ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

G. TOMASSINI

Complessificazione di un gruppo di Lie reale

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 22, nº 1 (1968), p. 101-106
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1968_3_22_1_101_0>

COMPLESSIFICAZIONE DI UN GRUPPO DI LIE REALE

G. TOMASSINI (*)

Dato un gruppo di Lie reale G si da la nozione di *complessificato* di G. È un gruppo di Lie complesso G_C che contiene G come sottogruppo di Lie reale e chiuso, ed è tale che il germe della varietà complessa G_C lungo G sia una complessificazione della varietà analitica reale G. Osservato che in generale, dato un gruppo di Lie reale G, non esiste un complessificato, si dimostra che:

1) se G è un sottogruppo di Lie reale e connesso di $GL(n; \mathbb{R})$ allora G ha un complessificato (Proposizione 1).

2) se G è un gruppo di Lie reale e connesso, allora esiste un sottogruppo discreto N_0 del centro di G tale che G/N_0 abbia un complessificato (Proposizione 2).

In particolare se il centro di G è ridotto alla identità e, G ha un complessificato. Da ciò si deduce che se G è un *gruppo semisemplice* di Lie ed è connesso allora G è un sottogruppo chiuso di un gruppo di Lie di matrici (Corollario 3).

a. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie reale. L'algebra di Lie complessa $\mathfrak{g} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C}$ si chiama la *complessificata* dell'algebra $\mathfrak{g}$. Con $X + iY$, X, $Y \in \mathfrak{g}$, indicheremo un elemento di $\mathfrak{g} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C}$.

Se $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ è una base di $\mathfrak{g}$ allora è anche una base (su $\mathbb{C}$) per $\mathfrak{g} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C}$: ne segue che se $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} = n$ allora $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C} = n$.

L'algebra $\mathfrak{g}$ si dice anche una *forma reale* di $\mathfrak{g} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C}$. In generale una algebra di Lie complessa $\mathfrak{g}_C$ può avere più forme reali non necessariamente isomorfe (cf [1], cap. III, § 6).

Pervenuto alla Redazione il 18 Settembre 1967.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca n° 35 del C. N. R., nell'anno accademico 1967-1968.

Sia $\mathfrak{g}_C$ un'algebra di Lie complessa. *Un'antiinvoluzione* su $\mathfrak{g}_C$ è un'applicazione $\tau: \mathfrak{g}_C \rightarrow \mathfrak{g}_C$ antilineare, che è un automorfismo di $\mathfrak{g}_C$ come algebra di Lie reale, ed è tale che $\tau^2 = id$. Si verifica subito che $\mathfrak{g}$ è uua forma reale di $\mathfrak{g}_C$ se e solo se esiste un'antiinvoluzione τ su $\mathfrak{g}_C$ tale che $\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{g}_C : \tau(X) = X\}$.

L'antiinvoluzione è allora univocamente determinata.

Osserviamo che se $\tau: \mathfrak{g}_C \rightarrow \mathfrak{g}_C$ è un'antiinvoluzione allora $\{X \in \mathfrak{g}_C : \tau(X) = X\}$ è un sottospazio vettoriale reale di dimensione $n = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$ (cf. [5] § 7).

b. Sia G un gruppo di Lie reale e sia G_C nn gruppo di Lie complesso. Diremo che G_C è un *complessificato* di G se esiste un'applicazione $j: G \rightarrow G_C$ tale che:

i) $j: G \rightarrow j(G)$ è un isomorfismo di gruppi di Lie reali

ii) $j(G)$ è una sottovarietà reale, chiusa, di G_C ed il germe di G_C lungo G è una complessificazione di $j(G)$.

Se $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}_C$ sono rispettivamente le algebre di Lie di G e G_C e G_C è un complessificato di G allora $\mathfrak{g}$ è una forma reale di $\mathfrak{g}_C$. Quindi se G'_C e G''_C sono due complessificati di G semplicemente connessi, allora le rispettive componenti connesse della identità sono gruppi di Lie isomorfi.

In generale, dato un gruppo di Lie reale non esiste un suo complessificato. Si consideri ad esempio $G = \widetilde{SL}(2; \mathbb{R})$, il rivestimento universale di $SL(2; \mathbb{R})$. Sia G_C un complessificato di G: allora $sl(2; \mathbb{C}) \simeq sl(2; \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ è l'algebra di Lie di G_C ed il rivestimento universale di G_C è $SL(2; \mathbb{C})$. Poichè $SL(2; \mathbb{R})$ è connesso, il sottogruppo di Lie reale di $SL(2; \mathbb{C})$ generato da $\exp(sl(2; \mathbb{R}))$ è $SL(2; \mathbb{R})$; ne segue allora che esiste un omomorfismo surgettivo $SL(2; \mathbb{R}) \rightarrow \widetilde{SL}(2; \mathbb{R})$: assurdo (1).

Un'*antiinvoluzione* su un gruppo di Lie complesso G_C è un'applicazione antiolomorfa $\sigma: G_C \rightarrow G_C$ che è un automorfismo di G_C come gruppo di Lie reale ed è tale che $\sigma^2 = id$. Se $\mathfrak{g}_C$ è l'algebra di Lie di G_C, σ determina una antinvoluzione τ su $\mathfrak{g}_C$: ne segue che $G = \{x \in G_C : \sigma(x) = x\}$ è non vuoto ed è una sottovarietà analitica reale di dimensione $n = \dim_{\mathbb{C}} G_C$, di cui il germe della varietà complessa G_C lungo G è una complessificazione (cf. [5] teorema 19 e § 4). Quindi il gruppo di Lie G_C è un complessificato del gruppo di Lie reale G.

---

(1) Qnesto esempio mi è stato comunicato da Koranyi

PROPOSIZIONE 1. *Sia G un sottogruppo di Lie reale, connesso del gruppo $GL(n;\mathbb{R})$. Allora esistono un complessificato $G_{\mathbb{C}}$ di G ed una antiinvoluzione $\sigma: G_{\mathbb{C}} \longrightarrow G_{\mathbb{C}}$ tale che $G_{\mathbb{C}}\{x \in G_{\mathbb{C}}: \sigma(x) = x\}$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathfrak{g}$ l'algebra di Lie di G; $\mathfrak{g}$ è una sottoalgebra di $gl(n;\mathbb{R})$. Inoltre $GL(n;\mathbb{R})$ è canonicamente immerso in $GL(n;\mathbb{C})$ e $GL(n;\mathbb{C})$ è un suo complessificato. Se τ e σ sono le antinvoluzioni naturali rispettivamente su $sl(n;\mathbb{C})$ e $GL(n;\mathbb{C})$ allora $GL(n;\mathbb{R}) = \{x \in GL(n;\mathbb{C}): \sigma(x) = x\}$; inolre $\exp \circ \tau = \sigma \circ \exp$. Se $G_{\mathbb{C}}$ è il sottogruppo di Lie complesso, connesso, di $GL(n;\mathbb{C})$ generato da $\exp(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ allora $G \subset G_{\mathbb{C}}$ e $\sigma(x) = x$ per $x \in G$. Sia U_e un intorno dell'identità e di $G_{\mathbb{C}}$ su cui si considerano coordinate normali $u^1, \dots, u^m$ ($m = \dim_{\mathbb{C}} G_{\mathbb{C}}$). Le coordinate $u^1, \dots, u^m$ si possono scegliere in modo che su U_e, nell'intorno di e, $'\sigma = \sigma \mid G_{\mathbb{C}}$ sia definita, nel sistema di coordinate $u^1, \dots, u^m$, da $(u^1, \dots u^m) \longrightarrow (\overline{u}^1, \dots, \overline{u}^m)$: ne segue che $'\sigma$ è bianalitica e quindi che è un'antiinvoluzione su $G_{\mathbb{C}}$ tale che $G \subset \{x \in G_{\mathbb{C}}: {'\sigma}(x) = x\} = G^1$. Poichè G e G^1 hanno la stessa dimensione, G coincide con la componente connessa G_0^1 di G^1 e $G_{\mathbb{C}}$ è un complessificato di G.

Consideriamo più in generale un gruppo di Lie reale, connesso, G e sia $\mathfrak{g}$ la sua algebra di Lie. Sia $\widetilde{G}$ il rivestimento universale di G, $\pi: \widetilde{G} \longrightarrow G$ la proiezione canonica ed $N = \operatorname{Ker} \pi$: N è un sottogruppo normale discreto contenuto nel centro Z di $\widetilde{G}$. Sia $G_{\mathbb{C}}$ il gruppo di Lie complesso, connesso e semplicemente connesso che ha $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ come algebra di Lie (cf. [4], $L\ G$ §8 teorema 3).

Poichè $\widetilde{G}$ è semplicemente connesso, il monomorfismo naturale $j^0: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ determina un omomorfismo $j: \widetilde{G} \longrightarrow G_{\mathbb{C}}$ (cf. [4], LG § 8 teo rema 1).

LEMMA. *L'immagine $j(N)$ di N è un sottogruppo discreto contenuto nel centro $Z_{\mathbb{C}}$ di $G_{\mathbb{C}}$.*

DIMOSTRAZIONE. (1) Consideriamo le applicazioni esponenziali $\exp: \mathfrak{g} \longrightarrow \widetilde{G}$, $\exp: \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \longrightarrow G_{\mathbb{C}}$; allora il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \\ {\scriptstyle \exp}\downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{G} & \xrightarrow{j} & G_{\mathbb{C}} \end{array}$$

è commutativo. Quindi $\widetilde{G}$, $j(\widetilde{G})$ hanno la stessa algebra di Lie e j è un isomorfismo locale di $\widetilde{G}$ su $j(\widetilde{G})$: ne segue che $j(N)$ è un sottogruppo discreto di G_C.

(2) Sia $a = j(x_0)$, $x_0 \in N$, e sia ϱ_a la l'applicazione $G_C \longrightarrow G_C$ definita da $x \longrightarrow axa^{-1}x^{-1}$; ϱ_a è un'applicazione olomorfa. Sia $x = j(x_1)$, $x_1 \in \widetilde{G}$; poichè $x_0 \in Z$ (centro di $\widetilde{G}$) si ha $\varrho_a(x) = e$: quindi $\varrho_{a\,|j(\widetilde{G})} = e$. Sia U_e un intorno aperto, connesso di e in G_C su cui si considerano coordinate normali $u^1, \ldots, u^n$ ($n = \dim_{\mathbb{C}} G_C$). Dal diagramma precedente risulta

$$U_e \cap j(\widetilde{G}) \supset \{x \in U_e : \mathcal{I}_m u^1 = \ldots = \mathcal{I}_m u^n = 0\};$$

tenendo conto che $\exp : \mathfrak{g} \bigotimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \longrightarrow G_C$ è un omeomorfismo di un intorno di $0 \in \mathfrak{g} \bigotimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ su U_e risulta che $\exp \circ j$ è un'immersione in U_e di un intorno di 0 in $\mathfrak{g}$.

Se $a \in j(N)$, per l'inclusione precedente, si ha $\varrho_a(x) = e$ per ogni $x \in U_e$; da ciò segue che $\varrho_a(x) = e$ per ogni $x \in G_C$. Ciò prova che $ax = xa$ per ogni $x \in G_C$ e dunque che $a \in Z_C$.

Possiamo ora provare la

PROPOSIZIONE 2. *Sia G un gruppo di Lie reale e connesso. Allora esiste un sottogruppo normale e discreto N_0 tale che G/N_0 ha un complessificato.*

DIMOSTRAZIONE (1) Con le notazioni precedenti sia $\tau : \mathfrak{g} \bigotimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \longrightarrow \mathfrak{g} \bigotimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ l'antiinvoluzione definita da $X + iY \longrightarrow X - iY$. Poichè G_C è semplicemente connesso, τ determina un'antiinvoluzione $\sigma : G_C \longrightarrow G_C$ ed $\exp \circ \tau = \sigma \circ \exp$.

Sia

$$G^1 = \{x \in G_C : \sigma(x) = x\};$$

G^1 è un sottogruppo di Lie reale di G_C, chiuso, e G_C è un complessificato di G^1. Proviamo che $j(\widetilde{G}) \subset G^1$. Sia $x = j(a)$; $\widetilde{G}$ è connesso quindi $a = \exp X_1 \ldots \exp X_r$ con $X_1, \ldots, X_r \in \mathfrak{g}$. Poichè $\exp \circ j^0 = j \circ \exp$ si ha

$$\begin{aligned} x &= \exp X_1 \ldots \exp X_r \\ &= \exp(\sigma(X_1)) \ldots \exp(\sigma(X_r)) \\ &= \sigma(\exp X_1 \ldots \exp X_r) = \sigma(x); \end{aligned}$$

d'altra parte $j(\widetilde{G})$ è un sottogruppo di Lie, connesso, della stessa dimensione di G^1, quindi coincide con la componente connessa G^1_0 di G^1. Inoltre G_C è un complessificato di G^1_0.

(2) Sia $G = \widetilde{G}/N$. Per il lemma precedente $j(N)$ è un sottogruppo normale, discreto, contenuto nel centro Z_C di G_C, quindi $G_C/j(N)$ è un gruppo di Lie complesso e l'omomorfismo j determina un omomorfismo $G \longrightarrow G_C/j(N)$. Se $x = x_0 j(a)$, $a \in N$, si ha $\sigma(x) = \sigma(x_0)\,\sigma(j(a)) = \sigma(x_0) j(a)$, quindi σ passa al quoziente e definisce un'antiinvoluzione $'\sigma : G_C/j(N) \longrightarrow$ $\longrightarrow G_C/j(N)$. Sia

$$G^2 = \{\xi \in G_C/j(N) : \ '\sigma(\xi) = \xi\} ;$$

$G_C/j(N)$ è un complessificato di G^2. Se $\xi = j_0(a)$, $a \in G$ ed $a = \pi(x)$, ξ è la classe in $G_C/j(N)$ di $j(x)$ e $'\sigma(j_0(a))$ è la classe di $\sigma(j(x)) = j(x)$: cioè $'\sigma(\xi) = \xi$ per $\xi \in j(G)$.

Ne segue che $j_0(G) \subset G^2$; poichè $j_0(G)$ è connesso ed ha la stessa dimensione di G^2, $j_0(G) = G_0^2$, la componente connessa di G^2, e $G_C/j(N)$ è un complessificato di $j_0(G)$. Si verifica subito che se $N_0 = \operatorname{Ker} j$ allora $N_0 = \operatorname{Ker} j_0 = \pi(N_0')$: poichè π è un isomorfismo locale, N_0 è un sottogruppo normale, discreto di G e $G_C/j(N)$ è un complessificato di G/N_0.

COROLLARIO 1. Sia G un gruppo di Lie reale, connesso. Se il centro di G è $\{e\}$ allora G ha un complessificato. In particolare se G è semplice come gruppo (i.e. è un *gruppo semplice di Lie*) allora G ha un complessificato.

COROLLARIO 2. Se G è un prodotto diretto di gruppi semplici di Lie (i. e. è un *gruppo semisemplice di Lie*) allora G ha un complessificato.

COROLLARIO 3. Sia G un gruppo semisemplice di Lie, reale e connesso. Allora G è un sottogruppo chiuso di un gruppo di matrici.

DIMOSTRAZIONE. Sia G_C un complessificato di G. Poichè G è un gruppo semisemplice di Lie la sua algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è semisemplice e tale risulta allora $\mathfrak{g} \bigotimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ (cf. [3], II-7). Allora G_C è un gruppo di Lie complesso semisemplice e quindi ha una rappresentazione fedele di dimensione finita (cf. [2]; XVII.3 teorema 3.2).

Università di Pisa

BIBLIOGRAFIA

[1] S. HELGASON, *Differential geometry and symmetric spaces.* Academic Press, New York (1962).

[2] G. HOCHSCHILD, *The structure of Lie groups* Holden-Day, San Francisco (1965).

[3] J. P. SERRE, *Algèbres de Lie semi-simples complexes.* Benjamin. New York (1966).

[4] J. P. SERRE, *Lie algebras and Lie groups.* Lectures given at Harvard University (1964).

[5] A. TOGNOLI, *Proprietà globali degli spazi analitici reali.* Annali di matematica, Serie IV, Tomo LXXV (1967).