ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

GIULIO MATTEI

Varieta caratteristiche e propagazione ondosa in un plasma magnetizzato privo di urti

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 21, nº 4 (1967), p. 745-763

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1967_3_21_4_745_0>

VARIETA CARATTERISTICHE E PROPAGAZIONE ONDOSA IN UN PLASMA MAGNETIZZATO PRIVO DI URTI (*)

GIULIO MATTEI (**)

1. Introduzione.

1.1. *Scopo del lavoro.*

Lo studio dei fronti d'onda nella Magnetofluidodinamica (MFD) con diversi procedimenti basati sulla teoria delle varietà caratteristiche è stato fatto da vari Autori ed ha dato origine a numerosi lavori in breve distanza di tempo. Fra essi ricordiamo: R. NARDINI [1] (1956) (cfr. anche [2] (1961)), K. O. FRIEDRICHS, H. KRANZER [3] (1958), V. N. ZHIGULEV [4] (1959), R. S. ONG [5] (1959), H. GRAD [6] (1959) (cfr. anche [7] (1965)), C. AGOSTINELLI [8] (1960) (cfr. anche [9] (1965) e [10] (1966)), R. COURANT, H. HILBERT [11] (1962), A. M. PRATELLI [12] (1963) (cfr. anche [13] (1965)), I. FERRARI [14] (1964), A. JEFFREY, T. TANIUTI [15] (1964), A. JEFFREY [16] (1966).

Lo scopo del presente lavoro è lo studio del sistema di equazioni idromagnetiche (nel seguito sistema CGL) descriventi nella teoria di CHEW-GOLDBERGER-LOW un plasma magnetizzato nel quale gli urti assumono un ruolo trascurabile, applicando appunto il metodo delle varietà caratteristiche.

Detto metodo è qui usato nella forma che si riferisce alle condizioni di compatibilità dinamica, per la quale si rimanda a T. LEVI CIVITA [17] e B. FINZI [18]. (Per una trattazione molto estesa ed approfondita delle condizioni di compatibilità riferite però alla teoria delle superfici singolari si veda C. TRUESDELL-R. TOUPIN [19] Cap. C.).

Pervenuto in Redazione il 21 Set. 1967.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca Matematica del C.N.R. Anno 1967-68.

(**) Istituto di Matematiche Applicate Facoltà di Ingegneria Università, Pisa.

Nello svolgimento del presente lavoro si farà particolare riferimento al lavoro [1] di R. NARDINI, anche allo scopo di mettere in evidenza le diversità, spesso molto nette, che si presentano fra i risultati relativi alla MFD dei fluidi comprimibili, non viscosi, non conduttori del calore, perfetti conduttori dell'elettricità, nelle consuete ipotesi di trascurabilità della corrente di spostamento e della carica spaziale, e quelli relativi al plasma in esame; tali diversità appaiono precipuamente legate al fatto che nel primo caso il sistema di equazioni differenziali (nel seguito indicato come sistema MFD ideale), al contrario del sistema CGL, è totalmente iperbolico.

1.2. *Riassunto e risultati ottenuti.*

Dopo aver richiamato al N. 2 il sistema di equazioni di CHEW-GOLDBERGER-LOW relative ad un plasma magnetizzato privo di urti e vari lavori successivi sull'argomento, al N. 3 si determinano nel caso generale le condizioni di compatibilità dinamica corrispondenti a tale sistema. Da esse si può fra l'altro dedurre: (*a*) l'esistenza di fronti d'onda solidali col fluido, attraverso i quali sono discontinue le derivate della velocità, ma continue quelle dell'induzione magnetica e della densità; (*b*) l'esistenza di fronti d'onda solidali col fluido attraverso i quali sono discontinue le derivate dell'induzione magnetica e della densità e su cui le discontinuità delle derivate della velocità hanno carattere trasversale. Attraverso i fronti d'onda (*b*) risulta continuo il gradiente della somma della pressione magnetica e della « pressione ortogonale » e in entrambi i casi (*a*) e (*b*) il vettore induzione magnetica risulta tangente ai fronti d'onda. Al N. 4 si determina l'equazione delle varietà caratteristiche, che risulta spezzabile in due equazioni separate. Tali equazioni vengono studiate al N. 5. La prima di esse, se è verificata una certa condizione (cfr. (5.4)), dà origine alla propagazione di un effettivo fronte d'onda: il fronte d'onda del tipo di Alfvén modificato dalla anisotropia nel tensore delle pressioni; in caso contrario la velocità di avanzamento del fronte d'onda diventa immaginaria e ciò è apparso collegato al sorgere nel plasma della cosidetta « hose instability ». La seconda equazione, anch'essa subordinatamente al verificarsi di una certa condizione, dà origine alla propagazione di due altri effettivi fronti d'onda; se tale condizione (cfr. (5.9)) non è verificata, detta equazione assicura ancora la propagazione di un effettivo fronte d'onda, ma un valore della velocità di avanzamento diventa immaginario e anche qui appare un collegamento con un altro noto fenomeno di instabilità nel plasma in esame: quello della « mirror instability ». Si manifesta qui una netta differenza fra il sistema CGL e il sistema MFD ideale: quest'ultimo infatti ammette in ogni caso la propagazione di tre effettivi fronti d'onda e la velocità di avanzamento non assume mai valori immaginari.

Al N. 6 si studiano due casi particolari. Nel primo il vettore induzione magnetica è supposto tangente al fronte d'onda: in tal caso la velocità di avanzamento non diventa mai immaginaria e c'è sempre la propagazione di un effettivo fronte d'onda che risulta di tipo magnetoacustico; su di esso le discontinuità nelle derivate della velocità hanno carattere longitudinale. Nel secondo il vettore induzione magnetica è supposto normale al fronte d'onda. In questo caso c'è sempre un effettivo fronte d'onda di tipo acustico, mentre può esserci o no (la velocità di avanzamento può diventare immaginaria) quello del tipo di Alfvén modificato dall'anisotropia nel tensore delle pressioni. Sul fronte d'onda di tipo acustico le discontinuità nelle derivate della velocità hanno carattere longitudinale e attraverso esso sono continue le derivate dell'induzione magnetica; sull'eventuale fronte d'onda del tipo di Alfvén le discontinuità nelle derivate della velocità hanno carattere trasversale e attraverso esso sono continui i gradienti della pressione magnetica, della «pressione parallela», della «pressione ortogonale» e della densità.

Al N. 7 infine si indica che noti risultati relativi alla propagazione di onde elementari piane nell'ambito delle equazioni linearizzate si estendono alla propagazione generale di fronti d'onda nell'ambito delle equazioni non lineari.

2. Teoria idromagnetica di un plasma magnetizzato privo di urti.

Partendo dall'equazione di Boltzmann per un plasma rarefatto, privo di urti e sottoposto a un intenso campo magnetico, G. F. Chew, M. L. Goldberger e F. Low in un lavoro del 1956 [20] hanno dimostrato che, qualora sia trascurabile il trasporto di pressione lungo le linee di forza magnetiche, il plasma può essere descritto dal seguente sistema di equazioni idromagnetiche con pressione anisotropa (1):

$$\varrho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{div} \mathbf{P} + \frac{1}{4\pi\mu} (\operatorname{rot} \mathbf{B}) \wedge \mathbf{B}, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}), \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\operatorname{div} (\varrho \mathbf{v}), \tag{2.3}$$

(1) Come nelle ordinarie equazioni di Maxwell, l'equazione $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ ha il carattere di una condizione iniziale nel senso che, come si deduce da (2.2), essa è soddisfatta in ogni istante se lo è inizialmente.

unitamente ai due invarianti adiabatici:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p_{\parallel} B^2}{\varrho^3}\right) = 0, \tag{2.4}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p_{\perp}}{\varrho B}\right) = 0. \tag{2.5}$$

In esse $\mathbf{P}$ è il tensore delle pressioni avente la forma

$$\mathbf{P} = p_{\perp}\,\mathbf{I} + (p_{\parallel} - p_{\perp})\,\widehat{\mathbf{B}}\,\widehat{\mathbf{B}}, \tag{2.6}$$

in cui $\mathbf{I}$ è il tensore unità, $\widehat{\mathbf{B}}$ il versore del vettore induzione magnetica $\mathbf{B}$ e gli scalari $p_{\parallel}$ e $p_{\perp}$ sono rispettivamente la pressione parallelamente e ortogonalmente a $\widehat{\mathbf{B}}$ (con $\widehat{\mathbf{B}}\,\widehat{\mathbf{B}}$ si indica il prodotto diadico di $\widehat{\mathbf{B}}$ per se stesso). Da (2.6) si deduce subito che il tensore $\mathbf{P}$ è diagonale in una terna locale di riferimento cartesiano un cui asse sia preso parallelo a $\mathbf{B}$. I rimanenti simboli nelle equazioni (2.1)-(2.5) hanno il significato abituale.

Per una approfondita analisi delle equazioni soprascritte cfr. T. F. VOLKOV [21]; si veda anche W. B. THOMPSON [22] Sect. 7.5 e 8.7, B. LEHNERT [23] Cap. V. § 1.3 e 2.2, R. KULSRUD [24] pag. 91 e segg. Nel lavoro [24] al N. 4.4 R. KULSRUD stabilisce per il sistema CGL una condizione necessaria e sufficiente per la stabilità dei piccoli moti attorno a una posizione di equilibrio, usando un metodo energetico.

Per il plasma in esame, descritto dalle equazioni (2.1)-(2.5), lo studio della propagazione di piccole perturbazioni piane è stato fatto in [23] p. 145 e segg. da B. LEHNERT (cfr. anche T. F. VOLKOV [21] N. 7 e J. E. C. GLIDDON [25], nel quale ultimo lavoro è esaminato il problema della instabilità gravitazionale); quello delle onde semplici in [26] da I. A. AKHIEZER, R. V. POLOVIN e N. L. TSINTSADZE e quello delle onde cilindriche, tenendo conto anche degli effetti gravitazionali, in [27]. S. P. TALWAR ha poi esaminato in [28] la instabilità del tipo KELVIN - HELMHOLTZ, sempre nell'ambito delle suddette equazioni.

Il sistema (2.1)-(2.5) comprende nove equazioni differenziali alle derivate parziali nelle nove funzioni incognite $\mathbf{v}, \mathbf{B}, \varrho, p_{\parallel}$ e $p_{\perp}$. Esso è quindi un sistema determinato. Inoltre è del primo ordine e quasi lineare.

3. Condizioni di compatibilità dinamica.

Proponendoci lo studio dei fronti d'onda del primo ordine, determiniamo in questo numero le condizioni di compatibilità dinamica relative al sistema (2.1)-(2.5). Sia $0, x_1, x_2, x_3$ il sistema di coordinate a cui è riferito il moto del plasma e

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, t) = \Phi_0, \tag{3.1}$$

con Φ_0 costante, l'equazione della varietà caratteristica Σ del fenomeno (ipersuperficie nello spazio cinematico x_1, x_2, x_3, t attraverso la quale sono continue le funzioni incognite mentre possono presentare discontinuità di prima specie le loro derivate prime).

Indicando con la lettera Δ premessa ad un simbolo il salto attraverso Σ della quantità rappresentata da tale simbolo, è ben noto che

$$\Delta \frac{\partial f}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \tag{3.2}$$

$$\Delta \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = \boldsymbol{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \tag{3.3}$$

($i = 0, 1, 2, 3, ; x_0 = t$), dove f è una funzione scalare, $\mathbf{u}$ una funzione vettoriale, λ e $\boldsymbol{\lambda}$ i corrispondenti parametri caratterizzanti le discontinuità.

Posto poi

$$g = |\operatorname{grad} \Phi| \neq 0, \tag{3.4}$$

ricordiamo che la velocità di avanzamento del fronte d'onda rispetto al sistema $0, x_1, x_2, x_3$ è data da

$$a = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big/ g. \tag{3.5}$$

Indichiamo con $\mathbf{n}$ il versore normale, in un dato istante, al fronte d'onda e con $\boldsymbol{\lambda}_B, \lambda_B, \widehat{\boldsymbol{\lambda}}_B, \boldsymbol{\lambda}_v, \lambda_\varrho, \lambda_\parallel, \lambda_\perp$ i parametri caratterizzanti le discontinuità delle derivate prime nell'ordine di $\mathbf{B}, B, \widehat{\mathbf{B}}, \mathbf{v}, \varrho, p_\parallel$ e $p_\perp$.

Esprimiamo anzitutto λ_B e $\widehat{\boldsymbol{\lambda}}_B$ in funzione di $\boldsymbol{\lambda}_B$. Al riguardo possiamo procedere nel modo seguente: dall'identità $\mathbf{B} = B\widehat{\mathbf{B}}$ deduciamo

$$\Delta \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_i} = B\Delta \frac{\partial \widehat{\mathbf{B}}}{\partial x_i} + \widehat{\mathbf{B}}\Delta \frac{\partial B}{\partial x_i}$$

e da questa, per (3.2) e (3.3),

$$(\boldsymbol{\lambda}_B - B\widehat{\boldsymbol{\lambda}}_B - \widehat{\mathbf{B}}\,\lambda_B)\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0$$

e quindi, non potendo essere nulle tutte le $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i}$, :

$$\boldsymbol{\lambda}_B - B\widehat{\boldsymbol{\lambda}}_B - \widehat{\mathbf{B}}\,\lambda_B = 0;$$

dall'identità $B^2 = \mathbf{B}\cdot\mathbf{B}$ deduciamo in modo analogo:

$$B\lambda_B - \boldsymbol{\lambda}_B\cdot\mathbf{B} = 0.$$

Quindi $\widehat{\boldsymbol{\lambda}}_B$ e λ_B sono espressi in funzione di $\boldsymbol{\lambda}_B$ tramite le seguenti relazioni:

$$\widehat{\boldsymbol{\lambda}}_B = \frac{1}{B}\,[\boldsymbol{\lambda}_B - (\boldsymbol{\lambda}_B\cdot\widehat{\mathbf{B}})\,\widehat{\mathbf{B}}], \tag{3.6}$$

$$\lambda_B = \boldsymbol{\lambda}_B\cdot\widehat{\mathbf{B}}. \tag{3.7}$$

Determiniamo ora le condizioni di compatibilità dinamica provenienti dalla (2.1).

Posto

$$s = \frac{d\Phi}{dt},$$

si ha intanto, cfr. R. NARDINI [1] p. 11, :

$$\Delta\left(\varrho\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) = \varrho s\,\boldsymbol{\lambda}_v, \qquad \Delta\,[(\mathrm{rot}\,\mathbf{B})\wedge\mathbf{B}] = g\,(\mathbf{n}\wedge\boldsymbol{\lambda}_B)\wedge\mathbf{B}.$$

Calcoliamoci ora $\Delta\,\mathrm{div}\,\mathbf{P}$.

Facendo uso delle identità, di facile verifica (2),

$$\mathrm{div}\,(\widehat{\mathbf{B}}\,\widehat{\mathbf{B}}) = (\widehat{\mathbf{B}}\,\mathrm{grad})\,\widehat{\mathbf{B}} + \widehat{\mathbf{B}}\,\mathrm{div}\,\widehat{\mathbf{B}},$$

$$\mathrm{div}\,(\psi\,\widehat{\mathbf{B}}\,\widehat{\mathbf{B}}) = \psi\,\mathrm{div}\,(\widehat{\mathbf{B}}\,\widehat{\mathbf{B}}) + (\widehat{\mathbf{B}}\cdot\mathrm{grad}\,\psi)\,\widehat{\mathbf{B}},$$

dove ψ è una funzione scalare delle coordinate di posizione, si ha intanto:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{P} = \mathrm{grad}\,p_\perp + (p_\parallel - p_\perp)\,(\widehat{\mathbf{B}}\,\mathrm{grad})\,\widehat{\mathbf{B}} + (p_\parallel - p_\perp)\,\widehat{\mathbf{B}}\,\mathrm{div}\,\widehat{\mathbf{B}} + \\ + \widehat{\mathbf{B}}\,[\widehat{\mathbf{B}}\cdot\mathrm{grad}\,(p_\parallel - p_\perp)].$$

---

(2) Detto **a** un generico vettore, la notazione (**a** grad) **a** indica il vettore che in notazioni tensoriali è rappresentato da $a\,a_{i,j}$.

Con l'applicazione di (3.2) e (3.3) si ricava poi [3]:

$$\Delta \,\mathrm{grad}\, p_\perp = \lambda_\perp \, g \, \mathbf{n},$$

$$\Delta [(p_\parallel - p_\perp)(\widehat{\mathbf{B}}\,\mathrm{grad})\,\widehat{\mathbf{B}}] = (p_\parallel - p_\perp)(\widehat{\mathbf{B}}\,\Delta\,\mathrm{grad})\,\widehat{\mathbf{B}} = (p_\parallel - p_\perp)\, g\, \widehat{B}_n \,\widehat{\boldsymbol{\lambda}}_B\,,$$

$$\Delta [(p_\parallel - p_\perp)\,\widehat{\mathbf{B}}\,\mathrm{div}\,\widehat{\mathbf{B}}] = (p_\parallel - p_\perp)\,\widehat{\mathbf{B}}\,\Delta\,\mathrm{div}\,\widehat{\mathbf{B}} = (p_\parallel - p_\perp)\,\widehat{\mathbf{B}}\, g\, \widehat{\boldsymbol{\lambda}}_B\cdot\mathbf{n},$$

$$\Delta \{\widehat{\mathbf{B}}\,[\widehat{\mathbf{B}}\cdot\mathrm{grad}\,(p_\parallel - p_\perp)]\} = \widehat{\mathbf{B}}\,[\widehat{\mathbf{B}}\cdot\Delta\,\mathrm{grad}\,(p_\parallel - p_\perp)] = (\lambda_\parallel - \lambda_\perp)\, g\, \widehat{B}_n\, \widehat{\mathbf{B}},$$

e quindi tenendo presente la (3.6) e che $\boldsymbol{\lambda}_B\cdot\mathbf{n} = 0$ (cfr. Nota (4)), si ha in definitiva:

$$\varrho s\, \boldsymbol{\lambda}_v - \frac{g}{4\pi\mu}(\mathbf{n}\wedge\boldsymbol{\lambda}_B)\wedge\mathbf{B} + \lambda_\perp g\,\mathbf{n} + \frac{p_\parallel - p_\perp}{B}\, g\, \widehat{B}_n [\boldsymbol{\lambda}_B - 2(\boldsymbol{\lambda}_B\cdot\widehat{\mathbf{B}})\,\widehat{\mathbf{B}}] + (\lambda_\parallel - \lambda_\perp)\, g\, \widehat{B}_n\, \widehat{\mathbf{B}} = 0. \tag{3.8}$$

Dalle (2.2) e (2.3) discendono le, cfr. R. Nardini [1] Eq. $(23)_1$ e $(23)_4$:

$$s\,\boldsymbol{\lambda}_B - gB_n\,\boldsymbol{\lambda}_v + g\lambda_{vn}\,\mathbf{B} = 0, \tag{3.9}$$

$$s\lambda_\varrho + \varrho g\,\lambda_{vn} = 0. \tag{3.10}$$

Per quanto riguarda le condizioni di compatibilità fornite dai due invarianti adiabatici, dalla (2.4) esplicitando la derivata abbiamo:

$$2p_\parallel\,\widehat{\mathbf{B}}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{dt} + B\frac{dp_\parallel}{dt} - \frac{3p_\parallel}{\varrho}B\frac{d\varrho}{dt} = 0,$$

da cui, usando (3.2) e (3.3), si ha:

$$\left(2p_\parallel\,\widehat{\mathbf{B}}\cdot\boldsymbol{\lambda}_B + \lambda_\parallel B - \frac{3p_\parallel}{\varrho}B\lambda_\varrho\right)s = 0\,; \tag{3.11}$$

dalla (2.5) in modo analogo, tenendo conto anche della (3.7), discende la

$$\left(\lambda_\perp - \frac{p_\perp}{\varrho}\lambda_\varrho - \frac{p_\perp}{B}\boldsymbol{\lambda}_B\cdot\widehat{\mathbf{B}}\right)s = 0. \tag{3.12}$$

---

(3) Un generico campo vettoriale $\mathbf{w}$ si esprimerà d'ora innanzi, quando ciò sia utile, come somma della sua parte normale e della sua parte tangenziale al fronte d'onda

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_n + \mathbf{w}_t\,.$$

Le (3.8), (3.9) e (3.10), unitamente alle (3.11) e (3.12), sono le cercate condizioni di compatibilità dinamica ([4]).

Prima di passare alla determinazione dei possibili valori della velocità di avanzamento, si possono dedurre varie informazioni dal sistema (3.8)-(3.12) facendo delle ipotesi particolari sulle discontinuità e andando a vedere se esistono fronti d'onda su cui tali ipotesi sono realizzate. Qui di seguito si danno due esempi al riguardo.

(*a*) Se si richiede $\boldsymbol{\lambda}_v \neq 0$, $\lambda_\varrho = 0$ e $\boldsymbol{\lambda}_B = 0$, da (3.10) abbiamo $\lambda_{vn} = 0$, da (3.9) $B_n = 0$ e la (3.8) diventa

$$\varrho s \boldsymbol{\lambda}_v + \lambda_\perp g\, \mathbf{n} = 0,$$

da cui discende $\lambda_\perp = 0$ e

$$s = 0,$$

il che significa che si tratta di fronti d'onda solidali col fluido; le (3.11) e (3.12) infine sono soddisfatte. Si può perciò concludere che:

esistono dei fronti d'onda su cui sono discontinue le derivate della velocità, ma continue quelle dell'induzione magnetica e della densità; essi però sono solidali col fluido. Su di essi le discontinuità nelle derivate della velocità hanno carattere trasversale ($\lambda_{vn} = 0$), le derivate della $p_\perp$ sono necessariamente continue, mentre possono non esserlo quelle della $p_\parallel$. Inoltre il vettore induzione magnetica risulta necessariamente tangente a tali fronti.

(*b*) Se si richiede $\boldsymbol{\lambda}_B \neq 0$, $\lambda_\varrho \neq 0$, $\boldsymbol{\lambda}_v \neq 0$, ma $\lambda_{vn} = 0$, da (3.10) discende $s = 0$ e da (3.9) $B_n = 0$. Dalla (3.8), tenendo conto che è, come si può facilmente verificare, :

$$-\frac{g}{4\pi\mu}(\mathbf{n} \wedge \boldsymbol{\lambda}_B) \wedge \mathbf{B} = -\frac{g}{4\pi\mu} B_n \boldsymbol{\lambda}_B + \Delta \operatorname{grad} p_m \tag{3.13}$$

con

$$p_m = \frac{B^2}{8\pi\mu}, \tag{3.14}$$

pressione magnetica, discende:

$$\Delta \operatorname{grad} (p_\perp + p_m) = 0.$$

Le (3.11) e (3.12) restano soddisfatte essendo $s = 0$.

([4]) Dalla $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ si deduce che in ogni caso il vettore caratterizzante le discontinuità dell'induzione magnetica è tangente al fronte d'onda: $\boldsymbol{\lambda}_B \cdot \mathbf{n} = 0$ (discontiniutà trasversali) il che peraltro, nell'ipotesi $s \neq 0$, discende anche dalla (3.9).

Si può perciò concludere che:
esistono dei fronti d'onda su cui sono discontinue le derivate dell'induzione magnetica e della densità e su cui le discontinuità delle derivate della velocità hanno carattere trasversale; essi però sono solidali col fluido. Su di essi possono essere discontinui i gradienti della $p_{\parallel}$ e della $p_{\perp}$, mentre invece è continuo il gradiente della somma della pressione magnetica e della « pressione ortogonale ». Inoltre anche qui il vettore induzione magnetica risulta tangente a tali fronti.

4. Equazione delle varietà caratteristiche.

Abbandonando ora ogni ipotesi restrittiva sulle discontinuità e ritenendo d'ora innanzi $s \neq 0$, determiniamo l'equazione delle varietà caratteristiche che, come è noto, si ottiene annullando il determinante del sistema lineare e omogeneo costituito dalle condizioni di compatibilità dinamica.

Allo scopo ricaviamo $\boldsymbol{\lambda}_B$ dalla (3.9), λ_ϱ dalla (3.10), $\lambda_{\parallel}$ dalla (3.11) e $\lambda_{\perp}$ dalla (3.12) ottenendo

$$\boldsymbol{\lambda}_B = \frac{g}{s}(B_n \boldsymbol{\lambda}_v - \lambda_{vn}\mathbf{B}),$$

$$\lambda_\varrho = -\frac{g}{s}\varrho\lambda_{vn},$$

$$\lambda_{\parallel} = \frac{3p_{\parallel}}{\varrho}\lambda_\varrho - 2\frac{p_{\parallel}}{B}\widehat{\mathbf{B}}\cdot\boldsymbol{\lambda}_B,$$

$$\lambda_{\perp} = \frac{p_{\perp}}{\varrho}\lambda_\varrho + \frac{p_{\perp}}{B}\boldsymbol{\lambda}_B\cdot\widehat{\mathbf{B}}.$$

Introducendo queste nella (3.8) si arriva ad un'unica equazione vettoriale in $\boldsymbol{\lambda}_v$ che a conti fatti assume la forma

$$\xi\boldsymbol{\lambda}_v + (\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\lambda}_v)\,\mathbf{c} + \lambda_{vn}\,\mathbf{d} = 0, \tag{4.1}$$

dove

$$\xi = \frac{s^2}{g^2} - \frac{B_n^2}{4\pi\mu\varrho} + \frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{B^2\varrho}B_n^2, \tag{4.2}$$

$$\mathbf{c} = \left(\frac{1}{4\pi\mu\varrho} + \frac{p_{\perp}}{B^2\varrho}\right)\mathbf{B}_n - \frac{B_n^2}{B^4\varrho}(4p_{\parallel} - p_{\perp})\,\mathbf{B}, \tag{4.3}$$

$$\mathbf{d} = -\left(\frac{B^2}{4\pi\mu\varrho} + \frac{2p_{\perp}}{\varrho}\right)\mathbf{n} + \frac{B_n}{\varrho}\left(\frac{1}{4\pi\mu} + \frac{p_{\perp}}{B^2}\right)\mathbf{B}. \tag{4.4}$$

La (4.1) coincide formalmente con la (24) di R. NARDINI [1] relativa al sistema MFD ideale, anche se, naturalmente, ξ, $\mathbf{c}$ e $\mathbf{d}$ hanno diverse espressioni. L'equazione delle varietà caratteristiche si ottiene eguagliando a zero il determinante dei coefficienti delle componenti λ_{v1}, λ_{v2}, λ_{v3} di $\boldsymbol{\lambda}_v$ nel sistema lineare omogeneo delle tre equazioni scalari corrispondenti alla (4.1). Essa risulta a conti fatti (cfr. R. NARDINI [1] (27)):

$$\xi\,[\xi^2 + (\mathbf{B}\cdot\mathbf{c} + \mathbf{n}\cdot\mathbf{d})\,\xi + (\mathbf{B}\wedge\mathbf{n})\cdot(\mathbf{c}\wedge\mathbf{d})] = 0. \tag{4.5}$$

5. Velocità di avanzamento e fenomeni di instabilità.

La (4.5) si spezza in due equazioni. Indicando con

$$u^2 = (-a + v_n)^2 \tag{5.1}$$

il quadrato della velocità di propagazione del fronte d'onda rispetto al fluido e tenendo presente che, in base a (3.4) e (3.5), è

$$\frac{s}{g} = -a + v_n\,, \tag{5.2}$$

la prima equazione assume la forma

$$u^2 = \frac{B_n^2}{B^2\,\varrho}(2p_m + p_\perp - p_{\parallel})\,. \tag{5.3}$$

Da (5.3) si vede che se è

$$p_m > \frac{p_{\parallel} - p_\perp}{2} \tag{5.4}$$

si ha la propagazione di un effettivo fronte d'onda. Esso corrisponde al fronte MFD di Alfvén, modificato a causa dell'anisotropia nel tensore delle pressioni; si ha infatti

$$u^2 = A_n^2 + \frac{p_\perp - p_{\parallel}}{\varrho}\,\frac{B_n^2}{B^2} \tag{5.5}$$

dove $A_n^2 = B_n^2/4\pi\mu\varrho$. Da (5.5) per $p_{\parallel} = p_\perp$ si ha il fronte d'onda di Alfvén.

Se è invece

$$p_m < \frac{p_{\parallel} - p_\perp}{2} \tag{5.6}$$

la (5.3) fornisce per u due valori immaginari coniugati.

Si manifesta qui il fatto che il sistema CGL non è totalmente iperbolico, diversificandosi quindi nettamente dal sistema MFD ideale. Questo ultimo è in ogni caso totalmente iperbolico: tutti i possibili valori della velocità di avanzamento sono infatti sempre reali.

La condizione (5.6) appare in connessione con un noto fenomeno di instabilità nel plasma in esame. Essa infatti corrisponde alla condizione di instabilità che trovasi (nell'ambito delle equazioni CGL) per es. in J. E. C. GLIDDON [25] (44), al verificarsi della quale sorge nel plasma la cosidetta « hose instability » (5). J. E. C. GLIDDON in [25] ricava tale condizione nel caso di propagazione parallela al campo magnetico applicando, nell'ambito delle equazioni linearizzate, il metodo delle piccole perturbazioni di una posizione d'equilibrio.

La seconda equazione in cui si spezza la (4.5) eseguendo i calcoli assume la forma

$$(5.7) \qquad u^4 - Pu^2 + Q = 0$$

con

$$P = \frac{2p_m + p_\perp}{\varrho} + \frac{p_\perp B_t^2 + 2\, p_\parallel B_n^2}{B^2 \varrho} > 0$$

$$Q = \frac{B_n^2}{B^2 \varrho^2} \left\{ 3\, p_\parallel (2p_m + p_\perp - p_\parallel) + \frac{B_t^2}{B^2} [3\, p_\parallel (p_\perp + p_\parallel) - p_\perp^2] \right\} \ (6).$$

Potendo essere $Q < 0$, la (5.7) riconferma la mancanza di totale iperbolicità del sistema CGL.

---

(5) Per quanto riguarda questo tipo di instabilità si veda per es. E. N. PARKER [29], S. CHANDRASEKHAR, A. N. KAUFMAN, K. M. WATSON [30], p. 455 (A11), W. B. THOMPSON [22] p. 216 (8.10.12), B. LEHNERT [23] p. 148 (6.59).

(6) Relativamente a onde idromagnetiche di piccola ampiezza equazioni analoghe alle (5.3) e (5.7) sono state ottenute per diversa via da B. ABRAHAM-SHRAUNER al n. 2 del recentissimo articolo [31] giunto a Pisa dopo la presentazione del manoscritto del presente lavoro alla Redazione degli Annali della Scuola Normale; il lavoro [31] è però totalmente diverso dal presente perchè in esso ci si limita alla considerazione di onde piane di piccola ampiezza (tutte le funzioni incognite sono supposte dipendenti da una sola variabile spaziale e dal tempo) e il metodo ivi seguito, basato sulla teoria delle caratteristiche nella impostazione di K. O. FRIEDRICHS e H. KRANZER, già estensivamente applicato alla MFD da A. JEFFREY e T. TANIUTI in [15], si diversifica da quello usato nel presente lavoro. Un successivo lavoro di B. ABRAHAM-SHRAUNER [32] è dedicato alle onde d'urto CGL.

Il discriminante della (5.7) risulta a conti fatti

$$P^2 - 4Q = \frac{4p_m^2}{\varrho^2}\left\{\left[1 + \frac{p_\perp}{2p_m}\left(1 + \frac{B_t^2}{B^2}\right) - 2\frac{p_\parallel}{p_m}\frac{B_n^2}{B^2}\right]^2 + \frac{p_\perp^2}{p_m^2}\frac{B_t^2 B_n^2}{B^4}\right\};$$

esso è quindi sempre positivo, per cui se è $Q > 0$ si hanno per u^2 due radici reali positive e dunque la propagazione di due fronti d'onda corrispondenti ai due del caso MFD ideale. Questi ultimi nella letteratura MFD anglosassone sono comunemente indicati come «slow» e «fast», in quanto uno ha velocità di avanzamento $\leq$ e l'altro $\geq$ di quella del fronte di Alfvén, circostanza questa che non si verifica necessariamente per il sistema CGL. Tenendo conto anche della (5.3) possiamo in definitiva concludere che anche per il sistema CGL, come per quello MFD ideale, si può avere la propagazione di tre effettivi fronti d'onda, ma solo se sono verificate due condizioni: una espressa dalla (5.4) e l'altra da $Q > 0$. Anche nel caso che nessuna di queste due condizioni sia verificata c'è per il sistema CGL la propagazione di un effettivo fronte d'onda, assicurata dalla (5.7), essendo sempre $P > 0$.

Se è $Q < 0$ accanto a una radice reale positiva abbiamo per u^2 una radice reale negativa e, anche in questo caso, c'è un collegamento con un altro noto fenomeno di instabilità nel plasma.

Introdotte infatti, seguendo W. B. THOMPSON [22] p. 216, le cosidette velocità parallela e perpendicolare del suono

$$(5.8) \qquad c_\parallel^2 = p_\parallel/\varrho, \quad c_\perp^2 = p_\perp/\varrho$$

e detto ϑ l'angolo formato da $\mathbf{B}$ con $\mathbf{n}$, la condizione $Q < 0$ si traduce nella

$$(5.9) \qquad c_\perp^4 \operatorname{sen}^2\vartheta > 3c_\parallel^2\,[A^2 + c_\perp^2(1 + \operatorname{sen}^2\vartheta) - c_\parallel^2\cos^2\vartheta]$$

dove A^2 è il quadrato della velocità di Alfvén, e questa corrisponde a una condizione di instabilità che trovasi in W. B. THOMPSON (cfr. [22] (8.10.13) p. 216) ricavata applicando il metodo delle perturbazioni di una posizione di equilibrio; da essa discende una descrizione della cosidetta «mirror instability», per la quale vedasi per es. W. B. THOMPSON [22] p. 216 e segg. e la Bibliografia ivi indicata; cfr. anche B. LEHNERT [23] p. 148. Possiamo quindi a questo punto rimarcare il seguente fatto che appare collegato alla non totale iperbolicità del sistema CGL: il metodo perturbativo applicato al sistema di equazioni linearizzate (cfr. anche N. 7) fornisce delle condizioni su grandezze caratterizzanti il plasma nello stato imperturbato in corrispondenza alle quali si ha instabilità nel plasma (hose, mirror); al verificarsi di queste stesse condizioni, riferite alle corrispondenti funzioni incognite nel sistema di equazioni non lineari, il metodo delle caratteristiche qui applicato fornisce velocità di avanzamento non reali, il che corrisponde alla cessazione del carattere di iperbolicità del sistema CGL.

6. Casi particolari.

Esaminiamo ora due casi che si presentano ognuno in corrispondenza ad una ipotesi particolare sul fronte d'onda.

1°. *Il vettore induzione magnetica è tangente al fronte d'onda* ($B_n = 0$).

La (5.3) dà $u^2 = 0$, cioè un fronte d'onda solidale dal quale prescindiamo. La (5.7) fornisce ancora $u^2 = 0$ e

$$u^2 = A^2 + 2\frac{p_1}{\varrho}. \tag{6.1}$$

In questo caso quindi non ci sono valori immaginari per u e c'è la propagazione di un unico fronte d'onda effettivo; la (6.1) indica che esso è di tipo magnetoacustico. Ricordiamo che anche nel corrispondente caso MFD, cfr. R. NARDINI [1] p. 25, c'è la propagazione di un solo fronte d'onda (quello magnetoacustico) caratterizzato da

$$u^2 = A^2 + c^2, \tag{6.2}$$

dove c^2 indica il quadrato della velocità locale del suono.

La (4.1), essendo ora, cfr. (4.3), (4.4) e (4.5), $\xi = u^2$, $\mathbf{c} = 0$ e $\mathbf{d} = -\left(A^2 + \frac{2p_1}{\varrho}\right)\mathbf{n}$, si può mettere nella forma:

$$\left[u^2 - \left(A^2 + \frac{2p_1}{\varrho}\right)\right]\lambda_{vn}\,\mathbf{n} + u^2\,\boldsymbol{\lambda}_{vt} = \mathbf{0}. \tag{6.3}$$

La (6.3) indica che sul fronte d'onda (6.1) è $\boldsymbol{\lambda}_{vt} = 0$: quindi il vettore caratteristico delle discontinuità delle derivate della velocità è normale al fronte d'onda (discontinuità longitudinali).

2°. *Il vettore induzione magnetica è normale al fronte d'onda* ($B_t = 0$).

Questo caso si realizza per es. se il fronte d'onda si propaga nella direzione di un campo magnetico preesistente, separando la regione non perturbata da quella perturbata.

Da (5.5) abbiamo

$$u^2 = A^2 + \frac{p_\perp - p_\parallel}{\varrho}, \tag{6.4}$$

alla quale si trasportano le considerazioni fatte sulla (5.3).

Da (5.7) abbiamo per u^2 ancora la radice (6.4) e la

$$u^2 = 3\,\frac{p_\parallel}{\varrho}, \tag{6.5}$$

che supponiamo distinta da (6.4). Essa corrisponde ad un fronte d'onda di tipo acustico (la sua velocità di avanzamento non è influenzata dal campo magnetico).

Nel caso in esame quindi c'è sempre un effettivo fronte d'onda (di tipo acustico) e, se è verificata la (5.4), il che corrisponde, come si è visto, all'assenza della « hose instability », vi è un secondo fronte d'onda del tipo di Alfvén, modificato a causa della anisotropia nel tensore delle pressioni.

Nel corrispondente caso MFD vi è in ogni caso la propagazione di due fronti d'onda : quello acustico

$$u^2 = c^2, \tag{6.6}$$

e quello di Alfvén

$$u^2 = A^2. \tag{6.7}$$

Si noti che mentre nel caso MFD la velocità relativa del fronte d'onda acustico (6.6) è sempre minore di quella del fronte d'onda magnetoacustico (6.2), nel caso CGL questo non accade necessariamente (cfr. (6.1) e (6.5)).

Il fronte d'onda (6.5) e l'eventuale fronte d'onda (6.4) sono caratterizzati da altre proprietà.

Intanto per entrambi è $\lambda_B = 0$, cfr. (3.7), essendo $B_t = \mathbf{0}$ e avendosi in ogni caso $\boldsymbol{\lambda}_B \cdot \mathbf{n} = 0$.

Inoltre dalla (4.1) che, risultando ora (cfr. (4.2), (4.3), (4.4))

$$\xi = u^2 - \left(A^2 + \frac{p_\perp - p_\parallel}{\varrho}\right)$$

$$\mathbf{c} = \frac{1}{B}\left(A^2 + \frac{2p_\perp - 4p_\parallel}{\varrho}\right)\mathbf{n}$$

$$\mathbf{d} = -\frac{p_\perp}{\varrho}\,\mathbf{n},$$

diventa

$$\left(u^2 - \frac{3p_{\parallel}}{\varrho}\right)\lambda_{vn}\,\mathbf{n} + \left[u^2 - \left(A^2 + \frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{\varrho}\right)\right]\boldsymbol{\lambda}_{vt} = 0, \tag{6.8}$$

discende che sull'eventuale fronte d'onda del tipo di Alfvén le discontinuità delle derivate della velocità hanno carattere trasversale, mentre su quello di tipo acustico hanno carattere longitudinale.

Sull'eventuale fronte d'onda di Alfvén inoltre si ha $\lambda_\varrho = 0$ (cfr. (3.10)), $\lambda_{\parallel} = 0$ (cfr. (3.11)), $\lambda_{\perp} = 0$ (cfr. (3.12)), mentre dalla (3.9) risulta

$$\boldsymbol{\lambda}_v = \frac{s}{g}\,\frac{1}{B}\,\boldsymbol{\lambda}_B\,;$$

quindi attraverso tale fronte sono continui i gradienti della pressione magnetica, della « pressione parallela », della « pressione ortogonale » e della densità, mentre subiscono discontinuità (entrambe a carattere trasversale) le derivate dell'induzione magnetica e della velocità.

Sul fronte d'onda di tipo acustico si ha invece $\lambda_\varrho \neq 0, \lambda_{\perp} \neq 0, \lambda_{\parallel} \neq 0$, mentre è $\boldsymbol{\lambda}_B = 0$ (cfr. (3.9)), cioè attraverso tale fronte sono discontinui i gradienti della « pressione parallela », della « pressione ortogonale » e della densità, mentre sono continue le derivate dell'induzione magnetica, a conferma del fatto che trattasi di un fronte d'onda puramente meccanico.

7. Propagazione di piccole perturbazioni nel plasma in esame.

Supponendo che il plasma nello stato imperturbato sia omogeneo, a riposo e sottoposto a un campo magnetico uniforme $\mathbf{B}_0$ diretto come l'asse z di una terna cartesiana, consideriamo la propagazione di piccole perturbazioni piane nell'ambito delle equazioni linearizzate, ottenute sotto l'ipotesi che siano trascurabili nelle (2.1)-(2.5) i termini di grado superiore al primo nelle quantità variabili.

Nel caso si trascurino le forze di massa di natura non elettromagnetica (7), assumendo tutte le quantità perturbate proporzionali a

$$\exp\left(i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega\,t\right),$$

(7) Queste, data la loro supposta continuità, non svolgono alcun ruolo nel metodo delle caratteristiche usato nel presente lavoro, mentre invece possono avere una importanza rilevante per quanto riguarda la propagazione di piccole perturbazioni. Ciò accade anche per il plasma in esame dove al campo di forza gravitazionale è essenzialmente legata la instabilità magnetogravitazionale del tipo di Jeans, messa in luce da J. E. C. GLIDDON in [25] usando appunto il metodo perturbativo nell'ambito delle equazioni linearizzate.

dove $\mathbf{k}$ è il vettore numero d'onda e ω la pulsazione, la relazione di dispersione a cui si perviene è

$$(7.1)\qquad \left(\omega^2 + \frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0} - B_0^2/4\pi\mu}{\varrho_0}\, k_z^2\right) \cdot$$

$$\cdot \left\{\left[\omega^2 - \frac{2(p_{\perp 0} + B_0^2/8\pi\mu)}{\varrho_0}\, k_\perp^2 + \frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0} - B_0^2/4\pi\mu}{\varrho_0}\, k_z^2\right] \cdot \right.$$

$$\left. \left(\omega^2 - \frac{3p_{\parallel 0}}{\varrho_0}\, k_z^2\right) - \frac{p_{\perp 0}^2}{\varrho_0^2}\, k_z^2\, k_\perp^2 \right\} = 0\,,$$

dove $\mathbf{k}_\perp$ è il componente di $\mathbf{k}$ normale a $\mathbf{B}_0$ e l'indice o sta ad indicare grandezze relative allo stato imperturbato.

La (7.1) si spezza nelle ([8])

$$(7.2)\qquad \omega^2 = \frac{p_{\perp 0} + B_0^2/4\pi\mu - p_{\parallel 0}}{\varrho_0}\, k_z^2\,,$$

$$(7.3)\qquad \left[\omega^2 - \frac{2(p_{\perp 0} + B_0^2/8\pi\mu)}{\varrho_0}\, k_\perp^2 + \frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0} - B_0^2/4\pi\mu}{\varrho_0}\, k_z^2\right] \cdot$$

$$\cdot \left(\omega^2 - \frac{3p_{\parallel 0}}{\varrho_0}\, k_z^2\right) - \frac{p_{\perp 0}^2}{\varrho_0^2}\, k_z^2\, k_\perp^2 = 0.$$

Osserviamo che facendo corrispondere alla velocità di propagazione relativa u dei fronti d'onda nel metodo delle caratteristiche qui usato la velocità di fase $V_f = \omega/k$ delle onde elementari piane nel metodo delle piccole perturbazioni, la (7.2) si può far discendere dalla (5.5) e la (7.3) dalla (5.7).

Infatti, facendo corrispondere a $\mathbf{n}$ il vettore numero d'onda $\mathbf{k}$ e a $\mathbf{B}$, $p_\parallel$, $p_\perp$ e ϱ le corrispondenti grandezze nello stato imperturbato, detto ϑ

([8]) Le (7.2) e (7.3) coincidono con la (6.57) e la (6.58) di B. LEHNERT [23] nelle quali si assumono, a differenza di W. B. THOMPSON [22] (cfr. (5.8)), quali « velocità parallela e ortogonale del suono » rispettivamente le espressioni $3p_\parallel/\varrho$ e $2p_\perp/\varrho$. La relazione di dispersione (7.2) si presenta anche nella propagazione di onde cilindriche nel plasma in esame nell'ambito delle equazioni linearizzate, cfr. [27] Eq. (29). La (7.3) coincide anche con la Eq. (40) di J. E. C. GLIDDON [25] (trascurandovi l'azione gravitazionale), con l'Eq. (56) di T. F. VOLKOV [21] e con la Eq. (8.10; 11) di W. B. THOMPSON [22].

l'angolo fra **k** e $\mathbf{B}_0$ si ha

$$B_t = B_0 \operatorname{sen} \vartheta, \qquad B_n = B_0 \cos \vartheta$$

$$k_\perp = k \operatorname{sen} \vartheta, \qquad k_z = k \cos \vartheta$$

e quindi

$$k_z^2 = k^2 \frac{B_n^2}{B_0^2}, \qquad k_\perp^2 = k^2 \frac{B_t^2}{B_0^2};$$

usando le (7.4) si constata che (7.2) e (7.3) discendono rispettivamente da (5.5) e (5.7). In modo analogo, relativamente ai casi particolari di cui al N. 6, le (42), (43) e (46) di J. E. C. GLIDDON [25] possono farsi discendere dalle (6.4), (6.5) e (6.1) rispettivamente, prescindendo dalla azione gravitazionale.

La corrispondenza fra u e V_f ora riscontrata per il sistema CGL si presenta in vari altri casi: per es. per il sistema di equazioni che descrivono i fluidi perfetti barotropici, cfr. B. FINZI [18] N. 6, e per il sistema MFD ideale, cfr. R. NARDINI [1] N. 14. Si noti che questi due ultimi sono sistemi totalmente iperbolici a differenza del sistema CGL. Per una discussione sulla natura di questa corrispondenza indipendentemente dal particolare fenomeno fisico studiato si rimanda a C. TRUESDELL-R. TOUPIN [19] Sect. 194 A.

Per concludere si può osservare che il procedimento qui applicato al plasma in esame, basato sulla teoria delle caratteristiche, ha fra l'altro permesso di estendere a fronti d'onda di tipo generale nell'ambito delle equazioni non lineari risultati noti relativamente a onde elementari piane nell'ambito delle equazioni linearizzate.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. NARDINI, *Sui fronti d'onda nella Magneto-idrodinamica,* « Riv.Mat. Un. Parma », 7, 1956, 3-32.

[2] R. NARDINI, *Sui fronti d'onda in Magnetofluidodinamica,* « Atti Simposio Magnetofluidodinamica Bari 1961 », 149-159, Ed. Cremonese, Roma.

[3] K. O. FRIEDRICHS, H. KRANZER, *Notes on magneto-hydrodynamics,* VIII. Non linear wave motion, « New York University, (NYO 6486) », 1958.

[4] V. N. ZHIGULEV, *Analysis of weak discontinuities in magnetohydromechanics,* « P. M. M. », 23, 1, 1959, 107-113.

[5] R. S. ONG, *Characteristic manifolds in threedimensional unsteady magnetohydrodynamics,* « Phys. Fluids », 2, 1959, 247-251.

[6] H. GRAD, *Propagation of Magnetohydrodynamics waves without radial attenuation,* « The Magnetodynamics of conducting Fluids » (A Symposium) Stanford, 1959, 37-60.

[7] H. GRAD, C. K. CHU, *Magnetofluid Dynamics,* in « Research Frontiers in Fluid Dynamics », Interscience Publishers 1965, 317-325.

[8] C. AGOSTINELLI, *Sulle superfici d'onda in Magnetofluidodinamica,* « Rend. Acc. Lincei », (8) 28, 1960, 746-750; 29, 1960, 1-7.

[9] C. AGOSTINELLI, *Magnetofluidodinamica,* « Boll. U. M. I. », (3), 20, 1965, 52-56.

[10] C. AGOSTINELLI, *Magnetofluidodinamica,* « Monografia C. N. R. », 1966, 446-468, Ed. Cremonese, Roma.

[11] R. COURANT, D. HILBERT, *Methods of Mathematical Physics* Vol. II, Interscience Publishers, New York, 1962, 612-618.

[12] A. M. PRATELLI, *Su alcune discontinuità trasversali in Magnetofluidodinamica,* « Boll. U. M. I. » (3), 18, 1963, 1-16.

[13] A. M. PRATELLI, *Sui fronti d'onda nei fluidi,* « Ist. Lombardo (Rend. Sc.) », A 99, 1965, 187-197.

[14] I. FERRARI, *Sui fronti d'onda in Magnetofluidodinamica,* « Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena », XIII, 1954, 4-25.

[15] A. JEFFREY-T. TANIUTI, *Non linear wave propagation,* Academic Press 1964, 171-188.

[16] A. JEFFREY, *Magnetohydrodynamics,* Oliver & Boid, London 1966, Cap. IV.

[17] T. LEVI CIVITA, *Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa,* Zanichelli, Bologna 1931.

[18] B. FINZI, *Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa.* « L'energia Elettrica », XXVII, 1950, 189-195.

[19] C. TRUESDELL, R. TOUPIN, *The Classical field theories,* « Hand. Phy. », III/1, 1960.

[20] G. F. CHEW, M. L. GOLDBERGER, F. E. LOW, *The Boltzmann equation and the one-fluid hydromagnetic equations in the absence of particle collisions,* « Proc. Roy. Soc. » A, 236, 112-118.

[21] T. F. VOLKOV, *Hydrodynamic description of a collisionless plasma,* « Reviews of Plasma Physics », Ed. M. A. Leontovich, vol. 4, 1-21, Consultants Bureau, New York, 1966.

[22] W. B. THOMPSON, *An introduction to Plasma Physics,* Pergamon Press, 1962.

[23] B. LEHNERT, *Dynamics of charged particles,* North-Holland Publ. Co., 1964.

[24] R. Kulsrud, *General stability theory in Plasma Physics,* « Rendiconti Scuola Internazionale di Fisica E. Fermi », XXV, Academic Press, 1964, 54-96.

[25] J. E. C. Gliddon, *Gravitational instability of anisotropic plasma,* « Astrophy, J. », 145, 1966, 583-588.

[26] I. A. Akhiezer, R. V. Polovin, N. L. Tsintsadze, *Simple waves in the Chew-Goldberger-Low approximation,* « Soviet Physics J. E. T. P. ». 37, (10), 539-542.

[27] G. Mattei, *On the propagation of cylindrical waves in a magnetised self-gravitating collisionless plasma,* « J. Plasma Physics », in corso di stampa.

[28] S. P. Talwar, *Kelvin-Helmholtz instability in an anisotropic plasma,* « Phys. Fluids », 8, 1965, 1295-1299.

[29] E. N. Parker, *Dynamical instability in an anisotropic ionized gas of low density,* « Phys Rev. », 109, 1958, 1874-6.

[30] S. Chandrasekhar, A. N. Kaufman, K. M. Watson, *The stability of the pinch,* «Proc. Roy. Soc.» A, 245, 1958, 435-455.

[31] B. Abraham - Shrauner, *Propagation of hydromagnetic waves through an anisotropic plasma,* « J. Plasma Physics ». 1, Agosto 1967, 361-378.

[32] B. Abraham-Shrauner, *Shock jump conditions for an anisotropic plasma,* « J. Plasma Physics », 1, Agosto 1967, 379-381.