ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

A. TOGNOLI
G. TOMASSINI

Teoremi d'immersione per gli spazi analitici reali

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 21, nº 4 (1967), p. 575-598
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1967_3_21_4_575_0>

TEOREMI D'IMMERSIONE PER GLI SPAZI ANALITICI REALI

A. TOGNOLI - G. TOMASSINI (*)

Introduzione.

In questo lavoro si dimostrano i seguenti teoremi:

1) Sia X un $(\mathbb{R})$-spazio analitico di dimensione n e sia $\mathcal{R}^{2n+1}(X)$ lo spazio delle applicazioni analitiche reali di X in $\mathbb{R}^{2n+1}$, con la topologia della convergenza uniforme sui compatti. Allora l'insieme delle applicazioni $\varphi \in \mathcal{R}^{2n+1}(X)$ che sono iniettive e proprie è denso in $\mathcal{R}^{2n+1}(X)$ (Corollario 3).

2) Se X è coerente allora l'insieme delle applicazioni $\varphi \in \mathcal{R}^{2n+1}(X)$ iniettive, proprie, regolari nei punti regolari di X e tali che $\varphi(X)$ sia un sottoinsieme analitico di $\mathbb{R}^{2n+1}$ è denso in $\mathcal{R}^{2n+1}(X)$. In particolare ogni varietà analitica reale con topologia a base numerabile, di dimensione n, è isomorfa ad una sottovarietà di $\mathbb{R}^{2n+1}$ (Teorema 2 e Corollario 2).

3) Se X è coerente ed è localmente isomorfo ad un sottoinsieme analitico reale di un aperto di $\mathbb{R}^N (N > n)$ allora esiste un'applicazione analitica reale $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}^{n+N}$ che è iniettiva, propria ed è un isomorfismo di X sul sottoinsieme analitico reale $\varphi(X)$ di $\mathbb{R}^{n+N}$ (Teorema 4).

Si osservi che N è un limite superiore per la dimensione dello spazio tangente di Zariski in ogni punto di X.

È noto che (cf. [4]) se X è un $(\mathbb{R})$-spazio analitico di dimensione n esiste uno spazio di Stein $\widetilde{X}$, di dimensione n, su cui è definita un'« antiinvoluzione » $\sigma : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}$ tale che

$$X = \{x \in \widetilde{X} : \sigma(x) = x\}.$$

Da ciò e dai risultati di Narasimhan (cf. [3]) si possono ottenere teoremi d'immersione per gli $(\mathbb{R})$-spazi analitici di dimensione n, in $\mathbb{R}^{4n+2}$.

Pervenuto alla Redazione il 6 Aprile 1967 ed in forma definitiva il 3 Maggio 1967.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca n. 35 del C.N.R. nell'anno accademico 1966-67.

Sia $\mathscr{A}_\sigma^m(\widetilde{X})$ l'insieme delle applicazioni olomorfe $\widetilde{\varphi}: \widetilde{X} \longrightarrow \mathbb{C}^m$ tali che $\widetilde{\varphi}(\sigma(\widetilde{X})) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{X})$ per ogni $x \in \widetilde{X}$.

Per mezzo dei teoremi d'immersione in $\mathbb{R}^{4n+2}$ ricalcando passo passo la dimostrazione di Narasimhan ([3]) si prova che l'insieme delle applicazioni $\widetilde{\varphi} \in \mathscr{A}_\sigma^{2n+1}(\widetilde{X})$ che sono iniettive, proprie e regolari nei punti regolari di $\widetilde{X}$ è denso in $\mathscr{A}_\sigma^{2n+1}(\widetilde{X})$ (Teorema 1).

Da questo risultato seguono i teoremi enunciati dapprincipio.

Ringraziamo A. Andreotti per utili discussioni avute nella preparazione del presente lavoro.

§ 1. Generalità.

a. Riportiamo, per comodità del lettore, alcune definizioni e proprietà che saranno utilizzate nel lavoro.

Uno spazio anulato si dice *spazio analitico* (ridotto) reale (rispettivamente complesso) se:

1) è di Hausdorff e soddisfa al secondo assioma di numerabilità

2) è localmente isomorfo ad un sottoinsieme analitico (ridotto) di $\mathbb{R}^n$ (rispettivamente di $\mathbb{C}^n$).

Se X, Y sono due spazi analitici, reali o complessi, i morfismi (di spazi anulati) $\varphi : X \longrightarrow Y$ sono comunemente detti *applicazioni analitiche* (olomorfe nel caso complesso).

Dicesi spazio con fascio di anelli locali, uno spazio topologico X su cui è definito un fascio di anelli locali $\mathcal{O}_X$, detto fascio strutturale.

Un *morfismo* $\gamma = (f, \vartheta)$ fra due spazi con fasci di anelli locali: $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ è, per definizione, il dato di un'applicazione continua $f: X \longrightarrow Y$ e di un omomorfismo, $\vartheta: \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X$, che induce degli omomorfismi di anelli locali: $\vartheta_X: \mathcal{O}_{Y, f(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X, x}$ (ove $\mathcal{O}_{Y, f(x)}$, $\mathcal{O}_{X, x}$ sono le spighe di $\mathcal{O}_Y$ ed $\mathcal{O}_X$ nei punti $f(x)$ ed x).

Un morfismo di dice un *isomorfismo* se ammette un inverso.

Sia ora $\mathbb{K}$ un corpo valutato completo (nel seguito con $\mathbb{K}$ indicheremo il corpo reale o complesso) e $\mathbb{K}^n$ il prodotto topologico di n copie di $\mathbb{K}$.

Indicheremo con $A_{\mathbb{K}^n}$ il fascio dei germi delle funzioni analitiche definite in $\mathbb{K}^n$, a valori in $\mathbb{K}$. Sia G un aperto di $\mathbb{K}^n$; noteremo con A_G la restrizione di $A_{\mathbb{K}^n}$ a G.

Per ogni aperto G di $\mathbb{K}^n$ la coppia (G, A_G) è uno spazio con fascio di anelli locali.

Sia I un fascio di ideali di A_G generato da un numero finito di funzioni analitiche, definite su tutto G. Notiamo con $S(I)$ il supporto di A_G/I.

La coppia $(S(I), A_G/I_{|S(I)})$ è uno spazio con fascio di anelli locali. Un tale spazio viene detto $\mathbb{R}$-*spazio analitico locale.* Supponiamo ora che I' sia un secondo fascio di ideali di A_G finitamente generato e sia $I' \supset I$.

In questo caso si ha l'immersione $f: S(I') \longrightarrow S(I)$, e l'omomorfismo canonico $\vartheta: A_G/I \longrightarrow A_G/I'$. Il dato del $\mathbb{R}$ spazio analitico locale $(S(I'), A_G/I')$ e del morfismo (f, ϑ) è detto *sotto* $\mathbb{R}$-*spazio analitico locale* di $(S(I), A_G/I)$.

Diamo infine la seguente:

DEFINIZIONE. Dicesi $\mathbb{R}$-*spazio analitico* uno spazio di Hausdorff (1), con fascio di anelli locali $(X, \mathcal{O}_X)$ tale che:

1) per ogni $x \in X$ esista un aperto $U \ni x$ tale che $(U, \mathcal{O}_{X|U})$ sia isomorfo ad un $\mathbb{R}$-spazio analitico locale.

2) la topologia di X sia a base numerabile.

Diremo *realizzazione* di un aperto U di X un isomorfismo fra $(U, \mathcal{O}_{X|U})$ ed un $\mathbb{R}$-spazio analitico locale. Il dato di U e della realizzazione dicesi *carta locale.*

Dicesi *sotto* $\mathbb{R}$-*spazio analitico* di $(X, \mathcal{O}_X)$ un $\mathbb{R}$-spazio analitico $(Y, \mathcal{O}_Y)$, tale che Y sia un sottospazio topologico di X, e sia definito un morfismo

$$(f, \vartheta): (Y, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X),$$

soddisfacente le condizioni:

i) $f: Y \longrightarrow f(Y)$ è l'applicazione identica ed $f(Y)$ è localmente chiuso in X

ii) $(Y, \mathcal{O}_Y)$ col morfismo (f, ϑ) è localmente un sotto $\mathbb{R}$-spazio analitico locale di $(X, \mathcal{O}_X)$.

Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ un $\mathbb{R}$-spazio analitico: $(X, \mathcal{O}_X \otimes \mathbb{C})$ è uno spazio con fascio di anelli locali.

Dato un $\mathbb{R}$-spazio analitico $(X, \mathcal{O}_X)$ diremo $\mathcal{O}_X$-*complessificazione* (od $\mathcal{O}_X$-*complessificato*) di X il dato di un $\mathbb{C}$-spazio analitico $(Y, \mathcal{O}_Y)$ e di un morfismo

$$j = (f, \vartheta): (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$$

tale che: $Y \supset X$ ed $f: X \longrightarrow f(X)$ sia l'applicazione identica, $f(X)$ sia chiuso in Y e

$$\vartheta: \mathcal{O}_{Y|f(X)} \longrightarrow \mathcal{O}_X \otimes \mathbb{C}$$

sia un isomorfismo di $(Y, \mathcal{O}_{Y|f(X)})$ e $(X, \mathcal{O}_X \otimes \mathbb{C})$. Si prova (cf. [4]) che il germe dello spazio complessificato di $(X, \mathcal{O}_X)$ è unico.

---

(1) L'ipotesi che X sia di Hausdorff non è essenziale ad una teoria dei $\mathbb{R}$-spazi analitici. Noi la introduciamo perchè nel seguito saremo interessati solo a spazi separati.

Sia I_T il sottofascio di $\mathcal{O}_X$ dei germi di sezioni s di $\mathcal{O}_X$ nilpotenti.

Il fascio I_T è un fascio di ideali e lo spazio anulato $(X, \mathcal{O}_X/I_T)$ è uno spazio analitico (ridotto) cioè localmente isomorfo ad un sottoinsieme analitico A di un aperto di $\mathbb{K}^n$ munito del fascio delle funzioni analitiche su A.

Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ lo spazio ridotto $(X, \mathcal{O}_X/I_T)$ è un sottospazio di $(X, \mathcal{O}_X)$ ed il suo fascio strutturale è coerente. Ciò può non essere vero nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (cf. H. Cartan [1]).

In ogni caso lo spazio anulato $(X, \mathcal{O}_X/I_T)$ si chiama lo *spazio analitico ridotto* associato ad $(X, \mathcal{O}_X)$. Lo si indica brevemente con X.

Nel caso reale, secondo la terminologia adottata, lo spazio ridotto può non essere un $\mathbb{R}$-spazio.

Consideriamo un $\mathbb{C}$-spazio analitico locale dato su un aperto G di $\mathbb{C}^n$ mediante un fascio di ideali I, generato da un numero finito di funzioni olomorfe $f_1, \dots, f_s$ su G.

Posto $S(I) = \{x \in G : f_1(s) = \dots = f_s(x) = 0\}$ esso è il supporto del fascio A_G/I (ove A_G è il fascio dei germi delle funzioni olomorfe su G) e lo spazio considerato è dato da

$$(S(\mathrm{I}),\ A_G/I_{|\,S(I)}).$$

Separiamo in ogni generatore f_r la parte reale dalla parte immaginaria: $f_r = f_r' + i f_r''$; identifichiamo $\mathbb{C}^n$ ad $\mathbb{R}^{2n}$ e consideriamo il fascio di ideali I_R di A_G^R (= fascio dei germi di funzioni analitiche reali su G) generato dalle funzioni $f_1', \dots, f_s'; f_1'', \dots, f_s''$.

È chiaro che

$$S(I_R) = \{x \in G : f_1'(x) = f_1''(x) = \dots f_s'(x) = f_s''(x) = 0\} = S(I).$$

Possiamo considerare l'$\mathbb{R}$-spazio analitico reale:

$$(S(I),\ A_G^R/I_{R|S(I)}).$$

Si verifica che questo secondo spazio non dipende, nè dalla realizzazione del primo $\mathbb{C}$-spazio analitico locale come sottospazio di un aperto di $\mathbb{C}^n$, nè dalla scelta di un sistema di generatori dell'ideale I della realizzazione locale.

Questo spazio si chiamerà l'$\mathbb{R}$-*spazio soggiacente* al $\mathbb{C}$-spazio analitico locale dato.

Questa nozione si trasporta poi ai $\mathbb{C}$-spazi analitici e permette di associare canonicamente ad ogni $\mathbb{C}$-spazio analitico $(X, \mathcal{O}_X)$ l'$\mathbb{R}$-spazio analitico reale soggiacente $(X_R, \mathcal{O}_X^R)$.

Il coniugio σ del corpo complesso è un automorfismo tale che $\sigma^2 = id$. Questo definisce su $\mathbb{C}^n$ un automorfismo antilineare involutivo che chiameremo ancora con σ. Data una funzione olomorfa $f: G \to \mathbb{C}$ definita su un aperto G di $\mathbb{C}^n$ esiste, unica, una funzione olomorfa f^σ su $\sigma(G)$ tale che il diagramma :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\sigma"] & \mathbb{C} \arrow[d, "\sigma"] \\ \sigma(G) \arrow[r, "f^\sigma"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

sia commutativo.

Si definisce un automorfismo antilineare di fasci :

$$\sigma^* : A_{\mathbb{C}^n} \to A_{\mathbb{C}^n} .$$

Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ un $\mathbb{C}$ spazio analitico locale su G definito da un fascio di ideali I su G : $(X, \mathcal{O}_X) = (S(I), A_G/I)$, ove $S(I)$ è il supporto di A_G/I.

Si consideri su $\sigma(G)$ il $\mathbb{C}$-spazio analitico locale $(S(\sigma^*(I)), A_{\sigma(G)}/\sigma^*(I))$ ove $S(\sigma^*(I))$ è il supporto di $\sigma^*(I)$. Questo secondo $\mathbb{C}$-spazio non è, in generale, isomorfo al primo ma esiste un antiisomorfismo (σ, σ^*) che fa passare dal primo al secondo.

Il $\mathbb{C}$-spazio analitico $(S(\sigma^*(I)), A_{\sigma(G)}/\sigma^*(I))$ si chiamerà il *coniugato* di $(S(I), A_G/I)$; si verifica che la sua struttura non dipende dalla realizzazione del primo $\mathbb{C}$-spazio nell'aperto di $\mathbb{C}^n$.

La nozione si trasporta ai $\mathbb{C}$-spazi analitici e permette di definire per ogni tale spazio un nuovo spazio coniugato del precedente ed un « antiisomorfismo » del primo sul secondo.

Dato un $\mathbb{C}$-spazio analitico $(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})$ può accadere che esso sia isomorfo al suo spazio coniugato $(\bar{\tilde{X}}, \mathcal{O}_{\bar{\tilde{X}}})$ ed anzi sia $(\tilde{X}^R, \mathcal{O}^R_{\tilde{X}}) = (\bar{\tilde{X}}, \mathcal{O}^R_{\bar{\tilde{X}}})$, cioè il $\mathbb{C}$-spazio analitico coincide, con la sua struttura reale soggiacente, con il coniugato.

In questo caso l'antiisomorfismo che fa passare dal $\mathbb{C}$-spazio al suo coniugato diviene un antiisomorfismo di $(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})$ in sè che verrà detto *antiinvoluzione* di $(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})$.

Si può notare che un'antiinvoluzione induce un isomorfismo delle strutture reali soggiacenti.

Osserviamo in particolare che se $\tilde{X}$ è una varietà complessa su cui è definita an'antiinvoluzione $\sigma : \tilde{X} \to \tilde{X}$ e $z_1 \dots z_n$ è un sistema di coordinate in un intorno di un punto $p \in \widetilde{X}$ le funzioni $w_1 = \overline{\sigma^*(z_1)} \ldots w_n = \overline{\sigma^*(z_n)}$ danno un sistema di coordinate in un intorno di $\sigma(p)$.

In tali coordinate l'antiinvoluzione si scrive $w_i = \overline{z}_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ un sotto $\mathbb{R}$-spazio analitico di $(\widetilde{X}^R, \mathcal{O}^{\mathbb{R}}_{\widetilde{X}})$ e $(i, \pi) : (X, \mathcal{O}_R) \longrightarrow$ $\longrightarrow (\widetilde{X}^{\mathbb{R}}, \mathcal{O}^{\mathbb{R}}_{\widetilde{X}})$ il morfismo associato.

Diremo che $(X, \mathcal{O}_X)$ è *fisso*, od è *parte fissa*, per la antiinvoluzione $\alpha = (\sigma, \vartheta)$ se:

$$X = \{x \in \widetilde{X} \mid \sigma(x) = x\}$$

ed inoltre si ha:

$$\pi \circ \vartheta = \pi, \text{ ove: } \vartheta : \mathcal{O}^R_{\widetilde{X}} \longrightarrow \mathcal{O}^R_{\widetilde{X}} \quad \text{e} \quad \pi : \mathcal{O}^R_{\widetilde{X}} \longrightarrow \mathcal{O}_X$$

sono le applicazioni fra i fasci strutturali.

La definizione di complessificato è di antiinvoluzione si trasportano immediatamente agli spazi analitici reali o complessi (per i dettagli vedasi [4]).

Nel seguito considereremo solo gli spazi analitici reali che sono riduzione di qualche $\mathbb{R}$-spazio.

Tali spazi sono quindi ridotti, dotati cioè del fascio delle funzioni analitiche reali, e verranno chiamati ($\mathbb{R}$)-*spazi.*

b. Faremo uso nel seguito della seguente

PROPOSIZIONE 1. *Sia X un* ($\mathbb{R}$)-*spazio analitico, di dimensione n. Esistono allora uno spazio di Stein $\widetilde{X}$ di dimensione n ed un' antiinvoluzione $\sigma : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}$ tale che*

i) $X \supset \widetilde{X}$

ii) $X = \{x \in \widetilde{X} : \sigma(x) = x\}$.

Se X è coerente $\widetilde{X}$ è un complessificato di X.

DIMOSTRAZIONE. È conseguenza della proposizione 6 e del teorema 8 di [4].

Sia X un ($\mathbb{R}$)-spazio analitico. Sia T_x lo spazio tangente di Zariski nel punto $x \in X$, sia $N = \sup_{x \in X} \dim_{\mathbb{R}} T_x$. Se $N < \infty$, diremo che X è *localmente di tipo N.*

Analoga definizione si ha per uno spazio complesso.

Se X è uno spazio analitico reale, coerente e localmente di tipo N, allora esiste un complessificato $\widetilde{X}$ che è uno spazio di Stein localmente di tipo N (cf. [4] teorema 3).

PROPOSIZIONE 2. *Sia $\widetilde{X}$ uno spazio di Stein di dimensione n, $\sigma : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ un'antiinvoluzione ed $X = \{x \in \widetilde{X} : \sigma(x) = x\}$. Esiste un'applicazione olomorfa, iniettiva e propria $\widetilde{\varphi} : \widetilde{X} \to \mathbb{C}^{4n+2}$ tale che:*

i) $\widetilde{\varphi}(\sigma(x)) = \overline{\widetilde{\varphi}(x)}$ *per ogni* $x \in \widetilde{X}$

ii) $\widetilde{\varphi}$ *è regolare nei punti regolari di* $\widetilde{X}$.

Inoltre se $\widetilde{X}$ è localmente di tipo $N > n$, esiste un'applicazione olomorfa, propria $\widetilde{\psi} : \widetilde{X} \to \mathbb{C}^{2n+2N}$ tale che

i′) $\widetilde{\psi}(\sigma(x)) = \overline{\widetilde{\psi}(x)}$ *per ogni* $x \in \widetilde{X}$

ii′) $\widetilde{\psi} : \widetilde{X} \to \widetilde{\psi}(\widetilde{X})$ *è un isomorfismo.*

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema 5 di [3] esiste un'applicazione olomorfa, iniettiva, propria $'\widetilde{\varphi} : \widetilde{X} \to \mathbb{C}^{2n+1}$, di rango massimo nei punti regolari di $\widetilde{X}$. Usando la costruzione eseguita nella dimostrazione del teorema 9 di [4] si definisce l'applicazione $\widetilde{\varphi}$.

Analogamente si ragiona per costruire l'applicazione $\widetilde{\psi}$, considerando però un'immersione $'\widetilde{\psi}$ di $\widetilde{X}$ in $\mathbb{C}^{n+N}$ (che esiste per il lemma 6 di [3]).

Sia X un ($\mathbb{R}$)-spazio analitico e sia $\mathcal{R}(X)$ l'algebra delle funzioni analitiche $f : X \to \mathbb{R}$. Con la topologia della convergenza uniforme sui compatti, $\mathcal{R}(X)$ è uno spazio vettoriale reale metrizzabile non completo.

Sia $\widetilde{X}$ uno spazio complesso; indicheremo con $\mathcal{A}(\widetilde{X})$ l'algebra delle funzioni olomorfe $f : \widetilde{X} \to \mathbb{C}$: con la topologia della convergenza uniforme sui compatti $\mathcal{A}(\widetilde{X})$ è uno spazio di Fréchet.

Sia $\sigma : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ un'antiinvoluzione ed $X = \{x \in \widetilde{X} : \sigma(x) = x\}$.

Sia $f : \widetilde{X} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Ad f si associa la funzione olomorfa $f_R : \widetilde{X} \to \mathbb{C}$ definita da

$$f_R(x) = \frac{\overline{f(\sigma(x))} + f(x)}{2}, \qquad x \in \widetilde{X}.$$

Diremo che f è *σ-invariante* se $f = f_R$ (cioè se $f = f^\sigma$).

Un'applicazione $f : \widetilde{X} \to \mathbb{C}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$, si dice *σ-invariante* se $f_j = (f_j)_R$, $1 \le j \le m$.

Indichiamo con $\mathcal{A}^m(\widetilde{X})$ lo spazio di Fréchet delle applicazioni olomorfe $\psi : \widetilde{X} \to \mathbb{C}^m$ e con $\mathcal{A}^m_\sigma(\widetilde{X})$ il sottospazio chiuso di $\mathcal{A}^m(\widetilde{X})$ formato dalle applicazioni σ-invarianti.

LEMMA 1. *Sia $\widetilde{X}$ uno spazio di Stein, $\sigma : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ una antiinvoluzione ed $X = \{x \in \widetilde{X} : \sigma(x) = x\}$. Allora*

$$\mathcal{R}_\sigma(X, \widetilde{X}) = \{f \in \mathcal{R}(X) : f = F|_X,\ F \in \mathcal{A}_\sigma(\widetilde{X})\}$$

è un sottospazio denso di $\mathcal{R}(X)$.

DIMOSTRAZIONE (1). Sia $K \subset X$ un compatto. Proviamo il fatto seguente: esiste un'applicazione olomorfa $\widetilde{\psi} : \widetilde{X} \longrightarrow \mathbb{C}^q$ tale che

i) $\widetilde{\psi}(\sigma(x)) = \widetilde{\psi}(x)$ per ogni $x \in \widetilde{X}$

ii) esiste un intorno aperto U di K in $\widetilde{X}$ tale che $\widetilde{\psi}|_U$ è un isomorfismo di U su un sottoinsieme analitico di un aperto di $\mathbb{C}^q$.

Se U è un intorno relativamente compatto di K esso incontra un numero finito di componenti irriducibili di $\widetilde{X}$ e quindi è contenuto in un sottoinsieme analitico $\widetilde{X}'$ di $\widetilde{X}$ di dimensione finita. Si può supporre che sia $\sigma(\widetilde{X}') = \widetilde{X}'$. Per la proposizione 2 esiste un'applicazione $\widetilde{\varphi} : \widetilde{X}' \longrightarrow \mathbb{C}^p$ tale che $\widetilde{\varphi}(\sigma(x)) = \widetilde{\varphi}(x)$ per ogni $x \in \widetilde{X}'$. Usando i ragionamenti fatti nella dimostrazione del teorema 11 di [4] si costruisce un'applicazione olomorfa $'\widetilde{\psi} : \widetilde{X}' \longrightarrow \mathbb{C}^q$ verificante i) e ii) rispetto a $\widetilde{X}'$.

Poichè $\widetilde{X}$ è uno spazio di Stein $'\widetilde{\psi}$ si può estendere ad una applicazione olomorfa $'\widetilde{\psi} : \widetilde{X} \longrightarrow \mathbb{C}^q$.

Posto $\widetilde{\psi} = {'\widetilde{\psi}}$, $\widetilde{\psi}$ soddisfa i) e ii).

(2) Siano $z_1 = x_1 + iy_1, \ldots, z_q = x_q + iy_q$ le coordinate in $\mathbb{C}^q$ e sia $f \in \mathcal{R}(X)$ ed $\varepsilon > 0$. Per il teorema di approssimazione di Weierstrass esiste un polinomio $P'(z_1, \ldots, z_n)$ a coefficienti reali tale che $|P'(y) - (f \circ (\widetilde{\psi^{-1}}))(y)| < \varepsilon$ per ogni $y \in \widetilde{\psi}(K)$. La funzione $P = P' \circ \widetilde{\psi}$ è un elemento di $\mathcal{A}_\sigma(\widetilde{X})$, $P_{|X} \in \mathcal{R}_\sigma(X, \widetilde{X})$ e $|P_{|X}(x) - f(x)| < \varepsilon$ per ogni $x \in K$. Per l'arbitrarietà di f, K, ε ciò prova che $\mathcal{R}_\sigma(X, \widetilde{X})$ è denso in $\mathcal{R}(X)$.

§ 2. Risultati preliminari.

a. Sia $\widetilde{X}$ uno spazio complesso. Una famiglia localmente finita $\{U_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ di aperti $U_j \subset \widetilde{X}$ si dice un *sistema ammissibile* di $\widetilde{X}$ se:

i) $U = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} U_j$ è $\mathcal{A}(X)$-convesso e $U_j \cap U_k = \emptyset$ se $j \neq k$,

ii) esiste una successione $\{B_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ di aperti di $\widetilde{X}$ tali che: $B_\nu \Subset B_{\nu+1}$, $\widetilde{X} = \bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} B_\nu$ e $B_\nu \cup U$ sia $\mathcal{A}(\widetilde{X})$-convesso per ogni $\nu \in \mathbb{N}$.

Osserviamo che si può supporre che se $U_j \cap B_\nu \neq \emptyset$ allora $U_j \subset B_\nu$. Infatti basta sostituire B_ν con l'unione B'_ν di B_ν e degli U_j tali che $U_j \cap B_\nu \neq \emptyset$ e considerare una opportuna sottosuccessione B'_{ν_h} di B'_ν.

Una successione $\{B_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ soddisfacente tale proprietà si dice *associata* al sistema ammissibile $\{U_j\}_{j \in \mathbb{N}}$.

Sia $\sigma : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}$ un'antiinvoluzione. Se per ogni $j, \nu \in \mathbb{N}$ esistono $j', \nu' \in \mathbb{N}$ tali che $\sigma(U_j) = U_{j'}$ e $\sigma(B_\nu) = B_{\nu'}$, allora il sistema si dice *σ-ammissibile.*

PROPOSIZIONE 3. *Sia $\widetilde{X}$ uno spazio di Stein di dimensione n e sia $\sigma : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}$ un'antiinvoluzione. Esistono $2n+1$ sistemi σ-ammissibili $\{U_j^\lambda\}_{j \in \mathbb{N}}$, $\lambda = 1, \dots, 2n+1$ di $\widetilde{X}$, tali che*

$$\widetilde{X} = \bigcup_{\lambda=1}^{2n+1} \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} U_j^\lambda \right).$$

DIMOSTRAZIONE (1). E' sufficiente dimostrare che dato un insieme numerabile T di punti di $\widetilde{X}$ esiste un sistema σ-ammissibile $\{U_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, tale che $A = \widetilde{X} - \bigcup_{j \in \mathbb{N}} U_j$ sia un sottoinsieme anatitico reale $A \cap T = \varnothing$. Infatti da [5] § 8, si deduce che dato un sottoinsieme analitico reale $A \subset \widetilde{X}$ esiste un insieme numerabile S di punti di A tale che se $B \subset \widetilde{X}$ è un sottoinsieme analitico reale e $B \cap S = \varnothing$ allora $\dim_{\mathbb{R}} (A \cap B) < \dim_{\mathbb{R}} A$.

E' chiaro allora che si possono costruire $2n+1$ sistemi σ-ammissibili $\{U_j^\lambda\}_{j \in \mathbb{N}}$, $\lambda = 1, \dots, 2n+1$, tali che, se $A_\lambda = \widetilde{X} - \bigcup_{j \in \mathbb{N}} U_j^\lambda$, risulti

$$\dim_{\mathbb{R}} \left(\widetilde{X} - \bigcup_{\lambda=1}^{h} \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} U_j^\lambda \right) \right) = \dim_{\mathbb{R}} (A_1 \cap \dots \cap A_h) \leq 2n - h\,;$$

ne segue che $\widetilde{X} - \left(\bigcup_{\lambda=1}^{2n+1} \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} U_j^\lambda \right) \right) = \varnothing$.

(2) Dimostriamo quindi l'esistenza d'un sistema σ-ammissibile $\{U_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ soddisfacente le proprietà dette.

Sia $\widetilde{\varphi} : X \longrightarrow \mathbb{C}^{4n+2}$ l'applicazione olomorfa di cui alla proposizione 2.

Per ogni $\nu \in \mathbb{N}$ sia

$$Q_\nu = \{z \in \mathbb{C}^{4n+2} : -\nu < x_\alpha < \nu,\ -\nu < y_\alpha < \nu,\ 1 \leq \alpha \leq 4n+2\}$$

$$B_\nu = \widetilde{\varphi}^{-1}(Q_\nu)\,;$$

risulta $B_\nu \Subset B_{\nu+1}$ per ogni $\nu \in \mathbb{N}$ e $\widetilde{X} = \bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} B_\nu$.

Sia $T \subset \widetilde{X}$ un insieme numerabile di punti: mediante iperpiani reali paralleli agli iperpiani reali coordinati di $\mathbb{C}^{4n+2}$ si può ottenere una famiglia localmente finita di « rettangoli » aperti, disgiunti di $\mathbb{C}^{4n+2}$ tali che: $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j \cap \widetilde{\varphi}(T) = \emptyset$, $\bigcup_{j=1}^{h} \overline{R}_j$ è compatto per ogni $h \in \mathbb{N}$ e $\mathbb{C}^{4n+2} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \overline{R}_j$. Possiamo supporre inoltre che il coniugio in $\mathbb{C}^{4n+2}$ trasformi ogni rettangolo di $\{R_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ in un rettangolo di $\{R_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ (i. e. $\{R_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ è *adattato* al coniugio).

Per il lemma 1 di [3] $\{R_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ è un sistema σ-ammissibile di $\mathbb{C}^{4n+2}$. Per costruzione $\{R_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ è adattato al coniugio in $\mathbb{C}^{4n+2}$.

Ora se $\psi: V \longrightarrow W$ è un'applicazione olomorfa tra spazi di Stein e Ω è un aperto di W che è $\mathcal{A}(W)$-convesso allora $\psi^{-1}(\Omega)$ è $\mathcal{A}(V)$-convesso.

Ne segue, ricordando che l'applicazione $\widetilde{\varphi}$ è propria, che, posto $U_j = \widetilde{\varphi}^{-1}(R_j)$, $B_\nu = \widetilde{\varphi}^{-1}(Q_\nu)$, $\{U_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ è un sistema σ-ammissibile di $\widetilde{X}$.

L'unione degli iperpiani reali che dividono $\mathbb{C}^{4n+2}$ nei rettangoli R_j è un insieme analitico reale quindi la sua immagine inversa mediante $\widetilde{\varphi}$ è un sottoinsieme analitico reale di $\widetilde{X}$, che per costruzione è disgiunto da T.

Ciò conclude la dimostrazione.

Osservazione 1. Per costruzione gli aperti U_j, B_ν, $j, \nu \in \mathbb{N}$ sono $\mathcal{A}(\widetilde{X})$-convessi. Inoltre posto $V_j = U_j \cup \sigma(U_j)$ e $B'_\nu = B_\nu \cup \sigma(B_\nu)$ tali aperti sono $\mathcal{A}(\widetilde{X})$-convessi (cfr. [3] lemma 1) e $\{V_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ è un sistema σ-ammissibile in cui si ha inoltre $\sigma(V_j) = V_j$, $\sigma(B'_\nu) = B'_\nu$.

Proposizione 4. *Sia $\widetilde{X}$ uno spazio di Stein, $\sigma: \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}$ un'antiinvoluzione e $\{U_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ un sistema σ-ammissibile. Per ogni $j \in \mathbb{N}$ sia $K_j \subset U_j$ un compatto, $f_j \in \mathcal{A}_\sigma(\widetilde{X})$ ed $\varepsilon_j > 0$. Esiste una funzione $f \in \mathcal{A}_\sigma(\widetilde{X})$ tale che*

$$\|f - f_j\|_{K_j} < \varepsilon_j, \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

ove

$$\|f - f_j\|_{K_j} = \sup_{x \in K_j} |f(x) - f_j(x)|.$$

Dimostrazione. Sia $l = \sigma(j)$ definito da $\sigma(U_j) = U_l$. Si può supporre, eventualmente considerando compatti $K_j' \supset K_j$, che $\sigma(K_j) = K_{\sigma(j)}$. Per il teorema di approssimazione di Narasimhan (cfr. [3], teorema 2) esiste $f \in \mathcal{A}(\widetilde{X})$ tale che $\|f - f_j\|_{K_j \cup K_{\sigma(j)}} < \frac{\varepsilon_j}{2}$. Se $x \in K_j \cup K_{\sigma(j)}$ risulta

$$f_R(x) - f_j(x) = f_R(x) - (f_j)_R(x) = \frac{f(x) - f_j(x) + \overline{f(\sigma(x))} - \overline{f_j(\sigma(x))}}{2}$$

da cui segue

$$|f_R(x) - f_j(x)| \leq \frac{|f(x) - f_j(x)|}{2} + \frac{|f(\sigma(x)) - f_j(\sigma(x))|}{2} < \varepsilon_j$$

e

$$\| f_R - f_j \|_{K_j} \leq \| f_R - f_j \|_{K_j \cup K_{\sigma(j)}} < \varepsilon_j .$$

Sia $\widetilde{X}$ uno spazio di Stein, $\sigma: \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ un'antiinvoluzione, $\{U_j^\lambda\}_{j \in \mathbb{N}}$, $\lambda = 1, 2, \dots, m$, sistemi σ-ammissibili. Siano $K \subset \widetilde{X}$, $K_j^1 \subset U_j^1, \dots, K_j^m \subset U_j^m$, compatti ed $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_j > 0$, $j \in \mathbb{N}$. Poniamo

$$V_m = \{ f \in \mathcal{A}_\sigma^m(X) : \|f\|_K < \varepsilon, \ \|f_\lambda\|_{K_j^\lambda} < \varepsilon_j, \ \lambda = 1, \dots, m, \ j \in \mathbb{N} \}$$

ove se $f = (f_1, \dots, f_m)$ e $C \subset \widetilde{X}$ è un compatto si è posto $\|f\|_C = \sup\limits_{1 \leq \lambda \leq m} \|f_\lambda\|_C$.

Al variare di K, K_j^λ, ε, ε_j i sottoinsiemi V_m formano un sistema fondamentale di intorni di $\{0\}$ per una topologia su $\mathcal{A}_\sigma^m(\widetilde{X})$ che chiameremo la *m-topologia* associata ai sistemi $\{U_j^\lambda\}_{j \in \mathbb{N}}$, $\lambda = 1, \dots, m$.

Una m-topologia è strettamente più fine della topologia naturale su $\mathcal{A}_\sigma^m(\widetilde{X})$. Osserviamo inoltre che con una m-topologia lo spazio $\mathcal{A}_\sigma^m(\widetilde{X})$ non è metrizzabile e non è uno spazio vettoriale topologico (la moltiplicazione per uno scalare non è un'applicazione continua). Si può tuttavia dimostrare che con la m-topologia $\mathcal{A}_\sigma^m(\widetilde{X})$ è uno spazio completo, di Baire (cf. [0]).

PROPOSIZIONE 5. *Sia $\widetilde{X}$ uno spazio di Stein, $\sigma: \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ un'antiinvoluzione. Per ogni compatto $K \subset \widetilde{X}$ sia $A(K) \subset \mathcal{A}_\sigma^m(\widetilde{X})$, $m > 0$, tale che*

i) *$A(K)$ è denso in $A_\sigma^m(\widetilde{X})$*

ii) *se $K' \supset K$, $A(K) \subset A(K')$*

iii) *se $K \subset \mathring{K}'$, K' compatto, per ogni $f \in A(K)$ esiste $\delta > 0$ tale che se $g \in \mathcal{A}_\sigma^m(\widetilde{X})$ e $\|g - f\|_{K'} < \delta$ allora $g \in A(K)$. In particolare $A(K)$ è aperto.*

Siano $\{U_j^\lambda\}_{j \in \mathbb{N}}$, $\lambda = 1, \dots, m$, sistemi σ-ammissibili.

Allora $\bigcap\limits_{K \subset \widetilde{X}} A(K)$ è denso in $\mathcal{A}_\sigma^m(\widetilde{X})$ per la m-topologia associata ai sistemi $\{U_j^\lambda\}_{j \in \mathbb{N}}$, $\lambda = 1, \dots, m$. In particolare $\bigcap\limits_{K \subset \widetilde{X}} A(K)$ è denso in $\mathcal{A}_\sigma^m(\widetilde{X})$.

DIMOSTRAZIONE (1). Sia $g \in \mathcal{A}_\sigma^m(\widetilde{X})$, C, K_j^λ compatti, $K_j^\lambda \subset U_j^\lambda$ $\lambda = 1, \dots, m$, ed $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_j > 0$, $j \in \mathbb{N}$.

Sia $\{B_\nu^\lambda\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ una successione associata al sistema $\{U_j^\lambda\}_{j \in \mathbb{N}}$, $\lambda = 1, \dots, m$. Si può supporre che $\sigma(U_j^\lambda) = U_j^\lambda$, $\sigma(B_\nu^\lambda) = B_\nu^\lambda$, $\sigma(K_j^\lambda) = K_j^\lambda$ e $\sigma(C) = C$ per j, $\nu \in \mathbb{N}$.

Si può inoltre supporre che gli aperti U_j^λ, B_ν^λ siano $\mathcal{A}(\widetilde{X})$-convessi (cf. osservazione 1).

Sia $'K_\nu^\lambda \subset B_\nu^\lambda$ un compatto contenente $B_{\nu-1}^\lambda$ ed i K_j^λ che stanno in B_ν^λ. Sia C_ν^λ un intorno compatto di $'K_\nu^\lambda$ in B_ν^λ.

Sia $K_\nu' = \bigcap_{\lambda=1}^{m} {'K_\nu^\lambda}$ e $C_\nu = \bigcap_{\lambda=1}^{m} C_\nu^\lambda$.

Supponiamo che $U_j^\lambda \subset B_1^\lambda$ per $j \leq j_1^\lambda$ e $U_j^\lambda \subset B_{\nu+1}^\lambda - B_\nu^\lambda$ per $j_\nu^\lambda < j \leq j_{\nu+1}^\lambda$. Si ha $K_\nu' \subset \mathring{K}_{\nu+1}'$ e $\widetilde{X} = \bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} K_\nu'$.

Se $K \subset K'$ allora $A(K') \subset A(K)$; quindi se $f \in A(K_\nu')$ per ogni $\nu \in \mathbb{N}$, $f \in A(K)$ per ogni compatto $K \subset \widetilde{X}$. E' chiaro che si può supporre $C \subset K_1'$ ed $\varepsilon < \varepsilon_j$ per $j \leq \max_\lambda j_1^\lambda$.

(2) $A(K_1')$ è denso in $\mathcal{A}_\sigma^m(\widetilde{X})$, quindi esiste $f^1 = (f_1^1, \dots, f_m^1) \in A(K_1')$ tale che $\| f^1 - g \|_{K_j^\lambda} < \frac{1}{2}\varepsilon$ per $j \leq j_1^\lambda$, $\lambda = 1, \dots, m$. Per iii) esiste $\delta_1' > 0$ tale che se $F \in \mathcal{A}_\sigma^m(\widetilde{X})$ e $\| F - f^1 \|_{C_2} < \delta_1$ allora $F \in A(K_1')$. Sia $\delta_1 = \min(\delta_1', \varepsilon)$.

Poichè $B_1^\lambda \cup U^\lambda$, $(U^\lambda = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} U_j^\lambda)$ è $\mathcal{A}(\widetilde{X})$-convesso, B_1^λ e gli aperti U_j^λ sono $\mathcal{A}(\widetilde{X})$-convessi e $C_1^\lambda \cup \sigma(C_1^\lambda) \subset B_1^\lambda$, $K_j^\lambda \subset B_2^\lambda - B_1^\lambda$, per $j_1^\lambda < j \leq j_2^\lambda$, esistono m funzioni $'f_1^2, \dots, 'f_m^2$, olomorfe su $\widetilde{X}$, tali che posto $D_1^\lambda = C_1^\lambda \cup \sigma(C_1^\lambda) \cup (\bigcup_{1 \leq j \leq j_1^\lambda} K_1^\lambda)$, si abbia:

$$\| 'f_\lambda^2 - f_\lambda^1 \|_{D_1^\lambda} < \frac{1}{2}\delta_1, \quad \| 'f_\lambda^2 - g_\lambda \|_{K_j^\lambda} < \frac{1}{2}\varepsilon_j \qquad \begin{matrix} j_1^\lambda < j \leq j_2^\lambda \\ \lambda = 1, \dots, m; \end{matrix}$$

ne segue

$$\| ('f_\lambda^2)_R - f_\lambda^1 \|_{D_1^\lambda} < \frac{1}{2}\delta_1, \quad \| ('f_\lambda^2)_R - g_\lambda \|_{K_j^\lambda} < \frac{1}{2}\varepsilon_j, \qquad \begin{matrix} j_1^\lambda < j \leq j_2^\lambda \\ \lambda = 1, \dots, m. \end{matrix}$$

D'altra parte $A(K_2')$ è denso in $\mathcal{A}_\sigma^m(\widetilde{X})$ quindi esiste $f^2 = (f_1^2, \dots, f_m^2) \in A(K_2')$, tale che

$$\| f_\lambda^2 - f_\lambda^1 \|_{D_1^\lambda} < \frac{\delta_1}{2}, \quad \| f_\lambda^2 - g_\lambda \|_{K_j^\lambda} < \frac{1}{2}\varepsilon_j \qquad \begin{matrix} \lambda = 1, \dots, m \\ j_1^\lambda < j \leq j_2^\lambda. \end{matrix}$$

Sia $0 < \delta_2' < \frac{\delta_1}{2}$ tale che se $F \in \mathcal{A}_\sigma^m(\widetilde{X})$ soddisfa la diseguaglianza $\| F - f^2 \|_{C_3} < \delta_2'$ allora $F \in A(K_2')$. Per iterazione si trova una successione

$\{f^\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$, $f^\nu \in A(K'_\nu)$, tale che

$$\|f^\nu - f^{\nu-1}\|_{C_{\nu-1}} < \frac{\delta_{\nu-2}}{2}, \quad \|f_\lambda - g_\lambda\|_{K_j^\lambda} < \frac{1}{2}\varepsilon_j, \quad \begin{array}{c} j^\lambda_{\nu-1} < j \leq j^\lambda_\nu \\ \lambda = 1, \dots, m, \end{array}$$

e $\|f^\nu_\lambda - g_\lambda\|_{K_j^\lambda} < \varepsilon_j$ per $j \leq j^\lambda_{\nu-1}$.

Poichè $\delta_\nu < \frac{1}{2}\delta_{\nu-1}$ si ha $\sum_{\mu=\nu+1}^{\infty} \delta_\mu < \delta_\nu$. Quindi se $f = (f_1, \dots, f_m) = \lim_{\nu \to \infty} f^\nu$ allora $\|f - f^\nu\|_{C_\nu} < \delta_\nu$, $f \in A(K'_\nu)$ per ogni $\nu \in \mathbb{N}$ e quindi $f \in A(K)$ per ogni compatto $K \subset \widetilde{X}$. Scegliendo opportunamente i δ_ν si ha:

$$\|f - g\|_C < \varepsilon, \quad \|f_\lambda - g_\lambda\|_{K_j^\lambda} < \varepsilon_j, \quad j \in \mathbb{N}, \quad \lambda = 1, \dots, m,$$

e la proposizione è completamente dimostrata.

b. Sia $\widetilde{X}$ uno spazio complesso, S l'insieme dei punti singolari di $\widetilde{X}$: S è un sottoinsieme analitico di $\widetilde{X}$ e $\widetilde{X} - S$ è una varietà complessa.

Sia $\widetilde{\varphi}: \widetilde{X} \to \mathbb{C}^m$ un'applicazione olomorfa. Dato $x \in \widetilde{X} - S$ indichiamo con $\varrho_x(\widetilde{\varphi})$ il *rango jacobiano* di $\widetilde{\varphi}$, cioè il rango della matrice jacobiana dell'applicazione $\widetilde{\varphi}$ nel punto x.

PROPOSIZIONE 6. *Sia $\widetilde{X}$ uno spazio di Stein di dimensione n, $\sigma : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ un'antiinvoluzione. Sia $T \subset \widetilde{X}$ un insieme discreto di punti, $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{A}^q_\sigma(\widetilde{X})$, $q < n$. Per ogni compatto $K \subset \widetilde{X}$ sia $A(K) \subset \mathcal{A}_\sigma(\widetilde{X})$ l'insieme degli elementi f tali che:*

i) *f separa i punti di $T \cap (K \cup \sigma(K))$*

ii) *se $(\widetilde{\varphi}, f): \widetilde{X} \to \mathbb{C}^{q+1}$ è l'applicazione definita da $x \to (\widetilde{\varphi}(x), f(x))$, si ha*

$$\varrho_{x_p}(\widetilde{\varphi}, f) = \varrho_{x_p}(\widetilde{\varphi}) + 1$$

per ogni $x_p \in T \cap K \cup \sigma(K)$ che sia un punto regolare di $\widetilde{X}$.

Allora la famiglia degli insiemi $A(K)$ verifica le ipotesi della proposizione precedente (con $m = 1$).

DIMOSTRAZIONE. (1) Proviamo dapprima che l'insieme delle funzioni $f \in \mathcal{A}_\sigma(\widetilde{X})$ che separano un numero finito di punti $x_1, \dots, x_p$ di $\widetilde{X}$, è aperto e denso in $\mathcal{A}_\sigma(\widetilde{X})$.

Si può supporre che sia $\sigma(x_j) = x_{\sigma(j)}$ con $1 \leq \sigma(j) \leq p$ per ogni $1 \leq j \leq p$. Siano $f_1, \dots, f_p$ funzioni di $\mathcal{A}(\widetilde{X})$ tali che

$$f_j(x_k) = \begin{cases} i & \text{se} \quad j = k \quad \text{e} \quad \sigma(x_j) \neq x_j \\ 1 & \text{se} \quad j = k \quad \text{e} \quad \sigma(x_j) = x_j \\ 0 & \text{se} \quad j \neq k. \end{cases}$$

Consideriamo la funzione $f = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j (f_j)_R$ con $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, numeri reali tali che $|\lambda_j| \neq |\lambda_k|$ se $j \neq k$ e, se $j \neq \sigma(j)$, $j \neq \sigma(k)$ e $k \neq \sigma(k)$, allora $|\lambda_j - \lambda_{\sigma(j)}| \neq |\lambda_k - \lambda_{\sigma(k)}|$. La funzione f appartiene a $\mathcal{A}_\sigma(\widetilde{X})$ e separa i punti $x_1, \dots, x_p$.

Sia $g \in \mathcal{A}_\sigma(\widetilde{X})$ e $\lambda \in R$: $g + \lambda f$ non separa i punti $x_1, \dots, x_p$ se e solo se λ coincide con uno dei valori $\dfrac{g(x_j) - g(x_k)}{f(x_k) - f(x_j)}$, $j, k = 1, \dots, p$, che sono in numero finito: ne segue che g è limite in $\mathcal{A}_\sigma(\widetilde{X})$ di una successione $\{g + \lambda_\nu f\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ di funzioni che separano i punti $x_1, \dots, x_p$. E' poi immediato vedere che l'insieme delle funzioni che separano i punti $x_1^\circ, \dots, x_p$ è aperto.

(2) Proviamo ora che l'insieme delle funzioni $f \in \mathcal{A}_\sigma(\widetilde{X})$ che verificano la condizione ii) dell'enunciato è aperto e denso in $\mathcal{A}_\sigma(\widetilde{X})$.

Sia $K \subset \widetilde{X}$ un compatto e sia $\{x_1, \dots, x_p\} = T \cap K$.

Esistono coordinate olomorfe $(\xi_1^i, \dots, \xi_n^i)$, $(\eta_1^{\sigma(i)}, \dots, \eta_n^{\sigma\, i)})$ nell'intorno di x_i e $\sigma(x_i)$ rispettivamente, tali σ che si esprima in questi intorni con $\eta_j = \overline{\xi}_j$, $j = 1, \dots, n$.

E' noto che esistono n funzioni $w_1, \dots, w_n$ olomorfe su $\widetilde{X}$ che assumono su $x_1, \dots, x_p$ valori assegnati e tali che i differenziali $dw_1, \dots, dw_n$ siano eguali a $d\xi_1^i, \dots, d\xi_n^i$ in $x_1, x_2, \dots, x_p$.

Risulta allora chiaro che $z_1 = (w_1)_R, \dots, z_n = (w_n)_R$ hanno la stessa proprietà.

Le funzioni $z_1, \dots, z_n$ danno allora un sistema di coordinate locali nell'intorno di ogni punto $x_1, \dots, x_p$.

Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ numeri reali; sia $\zeta = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j z_j$, $g \in \mathcal{A}_\sigma(\widetilde{X})$ e $g + \lambda\zeta$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

In un punto x_j, $1 \leq j \leq p$, risulta $\varrho_{x_j}(\widetilde{\varphi}, g + \lambda\zeta) = \varrho_{x_j}(\widetilde{\varphi})$ se e solo se λ è tale che il vettore $\left(\left(\dfrac{\partial(g + \lambda\zeta)}{\partial z_1}\right)_{x_j}, \dots, \left(\dfrac{\partial(g + \lambda\zeta)}{\partial z_n}\right)_{x_j}\right)$ è combinazione lineare dei vettori $\left(\left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial z_1}\right)_{x_j}, \dots, \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial z_n}\right)_{x_j}\right), \dots, \left(\left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_q}{\partial z_1}\right)_{x_j}, \dots, \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_q}{\partial z_n}\right)_{x_j}\right)$, $\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_1, \dots$ $\dots, \tilde{\varphi}_q)$. Quindi escluso al più un numero finito di valori di λ, $g + \lambda\zeta$ verifica la condizione ii) dell'enunciato. Esiste allora una successione $\{g + \lambda_\nu \zeta\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ di funzioni convergente a g in $\mathcal{A}_\sigma(\tilde{X})$ e tale che $\varrho_{x_j}(\tilde{\varphi}, g + \lambda_\nu \zeta) = \varrho_{x_j}(\tilde{\varphi}) + 1$ per $1 \leq j \leq p$ e per ogni $\nu \in \mathbb{N}$.

Da (1) e (2) segue che $A(K)$ è denso in $\mathcal{A}_\sigma(\tilde{X})$ per ogni compatto $K \subset \tilde{X}$.

Se $K \subset K'$, $A(K') \subset A(K)$; essendo $A(K)$ e $A(K')$ insiemi di applicazioni olomorfe è facile verificare se $K \subset \mathring{K}'$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che se $g \in \mathcal{A}_\sigma(\tilde{X})$ e $\|g - f\|_{K'} < \varepsilon$, allora $g \in A(K)$.

COROLLARIO 1. *Nelle ipotesi della proposizione precedente sia* $\{U_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ *un sistema* σ*-ammissibile e per ogni* $j \in \mathbb{N}$, $K_j \subset U_j$, *un compatto ed* $\varepsilon_j > 0$. *Sia* $C \subset \tilde{X}$ *un compatto,* $\varepsilon > 0$, $h \in \mathcal{A}_\sigma(\tilde{X})$ *e* $\tilde{\varphi} \in \mathcal{A}_\sigma^m(\tilde{X})$, $m < n$. *Dato un insieme discreto* $T \subset \tilde{X}$ *esiste* $f \in \mathcal{A}_\sigma(\tilde{X})$ *tale che*:

i) $\|f - h\|_C < \varepsilon$, $\|f - h\|_{K_j} < \varepsilon_j$ *per ogni* $j \in \mathbb{N}$

ii) *f separi i punti di T*

iii) $\varrho_{x_p}(\tilde{\varphi}, f) = \varrho_{x_p}(\tilde{\varphi}) + 1$ *per ogni* $x_p \in T$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $K \subset \tilde{X}$ un compatto e sia $A(K)$ definito come nella proposizione precedente. Allora la famiglia degli $A(K)$ verifica le ipotesi della proposizione 5. Dalla proposizione 5 segue che esiste $f \in A(K)$, per ogni compatto $K \subset \tilde{X}$, verificante i), ii), iii).

§ 3. Un teorema d'immersione per gli ($\mathbb{R}$)-spazi analitici.

a. Sia $\tilde{X}$ uno spazio complesso di dimensione n, $\tilde{\varphi} : \tilde{X} \to \mathbb{C}^k$ un'applicazione olomorfa.

Sia

$$M'(\tilde{\varphi}) = \{(x, y) \in \tilde{X} \times \tilde{X} : \tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(y)\};$$

$M'(\tilde{\varphi})$ è un sottoinsieme analitico complesso di $\tilde{X} \times \tilde{X}$ contenente la diagonale Δ di $\tilde{X} \times \tilde{X}$. Sia $M(\tilde{\varphi})$ l'unione delle componenti irriducibili di $M'(\tilde{\varphi})$ che non sono contenute in Δ : $M(\tilde{\varphi})$ è un sottoinsieme analitico complesso di $\tilde{X} \times \tilde{X}$.

Sia S l'insieme dei punti singolari di $\widetilde{X}$ e sia $\varrho_x(\widetilde{\varphi})$ il rango jacobiano di $\widetilde{\varphi}$ in un punto $x \in X - S$. Sia per $m \leq n$

$$\widetilde{X}'(\widetilde{\varphi}, m) = \{x \in \widetilde{X} - S : \varrho_x(\widetilde{\varphi}) \leq m\} ;$$

$\widetilde{X}'(\widetilde{\varphi}, m)$ è un sottoinsieme analitico complesso di $\widetilde{X} - S$ la cui chiusura $\widetilde{X}(\widetilde{\varphi}, m)$ è un sottoinsieme analitico di $\widetilde{X}$. Chiaramente nessuna delle componenti irriducibili di $\widetilde{X}(\widetilde{\varphi}, m)$ è contenuta in S.

Proposizione 7. *Sia $\widetilde{X}$ uno spazio di Stein di dimensione n, $\sigma : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ un'antiinvoluzione. Sia $\{U_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ un sistema σ-ammissibile.*

Per $0 \leq k \leq 2n$, sia $f_k \in \mathcal{A}^k_\sigma(\widetilde{X})$ tale che:

a_k) *$\dim_{\mathbb{C}} M(f_k) \leq 2n - k$*

b_k) *per $0 \leq m \leq n$, $\dim_{\mathbb{C}} \widetilde{X}(f_k, m) \leq n - k + m$.*

Siano $K_j \subset U_j$, $j \in \mathbb{N}$, compatti e sia $h \in \mathcal{A}_\sigma(\widetilde{X})$. Sia $C \subset \widetilde{X}$ un compatto e siano $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_j > 0$, $j \in \mathbb{N}$. Allora esiste $f \in \mathcal{A}_\sigma(\widetilde{X})$ tale che

i) $\| h - f \|_C < \varepsilon$, $\| h - f \|_{K_j} < \varepsilon_j$, *per ogni* $j \in \mathbb{N}$

ii) *l'applicazione $f_{k+1} = (f_k, f)$ soddisfi a_{k+1}) e b_{k+1}).*

Dimostrazione. Siano M_q, $q \in \mathbb{N}$, le componenti irriducibili di $M(f_k)$. Scegliamo in ciascun M_q un punto $(x_q, y_q) \notin \Delta$: $\{(x_q, y_q)\}_{q \in \mathbb{N}}$ è un sottoinsieme discreto di $\widetilde{X} \times \widetilde{X}$. Sia $\widetilde{X}_m$ l'unione delle componenti irriducibili di $\widetilde{X}(f_k, m)$ che hanno dimensione $n - k + m$ $(0 \leq m \leq n)$. Nessuna componente irriducibile di $\widetilde{X}_m$ è contenuta in S e conseguentemente $\dim_{\mathbb{C}}(\widetilde{X}_m \cap S) < n - k + m$. Dall'ipotesi b_k) segue poi $\dim_{\mathbb{C}} \widetilde{X}(f_k, m-1) \leq n - k + m - 1$, e quindi ogni componente irriducibile $\widetilde{X}^p_m$ di $\widetilde{X}_m$, $p \in \mathbb{N}$, contiene un punto x^p_m che non appartiene a $S \cap \widetilde{X}(f_k, m-1)$.

Poichè $x^p_m \notin \widetilde{X}(f_k, m-1)$, $\varrho_{x^p_m}(f_k) = m$. Inoltre i punti x^p_m, $p \in \mathbb{N}$, $m = 0, 1, \dots, n-1$, formano un sottoinsieme discreto di $\widetilde{X}$.

Sia T l'insieme formato dai punti x^p_m e x_q, y_q, $p, q \in \mathbb{N}$, $m = 0, 1, \dots, n-1$. Per il corollario 1 esiste $f \in \mathrm{A}_\sigma(\widetilde{X})$ tale che

$$\| f - h \|_C < \varepsilon, \| f - h \|_{K_j} < \varepsilon_j \quad j \in \mathbb{N},$$

ed $f(x_q) \neq f(y_q)$ per ogni $q \in \mathbb{N}$, e $\varrho_{x^p_m}(f_k, f) = \varrho_{x^p_m}(f_k) + 1 = m + 1$ per $m = 0, 1, \dots, n-1$ e ogni $p \in \mathbb{N}$.

Sia $f_{k+1} = (f_k, f)$ e proviamo che f_{k+1} soddisfa le condizioni $a_{k+1})$ e $b_{k+1})$. Infatti sia M una componente irriducibile di $M(f_{k+1})$ non contenuta in Δ. Allora $M \subset M_q$ per qualche q. Ma $(x_q, y_q) \in M_q$ e $(x_q, y_q) \notin M$, quindi $\dim_{\mathbb{C}} M < \dim_{\mathbb{C}} M_q \leq 2n - k$: ne segue $\dim_{\mathbb{C}} M(f_{k+1}) \leq 2n - k - 1$ cioè $a_{k+1})$. Se A è una componente irriducibile di $\widetilde{X}(f_{k+1}, m)$ allora o A è contenuta in una componente irriducibile di $\widetilde{X}(f_k, m)$ di dimensione $< n - k + m$ oppure A è contenuta in una componente irriducibile $\widetilde{X}_m^p$ di $\widetilde{X}_m$. Ma allora $x_m^p \notin A$, $x_m^p \in \widetilde{X}_m^p$ cosicchè $\dim_{\mathbb{C}} A < n - k + m$ cioè $b_{k+1})$.

Possiamo provare i seguenti teoremi.

TEOREMA 1. *Sia $\widetilde{X}$ uno spazio di Stein di dimensione n, $\sigma: \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ una antiinvoluzione. Allora l'insieme delle applicazioni $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{A}_\sigma^{2n+1}(\widetilde{X})$ che sono iniettive proprie e regolari nei punti regolari di $\widetilde{X}$ è denso in $\mathcal{A}_\sigma^{2n+1}(\widetilde{X})$.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo $2n+1$ sistemi σ-ammissibili $\{U_j^\lambda\}_{j \in \mathbb{N}}$, $\lambda = 1, \ldots, 2n+1$, e per ogni U_j^λ un compatto $K_j^\lambda \subset U_j^\lambda$ tale che

$$\bigcup_{\lambda=1}^{2n+1} \Big(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j^\lambda \Big) = \widetilde{X}.$$

Sia $f = (f_1, \ldots, f_{2n+1}) \in \mathcal{A}_\sigma^{2n+1}(\widetilde{X})$, C un compatto di $\widetilde{X}$ ed $\varepsilon > 0$. Per le proposizione 5 esistono in $g_1, \ldots, g_{2n+1}\, \widetilde{\mathcal{A}_\sigma}(X)$ tali che per $j \geq j_0(C)$

$$\|f_\lambda - g_\lambda\|_C < \frac{\varepsilon}{2}, \; \|g_\lambda\|_{K_j^\lambda} \geq j + 1 \qquad \lambda = 1, \ldots 2n+1.$$

Poichè le condizioni $a_0)$ e $b_0)$ della proposizione precedente sono vuote, esiste $\psi_1 \in \mathcal{A}_\sigma(\widetilde{X})$ tale che

$$\|\psi_1 - g_1\|_C < \frac{\varepsilon}{2}, \; \|\psi_1 - g_1\|_{K_j^1} < \frac{1}{2} \qquad j \geq j_0(C)$$

$$\dim_{\mathbb{C}} M(\psi_1) \leq 2n - 1, \; \dim_{\mathbb{C}} \widetilde{X}(\psi_1, m) \leq n - 1 + m, \quad 0 \leq m \leq n - 1.$$

Possiamo sucessivamente trovare per la proposizione 7, $\psi_2, \ldots \psi_{2n+1}$ in $\mathcal{A}_\sigma(\widetilde{X})$ tali che se $\widetilde{\psi}_k$ è l'applicazione $\widetilde{X} \to \mathbb{C}^k$ definita da $x \to (\psi_1(x), \ldots$ $\ldots, \psi_k(x))$, allora

$$\dim_{\mathbb{C}} M(\widetilde{\psi}_k) \leq 2n - k, \; \dim_{\mathbb{C}} \widetilde{X}(\widetilde{\psi}_k, m) \leq n - k + m, \quad 0 \leq m \leq n - 1$$

con

$$\| \psi_\lambda - g_\lambda \|_\sigma < \frac{\varepsilon}{2}, \; \| \psi_\lambda - g_\lambda \|_{K_j^\lambda} < \frac{1}{2} \qquad \begin{array}{l} \lambda = 1, \dots, 2n+1 \\ j \geq j_0(C). \end{array}$$

L'applicazione $\widetilde{\varphi} = \widetilde{\psi}_{2n+1}$ è propria poichè

$$\| g_\lambda \|_{K_j^\lambda} \geq j + 1 \text{ e } \| \psi_\lambda - g_\lambda \|_{K_j^\lambda} < \frac{1}{2} \text{ per } \lambda = 1, \dots, 2n+1, \quad j \geq j_0(C),$$

e $\| \widetilde{\varphi} - f \|_\sigma < \varepsilon$.

Poichè

$$\dim_{\mathbb{C}} M(\widetilde{\varphi}) \leq -1, \; \dim_{\mathbb{C}} \widetilde{X}(\widetilde{\varphi}, m) \leq -n - 1 + m \leq -1, \quad 0 \leq m \leq n-1$$

$\widetilde{\varphi}$ è iniettiva e regolare nei punti regolari di $\widetilde{X}$. Ciò prova il teorema 1.

Teorema 1'. *Nelle ipotesi del teorema 1 siano* $\{U_j^\lambda\}_{j \in \mathbb{N}}$, $\lambda = 1, \dots, 2n+1$, $2n+1$ *sistemi* σ-*ammissibili tali che* $\widetilde{X} = \bigcup_{\lambda=1}^{2n+1} \bigcup_{j \in \mathbb{N}} U_j^\lambda$.

Allora l'insieme delle applicazioni $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{A}_\sigma^{2n+1}(\widetilde{X})$ *che sono iniettive, proprie e regolari nei punti regolari di* $\widetilde{X}$ *è denso, per la* $(2n+1)$-*topologia associata ai sistemi* $\{U_j^\lambda\}_{j \in \mathbb{N}}$, *nel sottospazio delle applicazioni* $\widetilde{\varphi} \in \mathrm{A}_\sigma^{2n+1}(\widetilde{X})$ *che sono proprie.*

Dimostrazione. Sia $\widetilde{\varphi} = (\widetilde{\varphi}_1, \dots, \widetilde{\varphi}_{2n+1}) \in \mathcal{A}_\sigma^{2n+1}(\widetilde{X})$ un'applicazione propria. Sia $C \subset \widetilde{X}$ un compatto e $K_j^\lambda \subset U_j^\lambda$, $\lambda = 1, \dots, 2n+1$, $j \in \mathbb{N}$, compatti tali che $\widetilde{X} = \bigcup_{\lambda=1}^{2n+1} \bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j^\lambda$. Dalla dimostrazione del teorema 1 segue che fissati $\varepsilon > 0$ ed $0 < \varepsilon_j < \frac{1}{2}$, $j \in \mathbb{N}$, esiste $g = (g_1, \dots, g_{2n+1}) \in \mathcal{A}_\sigma^{2n+1}(\widetilde{X})$ iniettiva e regolare nei punti regolari di $\widetilde{X}$, tale che

$$\| g_\lambda - \widetilde{\varphi}_\lambda \|_\sigma < \varepsilon, \; \| g_\lambda - \widetilde{\varphi}_\lambda \|_{K_j^\lambda} < \varepsilon_j \qquad \begin{array}{l} j \in \mathbb{N} \\ \lambda = 1, \dots, 2n+1. \end{array}$$

L'applicazione g è propria: infatti per ogni successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \in \widetilde{X}$ priva di sottosuccessioni convergenti si ha $\lim_{n \to \infty} \| \varphi(x_n) \| = \lim \| g(x_n) \| = +\infty$. Ciò prova il teorema 1'.

Sia $\widetilde{X}$ uno spazio di Stein, $\sigma: \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ un'antiinvoluzione $X = \{x \in \widetilde{X}: \sigma(x) = x\}$. Siano $\{U_j^\lambda\}_{j \in \mathbb{N}}$, $\lambda = 1, \dots, m$, sistemi σ-ammissibili su $\widetilde{X}$.

Dati $K \subset \widetilde{X}$, $K_j^\lambda \subset U_j^\lambda$ compatti, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_j > 0$, $j \in \mathbb{N}$ $\lambda = 1, \dots, m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$ poniamo:

$$V_m = \{f \in \mathcal{R}^m(x) : \|f\|_{K \cap X} < \varepsilon, \ \|f_\lambda\|_{K_j^\lambda} < \varepsilon_j, \ j \in \mathbb{N}, \ \lambda = 1, \dots, m\}.$$

Al variare di $K, K_j^\lambda, \varepsilon, \varepsilon_j$ gli insiemi V_m formano un sistema fondamentale di intorni di $\{0\}$ per una topologia su $\mathcal{R}^m(X)$ che chiameremo la *m-topologia* associata ai sistemi $\{U_j^\lambda\}_{j \in \mathbb{N}}$ $\lambda = 1, \dots, m$.

Vale il seguente.

LEMMA 2. *Sia $\widetilde{X}$ uno spazio di Stein, $\sigma: \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ un'antiinvoluzione ed $X = \{x \in \widetilde{X} : \sigma(x) = x\}$. Siano $\{U_j^\lambda\}_{j \in \mathbb{N}}$, $\lambda = 1, \dots, m$ sistemi σ-ammissibili. Allora lo spazio $\mathcal{R}_\sigma^m(X, \widetilde{X})$ è denso in $\mathcal{R}^m(X)$ per la m-topologia associata ai sistemi $\{U_j^\lambda\}_{j \in \mathbb{N}}$, $\lambda = 1, \dots, m$.*

DIMOSTRAZIONE. È conseguenza immediata del lemma 1 e della proposizione 4.

TEOREMA 2. *Sia X un $(\mathbb{R})$-spazio analitico di dimensione n. Esiste un'applicazione analitica, iniettiva, propria $\varphi: X \to \mathbb{R}^{2n+1}$, tale che $\varphi(X)$ è un sottoinsieme analitico di $\mathbb{R}^{2n+1}$. Se X è coerente, φ è regolare nei punti regolari di X.*

DIMOSTRAZIONE. Per la proposizione 1 esistono uno spazio di Stein $\widetilde{X}$ di dimensione n ed un'antiinvoluzione $\sigma: \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ tale che $X = \{x \in \widetilde{X} : \sigma(x) = x\}$. Per il teorema 1 esiste $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{A}_\sigma^{2n+1}(\widetilde{X})$ che è iniettiva propria e regolare nei punti regolari di $\widetilde{X}$; $\varphi = \widetilde{\varphi}_{|X}$ è allora un'applicazione analitica iniettiva e propria; inoltre essendo $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{A}_\sigma^{2n+1}(\widetilde{X})$ si ha $\varphi(X) \subset \mathbb{R}^{2n+1}$. D'altra parte essendo $\widetilde{\varphi}$ propria, $\widetilde{\varphi}(\widetilde{X})$ è un sottoinsieme analitico di $\mathbb{C}^{2n+1}$ e quindi $\varphi(X) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{X}) \cap \mathbb{R}^{2n+1}$ è un sottoinsieme analitico di $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Se X è coerente, $\widetilde{X}$ è un complessificato di X e quindi $x \in X$ è regolare per X se e solo se è regolare per $\widetilde{X}$: ne segue che φ è regolare nei punti regolari di X.

COROLLARIO 2. *Una varietà analitica reale X di dimensione n con topologia a base numerabile è isomorfa ad una sottovarietà analitica reale di $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

COROLLARIO 3. *Sia X un* ($\mathbb{R}$)*-spazio analitico* (*uno spazio analitico reale coerente*) *di dimensione n e sia $\mathcal{R}^{2n+1}(X)$ lo spazio delle applicazioni analitiche reali $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$. L'insieme delle applicazioni $\varphi \in \mathcal{R}^{2n+1}(X)$ che sono iniettive e proprie,* (*iniettive, proprie e regolari nei punti regolari di X*) *è denso in $\mathcal{R}^{2n+1}(X)$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\widetilde{X}$ uno spazio di Stein di dimensione n e $\sigma : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}$ un'antiinvoluzione tale che $X = \{x \in \widetilde{X} : \sigma(x) = x\}$. Per il lemma del paragrafo 1 le applicazioni $\varphi \in \mathcal{R}^{2n+1}(X)$ che sono restrizioni ad X di applicazioni $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{A}_\sigma^{2n+1}(\widetilde{X})$ formano un sottospazio $\mathcal{R}_\sigma^{2n+1}(X, \widetilde{X})$ denso. Dal teorema 1 segue che l'insieme $\varphi \in \mathcal{R}_\sigma^{2n+1}(X, \widetilde{X})$ che sono iniettive e proprie (iniettive, proprie e regolari nei punti regolari di X) è denso in $\mathcal{R}_\sigma^{2n+1}(X, \widetilde{X})$.

COROLLARIO 4. *Sia X un* ($\mathbb{R}$)*-spazio analitico* (*uno spazio analitico reale coerente*) *di dimensione n. Sia $\widetilde{X}$ uno spazio di Stein, $\sigma : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}$ un'antiinvoluzione tale che $X = \{x \in \widetilde{X} : \sigma(x) = x\}$ e $\{U_j^\lambda\}_{j \in \mathbb{N}}$, $\lambda = 1, \dots, 2n+1$, sistemi σ-ammissibili tali che $\bigcup_{\lambda=1}^{2n+1} \bigcup_{j \in \mathbb{N}} U_j^\lambda = \widetilde{X}$. Allora l'insieme delle applicazioni $\varphi \in \mathcal{R}^{2n+1}(X)$ che sono iniettive e proprie* (*iniettive, proprie e regolari nei punti regolari di X*) *è denso, per la* $(2n+1)$*-topologia associata ai sistemi $\{U_j^\lambda\}_{j \in \mathbb{N}}$, nel sottospazio delle applicazioni $\varphi \in \mathcal{R}^{2n+1}(X)$ che sono proprie.*

DIMOSTRAZIONE. È analoga alla dimostrazione del Corollario 3, tenendo presenti il teorema 1′ ed il lemma 2.

b. Sia $\widetilde{X}$ uno spazio complesso, $\sigma : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}$ un'antiinvoluzione. Diremo che $\widetilde{X}$ è *di tipo N rispetto a* σ se per ogni $x \in \widetilde{X}$ esiste un'applicazione $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{A}_\sigma^N(\widetilde{X})$ che è regolare in x.

PROPOSIZIONE 8. *Sia $\widetilde{X}$ uno spazio di Stein, $\sigma : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}$ un'antiinvoluzione. Sia $K \subset \widetilde{X}$ un compatto e $K' \subset \widetilde{X}$ un compatto tale che $K \subseteq \mathring{K}'$. Sia $f \in \mathcal{A}_\sigma^m(\widetilde{X})$ un'applicazione iniettiva e regolare su K. Allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che se $g \in \mathcal{A}_\sigma^m(\widetilde{X})$ e $\|f - g\|_{K'} < \varepsilon$, g è iniettiva e regolare su K.*

DIMOSTRAZIONE. cf. [3] lemma 5.

COROLLARIO. 4. *L'insieme delle $f \in \mathcal{A}_\sigma^m(\widetilde{X})$ che sono iniettive e regolari su K è un aperto di $\mathcal{A}_\sigma^m(\widetilde{X})$. Inoltre se f è iniettiva e regolare in un intorno*

U di K allora esistono $\varepsilon > 0$, e un compatto $K' \subset U$ tale che se $g \in \mathscr{A}_\sigma^m(\widetilde{X})$ e $\| g - f \|_{K'} < \varepsilon$ allora g è iniettiva e regolare su un intorno di K.

PROPOSIZIONE 9. *Sia $\widetilde{X}$ uno spazio di Stein di dimensione n, $\sigma : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ un'antiinvoluzione e $X = \{x \in \widetilde{X} : \sigma(x) = x\}$. Supponiamo che $\widetilde{X}$ sia di tipo N rispetto a σ con $N > n$. Allora dato un compatto $K \subset X$ l'insieme delle applicazioni $\widetilde{\varphi} \in \mathscr{A}_\sigma^{N+n}(\widetilde{X})$ che sono iniettive e regolari in un intorno di K è denso in $\mathscr{A}_\sigma^{N+n}(\widetilde{X})$.*

DIMOSTRAZIONE. (1). Si fa uso del seguente risultato dimostrato nel § 8 di [2]. Sia $D \subset \mathbb{C}^n$ un dominio d'olomorfia, sia $A \subset D$ un sottoinsieme analitico complesso con la struttura indotta da D, $K \subset D$ un compatto. Esiste una costante $M = M_K$ dipendente solo da K tale che se f è una funzione olomorfa su A e $\sup_{x \in A} |f(x)| \leq 1$ allora esiste $F : D \to \mathbb{C}$ olomorfa, tale che $F_{|A} = f$ e $\| F \|_K \leq M$.

Ciò posto, per il corollario 4 basta provare che per ogni $x \in K$ esiste un intorno U di x in $\widetilde{X}$ tale che l'insieme delle $\widetilde{\varphi} \in \mathscr{A}_\sigma^{N+n}(\widetilde{X})$ che sono iniettive e regolari su U è denso in $\mathscr{A}_\sigma^{N+n}(\widetilde{X})$.

Segue, per ipotesi, che dato $x \in X$ esistono un intorno V di x in $\widetilde{X}$ e $g \in \mathscr{A}_\sigma^N(\widetilde{X})$ tali che $\widetilde{g} : V \to \widetilde{g}(V) \subset \mathbb{C}^N$ sia un'applicazione di V in una palla aperta $B = \left\{ z \in \mathbb{C}^N : \sum_{\alpha=1}^{N} z_\alpha \bar{z}_\alpha < r \right\}$, olomorfa con la sua inversa e propria.

Si può inoltre supporre $\sigma(V) = V$ e che l'antiinvoluzione indotta da σ su $\widetilde{g}(V)$ sia il coniugio in $\mathbb{C}^N$: allora se $z \in \widetilde{g}(V)$, $\bar{z} \in \widetilde{g}(V)$.

(2) Sia $A = \widetilde{g}(V)$ e $\widetilde{g}_0 \in \mathscr{A}_\sigma^p(\widetilde{X})$. Sia $\widetilde{g}_1 = \widetilde{g}_0 \circ \widetilde{g}^{-1}$ su A e $G_1 : B \to \mathbb{C}^p$ un'applicazione olomorfa tale che $G_{1|A} = \widetilde{g}_1$ e $G_1(\bar{z}) = \overline{G_1(z)}$. Sia per $0 \leq m < N$, $V(\widetilde{g}_0, m)$ l'insieme definito come segue: $x \in V(\widetilde{g}_0, m)$ se per ogni prolungamento G_1 di $\widetilde{g}_1$, di cui sopra, il rango jacobiano di G_1 in $\widetilde{g}(x)$ è $\leq m$. Per definizione $V(\widetilde{g}_0\, m)$ è l'immagine in V dell'insieme dei punti di B in cui tutte le G_1 hanno rango jacobiano $\leq m$: quindi $V(\widetilde{g}_0, m)$ è un sottoinsieme analitico complesso di V.

Sia $B' \subset B$ una palla aperta concentrica tale che $\overline{B'} \subset B$ e sia $U = \widetilde{g}^{-1}(B') \cap V$. Sia $x \in U$ e $\widetilde{g}_0 \in \mathscr{A}_\sigma^p(\widetilde{X})$ tale che $\widetilde{g}_0 \circ \widetilde{g}^{-1}$ ha un prolungamento di rango jacobiano $r < N$ in $\widetilde{g}(x)$ e $G(\bar{z}) = \overline{G(z)}$. Sia $f \in \mathscr{A}_\sigma(\widetilde{X})$ e $F = (\widetilde{g}_0, f)$. Proviamo il fatto seguente: l'insieme delle $f \in \mathscr{A}_\sigma(\widetilde{X})$ tali che $F \circ \widetilde{g}^{-1}$ abbia un prolungamento olomorfo $'G$ su B di rango jacobiano $r + 1$ in $\widetilde{g}(x)$ e $'G(\bar{z}) = \overline{'G(z)}$, è aperto e denso in $\mathscr{A}_\sigma(\widetilde{X})$.

Infatti sia $H : B \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa tale che $H(\bar{z}) = \overline{H(z)}$ e tale che (G, H) abbia rango jacobiano $r + 1$ in $\tilde{g}(x)$. Sia $h \in \mathscr{A}_\sigma(\tilde{X})$ tale che $\| h - H \circ \tilde{g} \|_V < \varepsilon$. Allora, per quanto detto all'inizio della dimostrazione, $h \circ \tilde{g}^{-1}$ ha un prolungamento olomorfo $'H$ su B tale che $'H(\bar{z}) = \overline{'H(z)}$ e $\| H - 'H \|_{B'} < M\varepsilon$. Sia $'F$ un prolungamento olomorfo di $h \circ \tilde{g}$ su B tale che $\| H - 'F \|_{B'} < M\varepsilon$. Poichè $(h \circ \tilde{g}^{-1})_R = h \circ \tilde{g}^{-1}$ e $\sigma(B') = B'$, $H = F_R$ è un prolungamento olomorfo di $h \circ \tilde{g}^{-1}$ tale che $'H(\bar{z}) = \overline{'H(z)}$ e $\|H - 'H\|_{B'} < M\varepsilon$. Se $\varepsilon > 0$ è opportuno, per la proposizione 8 $(G, 'H)$ ha rango $r + 1$ in $\tilde{g}(x)$ e quindi ha la proprietà richiesta : ciò prova che l'insieme delle $f \in \mathscr{A}_\sigma(\tilde{X})$ di cui sopra è aperto.

Proviamo che è denso. Sia $\tilde{\psi} \in \mathscr{A}_\sigma(\tilde{X})$ e $\tilde{\psi}_1$ un prolungamento olomorfo di $\tilde{\psi} \circ \tilde{g}^{-1}$ su B : allora se $(G, \tilde{\psi}_1)$ ha rango $r+1$ in $\tilde{g}(x)$ e $\lambda \neq 0$, $(G, \tilde{\psi}_1 + \lambda' H)$ ha rango $r + 1$ in $\tilde{g}(x)$ e questo prova l'asserzione.

(3) Sia $\tilde{\varphi} \in \mathscr{A}_\sigma^m(X)$ e sia $M(\tilde{\varphi})$ l'insieme delle componenti irriducibili dell'insieme analitico complesso $\{(x, y) \in \tilde{X} \times \tilde{X} : \tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(y)\}$, che non sono contenute nella diagonale di $\tilde{X} \times \tilde{X}$. Supponiamo che

α_k) le componenti irriducibili di $M(\tilde{\varphi})$ che incontrano $K \times K$ abbiano dimensione complessa $\leq 2n - k$.

β_k) le componenti irriducibili di $V(\tilde{\varphi}, m)$ che incontrano $U = \tilde{g}^{-1}(B') \cap V$, abbiano dimensione $\leq n - k + m$, per $0 \leq m < N$.

Allora l'insieme delle $\tilde{h} \in \mathscr{A}_\sigma(\tilde{X})$ tali che $(\tilde{\varphi}, \tilde{h})$ soddisfi α_{k+1}) e β_{k+1}) è denso in $\mathscr{A}_\sigma(\tilde{X})$.

La dimostrazione è analoga a quella della proposizione 7.

Poichè le condizioni α_0) e β_0) sono vuote ne segue che l'insieme delle $\tilde{f} \in \mathscr{A}_\sigma^{N+n}(\tilde{X})$ tali che

i) $\quad \dim_{\mathbb{C}}(M(\tilde{f}) \cap K \times K) \leq 2n - n - N \leq -1.$

ii) $\quad \dim_{\mathbb{C}}(V(\tilde{f}, m) \cap U) \leq n - (N \neq n) + m \leq -1 \quad 0 \leq m < N$

è denso in $\mathscr{A}_\sigma^{N+1}(\tilde{X})$.

La tesi segue allora dal fatto che la condizione ii) implica che $\tilde{f}$ è regolare in ogni punto di U.

Possiamo dimostrare i teoremi seguenti.

TEOREMA 3. *Sia $\tilde{X}$ uno spazio di Stein di dimensione n, $\sigma : \tilde{X} \to \tilde{X}$ un'antiinvoluzione. Supponiamo che $\tilde{X}$ sia di tipo $N > n$ rispetto a σ. Allora* *l'insieme delle applicazioni* $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{A}_\sigma^{N+n}(\widetilde{X})$ *proprie iniettive e regolari su* X *è denso in* $\mathcal{A}_\sigma^{N+n}(\widetilde{X})$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $K \subset X$ un compatto e sia $A(K)$ l'insieme delle applicazioni $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{A}_\sigma^{N+n}(\widetilde{X})$ che sono iniettive e regolari su un intorno di K.

Dall'ultimo corollario e dalla proposizione 9 segue che $A(K)$ soddisfa le condizioni della proposizione 5. Siano $\{U_j^\lambda\}_{j \in \mathbb{N}}$, $\lambda = 1, \dots, 2n+1$, $2n+1$ sistemi σ-ammissibili tali che $\widetilde{X} = \bigcup_{\lambda=1}^{2n+1} U^\lambda \; (U^\lambda = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} U_j^\lambda)$.

Poichè ogni U_j^λ è relativamente compatto esistono dei compatti $K_j^\lambda \subset U_j^\lambda$, $\lambda = 1, \dots, 2n+1$, $j \in \mathbb{N}$, tali che $\widetilde{X} = \bigcup_{\lambda=1}^{2n+1} K^\lambda (K^\lambda = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j^\lambda)$. Sia $\{B_\nu^\lambda\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ la successione associata al sistema $\{U_j^\lambda\}_{j \in \mathbb{N}}$ e sia $\widetilde{g} = (\widetilde{g}_1, \dots, \widetilde{g}_{N+n}) \in \mathcal{A}_\sigma^{N+n}(\widetilde{X})$. Sia poi $C \subset \widetilde{X}$ un compatto ed $\varepsilon > 0$. Si può supporre $C \subset B_1^\lambda$ per ogni λ.

Per la proposizione 5 esistono $N+n$ funzioni olomorfe su $\widetilde{X}$, $\widetilde{h}_1, \dots, \widetilde{h}_{N+n}$ tali che

$$\|\widetilde{h}_\alpha - g_\alpha\|_C < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \|\widetilde{h}_\alpha\|_{K_j^\lambda} \geq j+1 \qquad \begin{array}{l} \alpha = 1, \dots, N+n \\ j \geq j_0 = j_0(C). \end{array}$$

Per le proposizioni 9 e 5 esiste $\widetilde{\varphi} = (\widetilde{\varphi}_1, \dots, \widetilde{\varphi}_{N+n}) \in \mathcal{A}_\sigma^{N+n}(X)$ che è iniettiva e regolare su ogni compatto di X, e quindi su X; inoltre se $\widetilde{h} = (\widetilde{h}_1, \dots, \widetilde{h}_{N+n})$

$$\|\widetilde{\varphi} - \widetilde{h}\|_C < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \|\widetilde{\varphi}_\alpha - \widetilde{h}\|_{K_j^\lambda} < 1 \qquad \begin{array}{l} \lambda = 1, \dots, 2n+1 \\ \alpha = 1, \dots, N+n \\ j \geq j_0 . \end{array}$$

L'insieme dei punti $x \in \widetilde{X}$ tali che $|\widetilde{\varphi}_\alpha(x)| \leq j$, $\alpha = 1, \dots, N+n$, è contenuto in $C \cup \left(\bigcup_{s \leq \max(j_C, j)} \bigcup_{\lambda=1}^{N+n} K_s^\lambda \right)$ e quindi è compatto.

TEOREMA 4. *Sia* X *uno spazio analitico reale, coerente, di dimensione* n. *Supponiamo che* X *sia localmente di tipo* N, $N > n$. *Allora* X *è isomorfo ad un sottoinsieme analitico di* $\mathbb{R}^{N+n}$.

DIMOSTRAZIONE. Esistono uno spazio di Stein $\widetilde{X}$ di dimensione n ed un'antiinvoluzione $\sigma : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ tali che $X = \{x \in \widetilde{X} : \sigma(x) = x\}$ ed $\widetilde{X}$ sia di tipo N rispetto a σ. Siano infatti $\widetilde{X}$ un complessificato di X e $\sigma : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ un'anti-involuzione tale che $X = \{x \in \widetilde{X} : \sigma(x) = x\}$.

Sia $x \in X$: per l'osservazione del § 1 esiste una carta locale $\{U, \varrho\}$, $x \in U$, tale che σ su U si esprime con equazioni del tipo $z_j = \overline{z}_j$, $j = 1, \ldots, N$.

Esistono N funzioni olomorfe su $\widetilde{X}$, $f_1, \ldots, f_N$ i cui differenziali in x coincidono con $dz_1, \ldots, dz_N$. L'applicazione $F = ((f_1)_R, \ldots, (f_N)_R)$ di $\widetilde{X}$ in $\mathbb{C}^N$ è regolare in x e questo prova che $\widetilde{X}$ è di tipo N rispetto a σ.

Per il teorema 3 esiste un'applicazione $\widetilde{\varphi} \in \mathscr{A}_\sigma^{N+n}(\widetilde{X})$ propria iniettiva e regolare su X; $\widetilde{\varphi}(\widetilde{X})$ è allora un sottoinsieme analitico complesso di $\mathbb{C}^{N+n}$. Poichè $\widetilde{\varphi} \in \mathscr{A}_\sigma^{N+n}(\widetilde{X})$, se $\varphi = \widetilde{\varphi}|_X$ risulta $\varphi(X) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{X}) \cap \mathbb{R}^{N+n}$ ($\mathbb{C}^{N+n} = \mathbb{R}^{N+n} \oplus i\mathbb{R}^{N+n}$), cioè $\varphi(X)$ è un sottoinsieme analitico reale di $\mathbb{R}^{N+n}$ e φ è un isomorfismo di X su $\varphi(X)$.

Università di Pisa

BIBLIOGRAFIA

[0] A. ANDREOTTI, « *Lezioni sugli spazi vettoriali topologici* » Note ciclostilate.

[1] H. CARTAN, *Variétés analytiques réelles et variétés analytiques complexes,* Bull. Soc. Math. de France 85 (1951) pp. 77-100.

[2] H. GRAUERT - R. REMMERT, *Komplexe Räume,* Mathematische Annalen vol. 129 (1955) pp. 245-318.

[3] R. NARASIMHAM, *Imbedding of holomorphically complete spaces,* American Journal of Mathematics vol. LXXXII, n. 4, (1960) pp. 917-934.

[4] A. TOGNOLI, *Proprietà globali degli spazi analitici reali,* Annali di Matematica, Serie IV Tomo LXXV (1967) pp. 143-218.

[5] H. WHITNEY - F. BRUHAT, *Quelques propriétés fondamentales des ensembles analytiques réels,* Commentarii Mathematici Helvetici, vol. 33 (1959) pp. 132-160.