^{-(p+1)} \text{ pour } \lambda \in \mathfrak{M}(A),\ p = 0, 1, 2, \ldots$$

(2) $$\frac{d^p}{d\lambda^p}[\lambda^{-1}(\lambda \mathcal{I} + A)^{-1}] = (-1)^p p\,!\sum_{k=1}^{p+1} \lambda^{k-p-2}(\lambda \mathcal{I} + A)^{-k}$$

pour $\lambda \in \mathfrak{M}(A)$, $\lambda \neq 0$ et $p = 0, 1, 2, \ldots$

1,9 Proposition. *Soit* $A \in \mathfrak{L}^+(E)$. *Si l'opérateur* A *est densement défin, et si* $\mathfrak{M}(A) \neq 0$, *alors, pour tout* $q = 0, 1, 2, \ldots$, $x \in \mathfrak{D}(A^q)$ et $n = 1, 2, \ldots$, *il existe une suite* $x_k \in \mathfrak{D}(A^n)$ *telle que*

(1) $$x_k \to x,\ Ax_k \to Ax, \ldots, A^q x_k \to A^q x \qquad (k \to \infty)$$

Preuve. Soit $\lambda \in \mathfrak{M}(A)$ fixe. On voit de la formule, facile à démontrer $(\lambda \mathcal{I} + A)^q = \sum_{i=0}^{q} \binom{q}{i} \lambda^i A^{q-i}$ que $\mathfrak{D}(A^q) = \mathfrak{D}((\lambda \mathcal{I} + A)^q)$ pour $0, 1, 2, \ldots$. Donc on peut supposer constamment $\lambda = 0$.

D'abord on va démontrer

(2) $\mathfrak{D}(A^r)$ est dense dans E pour tout $r = 1, 2, \ldots$.

Le cas $r = 1$ est évident. Supposons que $\mathfrak{D}(A^r)$ soit dense. Comme $\mathfrak{D}(A^{r+1}) = A^{-1}(\mathfrak{D}(A^r))$, on obtient que $\mathfrak{D}(A^{r+1})$ est dense dans $A^{-1}(E) = \mathfrak{D}(A)$, i. e. dans E.

Pour terminer, soit $x \in \mathfrak{D}(A^q)$. Comme l'assertion de notre proposition est triviale pour $n = 1, 2, \ldots, q$, on va supposer que $n = q + r$, $r = 1, 2, \ldots$. Il s'ensuit de (2) qu'il existe une suite $y_k \in \mathfrak{D}(A^r)$ telle que $y_k \to A^q x$ $(k \to \infty)$. Posons $x_k = A^{-q} y_k$ et (1) est évident.

1,10 Proposition. *Soit* Λ *un ensemble ouvert sur* R *et* f_k, $k = 1, 2, \ldots, f, g$ *des fonctions de* $\Lambda \to E$. *Si* (a) f_k, $k = 1, 2, \ldots$ *sont continûment dérivables sur* Λ, (b) $f_k(t) \to f(t)$ $(k \to \infty)$ *pour tout* $t \in \Lambda$, (c) $f_k'(t) \to g(t)$ $(k \to \infty)$ *localement uniformément sur* Λ, *alors* (α) f *est continûment dérivable et* (β) $f'(t) = g(t)$ *pour* $t \in \Lambda$.

1,11 Proposition. *Soit* $\varphi \in \Lambda \to R$, $f \in \Lambda \to E$. *Si* (a) *les fonctions* φ, f *sont continues,* (b) φ *est intégrable sur* Λ *et* (c) $\|f(t)\| \leq \varphi(t)$ *pour* $t \in \Lambda$, *alors* f *est aussi intégrable et* $\left\| \int_\Lambda f(\tau)\, d\tau \right\| \leq \int_\Lambda \varphi(\tau)\, d\tau$.

1,12 PROPOSITION. *Soit* $f \in \Lambda \to E$. *Si* f *est continûment dérivable, alors pour tout* $\alpha, \beta \in \Lambda$, $(\alpha, \beta) \subseteq \Lambda$, *la fonction* f' *est intégrable sur* (α, β) et $\int_\alpha^\beta f'(\tau)\, d\tau = f(\beta) - f(\alpha)$.

1,13 PROPOSITION. *Soit* $\varphi \in \Lambda \to E, f_k \in \Lambda \to E, k = 1, 2, \dots, f \in \Lambda \to E$. *Si* (a) *les fonctions* f_k, $k = 1, 2, \dots$, *et* f *sont continues,* (b) φ *est continue et intégrable sur* Λ, (c) $\|f_k(t)\| \leq \varphi(t)$ *pour* $t \in \Lambda$ *et* $k = 1, 2, \dots$, (d) $f_k(t) \to f(t)\,(k \to \infty)$ *pour* $t \in \Lambda$, *alors* (α) $f_k(t), k = 1, 2, \dots$ *et* f *sont intégrables sur* Λ *et* (β) $\int_\Lambda f_k(\tau)\, d\tau \to \int_\Lambda f(\tau)\, dr\,(k \to \infty)$.

1,14 PROPOSITION. *Soit* Λ *un intervalle ouvert,* $\Phi \in \Lambda \to \mathfrak{L}^+(E)$, $\varphi_p \in \Lambda \to R$, $p = 0, 1, 2, \dots$. *Si les fonctions* φ_p, $p = 0, 1, 2, \dots$ *sont continues et s'il existe un sous-ensemble dense* $D \subseteq E$ *tel que* (a) $\mathfrak{D}(\Phi(\lambda)) = D$ *pour* $\lambda \in \Lambda$, (b) *pour tout* $x \in D$, *la fonction* $\Phi(\cdot)x$ *est indéfiniment dérivable dans* Λ, (c) $\left\| \frac{d^p}{d\lambda^p} \Phi(\lambda)x \right\| \leq \varphi^p(\lambda) \|x\|$ *pour tout* $x \in D, \lambda \in \Lambda, p = 0, 1, 2, \dots$ *alors* (α) $\overline{\Phi(\lambda)} \in \mathfrak{L}(E)$ *pour* $\lambda \in \Lambda$, (β) *la fonction* $\overline{\Phi(\lambda)}$ *est indéfiniment dérivable dans* Λ *par rapport à la topologie de* $\mathfrak{L}(E)$, (γ) $\left\| \frac{d^p}{d\lambda^p} \overline{\Phi(\lambda)} \right\| \leq \varphi_p(\lambda)$ *pour* $\lambda \in \Lambda$, $p = 0, 1, 2, \dots$

La *preuve* n'est pas difficile grâce aux propositions 1,11 et 1,12 et peut être abandonnée au lecteur.

1,15 PROPOSITION. *Soit* Λ *un ensemble ouvert sur* R. *Si* (a) *l'opérateur* $A \in \mathfrak{L}^+(E)$ *est fermé,* (b) *la fonction* $f \in \Lambda \to E$ *est continue et intégrable,* (c) $f(t) \in \mathfrak{D}(A)$ *pour* $t \in \Lambda$ *et* (d) *la fonction* $Af(t)$ *est aussi continue et intégrable, alors* (α) $\int_\Lambda f(\tau)\, d\tau \in \mathfrak{D}(A)$ *et* (β) $A \int_\Lambda f(\tau)\, d\tau = \int_\Lambda Af(\tau)\, d\tau$.

1,16 LEMME (Phragmén). *Soit* $f \in R^+ \to E$. *Si la fonction* f *est continue sur* R^+ *et intégrable sur* (0,1), *alors pour tout* $t, s \in R^+$

$$\int_0^t f(\tau)\, d\tau = \lim_{\xi \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^{t+s} e^{k\xi(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau. \tag{1}$$

Preuve. On a $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} e^{k\xi(t-\tau)} \longrightarrow 1 - \exp(-e^{\xi(t-\tau)})$ $(n \longrightarrow \infty)$ uniformément sur $0 < \tau < t + s$ pour $t, s \in R^+$ fixés.

Par suite, d'après 1,13,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^{t+s} e^{k\xi(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau = \int_0^{t+s} [1 - \exp(-e^{\xi(t-\tau)})] f(\tau)\, d\tau.$$

Comme $1 - \exp(-e^{\xi(t-\tau)})$ tend vers 1 pour $0 < \tau < t$ avec $\xi \longrightarrow \infty$ et vers 0 pour $t < \tau < t + s$, une nouvelle application de 1,13 donne (1).

1,17 Proposition. *Soit* $f \in R^+ \longrightarrow E$. *Si* (a) *la fonction* f *est continue sur* R^+ *est intégrable sur* (0,1) *et* (b) *s'il existe une constante* $d \in R^+$ *et une fonction* $L \in R^+ \longrightarrow R$ *vérifiant pour tout* $t \in R^+$ *et* $\lambda > d$

$$(1) \qquad \left| \int_0^t e^{-\lambda\tau} f(\tau)\, d\tau \right| \leq L(t)\, e^{(d-t)\lambda},$$

alors la fonction f *est identiquement nulle.*

Preuve. Commençons par

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^{t+d+1} e^{k\xi(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau \longrightarrow 0 \quad (\xi \longrightarrow \infty)$$

pour tout $t \in R^+$. En effet, il résulte de (1) pour $\xi > d$:

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^{t+d+1} e^{k\xi(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{k\xi t}}{k!} \left\| \int_0^{t+d+1} e^{-k\xi\tau} f(\tau)\, d\tau \right\|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{k\xi t}}{k!} L(t + d + 1)\, e^{-k\xi(t+1)} = L(t + d + 1)\, [\exp(e^{-\xi}) - 1]$$

ce qui tend vers zéro avec $\xi \longrightarrow \infty$.

En utilisant 1,16 (1), on obtient de (2) $\int_0^t f(\tau)\, d\tau = 0$, d'où le résultat.

1.18 PROPOSITION. *Soit* $\alpha \in R$ et $f \in R^+ \to E$. *Si la fonction, f est continûment dérivable sur* R^+, $f'(t) + \alpha f(t) = 0$ et $f(O_+) = 0$, *alors f est identiquement nulle.*

Preuve. On a $\frac{d}{dt}(e^{\alpha t} f(t)) = e^{\alpha t}(f'(t) + \alpha f(t)) = 0$. Par suite $e^{\alpha t} f(t)$ est constante sur R^+, i. e. $e^{\alpha t} f(t) = f(O_+) = 0$, d'où $f(t) = 0$ pour $t \in R^+$.

1,19 LEMME. *Pour* $\lambda > 2\varkappa$ *et* $\varkappa \geq 0$, *on a* $\lambda(\lambda - \varkappa)^{-1} \leq e^{2\varkappa\lambda^{-1}}$.

1,20 LEMME. *Pour* $\varkappa \geq 0, \lambda > \varkappa + 1$ et $n = 1, 2, \ldots$, *on a* $n(\lambda - \varkappa)^{-(n+1)} \leq (\lambda - \varkappa - 1)^{-n}$.

1,21 LEMME *Pour* $t \in R^+$ *et* $\varkappa \geq 0$, *on a*

$$\left(\frac{n}{t}\right)^n \left(\frac{n}{t} - \varkappa\right)^{-n} \to e^{\varkappa t},\ n\left(\frac{n}{t}\right)^n \left(\frac{n}{t} - \varkappa\right)^{-n+1} \to te^{\varkappa t} \quad (n \to \infty,\ n > \varkappa t)$$

2. Résultats auxiliaires du problème parabolique.

2,1 Soit $A \in \mathfrak{L}^+(E)$, $u \in R^+ \to E$. On dit que la fonction u ***est une solution du problème parabolique pour l'opérateur*** A si (I) u est continûment dérivable sur R^+, (II) $u(O_+)$ existe, (III) $u(t) \in \mathfrak{D}(A)$ pour tout $t \in R^+$ (IV) $u'(t) + Au(t) = 0$ pour tout $t \in R^+$.

2,2 L'operateur $A \in \mathfrak{L}^+(E)$ s'appelle ***paraboliquement déterminé.*** si toute solution u du problème parabolique pour A vérifiant $u(O_+) = 0$ est identiquement nulle.

2,3 THEORÈME AUXILIAIRE D'UNICITÉ. *Soit* $A \in \mathfrak{L}^+(E)$. *S'il existe deux constantes non-negatives c, K et un nombre $q = 0, 1, 2, \ldots$ tels que* (a) *l'opérateur A est régulier en tout* $\lambda > c$, (b) *pour tout* $z \in \mathfrak{D}(A^q)$ *et* $\lambda > c$, *on a*

$$\|(\lambda \mathcal{I} + A)^{-1} z\| \leq Ke^{c\lambda}(\|z\| + \|Az\| + \ldots + \|A^q z\|), \tag{1}$$

alors l'opérateur A est paraboliquement déterminé.

Preuve. Soit u une solution du problème parabolique pour A telle que $u(O_+) = 0$. On pose $v_0(t) = u(t)$ et $v_{k+1}(t) = \int_0^t v_k(\tau)\, d\tau$ pour $t \in R^+$, $k = 0$, 1, 2, … . Comme A est fermé d'après 1,15 il résulte de 1,15 que $v_k(t) \in \mathfrak{D}(A)$ et $v_k(t) + Av_{k+1}(t) = 0$. Mais cette dernière identité donne

$$v_k(t) \in \mathfrak{D}(A^k) \tag{2}$$

et

$$\| v_k(t) \| + \| Av_k(t) \| + \dots + \| A^k v_k(t) \| = \| v_0(t) \| + \| v_1(t) \| + \dots + \| v_k(t) \|$$

pour $t \in R^+$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Ecrivons pour $s \in R^+$ et $\lambda > c$: $g(t, \lambda) = (\lambda\mathcal{I} + A)^{-1} v_q(t)$. Vu 1,7 (2), on a $\dfrac{d}{dt} g(t, \lambda) - \lambda g(t, \lambda) + v_q(t) = 0$, d'où $g(t, \lambda) = - e^{\lambda s} \displaystyle\int_0^s e^{-\lambda\tau} v_q(\tau)\, d\tau$, si l'on utilise 1,18. D'autre part, (1), (2) donnent

$$\| g(t, \lambda) \| \leq Ke^{c\lambda} (\| v_0(t) \| + \| v_1(t) \| + \dots + \| v_q(t) \|).$$

Donc

$$\left\| \int_0^t e^{-\lambda\tau} v_q(\tau)\, d\tau \right\| \leq K (\| v_0(t) + | v_1(t) | + \dots + \| v_q(t) \|) e^{(c-t)\lambda} \tag{3}$$

pour tout $t \in R^+$, $\lambda > c$.

Il résulte de (3) que toutes les hypothèses de 1,17 sont satisfaites et par conséquent, $v_q(t) = 0$ pour tout $t \in R^+$, d'où aussi $u(t) = \dfrac{d^q}{dt^q} v_q(t) = 0$.

Remarque. Le théorème 2,3 est une généralisation du théorème important et bien connu de Lubich [2] qui est identique avec le cas $q = 0$. Mais la preuve précédente, réelle et élémentaire, est, semble-t-il, nouvelle aussi dans ce cas.

2,4 Lemme. *Soit $A \in \mathfrak{L}^+(E)$ et $\varkappa$ une constante non-négative. Si l'opérateur A est régulier en $\lambda > \varkappa$, alors la fonction $\left(\dfrac{n}{t}\right)^n \left(\dfrac{n}{t}\mathcal{I} + A\right)^{-n}$ est continûment dérivable pour tout $t \in R^+$, $n = 1, 2, \dots$, $n > \varkappa t$ et*

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{n}{t}\right)^n \left(\frac{n}{t}\mathcal{I} + A\right)^{-n}\right] = -\left(\frac{n}{t}\right)^{n+1} \left(\frac{n}{t}\mathcal{I} + A\right)^{-n} A \left(\frac{n}{t}\mathcal{I} + A\right)^{-1} \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n+2}{t}\right)^{k-1} \left(\frac{n+2}{t}\mathcal{I} + A\right)^{-k}\right] = \tag{2}$$

$$\frac{n}{n+2}\left[\mathcal{I} - \sum_{k=1}^{n+2} \left(\frac{n+2}{t}\right)^{k-1} \left(\frac{n+2}{t}\mathcal{I} + A\right)^{-k+1} A \left(\frac{n+2}{t}\mathcal{I} + A\right)^{-1}\right].$$

Preuve. En utilisant 1,8 (1) et la formule de Leibnitz, on en déduit pour $t \in R^+$, $\alpha > \varkappa t$, $n = 1, 2, \dots$:

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\alpha}{t}\right)^n\left(\frac{\alpha}{t}\mathcal{I}+A\right)^{-n}\right] = -\frac{n}{t}\left(\frac{\alpha}{t}\right)^n\left(\frac{\alpha}{t}\mathcal{I}+A\right)^{-n}+$$

$$\frac{n}{t}\left(\frac{\alpha}{t}\right)^{n+1}\left(\frac{\alpha}{t}\mathcal{I}+A\right)^{-(n+1)} = -\frac{n}{t}\left(\frac{\alpha}{t}\right)^n\left(\frac{\alpha}{t}\mathcal{I}+A\right)^{-n}\left[\mathcal{I}-\frac{\alpha}{t}\left(\frac{\alpha}{t}\mathcal{I}+A\right)^{-1}\right]$$

ce qui donne (1) en vertu de 1,7 (2). L'identité (2) est une conséquence immédiate de (1).

2,5 PROPOSITION. *Soit* $A \in \mathfrak{L}^+(E)$, $q = 0, 1, 2, \dots$ *et* $\varkappa$, N *deux constantes non-négatives. Si* (a) *l'opérateur* A *est régulier pour* $\lambda > \varkappa$, (b) *pour tout* $z \in \mathfrak{D}(A^q)$, $n = 1, 2, \dots$

$$(1) \qquad \|(\lambda\mathcal{I}+A)^{-n}(z)\| \leq N(\lambda-\varkappa)^{-n}(\|z\|+\|Az\|+\dots+\|A^q z\|)$$

alors (α) *pour tout* $x \in \mathfrak{D}(A^{q+1})$, $t \in R^+$, $r = 1, 2, \dots$, $r > 2\varkappa t$

$$(2) \qquad \left\|\left(\frac{r}{t}\right)^r\left(\frac{r}{t}\mathcal{I}+A\right)^{-r}x - x\right\| \leq Nt\,e^{2\varkappa t}(\|Ax\|+\|A^2x\|+\dots+\|A^{q+1}x\|)$$

(β) *pour tout* $x \in \mathfrak{D}(A^{2q+2})$, $t \in R^+$, $r_1, r_2 = 1, 2, \dots$ $r_1, r_2 > 2\varkappa t$

$$(3) \qquad \left\|\left(\frac{r_1}{t}\right)^{r_1}\left(\frac{r_1}{t}\mathcal{I}+A\right)^{-r_1}x - \left(\frac{r_2}{t}\right)^{r_2}\left(\frac{r_2}{t}\mathcal{I}+A\right)^{-r_2}x\right\| \leq$$

$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)(q+1)Nt^2e^{2\varkappa t}(\|A^2x\|+\|A^3x\|+\dots+\|A^{2q+2}x\|).$$

Preuve. Il résulte de (1) et 1,19 que

$$(4) \qquad \|\lambda^n(\lambda\mathcal{I}+A)^{-n}z\| \leq Ne^{2\varkappa n\lambda^{-1}}(\|z\|+\|Az\|+\dots+\|A^q z\|)$$

pour $z \in \mathfrak{D}(A^q)$, $\lambda > 2\varkappa$, $n = 1, 2, \dots$.

En utilisant 1,7, on peut écrire pour $x \in \mathfrak{D}(A)$, $t \in R^+$, $r = 1, 2, \dots$, $r > \varkappa t$:

$$(5) \qquad \left(\frac{r}{t}\right)^r\left(\frac{r}{t}\mathcal{I}+A\right)^{-r}x - x = -\frac{t}{r}\sum_{k=1}^{r}\left(\frac{r}{t}\right)^k\left(\frac{r}{t}\mathcal{I}+A\right)^{-k}Ax.$$

Ensuite, (2) est une conséquence immédiate de (5) et (4).

D'autre part, on déduit de 1,8, 2,4 (1) et 1,7 (1) d'après Kato ([2], § 12.3) pour $x \in \mathfrak{D}(A^2)$, $t \in R^+$, $r_1, r_2 = 1, 2, \ldots$ $r_1, r_2 > \varkappa t$:

$$(6) \qquad \left(\frac{r_1}{t}\right)^{r_1}\left(\frac{r_1}{t}\mathcal{I}+A\right)^{-r_1}x-\left(\frac{r_2}{t}\right)^{r_2}\left(\frac{r_2}{t}\mathcal{I}+A\right)^{-r_2}x=$$

$$\left[\int_0^t \frac{d}{d\tau}\left(\frac{r_2}{t-\tau}\right)^{r_2}\left(\frac{r_2}{t-\tau}\mathcal{I}+A\right)^{-r_2}\left(\frac{r_1}{\tau}\right)^{r_1}\left(\frac{r_1}{\tau}\mathcal{I}+A\right)^{-r_1}d\tau\right]x=$$

$$\int_0^t\left(\frac{\tau}{r_1}-\frac{t-\tau}{r_2}\right)\left(\frac{r_2}{t-\tau}\right)^{r_2+1}\left(\frac{r_2}{t-\tau}\mathcal{I}+A\right)^{-(r_2+1)}\left(\frac{r_1}{\tau}\right)^{r_1}\left(\frac{r_1}{\tau}\mathcal{I}+A\right)^{-(r_1+1)}A^2\,x.$$

Pour démontrer (3), il suffit d'appliquer (6) et (4).

2,6 Premier théorème auxiliaire d'existence. *Soit* $A \in \mathfrak{L}^+(E)$, $q = 0, 1, 2, \ldots$ *et* $\varkappa$ *une constante non-négative. Si* (a) *l'opérateur* A *est densement défini,* (b) *régulier en tout* $\lambda > \varkappa$, (c) *il existe une constante* N *telle que, pour tout* $z \in \mathfrak{D}(A^q)$, $\lambda > \varkappa$ *et* $n = 1, 2, \ldots$, *on a*

$$(1) \qquad \|(\lambda\mathcal{I}+A)^{-n}z\| \leq N(\lambda-\varkappa)^{-n}\left(\|z\|+\|Az\|+\ldots+\|A^q z\|\right)$$

alors, pour tout $x \in \mathfrak{D}(A^{q+1})$, *il existe une solution du problème parabolique pour* A *telle que* $u(O_+) = x$ *et que, pour tout* $t \in R^+$,

$$(2) \qquad \left(\frac{r}{t}\right)^{r}\left(\frac{r}{t}\mathcal{I}+A\right)^{-r}x \to u(t) \qquad (r\to\infty,\ r>\varkappa t)$$

$$(3) \qquad \left(\frac{r}{t}\right)^{r}\left(\frac{r}{t}\mathcal{I}+A\right)^{-r}Ax \to -u'(t) \qquad (r\to\infty,\ r>\varkappa t).$$

Preuve. Soit d'abord $x \in \mathfrak{D}(A^{2q+3})$ et écrivons $u_r(t) = \left(\frac{r}{t}\right)^{r}\left(\frac{r}{t}\mathcal{I}+A\right)^{-r}x$ pour $t \in R^+$, $r = 1, 2, \ldots$, $r > \varkappa t$. On verifie aisément à l'aide de 2,4 (1)

(4) u_r est continûment dérivable, $u_r(t) \in \mathfrak{D}(A)$ et $u_r'(t) + Au_r\left(\frac{r+1}{r}t\right) = 0$ pour $t \in R^+$, $r > \varkappa t$.

D'autre part, on peut appliquer 2,5 (β), d'où l'on déduit

(5) u_r, u'_r sont localement uniformément convergentes sur R^+.

(6) Posons $u(t) = \lim_{r \to \infty} u_r(t)$.

Il résulte de (5) et 1,10 que u est continûment dérivable sur R^+ et de (4) que $u(t) \in \mathfrak{D}(A)$ et $u'(t) + Au(t) = 0$. D'autre part, 2,5 (2) entraîne $u(t) \to x$ $(t \to O_+)$. Par conséquent, u est une solution du problème parabolique pour A telle que $u(O_+) = x$. Cela veut dire, vu (6), que notre théorème est prouvé pour $x \in \mathfrak{D}(A^{2q+3})$.

A présent, soit $x \in \mathfrak{D}(A^{q+1})$. En vertu de 1,9, on trouve une suite $x_k \in \mathfrak{D}(A^{2q+3})$ telle que

(7) $$x_k \to x, \; Ax_k \to Ax, \dots, A^{q+1}x_k \to A^{q+1}x \; (k \to \infty).$$

Notre théorème étant déjà prouvé pour $x \in \mathfrak{D}(A^{2q+3})$, il existe une suite u_k des solutions du problème parabolique pour A telle que $u_k(O_+) = x_k$ et (2), (3) ont lieu pour $k = 1, 2, \dots$.

En outre, il résulte de (1) et 1,19 pour $z \in \mathfrak{D}(A^q)$ $t \in R^+$, $r = 1, 2, \dots$, $r > 2\varkappa t$:

(8) $$\left\| \left(\frac{r}{t}\right)^r \left(\frac{r}{t}J + A\right)^{-r} z \right\| \leq Ne^{2\varkappa t}(\|z\| + \|Az\| + \dots + \|A^q z\|)$$

Si l'on prend $z = x_{k_1} - x_{k_2}$ et $z = A(x_{k_1} - x_{k_2})$ dans (8), on en obtient, lorsque r augmente indéfiniment, pour $t \in R^+$, $k_1, k_2 = 1, 2, \dots$:

(9) $$\|u_{k_1}(t) - u_{k_2}(t)\| \leq Ne^{2\varkappa t}(\|x_{k_1} - x_{k_2}\| + \|A(x_{k_1} - x_{k_2})\| + \dots + \|A^q(x_{k_1} - x_{k_2})\|)$$

(10) $$\|u'_{k_1}(t) - u'_{k_2}(t)\| \leq Ne^{2\varkappa t}(\|A(x_{k_1} - x_{k_2})\| + \|A^2(x_{k_1} - x_{k_2})\| + \dots + \|A^{q+1}(x_{k_1} - x_{k_2})\|$$

d'où il résulte que $u_k(t)$, $u'_k(t)$ sont uniformément convergentes sur (O, α) pour tout $\alpha \in R^+$.

Posons $u(t) = \lim_{k \to \infty} u_k(t)$.

On vérifie aisément à l'aide de 1,10 que u est une solution du problème parabolique pour A et que $u(O_+) = x$. Il reste à démontrer (2), (3) pour u, mais cela ne fait aucune difficulté et s'effectue d'une façon évidente.

Remarque. Le théorème célèbre de Hille-Yosida est une conséquence simple et immédiate du théorème précédent 2,6 et du théorème 2,3 avec $q = 0$.

2,7 SECOND THÉORÈME AUXILIAIRE D'EXISTENCE. *Soit* $A \in \mathfrak{L}^+(E)$, $q = 0, 1, 2, \dots$ *et* $\varkappa$ *une constante non-négative. Si* (a) *l'opérateur* A *est dense-*

ment défini, (b) *régulier pour* $\lambda > \varkappa$ *et* (c) *il existe une constante* N *telle que pour* $z \in \mathfrak{D}(A^q)$, $\lambda > \varkappa$ *et* $n = 1, 2, \ldots$:

$$(1) \qquad \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda^{k-n-1} (\lambda \mathcal{I} + A)^{-k} z \right\| \leq Nn (\lambda - \varkappa)^{-(n+1)} (\|z\| + \|Az\| + \ldots + \|A^q z\|)$$

alors pour tout $x \in \mathfrak{D}(A^{q+2})$. *il existe une solution* u *du problème parabolique pour* A *telle que* $u(O_+) = x$ *et pour tout* $t \in R^+$:

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{r} \left(\frac{r}{t}\right)^{k-1} \left(\frac{r}{t}\mathcal{I} + A\right)^{-k} x \longrightarrow \int_0^t u(\tau)\, d\tau \qquad (r \longrightarrow \infty\,,\; r > \varkappa t)$$

$$(3) \qquad \sum_{k=1}^{r} \left(\frac{r}{t}\right)^{k-1} \left(\frac{r}{t}\mathcal{I} + A\right)^{-k} Ax \longrightarrow x - u(t) \qquad (r \longrightarrow \infty\,,\; r > \varkappa t)$$

$$(4) \qquad \sum_{k=1}^{r} \left(\frac{r}{t}\right)^{k-1} \left(\frac{r}{t}\mathcal{I} + A\right)^{-k} A^2 x \longrightarrow Ax + u'(t) \quad (r \longrightarrow \infty\,,\; r > \varkappa t).$$

Preuve. Il résulte de 1,7, 1,20 et (1) pour $z \in \mathfrak{D}(A^{q+1})$, $\lambda > \varkappa + 1$ et $n = 1, 2, \ldots$:

$$(5) \qquad \|(\lambda \mathcal{I} + A)^{-n} z\| \leq (N+1)(\lambda - \varkappa - 1)^{-n} (\|z\| + \|Az\| + \ldots + \|A^{q+1} z\|)$$

et de 1,7 pour $x \in \mathfrak{D}(A)$, $t \in R^+$, $r = 1, 2, \ldots, r > \varkappa t$:

$$(6) \qquad \left(\frac{r}{t}\right)^{r} \left(\frac{r}{t}\mathcal{I} + A\right)^{-r} x = x - \sum_{k=1}^{r} \left(\frac{r}{t}\right)^{k-1} \left(\frac{r}{t}\mathcal{I} + A\right)^{-k} Ax.$$

Vu 1,19, l'inégalité (1) donne sans peine pour $x \in \mathfrak{D}(A^{q+1})$, $t \in R^+$, $r = 1, 2, \ldots, r > 2\varkappa t$:

$$(7) \qquad \left\| \sum_{k=1}^{r} \left(\frac{r}{t}\right)^{k-1} \left(\frac{r}{t}\mathcal{I} + A\right)^{-k} x \right\| \leq N e^{3\varkappa t} (\|x\| + \|Ax\| + \ldots + \|A^q x\|)$$

$$(8) \qquad \left\| x - \sum_{k=1}^{r} \left(\frac{r}{t}\right)^{k-1} \left(\frac{r}{t}\mathcal{I} + A\right)^{-k} Ax \right\| \leq N e^{4\varkappa t} (x + \|Ax\| + \ldots + \|A^{q+1} x\|).$$

Soit $x \in \mathfrak{D}(A^{q+2})$. Il résulte de (5) que le théorème 2,6 peut être appliqué et, par suite, il existe une solution u du problème parabolique pour A telle que $u(O_+) = x$ et 2,6 (2) et 2,6 (3) ont lieu. Cependant l'identité (6) montre que (3) (4) entrent en vigueur aussi. Il reste à vérifier (2) si l'on connaît déjà (3).

Posons $u_r(t) = \left(\frac{r}{t}\right)^r \left(\frac{r}{t}\mathcal{J} + A\right)^{-r} x = x - \sum_{k=1}^{r} \left(\frac{r}{t}\right)^{k-1} \left(\frac{r}{t}\mathcal{J} + A\right)^{-k} Ax$ (cf. (6)) et $v_r(t) = \sum_{k=1}^{r} \left(\frac{r}{t}\right)^{k-1} \left(\frac{r}{t}\mathcal{J} + A\right)^{-k} x$, $r = 1, 2, \ldots$. D'après 2,4 (2), v_r est dérivable et $v_r'(t) = u_{r+2}\left(\frac{r+2}{r}\, t\right)$ et d'après (7), $v_r(O_+) = 0$. Vu 1,12, on a $v_r(t) = \int_0^t u_{r+2}\left(\frac{r+2}{r}\, \tau\right) d\tau$. D'autre part, d'après (8),

$$\| u_r(t) \| \leq Ne^{4\varkappa t}(\| x \| + \| Ax \| + \ldots + \| A^q x \|).$$

Par suite, on peut utiliser 1,13 d'où l'on conclut, vu (3), que

$$v_r(t) \longrightarrow \int_0^t u(\tau)\, d\tau \quad (r \longrightarrow \infty\,,\ r > \varkappa t)$$

ce qui est en effet (2).

3. Couples d'opérateurs.

3,1 Soit $A, B \in \mathfrak{L}^+(E)$, $\lambda \in R$. Le couple d'opérateurs A, B s'appelle ***birégulier au point*** λ si $(\lambda^2 \mathcal{J} + \lambda B + A)^{-1}$ existe et appartient à $\mathfrak{L}(E)$. L'ensemble des points auxquels le couple A, B est birégulier sera désigné par $\mathfrak{R}(A, B)$.

3,2 PROPOSITION. *Si le couple d'opérateurs* $A, B \in \mathfrak{L}^+(E)$ *est birégulier au point* $\lambda \in R$, *alors pour tout* $x \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(B)$,

(1) $$(\lambda^2 \mathcal{J} + \lambda B + A)^{-1}(\lambda B + A)\, x = x - \lambda^2 (\lambda^2 \mathcal{J} + \lambda B + A)^{-1} x$$

Preuve. Cela découle de 1,7 (3) si l'on remplace A par $\lambda B + A$.

3,3 A tout comple d'opérateurs $A, B \in \mathfrak{L}^+(E)$, on associera un opérateur $C \in \mathfrak{L}^+(E \times E)$, défini de la façon suivante: $\mathfrak{D}(C) = \mathfrak{D}(A) \times \mathfrak{D}(B)$ et $C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ Ax + By \end{pmatrix}$ pour tout $x \in \mathfrak{D}(A)$, $y \in \mathfrak{D}(B)$.

L'opérateur C s'appelle ***l'opérateur associé au couple*** A, B.

3,4 PROPOSITION. *Si* $C \in \mathfrak{L}^+(E \times E)$ *est l'opérateur associé au couple* $A, B \in \mathfrak{L}^+(E)$, *alors* ($\alpha$) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathfrak{D}(C^2)$ *si et seulement si* $x \in \mathfrak{D}(A)$, $y \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(B)$

et $Ax + By \in \mathfrak{D}(B)$; *ensuite*

$$(1) \qquad C^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Ax - By \\ B(Ax + By) - Ay \end{pmatrix}$$

(β) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathfrak{D}(C^3)$ *si et seulement si* $x \in \mathfrak{D}(A)$, $y \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(B)$, $Ax + By \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(B)$ *et* $B(Ax + By) - Ay \in \mathfrak{D}(B)$; *ensuite*

$$(2) \qquad C^3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B(Ax + By) - Ay \\ -A(Ax + By) + B[B(Ax + By) - Ay] \end{pmatrix}$$

3,5 PROPOSITION *Soit* $A, B \in \mathfrak{L}^+(E)$, $C \in \mathfrak{L}^+(E \times E)$ *et* $\lambda \in R$. *Lorsque* C *est l'opérateur associé au couple* A, B, *alors* $\lambda^2 \mathcal{I} + \lambda B + A$ *est un opérateur biunivoque si et seulement si* $\lambda \mathcal{I} + C$ *est biunivoque.*

3,6 PROPOSITION. *Soit* $A, B \in \mathfrak{L}_+(E)$, $C \in \mathfrak{L}_+(E \times E)$, $\lambda \in R$. *Supposons que* C *soit l'opérateur associé au couple* A, B. *Si le couple d'opérateurs* A, B *est birégulier en* λ, *alors* (α) $\lambda \mathcal{I} + C$ *est biunivoque,* (β) $\lambda \mathcal{I} + C$ *transforme* $(\mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(B)) \times \mathfrak{D}(B)$ *sur* $\mathfrak{D}(B) \times E$ *et*

$$(1) \qquad (\lambda \mathcal{I} + C)^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda^2 \mathcal{I} + \lambda B + A)^{-1}(\lambda x + Bx + y) \\ \lambda(\lambda^2 \mathcal{I} + \lambda B + A)^{-1}(\lambda x + Bx + y) - x \end{pmatrix}$$

pour tout $x \in \mathfrak{D}(B)$, $y \in E$,

$$(2) \qquad (\lambda \mathcal{I} + C)^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda^2 \mathcal{I} + \lambda B + A)^{-1}(\lambda x + Bx + y) \\ (\lambda^2 \mathcal{I} + \lambda B + A)^{-1}(-Ax + \lambda y) \end{pmatrix}$$

pour tout $x \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(B)$, $y \in E$.

Preuve. L'operateur $\lambda \mathcal{I} + C$ étant biunivoque d'après 3,5 l'identité (1) se vérifie si l'on applique $\lambda \mathcal{I} + C$ au second membre de (1). Puis (2) est une conséquence immédiate de (1) et 3,2.

3,7 PROPOSITION. *Si l'opérateur* C *est régulier en* λ, *alors le couple* A, B *est birégulier en* λ *et pour tout* $x \in E$:

$$(1) \qquad (\lambda \mathcal{I} + C)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda^2 \mathcal{I} + \lambda B + A)^{-1} x \\ \lambda(\lambda^2 \mathcal{I} + \lambda B + A)^{-1} x \end{pmatrix}.$$

Preuve. Il existe deux opérateurs $T_1, T_2 \in \mathfrak{L}(E)$ tels que $(\lambda \mathcal{I} + C)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 x \\ T_2 x \end{pmatrix}$ pour $x \in E$. Par hypothèse, $(\lambda \mathcal{I} + C) \begin{pmatrix} T_1 x \\ T_2 x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$, c'est-à dire $T_1 x \in$

$\in \mathfrak{D}(A)$, $T_2 x \in \mathfrak{D}(B)$ et $\lambda T_1 x - T_2 x = 0$, $AT_1 x + \lambda T_2 x + BT_2 x = x$. Ceci entraîne que $T_1 x \in \mathfrak{D}(B)$ et $\lambda^2 T_1 x + \lambda B T_1 x + AT_1 x = x$. Comme $\lambda^2\mathcal{J} + \lambda B + A$ est biunivoque d'après 3,5 on en obtient $(\lambda^2\mathcal{J} + \lambda B + A)^{-1} = T_1$ ce qui vérifie la première assertion. L'identité (1) est évidente.

3,8. Le couple d'opérateurs $A, B \in \mathfrak{L}^+(E)$ s'appelle ***bifermé*** si $x_k \to x$, $y_k \to y$ $(k \to \infty)$, $x_k \in \mathfrak{D}(A)$, $y_k \in \mathfrak{D}(B)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ et $Ax_k + By_k \to z$ $(k \to \infty)$ entraîne $x \in \mathfrak{D}(A)$, $y \in \mathfrak{D}(B)$ et $Ax + By = z$.

3,9 Proposition . *Si $A \in \mathfrak{L}^+(E)$ est un opérateur fermé et $B \in \mathfrak{L}(E)$, alors le couple d'opérateurs A, B est bifermé.*

3,10 Proposition. *Soit $C \in \mathfrak{L}^+(E \times E)$ l'opérateur associé au couple $A, B \in \mathfrak{L}^+(E)$. Ensuite le couple d'opérateurs A, B est bifermé si et seulement si l'opérateur C est fermé dans $E \times E$.*

3,11 Proposition. *Soit $C \in \mathfrak{L}^+(E \times E)$ l'opérateur associé au couple $A, B \in \mathfrak{L}^+(E)$ et $\lambda \in R$. Si (a) le couple d'opérateurs A, B est bifermé, (b) birégulier en λ (c) l'opérateur B est densement défini et (d) $(\lambda^2\mathcal{J} + \lambda B + A)^{-1} B$ continu, alors (α) l'opérateur C est régulier en λ, (β) pour tout $x, y \in E$*

(1)
$$(\lambda\mathcal{J} + C)^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{(\lambda^2\mathcal{J} + \lambda B + A)^{-1}(\lambda\mathcal{J} + B)}\, x + (\lambda^2\mathcal{J} + \lambda B + A)^{-1} y \\ \lambda\, \overline{(\lambda^2\mathcal{J} + \lambda B + A)^{-1}(\lambda\mathcal{J} + B)}\, x - x + \lambda(\lambda^2\mathcal{J} + \lambda B + A)^{-1} y \end{pmatrix}$$

(γ) *pour tout $x \in \mathfrak{D}(A)$, $y \in \mathfrak{D}(B)$*

(2)
$$(\lambda\mathcal{J} + C)^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{(\lambda^2\mathcal{J} + \lambda B + A)^{-1}(\lambda\mathcal{J} + B)}\, x + (\lambda^2\mathcal{J} + \lambda B + A)^{-1} y \\ -(\lambda^2\mathcal{J} + \lambda B + A)^{-1}(Ax + By) + \overline{(\lambda^2\mathcal{J} + \lambda B + A)^{-1}(\lambda\mathcal{J} + B)}\, y \end{pmatrix}.$$

Preuve. D'abord, il résulte de 3,5 que $\lambda\mathcal{J} + C$ est biunivoque. Ensuite, on vérifie aisément que le second membre de 3,6 (1) est continu sur $\mathfrak{D}(B) \times E$. Donc nous sommes dans les conditions d'appliquer 1,6, d'où (α) et (β).

Maintenant, on va démontrer (γ). La formule 3,6 (2) montre que l'identité (2) est valable pour $x \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(B)$, $y \in \mathfrak{D}(B)$ et il s'agit donc de l'étendre sur $x \in \mathfrak{D}(A)$, $y \in \mathfrak{D}(B)$.

On voit aisément qu'il suffira de démontrer l'assertion suivante:

Pour tout $x \in \mathfrak{D}(A)$, $y \in \mathfrak{D}(B)$, il existe deux suites x_k, y_k $(k = 1, 2, ...)$ telles que $x_k \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(B)$, $y_k \in \mathfrak{D}(B)$, $x_k \to x$, $y_k \to y$, $Ax_k + By_k \to Ax + By$ $(k \to \infty)$.

En effet, soit $x \in \mathfrak{D}(A)$, $y \in \mathfrak{D}(B)$, i.e. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathfrak{D}(C)$. Posons $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = (\lambda \mathcal{I} + C)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Comme $\mathfrak{D}(B)$ est dense, il existe une suite $\bar{x}_k$ $(k = 1, 2, ...)$ telle que $\bar{x}_k \in \mathfrak{D}(B)$, $\bar{x}_k \to \bar{x}$ $(k \to \infty)$. Ecrivons $\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = (\lambda \mathcal{I} + C)^{-1} \begin{pmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{y} \end{pmatrix}$. Il résulte de ($\alpha$) que $x_k \to x$, $y_k \to y$ $(k \to \infty)$. D'autre part,

$$(\lambda \mathcal{I} + C)^{-1}\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_k - y_k \\ Ax_k + By_k + \lambda y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{y} \end{pmatrix} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x - y \\ Ax + By + \lambda y \end{pmatrix},$$

d'où l'on déduit facilement $Ax_k + By_k \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} Ax + By$.

Mais $\bar{x}_k \in \mathfrak{D}(B)$, $\bar{y} \in E$ et on voit de 3, 6 (β) que $x_k \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(B)$, $y_k \in \mathfrak{D}(B)$ ce qui achève la démonstration.

3,12 Théorème fondamental de densité. *Soit* $A, B \in \mathfrak{L}^+(E)$. *Si* (a) *les opérateurs* A, B *sont densement définis,* (b) *le couple* A, B *est bifermé,* (c) *il existe un* $\lambda \in R$ *tel que le couple* A, B *est birégulier en* λ, (d) $(\lambda^2 \mathcal{I} + \lambda B + A)^{-1} B$ *est continu, alors* (α) *pour tout* $x, y \in E$, *il existe deux suites* x_k, y_k $(k = 1, 2, ...)$ *telles que*

(1) $$x_k \in \mathfrak{D}(A),\ y_k \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(B),\ Ax_k + By_k \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(B)$$
$$B(Ax_k + By_k) - Ay_k \in \mathfrak{D}(B) \qquad (k = 1, 2, ...)$$

(2) $$x_k \to x,\ y_k \to y \qquad (k \to \infty)$$

(β) *pour tout* $x \in \mathfrak{D}(A)$, $y \in \mathfrak{D}(B)$, *il existe deux suites* x_k, y_k $(k = 1, 2, ...)$ *telles que* (1) (2) *ont lieu et*

(3) $$Ax_k + By_k \to Ax + By \qquad (k \to \infty)$$

(γ) *pour tout* $x \in \mathfrak{D}(A), y \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(B), Ax + By \in \mathfrak{D}(B)$, *il existe deux suites* x_k, y_k $(k = 1, 2, \dots)$ *telles que* (1), (2), (3) *ont lieu et*

$$Ay_k - B(Ax_k + By_k) \to Ay - B(Ax + By) \qquad (k \to \infty) \tag{4}$$

Preuve. Il s'ensuit de 3, 11 que l'opérateur C, associé au couple A, B est régulier en λ. En outre, C est densement défini par hypothèse. Donc notre théorème résulte de 1, 9 pour $n = 3, q = 1, 2, 3$ et de 3, 4.

3, 13 PROPOSITION. *Soit* Λ *comme dans* 1,15. *Si* (a) *le couple d'opérateurs* $A, B \in \mathfrak{L}^+(E)$ *est bifermé,* (b) *les fonctions* $f, g \in \Lambda \to E$ *sont continues et intégrables,* (c) $f(t) \in \mathfrak{D}(A)$, $g(t) \in \mathfrak{D}(B)$ *pour* $t \in \Lambda$ *et* (d) *la fonction* $Af(t) + Bg(t)$ *est aussi continue et intégrable, alors* (α) $\int_\Lambda f(\tau)\,d\tau \in \mathfrak{D}(A), \int_\Lambda g(\tau)\,d\tau \in \mathfrak{D}(B)$, ($\beta$)

$$A\int_\Lambda f(\tau)\,d\tau + B\int_\Lambda g(\tau)\,d\tau = \int_\Lambda (Af(\tau) + Bg(\tau))\,d\tau.$$

La *preuve* résulte de 1,5 et 3,10, si lon se sert de l'opérateur associé au couple A, B.

4. Solutions du problème hyperbolique

4,1 Soit $A, B \in \mathfrak{L}^+(E)$, $u \in R^+ \to E$. La fonction u s'appelle ***la solution du problème hyperbolique pour le couple d'operateurs*** A, B si (I) u est deux fois continûment dérivable, (II) $u(O_+)$, $u'(O_+)$ existent, (III) $u(t) \in \mathfrak{D}(A)$, $u'(t) \in \mathfrak{D}(B)$ pour tout $t \in R^+$, (IV) $u''(t) + Bu'(t) + Au(t) = 0$ pour tout $t \in R^+$.

4,2 PROPOSITION. *Si le couple d'opérateurs* A, B *est bifermé et* u *est une solution du problème hyperbolique pour* A, B, *alors pour tout* $t \in R^+$

$$\int_0^t \int_0^\tau u(\sigma)\,d\sigma\,d\tau \in \mathfrak{D}(A), \int_0^t u(\tau)\,d\tau - tu(O_+) \in \mathfrak{D}(B) \tag{1}$$

$$u(t) - u(O_+) - tu'(O_+) + B\left(\int_0^t u(\tau)\,d\tau - tu(O_+)\right) + A\left(\int_0^t \int_0^\tau u(\sigma)\,d\sigma\,d\tau\right) = 0. \tag{2}$$

Preuve. On intègre l'équation (IV) de 4,1 en utilisant 3,13 sur l'intervalle (s, t), $0 < s < t$ et on obtient

$$u'(t) - u'(s) + B(u(t) - u(s)) + A\left(\int_s^t u(\tau)\, d\tau\right) = 0$$

d'où

$$u'(t) - u'(O_+) + B(u(t) - u(O_+)) + A\left(\int_0^t u(\tau)\, d\tau\right) = 0$$

pour $s \to O_+$. Ensuite, on intègre en vertu de 3,13 la dernière équation encore une fois sur $(0, t)$.

4,3 Proposition. *Soit $A, B \in \mathfrak{L}^+(E)$, $u \in R^+ \to E$ et ω une constante non-négative. Si le couple d'opérateurs A, B est bifermé u est une solution du problème hyperbolique pour A, B et la fonction $e^{-\omega t} u(t)$ est bornée sur R^+, alors, pour tout $\lambda > \omega$, $\int_0^\infty e^{-\lambda\tau} u(\tau)\, d\tau$ existe,*

(1) $$\int_0^\infty e^{-\lambda\tau} u(\tau)\, d\tau \in \mathfrak{D}(A),\ \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} u(\tau)\, d\tau - u(O_+) \in \mathfrak{D}(B)$$

(2) $$\lambda^2 \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} u(\tau)\, d\tau - \lambda\, u(O_+) - u'(O_+) + B\left(\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} u(\tau)\, d\tau - u(O_+)\right) + \\ + \lambda^2 A\left(\int_0^\infty e^{-\lambda\tau} u(\tau)\, d\tau\right) = 0.$$

Preuve. On a évidemment $\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}\, d\tau = \lambda^{-1}$ pour $\lambda > 0$.

D'autre part, on vérifie aisément, en intégrant par parties, pour $\lambda > \omega$:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda\tau} \int_0^\tau u(\sigma)\, d\sigma\, d\tau = \lambda^{-1} \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} u(\tau)\, d\tau.$$

Par conséquent, $\int\limits_0^\infty e^{-\lambda\tau}\,\tau\,d\tau = \lambda^{-2}\,(\lambda > 0)$ et

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda\tau}\int\limits_0^\tau\int\limits_0^\sigma u(\varrho)\,d\varrho\,d\sigma\,d\tau = \lambda^{-2}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda\tau}\,u(\tau)\,d\tau\;(\lambda > \omega).$$

Maintenant, on multiplie 4,2 (2) par $e^{-\lambda\tau}\,(\lambda > \omega)$, intègre sur $(0, \infty)$ et transforme l'identité si obtenue d'après 3,13.

4,4 PROPOSITION. *Soit* $C \in \mathfrak{L}^+(E \times E)$ *l'opérateur associé au couple* $A, B \in \mathfrak{L}^+(E)$. *Si* u *est une solution du problème hyperbolique pour* A, B, *alors la fonction* $\begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix}$ *est une solution du problème parabolique pour* C *et, inversement, si* $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ *est une solution du problème parabolique pour* C, *alors* u *est une solution du problème hyperbolique pour* A, B *et* $u' = v$.

La *preuve* est presque évidente.

Remarque. Cette proposition montre la relation entre les solutions du problème hyperbolique et du problème parabolique.

5. Unicité du problème hyperbolique.

5,1 Le couple d'opérateurs $A, B \in \mathfrak{L}^+(E)$ est dit ***hyperboliquement déterminé*** si toute solution u du problème hyperbolique pour A, B avec $u(O_+) = u'(O_+) = 0$ est identiquement nulle.

5,2 PROPOSITION. *Le couple d'operateurs* $A, B \in \mathfrak{L}^+(E)$ *est hyperboliquement déterminé, si et seulement si l'operateur* $C \in \mathfrak{L}^+(E \times E)$, *associé au couple* A, B, *est paraboliquement déterminé.*

Preuve. C'est une conséquence immédiate de 4,4.

5,3 PROPOSITION. *Soit* $A, B \in \mathfrak{L}^+(E), v \in R^+ \to E$. *Si* (a) *le couple d'opérateurs* A, B *est hyperboliquement déterminé,* (b) v *est une fonction continue sur* R^+ *et intégrable sur* $(0,1)$, (c) $\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau v(\sigma)\,d\sigma\,d\tau \in \mathfrak{D}(A), \int\limits_0^t v(\tau)\,d\tau \in \mathfrak{D}(B)$, (d) $v(t) + B\int\limits_0^t v(\tau)\,d\tau + A\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau v(\sigma)\,d\sigma\,d\tau = 0$ *pour tout* $t \in R^+$, *alors* v *est identiquement nulle.*

Preuve. On pose $u(t) = \int_0^t \int_0^\tau v(\sigma)\, d\sigma\, d\tau$ ce qui est une solution du problème hyperbolique pour A, B vérifiant $u(O_+) = u'(O_+) = 0$.

5,4 Théorème fondamental d'unicité. *Soit $A, B \in \mathfrak{L}^+(E)$. Si* (a) *le couple d'opérateurs A, B est bifermé* (b) *l'operateur B est densement défini,* (c) *il existe una constante c_0 telle que couple A, B est birégulier pour $\lambda > c_0$,* (d) *il existe deux constantes K, c telles que pour tout $x \in \mathfrak{D}(B)$, $\lambda > c_0$, $\lambda > c$*

$$\| (\lambda^2 \mathcal{I} + \lambda B + A)^{-1} x \| \leq K e^{c\lambda} \| x \| \tag{1}$$

$$\| (\lambda^2 \mathcal{I} + \lambda B + A)^{-1} B x \| \leq K e^{c\lambda} \| x \|, \tag{2}$$

alors le couple A, B est hyperboliquement déterminé.

Preuve. Soit C l'opérateur associé au couple A, B. En utilisant 3,11, on vérifie sans peine que les hypothèses du théorème 2,3 sont valables pour $q = 0$. Par conséquent, l'opérateur C est paraboliquement déterminé et notre théorème s'ensuit de 5,2.

6. Résolubilité stricte du problème hyperbolique.

6,1 Théorème fondamental d'existence au sens strict. *Soit $A, B \in \mathfrak{L}^+(E)$ et $\omega_1, \omega_2, M_1, M_2$ quatre constantes non-négatives. Si* (a) *les opérateurs A, B sont densement définis,* (b) *le couple A, B est bifermé,* (c) *il existe une constante $\omega_0 \geq 0$ telle que le couple A, B est birégulier pour tout $\lambda > \omega_0$,* (d) *pour tout $x \in \mathfrak{D}(B)$, les fonctions $(\lambda^2 \mathcal{I} + \lambda B + A)^{-1}(\lambda x + Bx)$, $(\lambda^2 \mathcal{I} + \lambda B + A)^{-1} x$ sont indéfiniment dérivables dans $\lambda > \omega_0$,* (e) *pour tout $x \in \mathfrak{D}(B)$, $\lambda > \omega_0$, $\lambda > \omega_1$, $\lambda > \omega_2$, $p = 0, 1, 2, \dots$:*

$$\left\| \frac{d^p}{d\lambda^p} (\lambda^2 \mathcal{I} + \lambda B + A)^{-1} (\lambda x + Bx) \right\| \leq M_1\, p\,!\, (\lambda - \omega_1)^{-(p+1)} \| x \| \tag{1}$$

$$\left\| \frac{d^p}{d\lambda^p} (\lambda^2 \mathcal{I} + \lambda B + A)^{-1} x \right\| \leq M_2\, p\,!\, (\lambda - \omega_2)^{-(p+1)} \| x \|, \tag{2}$$

alors (α) *le couple A, B est hyperboliquement déterminé,* (β) *pour tout $x, y \in E$ tels que*

$$x \in \mathfrak{D}(A),\ y \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(B),\ Ax + By \in \mathfrak{D}(B), \tag{3}$$

il existe une solution u du problème hyperbolique pour A, B vérifiant $u(O_+) = x$, $u'(O_+) = y$, (γ) ***u étant une solution du problème hyperbolique pour A, B, on a pour*** $t \in R^+$:

$$\text{(4)} \qquad \| u(t) \| \leq M_1 e^{\omega_1 t} \| u(O_+) \| + M_2 e^{\omega_2 t} \| u'(O_+) \|$$

(δ) ***u étant une solution du problème hyperbolique pour A, B, vérifiant***

$$\text{(5)} \qquad u(O_+) \in \mathfrak{D}(A), \; u'(O_+) \in \mathfrak{D}(B)$$

on a pour tout $t \in R^+$:

$$\text{(6)} \qquad \| u'(t) \| \leq M_1 e^{\omega_1 t} \| u'(O_+) \| + M_2 e^{\omega_2 t} \| Au(O_+) + Bu'(O_+) \|$$

(ε) ***u étant une solution du problème hyperbolique pour A, B, vérifiant***

$$\text{(7)} \qquad u(O_+) \in \mathfrak{D}(A), \; u'(O_+) \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(B), \; Au(O_+) + Bu'(O_+) \in \mathfrak{D}(B),$$

on a pour tout $t \in R^+$:

$$\text{(8)} \qquad \| u''(t) \| \leq M_1 e^{\omega_1 t} \| Au(O_+) + Bu'(O_+) \| + M_2 e^{\omega_2 t} \| Au'(O_+) - B(Au(O_+) + Bu'(O_+)) \|$$

Preuve. Posons d'abord $\omega = \max(\omega_0, \omega_1, \omega_2)$ et $M = \max(M_1, M_2)$. Ecrivons pour $\lambda > \omega$, $n = 1, 2, \ldots$

$$\text{(9)} \qquad \Gamma_n(\lambda) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} \overline{(\lambda^2 \mathcal{J} + \lambda B + A)^{-1} (\lambda \mathcal{J} + B)}$$

$$\text{(10)} \qquad \Theta_n(\lambda) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{d\alpha^{n-1}} (\lambda^2 \mathcal{J} + \lambda B + A)^{-1}$$

ce qui est toujours possible en conséquence de nos hypothèses qui garantissent l'existence de ces dérivées-ci dans l'espace $\mathfrak{L}(E)$ suivant la proposition 1,14.

On obtient de (1), (2), en tenant compte de 1,14, pour $\lambda > \omega$, $n = 1, 2, \ldots$:

$$\text{(11)} \qquad \| \Gamma_n(\lambda) \| \leq M_1 (\lambda - \omega_1)^{-n}, \qquad \| \Theta_n(\lambda) \| \leq M_2 (\lambda - \omega_2)^{-n}.$$

En prenant (11) avec $n = 1$, on voit que les hypothèses de 5,4 ont lieu et ceci donne (α).

Soit C l'opérateur associé au couple A, B.

Il résulte de 3,11 et 1,8:

(12) l'opérateur C est régulier pour $\lambda > \omega$.

$$(13) \qquad (\lambda \mathcal{I} + C)^{-n} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_n(\lambda)\, x + \Theta_n(\lambda)\, y \\ \Gamma_n(\lambda)\, y - \Theta_n(\lambda)(Ax + By) \end{pmatrix}$$

pour $x \in \mathfrak{D}(A)$, $y \in \mathfrak{D}(B)$, $\lambda > \omega$, $n = 1, 2, \ldots$,

$$(14) \qquad (\lambda \mathcal{I} + C)^{-n}\, C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Gamma_n(\lambda)\, y + \Theta_n(\lambda)(Ax + By) \\ \Gamma_n(\lambda)(Ax + By) + \Theta_n(\lambda)\,[Ay - B(Ax + By)] \end{pmatrix}$$

pour $x \in \mathfrak{D}(A)$, $y \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(B)$, $Ax + By \in \mathfrak{D}(B)$, $\lambda > \omega$, $n = 1, 2, \ldots$.

Maintenant, on va montrer

$$(15) \qquad \left\| (\lambda \mathcal{I} + C)^{-n} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| \leq M(\lambda - \omega)^{-n} \left(\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| + \left\| C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| \right)$$

pour $x \in \mathfrak{D}(A)$, $y \in \mathfrak{D}(B)$, $\lambda > \omega$, $n = 1, 2, \ldots$.

En effet, il s'ensuit de (13) et (11)

$$\left\| (\lambda \mathcal{I} + C)^{-n} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| \leq M(\lambda - \omega)^{-n} (\|x\| + 2\|y\| + \|Ax + By\|) \leq$$

$$M(\lambda - \omega)^{-n} (\|x\| + 2\|y\| + \|Ax + By\|) =$$

$$M(\lambda - \omega)^{-n} \left(\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| + \left\| C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| \right).$$

D'autre part, comme $\mathfrak{D}(A)$, $\mathfrak{D}(B)$ sont denses dans E par hypothèse, $\mathfrak{D}(C)$ est dense dans $E \times E$.

Ceci étant, nous sommes dans les conditions d'appliquer le théorème 2,6, d'où l'on déduit, en utilisant 3,4 et 4,4, la conclusion suivante décisive:

Pour tout $x, y \in E$ vérifiant (3), il existe une solution u du problème hyperbolique pour A, B, vérifiant $u(0_+) = x$, $u'(0_+) = y$ et jouissant, en vertu de (13), (14), de la propriété suivante pour tout $t \in R^+$, $r > \omega t$, $r \to \infty$:

$$(16) \qquad \left(\frac{r}{t}\right)^r \left[\Gamma_r\left(\frac{r}{t}\right) x + \Theta_r\left(\frac{r}{t}\right) y \right] \to u(t)$$

$$\left(\frac{r}{t}\right)^r \left[\Gamma_r\left(\frac{r}{t}\right) y - \Theta_r\left(\frac{r}{t}\right)(Ax + By)\right] \rightarrow u'(t) \tag{17}$$

$$\left(\frac{r}{t}\right)^r \left[\Gamma_r\left(\frac{r}{t}\right)(Ax + By) + \Theta_r\left(\frac{r}{t}\right)(Ay + B(Ax + By))\right] \rightarrow - u''(t). \tag{18}$$

Par conséquent, (β) est complètement démontré.

Si l'on estime les premiers membres de (16)-(18) d'après (11) et si l'on laisse r augmenter infiniment en tenant compte de 1,21, alors on obtient (4), (6), (8) pour une solution vérifiant (7). Mais comme le couple A, B est déjà connu hyperboliquement déterminé, on a en effet établi (γ)-(ε) pour toutes les solutions vérifiant (7).

Ainsi, (ε) est complètement démontré et il reste à renforcer (γ) et (δ).

Commençons par (γ). Soit u une solution arbitraire du problème hyperbolique pour A, B. Il résulte de 3,12 qu'il existe deux suites $x_k, y_k (k = 1, 2, \ldots)$ telles que $x_k \rightarrow x$, $y_k \rightarrow y$ $(k \rightarrow \infty)$ et (3) a lieu pour tout $k = 1, 2, \ldots$. En utilisant (α), (β), on trouvera une suite unique des solutions u_k vérifiant $u_k(O_+) = x_k$, $u'_k(O_+) = y_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Donc (4) est valable pour u_k et donne

$$\| u_{k_1}(t) - u_{k_2}(t) \| \leq M_1 e^{\omega_1 t} \| x_{k_1} - x_{k_2} \| + M_2 e^{\omega_2 t} \| y_{k_1} - y_{k_2} \| \tag{19}$$

pour tout $t \in R^+$, $k_1, k_2 = 1, 2, \ldots$.

Posons $v(t) = \lim\limits_{k \rightarrow \infty} u_k(t)$ $(t \in R^+)$ en vertu (19).

Le couple A, B étant bifermé, on peut appliquer 4,2 sur u_k et on obtient en passant à la limite pour $k \rightarrow \infty$

$$v(t) + u(O_+) - tu'(O_+) + B\left(\int_0^t v(\tau)\, d\tau - tu(O_+)\right) + A\int_0^t \int_0^\tau v(\sigma)\, d\sigma\, d\tau = 0. \tag{20}$$

D'autre part, l'identité (20) a lieu d'après 4,2 si l'on remplace v par u. Donc

$$u(t) - v(t) + B\int_0^t (u(\tau) - v(\tau))\, d\tau + A\int_0^t \int_0^\tau (u(\sigma) - v(\sigma))\, d\sigma\, d\tau = 0, \tag{21}$$

d'où $u = v$ d'après 5,3.

Donc $u_k(t) \rightarrow u(t)$ $(k \rightarrow \infty)$ pour $t \in R^+$ et on peut transmettre l'inégalité (4) de u_k sur u ce qui achève la démonstration de (γ).

Pour établir (δ), on procède de la façon complètement analogue à celle qui a été appliquée pour (γ), mais on doit examiner non seulement les solutions mais aussi leurs dérivées en utilisant 1,10.

Le théorème est donc démontré.

Remarque 1. D'après 3,12, l'ensemble de tous les couples $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifiant (3) est dense dans $E \times E$. Par suite, notre théorème garantit l'existence des solutions pour les données d'une variété assez puissante et il est ainsi suffisamment efficace (cfr. 6,4). Ceci permet, entre autres, de construire différents types de solutions généralisées (faibles, distributives) dont quelques-unes existent pour toutes les données $x \in E$, $y \in E$ sous les hypothèses de 6,1.

Remarque 2. Dans certains cas, les conditions 6,1 (3) et 6,1 (7) qui sont assez compliquées deviennent plus simples. Par exemple, dans le cas le plus important, où $B \in \mathfrak{L}(E)$, (3) équivaut à $x \in \mathfrak{D}(A)$, $y \in \mathfrak{D}(A)$. Dans un autre cas, où $A = 0$, (3) équivaut à $x \in E$, $y \in \mathfrak{D}(B^2)$.

6,2 Théorème normatif pour le cas strict. *Soit* $A, B \in \mathfrak{L}^+(E)$, $\omega_1, \omega_2, M_1, M_2$ *quatre constantes non-négatives. Si* (a) *les opérateurs* A, B *sont densement définis,* (b) *le couple* A, B *est bifermé,* (c) *le couple* A, B *est hyperboliquement déterminé,* (d) *il existe un ensemble dense* $D \subseteq E \times E$ *tel que, pour tout* $z \in D$, *on trouve une solution du problème hyperbolique pour* A, B *vérifiant* $\begin{pmatrix} u(O_+) \\ u'(O_+) \end{pmatrix} = z$, (e) *pour toute solution* u *du problème hyperbolique pour* A, B *et pour tout* $t \in R^+$, *on a*

$$\| u(t) \| \leq M_1 e^{\omega_1 t} \| u(O_+) \| + M_2 e^{\omega_2 t} \| u'(O_+) \| , \tag{1}$$

alors (α) *le couple* A, B *est birégulier pour* $\lambda > \omega_1$, $\lambda > \omega_2$, (β) *pour tout* $x \in \mathfrak{D}(B)$, *les fonctions* $(\lambda^2 \mathcal{I} + \lambda B + A)^{-1}(\lambda x + Bx)$, $(\lambda^2 \mathcal{I} + \lambda B + A)^{-1} x$ *sont indéfiniment dérivables pour* $\lambda > \omega_1$, $\lambda > \omega_2$, (γ) *pour* $x \in \mathfrak{D}(B)$, $\lambda > \omega_1$, $\lambda > \omega_2$ *et* $p = 0, 1, 2, \ldots$:

$$\left\| \frac{d^p}{d\lambda^p} (\lambda^2 \mathcal{I} + \lambda B + A)^{-1} (\lambda x + Bx) \right\| \leq M_1 \, p! \, (\lambda - \omega_1)^{-(p+1)} \| x \| \tag{2}$$

$$\left\| \frac{d^p}{d\lambda^p} (\lambda^2 \mathcal{I} + \lambda B + A)^{-1} x \right\| \leq M_2 \, p! \, (\lambda - \omega_2)^{-(p+1)} \| x \| . \tag{3}$$

Preuve. Tout d'abord, on va démontrer que l'opérateur $\lambda^2 \mathcal{I} + \lambda B + A$ est biunivoque. En effet, dans le cas contraire, il existerait un $x \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(B)$, $x \neq 0$ et un $\lambda > \omega_1$, $\lambda > \omega_2$ tels que $(\lambda^2 \mathcal{I} + \lambda B + A) x = 0$. Posons $v(t) = e^{\lambda t} x$. On vérifie sans peine que c'est une solution du problème hyperbolique pour A, B avec $v(O_+) = x$, $v(O_+) = \lambda x$. Une telle solution étant unique par hypothèse, on a donc d'après (1) : $\| v(t) \| = e^{\lambda t} \| x \| \leq M_1 e^{\omega_1 t} \| x \| + M_2 e^{\omega_2 t} \lambda \| x \|$ ce qui donne une contradiction, car $\lambda > \omega_1$, $\lambda > \omega_2$ et $\| x \| > 0$.

Soit D un sous-ensemble fixe de $E \times E$ jouissant de la propriété (d).

Pour $\lambda > \omega_1$, $\lambda > \omega_2$ et $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D$, on construit une fonction $\Phi(\lambda, x, y)$ de la façon suivante. Par hypothèse on peut trouver une solution u du problème hyperbolique pour A, B vérifiant $u(O_+) = x$, $u'(O_+) = y$ et $\|u(t)\| \leq M_1 e^{\omega_1 t} \|x\| + M_2 e^{\omega_2 t} \|y\|$. Comme une telle solution est unique par hypothèse, on peut poser $\Phi(\lambda, x, y) = \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} u(\tau)\, d\tau$.

D'où l'on obtient aisément pour $\lambda > \omega_1$, $\lambda > \omega_2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D$ et $p = 0, 1, 2, \ldots$:

$$\left\| \frac{d^p}{d\lambda^p} \Phi(\lambda, x, y) \right\| \leq M_1 e^{\omega_1 t} \| x \| + M_2 e^{\omega_2 t} \| y \| . \tag{4}$$

Comme D est dense dans $E \times E$, il résulte de (4) que Φ peut être prolongé sur tout le $E \times E$ par continuité. Cette extension soit désignée par $\bar{\Phi}$. Il s'ensuit par recurrence de (4) à l'aide de 1,10 que $\bar{\Phi}(\cdot, x, y)$ est indéfiniment dérivable pour $\lambda > \omega_1$, $\lambda > \omega_2$, $x, y \in E$ et que pour $p = 0, 1, 2, \ldots$

$$\left\| \frac{d^p}{d\lambda^p} \bar{\Phi}(\lambda, x, y) \right| \leq M_1 e^{\omega_1 t} \| x \|, + M_2 e^{\omega_2 t} \| y \| . \tag{5}$$

Soit $x \in \mathfrak{D}(B)$, $y \in E$. Comme D est dense, il existe une suite des solutions u_k du problème hyperbolique pour A, B, vérifiant $\begin{pmatrix} u_k(O_+) \\ u_k'(O_+) \end{pmatrix} \in D$ et $u_k(O_+) \longrightarrow x$, $u_k'(O_+) \longrightarrow y$ $(k \longrightarrow \infty)$. En vertu de (1) on en déduit aisément que $u_k(t)$ converge uniformément sur $(0, \alpha)$ pour tout $\alpha \in R^+$, vers une fonction continue $u \in R^+ \longrightarrow E$. En outre, $\| u(t) \| \leq M_1 e^{\omega_1 t} \| x \| + M_2 e^{\omega_2 t} \| y \|$ et $\int_0^\infty e^{-\lambda\tau} u(\tau)\, d\tau = \bar{\Phi}(\lambda, x, y)$.

Le couple A, B étant bifermé, on obtient à l'aide de 4,3 (en tenant compte de la condition $x \in \mathfrak{D}(B)$) $\bar{\Phi}(\lambda, x, y) \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(B)$, $\lambda^2 \bar{\Phi}(\lambda, x, y) + \lambda B \bar{\Phi}(\lambda, x, y) + A \bar{\Phi}(\lambda, x, y) = \lambda x + Bx + y$ ce qui équivaut à

$$\lambda x + Bx + y \in \mathfrak{D}((\lambda^2 \mathcal{I} + \lambda B + A)^{-1}) \tag{7}$$

$$\bar{\Phi}(\lambda, x, y) = (\lambda^2 \mathcal{I} + \lambda B + A)^{-1} (\lambda x + Bx + y) \tag{8}$$

pour $x \in \mathfrak{D}(B)$, $y \in E$, $\lambda > \omega_1$, $\lambda > \omega_2$.

Maintenant il est facile de déduire les assertions de notre théorème de (7), (8) et (5).

6,3 Le couple d'opérateurs $A, B \in \mathfrak{L}^+(E)$ s'appelle ***strictement bihyperbolique*** {***strictement bicorrect***} si les conditions (c), (d) de 6,1 {6,2} ont lieu et s'il existe quatre constantes $\omega_1, \omega_2, M_1, M_2$ telles que la condition (e) de 6,1 {6,2} a aussi lieu.

6,4 Théorème final pour le cas strict. *Soit* $A, B \in \mathfrak{L}^+(E)$. *Si* (a) *les opérateurs* A, B *sont densement définis,* (b) *le couple* A, B *est bifermé, alors le couple* A, B *est strictement bicorrect si, et seulement si, il est strictement bihyperbolique.*

Preuve. La part « seulement si » est une conséquence immédiate de 6,1 et 3,12, la part « si » de 6,2.

Remarque. Le théorème précédent montre que (sous certaines conditions préalables) les hypothèses du théorème d'existence 6,1 sont les plus générales possible.

6,5 Exemple. *Il existe un espace de Banach* E *et deux opérateurs* $A, B \in \mathfrak{L}^+(E)$ *tels que* (α) *toutes les hypothèses de* 6,1 *sont en vigueur* (β) *ni* A *ni* B *ne sont continus,* (γ) A, B *ne sont pas commutatifs.*

Preuve. Soit $E = (c_0)$, espace de toutes les suites tendant vers zéro, muni de la norme usuelle $\sup\limits_{r=1,2,\ldots} |x(r)|$.

Les opérateurs A, B soient définis par les conditions suivantes: $x \in \mathfrak{D}(A)\{\mathfrak{D}(B)\}$ si et seulement si $rx(2r-1) \to 0\ (r \to \infty)\ \{rx(2r) \to 0\ (r \to \infty)\}$; ensuite $Ax(2r-1) = rx(2r-1)$, $Ax(2r) = x(2r-1)\ (r = 1, 2, \ldots)$ $\{Bx(2r-1) = 0,$ $Bx(2r) = rx(2r)\ (r = 1, 2, \ldots)\}$.

Les assertions (β), (γ) étant presque évidentes, on va démontrer (α), i.e. les propriétés (a)-(e) de 6,1.

Les propriétés (a), (b) sont aisément à vérifier. Ensuite, un calcul simple montre que

$$(1) \qquad (\lambda^2 \mathcal{I} + \lambda B + A)^{-1}\, x(2r-1) = (\lambda^2 + r)^{-1}\, x(2r-1)$$

$$(2) \qquad (\lambda^2 \mathcal{I} + \lambda B + A)^{-1}\, x(2r) = [\lambda(\lambda^2 + r)(\lambda + r)]^{-1}\, x(2r-1) + [\lambda(\lambda + r)]^{-1} x(2r)$$

pour tout $x \in E$, $\lambda > 0$, $r = 1, 2, \ldots$.

Ceci entraîne immédiatement (c) et (d).

Les estimations 6,1 (1) et 6,1 (2) résultent facilement de (1), (2) à l'aide des formules 21.8, 21.3 et 1.22 de [6].

7. Résolubilité modérée du problème hyperbolique.

7,1 THÉORÈME FONDAMENTAL D'EXISTENCE AU SENS MODÉRÉ. *Soit* A, $B \in \mathfrak{L}^+(E)$ *et* ω_1, ω_2, M_1, M_2 *quatre constantes non-négatives. Si* (a)-(d) *sont les mêmes que dans* 6,1, (e) *pour tout* $x \in \mathfrak{D}(B)$, $\lambda > \omega_0$, $\lambda > \omega_1$, $\lambda > \omega_2$ *et* $p = 0, 1, 2, \ldots$:

$$(1) \qquad \left\| \frac{d^p}{d\lambda^p} \lambda^{-1} (\lambda^2 \mathcal{I} + \lambda B + A)^{-1} (\lambda x + Bx) \right\| \leq M_1 (p+1)! (\lambda - \omega_1)^{-(p+2)} \| x \|$$

$$(2) \qquad \left\| \frac{d^p}{d\lambda^p} \lambda^{-1} (\lambda^2 \mathcal{I} + \lambda B + A)^{-1} x \right\| \leq M_2 (p+1)! (\lambda - \omega_2)^{-(p+2)} \| x \|$$

alors (α) *le couple* A, B *est hyperboliquement déterminé,* (β) *pour tout* $x, y \in E$ *tels que*

$$(3) \qquad x \in \mathfrak{D}(A), \; y \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(B), \; Ax + By \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(B)$$
$$Ay - B(Ax + By) \in \mathfrak{D}(B),$$

il existe une solution u *du problème hyperbolique pour* A, B *vérifiant* $u(O_+) = x$, $u'(O_+) = y$, (γ) u *étant une solution du problème hyperbolique pour* A, B, *on a pour tout* $t \in R^+$:

$$(4) \qquad \left\| \int_0^t u(\tau)\, d\tau \right\| \leq M_1 \, t \, e^{\omega_1 t} \| u(O_+) \| + M_2 \, t \, e^{\omega_2 t} \| u'(O_+) \|$$

(δ) u *étant une solution du problème hyperbolique pour* A, B *vérifiant*

$$(5) \qquad u(O_+) \in \mathfrak{D}(A), \quad u'(O_+) \in \mathfrak{D}(B)$$

on a pour tout $t \in R^+$:

$$(6) \qquad \| u(t) - x \| \leq M_1 t e^{\omega_1 t} \| u'(O_+) \| + M_2 t e^{\omega_2 t} \| Au(O_+) + Bu'(O_+) \|$$

(ε) u *étant une solution du problème hyperbolique pour* A, B *vérifiant*

$$(7) \qquad u(O_+) \in \mathfrak{D}(A), \; u'(O_+) \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(B), \; Au(O_+) + Bu'(O_+) \in \mathfrak{D}(B)$$

on a pour tout $t \in R^+$:

$$(8) \qquad \| u'(t) - y \| \leq M_1 \, t \, e^{\omega_1 t} \| Au(O_+) + Bu'(O_+) \| + M_2 \, t \, e^{\omega_2 t} \| Au'(O_+) - B(Au(O_+) + Bu'(O_+)) \|$$

(ξ) *u étant une solution du problème hyperbolique pour A, B vérifiant*

(9) $u(O_+) \in \mathfrak{D}(A)$, $u'(O_+) \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(B)$, $Au(O_+) + Bu'(O_+) \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(B)$,

$$Au'(O_+) - B(Au(O_+) + Bu'(O_+)) \in \mathfrak{D}(B)$$

on a pour tout $t \in R^+$

(10)
$$\| u'(t) + Ax + By \| \leq M_1 t e^{\omega_1 t} \| Au'(O_+) - B(Au(O_+) + Bu'(O_+)) \| + M_2 t e^{\omega_2 t} \| A(Au(O_+) + Bu(O_+)) + B[Au'(O_+) - B(Au(O_+) + Bu'(O_+))] \| .$$

Preuve. Posons d'abord $\omega = \max(\omega_0, \omega_1, \omega_2)$ et $M = \max(M_1, M_2)$. Ecrivons pour $\lambda > \omega$ et $n = 1, 2, \ldots$, d'après 1,14,

(11)
$$\Gamma_n(\lambda) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} \left[\lambda^{-1} \overline{(\lambda^2 \mathcal{I} + \lambda B + A)^{-1} (\lambda \mathcal{I} + B)} \right]$$

(12)
$$\Theta_n(\lambda) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} [\lambda^{-1} (\lambda^2 \mathcal{I} + \lambda B + A)^{-1}].$$

Il résulte de (1), (2), en vertu de 1,14, pour $\lambda > \omega$, $n = 1, 2, \ldots$

(13)
$$\| \Gamma_n(\lambda) \| \leq M_1 n (\lambda - \omega_1)^{-(n+1)}, \quad \| \Theta_n(\lambda) \| \leq M_2 n (\lambda - \omega_2)^{-(n+1)}.$$

Prenant (13) avec $n = 1$, on est dans les conditions d'appliquer 5,4, d'où (α).

Soit C l'opérateur associé au couple A, B.

Il résulte de 1,8 et 3,11

(14) l'operateur C est régulier pour $\lambda > \omega$

(15)
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda^{k-n-1} (\lambda \mathcal{I} + C)^{-k} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \left[\frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} \lambda^{-1} (\lambda \mathcal{I} + C)^{-1} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_n(\lambda) x + \Theta_n(\lambda) y \\ \Gamma_n(\lambda) y - \Theta_n(\lambda)(Ax + By) \end{pmatrix}$$

pour $x \in \mathfrak{D}(A)$, $y \in \mathfrak{D}(B)$, $\lambda > \omega$, $n = 1, 2, \ldots$

(16)
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda^{k-n-1} (\lambda \mathcal{I} + C)^{-k} C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Gamma_n(\lambda) y + \Theta_n(\lambda)(Ax + By) \\ \Gamma_n(\lambda)(Ax + By) + \Theta_n(\lambda)[Ay - B(Ax + By)] \end{pmatrix}$$

pour $x \in \mathfrak{D}(A)$, $y \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(B)$, $Ax + By \in \mathfrak{D}(B)$, $\lambda > \omega$, $n = 1, 2, \dots$

$$(17) \qquad \sum_{k=1}^{n} \lambda^{k-n-1} (\lambda \mathcal{I} + C)^{-k} C^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -\Gamma_n(\lambda)(Ax + By) - \Theta_n(\lambda)[Ay - B(Ax + By)] \\ -\Gamma_n(\lambda)[Ay - B(Ax + By)] + \Theta_n(\lambda)[A(Ax + By) + B(Ay - B(Ax + By))] \end{pmatrix}$$

pour $x \in \mathfrak{D}(A)$, $y \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(B)$, $Ax + By \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(B)$,

$$Ay - B(Ax + By) \in \mathfrak{D}(B),\ \lambda > \omega,\ n = 1, 2, \dots$$

Un calcul tout à fait analogue à celui de la preuve de 6,1 (15) donne

$$(18) \qquad \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda^{k-n-1} (\lambda \mathcal{I} + C)^{-k} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| \leq Mn (\lambda - \omega)^{-(n+1)} \left(\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| + \left\| C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| \right)$$

pour $x \in \mathfrak{D}(A)$, $y \in \mathfrak{D}(B)$, $\lambda > \omega$, $n = 1, 2, \dots$

D'autre part $\mathfrak{D}(C)$ est évidemment dense dans $E \times E$.

Ainsi nous sommes dans les conditions d'appliquer le théorème 2,7, d'où l'on déduit, en utilisant 3,4 la conclusion suivante décisive.

Pour tout $x, y \in E$ tels que (3) a lieu, on trouve une solution u du problème hyperbolique pour A, B vérifiant $u(0_+) = x$, $u'(0_+) = y$ et jouissant, en vertu de (15), (16), (17), des propriétés suivantes pour tout $t \in R^+$, $r > \omega t$, $r \longrightarrow \infty$:

$$(19) \qquad \left(\frac{r}{t}\right)^r \left[\Gamma_r\left(\frac{r}{t}\right) x + \Theta_r\left(\frac{r}{t}\right) y \right] \longrightarrow \int_0^t u(\tau)\, d\tau$$

$$(20) \qquad \left(\frac{r}{t}\right)^r \left[\Gamma_r\left(\frac{r}{t}\right) y + \Theta_r\left(\frac{r}{t}\right) (Ax + By) \right] \longrightarrow u(t) - x$$

$$(21) \quad \left(\frac{r}{t}\right)^r \left[-\Gamma_r\left(\frac{r}{t}\right) (Ax + By) - \Theta_r\left(\frac{r}{t}\right) (Ay - B(Ax + By)) \right] \longrightarrow u'(t) - y$$

$$(22) \qquad \left(\frac{r}{t}\right)^r \Bigg[-\Gamma_r\left(\frac{r}{t}\right) (Ay - B(Ax + By)) +$$

$$\Theta_r\left(\frac{r}{t}\right) (A(Ax + By) + B(Ay - B(Ax + By))) \Bigg] \longrightarrow u''(t) + Ax + By.$$

Donc on voit que (β) est complètement démontré. Pour compléter la démostration, on utilise un raisonnement tout à fait analogue à celui de la fin de la preuve de 6,1 et c'est pourquoi les détailes seront omis.

7,2 THÉORÈME NORMATIF POUR LE CAS MODÉRÉ. *Soit* $A, B \in \mathfrak{L}^+(E)$, $\omega_1, \omega_2, M_1, M_2$ *quatre constantes non-négatives. Si les hypothèses* (a)-(d) *de* 6,2 *ont lieu et* (e) *pour toute solution* u *du problème hyperbolique pour* A, B *et pour tout* $t \in R^+$, *on a*

$$(1)\qquad \left\| \int_0^t u(\tau)\, d\tau \right\| \leq M_1\, t\, e^{\omega_1 t} \,\| u(O_+) \| + M_2\, t\, e^{\omega_2 t} \,\| u'(O_+) \|,$$

alors les assertions (α), (β) *de* 6,2 *restent en viguer et* (γ) *pour* $x \in \mathfrak{D}(B)$, $\lambda > \omega_1$, $\lambda > \omega_2$ *et* $p = 0, 1, 2, \ldots$:

$$(2)\qquad \left\| \frac{d^p}{d\lambda^p} \lambda^{-1} (\lambda^2 \mathcal{J} + \lambda B + A)^{-1} (\lambda x + Bx) \right\| \leq M_1 (p+1)!\, (\lambda - \omega_1)^{-(p+2)} \| x \|$$

$$(3)\qquad \left\| \frac{d^p}{d\lambda^p} \lambda^{-1} (\lambda^2 \mathcal{J} + \lambda B + A)^{-1} x \right\| \leq M_2 (p+1)!\, (\lambda - \omega_2)^{-(p+2)} \| x \|.$$

Preuve. On ne donne pas la preuve de ce théorème, en tous points parallèle à celle du théorème 6,2. Les adaptations nécessaires, résultant de la nature du problème actuel, peuvent être faites par le lecteur. Notons seulement comment il faut modifier la définition de la fonction Φ. Dans le cas actuel, on pose

$$\Phi(\lambda, x, y) = \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} \left(\int_0^\tau u(\sigma)\, d\sigma \right) d\tau.$$

7,3 Le couple d'opérateurs $A, B \in \mathfrak{L}^+(E)$ s'appelle ***modérément bihyperbolique*** {***modérément bicorrect***} si les conditions (c), (d) de 7,1 {7,2} ont lieu et s'il existe quatre constantes non-négatives $\omega_1, \omega_2, M_1, M_2$ telles que la conditiou (e) de 7,1 {7,2} a aussi lieu.

7,4 THÉORÈME FINAL POUR LE CAS MODÉRÉ. *Soit* $A, B \in \mathfrak{L}^+(E)$. *Si les hypothèses* (a), (b) *de* 6,4 *sont satisfaites, alors le couple d'opérateurs* A, B *est modérément bicorrect si, et seulement si, il est modérément bihyperbolique.*

Preuve. La part « seulement si » découle de 7,1 et 3,12, la part « si » de 7,2.

7,5 EXEMPLE. *Il existe un espace de Banach et deux opérateurs* $A, B \in \mathfrak{L}^+(E)$ *qui produisent un couple modérément bihyperbolique, mais non strictement.*

Preuve. L'espace E soit le même que dans 6,5. Soit $B = 0$ et l'opérateur A soit défini comme suit : $x \in \mathfrak{D}(A)$ si et seulement si $r^3 x(2r-1) \to 0$, $r^3 x(2r) \to 0$ $(r \to \infty)$; ensuite $Ax(2r-1) = r^3 x(2r-1) + r^2 x(2r)$, $Ax(2r) = r^3 x(2r)$.

On calcule facilement que $(\lambda^2 \mathcal{I} + A)^{-1} x(2r-1) = (\lambda^2 + r^3)^{-1} x(2r-1) - r^2 (\lambda^2 + r^3)^{-2} x(2r)$ et $(\lambda^2 \mathcal{I} + A)^{-1} x(2r) = (\lambda^2 + r^3)^{-1} x(2r)$.

Maintenant, on vérifie aisément que les hypothèses de 7,1 ont lieu, car les estimations suivantes sont valables : $\left| \frac{d^p}{d\lambda^p} (\lambda^2 + r^3)^{-1} \right| \leq (p+1)!\, \lambda^{-(p+2)}$ et $\left| \frac{d^p}{d\lambda^p} (\lambda^2 + r^3)^{-2} \right| \leq (p+1)!\, \lambda^{-(p+2)}$. On peut utiliser les formules 2.18 et 1.22 de [6].

Il reste à démontrer que 6.1 (1) n'est pas vrai. Dans ce but, on se sert de la formule suivante : $r^2 \lambda (\lambda^2 + r^3)^{-2} = \frac{\sqrt{r}}{2} \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} \tau \sin(\tau \sqrt{r^3})\, d\tau$ résultant des formules 5.1 et 1.6 de [6] qui mène à une contradiction avec 6,1 (1).

8. Compléments et commentaire.

8,1 La théorie des ***fonctions-cosinus d'opérateurs*** [4] peut être prise pour une autre forme de notre théorie stricte de la section 6 avec $B = 0$, car les théorèmes 6,1 et 6,2 sont, sous la condition $B = 0$, équivalents aux théorèmes 3,2 et 3,1 de [4]. Signalons encore qu'on peut, en utilisant les moyens techniques de la preuve de 6,1, construire une nouvelle démonstration de 3,2 qui est indépendente du théorème de Widder concernant la transformation de Laplace.

8,2 *Soit $A, B \in \mathfrak{L}^+(E)$ et ω, M deux constantes non-négatives. Si* (a) *l'operateur A est densement défini,* (b) *il existe une constante $\omega_0 \geq 0$ telle que A est régulier pour tout $\lambda > \sqrt{\omega_0}$* (c) *pour $\lambda > \omega_0$, $\lambda > \omega$ et $p = 0, 1, 2, \ldots$, on a*

$$\left\| \frac{d^p}{d\lambda^p} \lambda (\lambda^2 \mathcal{I} + A)^{-1} \right\| \leq M p!\, (\lambda - \omega)^{-(p+1)} \tag{1}$$

(d) $B \in \mathfrak{L}(E)$,

alors toutes les hypothèses de 6,1 *ont lieu pour le couple A, B avec les constantes $\omega_1 = \omega + M \| B \|$, $\omega_2 = \omega + M \| B \| + 1$, $M_1 = M_2 = M$.*

La *preuve* est fondée sur l'analyse du développement $(\lambda^2 \mathcal{I} + \lambda B + A)^{-1} = (\lambda^2 \mathcal{I} + A)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} [-\lambda B (\lambda^2 \mathcal{I} + A)^{-1}]^k$ pour $\lambda > \omega + M \| B \|$. Les détails seront publiés ailleurs.

Remarque. L'operateur A est le générateur d'une fonction-cosinus (cfr. [4]).

8,3 L'analogie du théorème précedent 8,2 pour le cas modéré (où (1) est remplacé par $\left\| \frac{d^p}{d\lambda^p} (\lambda^2 \mathcal{I} + A)^{-1} \right\| \leq M(p+1)!\,(\lambda - \omega)^{-p+2})$ n'a pas été prouvée jusqu'à présent, car cartaines difficultés se produisent à l'estimation des dérivées du développement en question.

8,4 *Soit* $A, B \in \mathfrak{L}^+(E)$ *et* ω, M *deux constantes non-négatives. Si* (a) *l'opérateur* B *est densement défini,* (b) *il existe une constante* $\omega_0 \geq 0$ *telle que* B *est régulier pour tout* $\lambda > \omega_0$, (c) *pour* $\lambda > \omega_0$, $\lambda > \omega$ *et* $p = 0, 1, 2, \ldots$ *on a*

$$\left\| \frac{d^p}{d\lambda^p} \lambda^{-1} (\lambda \mathcal{I} + B)^{-1} \right\| \leq Mp\,!\,(\lambda - \omega)^{-(p+1)} \tag{1}$$

(d) $A \in \mathfrak{L}(E)$,

alors toutes les hydothèses du théorème 6,1 *ont lieu avec les constantes*: $\omega_1 = \omega + M \| A \| + 1$, $\omega_2 = \omega + M \| A \|$, $M_1 = 1 + M \| A \|$, $M_2 = M$.

Preuve. On peut écrire pour $\lambda > \omega + M \| A \|$: $(\lambda^2 \mathcal{I} + \lambda B + A)^{-1} = \lambda^{-1} (\lambda \mathcal{I} + B)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} [- A \lambda^{-1} (\lambda \mathcal{I} + B)^{-1}]^k$, d'où l'on déduit

$$\left\| \frac{d^p}{d\lambda^p} (\lambda^2 \mathcal{I} + \lambda B + A)^{-1} \right\| \leq Mp\,!\,(\lambda - \omega - M \| A \|)^{-(p+1)}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} &(\lambda^2 \mathcal{I} + \lambda B + A)^{-1} (\lambda \mathcal{I} + B) \subseteq \\ &\lambda^{-1} \mathcal{I} + \lambda^{-1} (\lambda \mathcal{I} + B)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} [- A \lambda^{-1} (\lambda \mathcal{I} + B)^{-1}]^k (- \lambda^{-1} A) = \\ &\qquad\qquad \lambda^{-1} \mathcal{I} - \lambda^{-1} (\lambda^2 \mathcal{I} + \lambda B + A)^{-1} A \end{aligned}$$

d'où l'on obtient aisément la seconde estimation néeessaire des dérivées

$$\frac{d^p}{d\lambda^p} (\lambda^2 \mathcal{I} + \lambda B + A)^{-1} (\lambda \mathcal{I} + B).$$

Remarque. L'opérateur B peut être le générateur d'un semigroupe de la classe (c_0) ou un peu plus général. Compare aussi les résultats de Iakubov [7].

8,5 La théorie des equations hyperboliques opérationnelles, données dans les sections 5 et 6 peut être appliquée avec succès aux équations hyperboliques aux dérivées partielles et on obtient souvent des résultats très généraux. Une telle application a été indiquées déjà dans [4], p. 36. Grâce au théorème 8,2, ce résultat peut être etendu aux équations

$$(1) \qquad \frac{\partial}{\partial t} u(t, \xi) + b(\xi) u(t, \xi) + a_2(\xi) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u(t, \xi) + \\ + a_1(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} u(t \xi) + a_0(\xi) u(t, \xi) = 0$$

où a_0, b sont des fonctions continues bornées et les fonctions a_1, a_2 satisfont aux conditions données dans [4].

Notre théorie générale est aussi applicable aux équations du type (1) avec les conditions aux limites, découvertes et étudiées par Feller [8]. On utilisera une décomposition, donnée par lui, de la résolvante d'un opérateur différentiel du second ordre $a_2(\xi) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + a_1(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi}$ dont le domaine est restreint par ces conditions-là aux limites.

Les détails de ces applications seront présentés dans un article spécial.

8,6 On a donné dans 7,5 un exemple vérifiant que la théorie modéréé est essentiellement plus générale que la stricte. Cet exemple étant tout à fait artificiel, on va montrer un exemple plus naturel.

Soit R^d l'espace d-dimensionel et $C(R^d)$ l'espace de Banach de toutes les fonctions bornées et uniformément continues sur R^d muni de la norme usuelle. Dans $C(R^d)$, on définit l'opérateur $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial \xi_d^2}$ de la façon évidente.

Voici un résultat classique dans notre terminologie: *Le couple Δ, O est strictement bicorrect si et seulement si $d = 1$, pour $d > 1$, le couple Δ, O est seulement modérément bicorrect.*

Pour $d = 1, 3$, c'est particulièrement instructif grâce aux formules de d'Alembert et de Kirchhoff.

Notons enfin que le couple Δ, O devient strictement bicorrect pour $d = 1, 2 \dots$ quelconque si l'on prend $L^2(R^d)$ au lieu de $C(R^d)$.

8,7 Jusqu'à présent, nous nous intéressions exclusivement aux équations hyperboliques opérationnelles homogènes

$$(1) \qquad u''(t) + Bu'(t) + Au(t) = 0\,;$$

mais les résultats obtenus permettent de résoudre aussi le problème nonhomogène

$$u''(t) + Bu'(t) + Au(t) = f(t). \tag{2}$$

Supposons d'abord que le couple d'opérateurs $A, B \in \mathfrak{L}^+(E)$ soit strictement bicorrect au sens de 6,3.

L'unicité des solutions de (2) est évidente.

Soit D un sous-ensemble fixe de $E \times E$ satisfaisant à la condition 6,2 (d). Si l'on prend une solution unique u du problème hyperbolique pour A, B vérifiant $u(O_+) = x$, $u'(O_+) = y$ pour $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D$ quelconque, on pose

$$G_0(t, x, y) = u(t). \tag{3}$$

Cette fonction G_0 définie sur $R^+ \times D$, peut être prolongée par continuité sur $R^+ \times E \times E$ grâce à l'inégalité 6,2 (1). Cette extension sera désignée par $G(t, x, y)$ et peut être appelée ***la fonction de Green (où l'intégrale complète) du problème hyperbolique pour** A, B.*

On vérifie aisément que G est une fonction continue sur $R^+ \times E \times E$ et qu'il existe deux constantes non-négatives $\varkappa$, N telles que pour $t \in R^+$, $x, y \in E$:

$$\| G(t, x, y) \| \leq N e^{\varkappa t} (\| x \| + \| y \|). \tag{4}$$

Si $x, y \in E$ et $f \in R^+ \to E$ est une fonction continue sur R^+ et intégrable sur $(0,1)$, posons

$$u(t) = G(t, x, y) + \int_0^t G(t - \tau, 0, f(\tau))\, d\tau \tag{5}$$

pour tout $t \in R^+$.

Il est possible de démontrer que *l'intégrale dans* (5) *a un sens et que la fonction u définie par* (5) *est toujours une solution généralisée de l'équation* (2), *c'est-à-dire la limite localement uniforme des solutions « vraies ». Cette fonction u devient une solution pour tout x, y, f jouissant, par exemple, de propriétés suivantes : x, y vérifient* 6,1 (3) *et f est une fonction deux fois continûment dérivable sur* R^+ *et* f'' *est intégrable sur* (0,1).

On peut obtenir des résultat analogues aussi pour le cas modéré où toutefois certaines difficultés, concernant la fonction de Green, se produisent. Cette fonction cesse pour $x, y \in E$, $x \notin \mathfrak{D}(A)$, $y \notin \mathfrak{D}(B)$ d'être une fonction dans t et devient une mesure vectorielle dans t (cfr. les inégalités 7,1 (4) et 7,1 (5)). Ceci cause certaines complications techniques, mais n'influence pas le résultat voulu.

Les détails seront présentes ailleurs.

8,8 Récemment, G. da Prato [9], [10] a généralisé la théorie des semigroupes d'opérateurs (« semigruppi regolarizzabili »). Cette théorie peut être appliquée aussi pour résoudre l'existence et l'unicité du problème de Cauchy hyperbolique, consideré ci-dessus dans l'article actuel. Mais il semble qu'elle ne donne pas l'information satisfaisante quant à la croissance des solutions.

Une analyse plus précise des relations entre ces deux théories ne peut être effectuée ici et sera donnée à une autre occasion.

Académie Tchécoslovaque
des Sciences
Prague

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. YOSIDA: *Functional Analysis.* Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1965.

[2] E. HILLE - R. S. PHILLIPS: *Functional Analysis and Semigroups.* Providence, 1957.

[3] IU. I. LUBICH: *Transformation de Laplace classique et locale dans le problème de Cauchy abstrait.* Ousp. Mat. nauk, 21 (1966), n. 3, p. 3-51 (en russe).

[4] M. SOVA: *Cosine operator functions.* Rozprawy Matematyczne, XLIX, 1966.

[5] B. v. SZ.-NAGY: *Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes,* Berlin, 1942.

[6] V. A. DITKIN - A. P. PROUDNIKOF: *Manuel de calcul opératoire.* Moscou, 1965, (en russe).

[7] S. IA. IAKUBOV: *Sur la résolubilité du problème de Cauchy pour les équations d'évolution.* Dokl. Akad. Nauk SSSR, 156 (1964), p. 1041-1044 (en russe).

[8] W. FELLER: *The parabolic differential equations and the associated semi-groupe of transformations.* Ann. of M., 55 (1952), p. 468-519.

[9] G. DA PRATO: *Semigruppi regolarizzabili.* Ricerche di Matematica, vol. XV, p. 223-248.

[10] G. DA PRATO: *R-semigruppi analitici e equazioni di evoluzione in* L^p. (Preprint).