G. DA PRATO
E. GIUSTI

**Equazioni di evoluzione in $L^p$**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série*, tome 21, nº 4 (1967), p. 485-505
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1967_3_21_4_485_0>

# EQUAZIONI DI EVOLUZIONE IN $L^p$.

G. DA PRATO - E. GIUSTI (*)

## Introduzione.

Sia $\Omega$ un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, $A$ un operatore differenziale fortemente ellittico in $\Omega$ di ordine $2m$ a coefficienti $C^\infty(\overline{\Omega})$.

Consideriamo il problema di Dirichlet (¹):

$$\left\{\begin{array}{ll} Au = f & f \in L^p(\Omega) \\ u \in H_0^m(\Omega). \end{array}\right. \tag{1}$$

È noto [1] [3] [8] che la realizzazione di $A$ in $L^p(\Omega)$ sotto le condizioni di Dirichlet è un operatore lineare chiuso in $L^p(\Omega)$ con dominio $D_A(L^p) = H^{2m,p}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$, è generatore infinitesimale di un semigruppo analitico [9], ed il suo risolvente $R(\lambda, A)$ verifica una maggiorazione del tipo:

$$\| R(\lambda, A) \| \leq \frac{M}{|\lambda|} \tag{2}$$

al variare di $\lambda$ in un opportuno settore del piano complesso $\mathbb{C}$, che si può sempre supporre contenere il semipiano $\operatorname{Re} \lambda > 0$.

Applicando il teorema di Hille-Yosida [9] [15], si trova che il problema di Cauchy

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} = Au \\ u(0) = u_0 \end{array}\right. \tag{3}$$

con $u_0 \in D_A$, ammette una ed una sola soluzione $u(x, t)$ appartenente a $C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_+)$.

Pervenuto alla Redazione il 20 Dicembre 1966 ed in forma definitiva il 16 Marzo 1967.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca del C. N R.

(¹) Per le notazioni vedi il paragrafo 1.

Se in particolare $A$ è formalmente autoaggiunto (cosicchè si può supporre che il suo spettro sia reale negativo) e se $p = 2$, si provano facilmente le maggiorazioni:

$$\| R(\lambda, A) \| \leq \begin{cases} \dfrac{1}{|\lambda|} & \text{se } \operatorname{Re} \lambda > 0 \\ \dfrac{1}{|\operatorname{Im} \lambda|} & \text{se } \operatorname{Re} \lambda \leq 0,\ \operatorname{Im} \lambda \neq 0. \end{cases} \tag{4}$$

Consideriamo allora il problema di Cauchy associato all'equazione di Schrödinger:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = iAu \\ u(0) = u_0 \in D_A(L^2). \end{cases} \tag{5}$$

Poichè $R(\lambda, iA) = -iR(-i\lambda, A)$, segue da (4), per ogni $t > 0$

$$\| R(t, iA) \| \leq \frac{1}{t} \tag{6}$$

cosicchè $iA$ è generatore infinitesimale di un semigruppo di contrazione (non analitico) [9] ed il problema (5) ha soluzione unica $u \in D_A$ per ogni $t \in \overline{R}_+$.

Un risultato analogo si trova per l'equazione delle onde in $L^2(\Omega)$ [10]. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Au \\ u(0) = u_0 \in D_A(L^2) \\ u'(0) = v_0 \in H_0^m(\Omega) \end{cases} \tag{7}$$

che, come è noto, può scriversi nella forma:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ u(0) = u_0 \in D^A(L^2),\ v(0) = v_0 \in H_0^m(\Omega). \end{cases} \tag{8}$$

L'operatore $\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ A & 0 \end{pmatrix}$ è generatore infinitesimale di un semigruppo di contrazione [15], per cui il problema (7) ha soluzione unica $u \in D_A(L^2)$, con $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in H_0^m(\Omega)\ \forall\, t \in \overline{R}_+$.

Nel caso in cui $p$ sia diverso da 2, non è noto se $iA$ ed $\mathcal{A}$ siano generatori di semigruppi distribuzioni [11] [13].

In questo lavoro proviamo che ciò avviene ed anzi che $iA$ ed $\mathcal{A}$ sono generatori di semigruppi regolarizzabili [6].

I risultati ottenuti sono riportati nel § 6.

Per quanto riguarda l'equazione di Schrödinger si dimostra che se $u_0 \in D_{A^l}(L^p)$ (²) allora esiste una soluzione unica $u(t) \in D_A(L^p)$ per ogni $t > 0$.

Per l'equazione delle onde, se $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in D_{\mathcal{A}^k}(L^p)$ (²) allora esiste una soluzione unica $u(t)$ tale che $\begin{pmatrix} u\ (t) \\ u'\ (t) \end{pmatrix} \in D_{\mathcal{A}}(L^p)$ per ogni $t > 0$.

Per provare che $iA$ e $\mathcal{A}$ sono generatori di $R$-semigruppi occorre conoscere proprietà spettrali di $A$ più raffinate di quelle contenute nella (2); più precisamente occorre conoscere l'andamento di $\| R(\lambda, A) \|$ per tutti i $\lambda$ di $\mathbb{C}$ (eccettuati ovviamente i $\lambda$ reali negativi) mentre (2) dà informazioni per un arbitrario ma fissato settore di centro $O$ di $\mathbb{C}$ escludente l'asse reale negativo.

Abbiamo provato una maggiorazione del tipo:

$$\| R(\lambda, A) \| \leq \frac{M(1 + |\lambda|)^h}{|\lambda| \cos \theta/2} \qquad h \text{ intero positivo.} \tag{9}$$

Resta per noi aperto il problema di trovare la migliore maggiorazione.

Osserviamo infine che dalla (9) segue che $iA$ e $\mathcal{A}$ sono generatori infinitesimali di semigruppi distribuzioni, ma il Teorema di Lions in [11] assicura soltanto che se ad esempio $u_0 \in D_A$ allora (5) ha una soluzione distribuzione.

Il § 1 è dedicato alle notazioni, i § 2 e 3 allo studio astratto delle equazioni di Schrödinger e delle onde per un operatore $A$ tale che valga la maggiorazione (9), i § 4, 5 alle proprietà spettrali di $A$ rispettivamente in $L^2$ ed $L^p$ ed il § 6 all'esposizione dei risultati.

Ringraziamo S. Campanato e G. Stampacchia per utili discussioni.

## 1. Notazioni e richiami.

Se $T$ è uno spazio topologico e $Q$ un sottoinsieme di $T$, $\overline{Q}$ è la chiusura di $Q$ in $T$, $T \setminus Q$ è l'insieme dei punti di $T$ non appartenenti a $Q$.

---

(²) $l$ e $k$ sono due interi positivi dipendenti da $p$, dalla dimensione dello spazio $\mathbb{R}^n$ e dall'ordine $2m$ di $A$.

$\mathbb{R}$ (risp. $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_-$) è l'insieme dei numeri reali (risp. positivi, negativi) munito della topologia abituale.

$\mathbb{C}$ (risp. $\mathbb{C}_+$, $\mathbb{C}_-$) è l'insieme dei numeri complessi (risp. con parte reale positiva, con parte reale negativa) munito della topologia abituale.

$\mathbb{R}^n$ è il prodotto topologico di $n$ copie di $\mathbb{R}$; $x = (x_1, \dots, x_n)$ è il generico elemento di $\mathbb{R}^n$.

$\Omega$ è un aperto limitato e convesso di $\mathbb{R}^n$, con frontiera $\partial\Omega$ di classe $C^\infty$, $|\Omega|$ è la misura di Lebesgue di $\Omega$.

Poniamo:

$$D_h^0 = 1, D_h^k = i^{-k} \frac{\partial^k}{\partial x_h^k} \qquad (k = 1, 2, \dots; h = 1, \dots, n; x \in \mathbb{R}^n). \tag{1.1}$$

Se $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ con $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ interi non negativi, poniamo:

$$|\sigma| = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \tag{1.2}$$

$$D^\sigma = D_1^{\sigma_1} \dots D_n^{\sigma_n}. \tag{1.3}$$

$L^p(\Omega)$ è lo spazio di Banach delle funzioni misurabili di potenza $p$ sommabile in $\Omega$, con la norma:

$$\| u \|_p = \left( \int_\Omega | u(x) |^p \, dx \right)^{1/p}. \tag{1.4}$$

$C^\infty(\Omega)$ è l'insieme delle funzioni infinitamente derivabili con continuità in $\overline{\Omega}$ e $C_0^\infty(\Omega)$ il sottoinsieme di $C^\infty$ delle funzioni a supporto compatto contenuto in $\Omega$.

$H^{k,p}(\Omega)$ (risp. $H_0^{k,p}(\Omega)$) è il completamento di $C^\infty(\Omega)$ (risp. $C_0^\infty(\Omega)$) rispetto alla norma:

$$\| u \|_{k,p} = \Big( \sum_{|\sigma| \le k} \| D^\sigma u \|_p^p \Big)^{1/p} \quad (3). \tag{1.5}$$

Quando non vi sia possibilità di confusione sopprimeremo $\Omega$ dalle notazioni $L^p(\Omega)$, $C^\infty(\Omega)$, ecc.

---

(3) Per $p = 2$ scriveremo anche $H^k(\Omega)$ (risp. $H_0^k(\Omega)$) in luogo di $H^{k,2}(\Omega)$ (risp. $H_0^{k,2}(\Omega)$); inoltre porremo $\| u \|_k = \| u \|_{k,2}$, $\| u \|_0 = \| u \|_2$, $(u, v)_0 = \int_\Omega u(x) \overline{v(x)} \, dx$.

Se $X$ è uno spazio di Banach, 1 rappresenta l'operatore identità in $X$, $C^k(\mathbb{R}_+; X)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$ è l'insieme delle funzioni su $\mathbb{R}_+$ a valori in $X$, $k$ volte differenziabili in $\mathbb{R}_+$ rispetto alla topologia forte di $X$.

Se $A$ è un operatore lineare chiuso in $X$, $D_A(X)$ rappresenta il dominio di $A$ e, per ogni intero positivo $h$, $D_{A^h}(X)$ il dominio di $A^h$:

$$D_{A^h} = \{x \in X : A^i x \in D_A,\ i = 0, 1, \ldots, h-1\}. \tag{1.6}$$

$\sigma(A)$ è lo spettro di $A$ e $R(\lambda, A) = (\lambda - A)^{-1}$ il risolvente di $A$.

Un semigruppo regolarizzabile ($R$-semigruppo) $H$ in $X$ è un'applicazione fortemente continua di $\bar{\mathbb{R}}_+$ nell'algebra degli operatori lineari continui in $X$ tale che:

$$H(t)\,H(s) = H(s)\,H(t) = H(t+s)\,H(O) \qquad \forall\ t, s \in \bar{\mathbb{R}}_+ \tag{1.7}$$

(1.8) $H(O)$ è iniettiva e l'immagine di $H^k(O)$ è densa in $X$ per ogni intero non negativo $k$.

Un $R$-semigruppo $H$ è di tipo esponenziale se esistono due costanti $M$ ed $\omega$ tali che:

$$\| H(t) \| \leq M e^{\omega t} \qquad \forall\ t \in \bar{\mathbb{R}}_+ . \tag{1.9}$$

Nel corso del lavoro indicheremo con $c$ costanti positive che di volta in volta possono essere diverse (4).

## 2. Equazione di Schrödinger.

In questo paragrafo $A$ rappresenta un operatore lineare chiuso in uno spazio di Banach $X$, con dominio $D_A$ denso in $X$ e verificante le seguenti condizioni:

$$\sigma(A) \subset \mathbb{R}_- \tag{2.1}$$

$$\| R(\lambda, A) \| \leq c\, \frac{(1 + |\lambda|)^s}{|\lambda| \cos \theta/2} \qquad \forall\ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{R}}_- \tag{2.2}$$

essendo $\theta = \arg \lambda\ (-\pi < \theta < \pi)$, ed $s$ un numero reale non negativo.

Il seguente lemma è una generalizzazione del Teorema [6.1] in [6].

(4) Soltanto quando vi sia possibilità di confusione sarà precisata la dipendenza di $c$ da altre variabili.

LEMMA [2.I]. *Sia $U$ un operatore lineare chiuso in uno spazio di Banach $X$, con dominio $D_U$ denso in $X$, e verificante le seguenti condizioni:*

$$\sigma(U) \subset \bar{\mathbb{C}}_- \setminus \{0\} \tag{2.3}$$

$$\| R(\lambda, U) \| \leq c(1 + |\lambda|)^s \qquad \forall \lambda \in \omega + \mathbb{C}_+ , \omega \in \mathbb{R} \tag{2.4}$$

*con $s$ numero reale non negativo.*

*Allora posto:*

$$B = U^{-[s]-2} \tag{2.5}$$

*dove $[s]$ è il più grande intero non superiore a $s$, e*

$$R_B(\lambda, U) = B R(\lambda, U) \qquad \lambda \in \omega + \mathbb{C}_+ \tag{2.6}$$

*esiste un unico R-semigruppo esponenziale che ha come trasformata di Laplace $R_B(\lambda, U)$.*

La dimostrazione è analoga a quella del Teorema [6.I] in [6].

In modo analogo al Teorema [6.II] in [6] si prova anche il seguente lemma:

LEMMA [2.II]. *Se $U$ verifica le condizioni del Lemma [2.I] allora il problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Uu \\ u(O) = u_0 \end{cases} \tag{2.7}$$

*con $u(t)$ funzione su $\bar{\mathbb{R}}_+$ a valori in $X$ e $u_0 \in D_{U^{[s]+2+k}} (k = 1, \ldots)$ ammette una e una sola soluzione $u(t) \in D_{U^k}$.*

TEOREMA [2.I]. *Sia $A$ un operatore lineare chiuso in uno spazio di Banach $X$, con dominio $D_A$ denso in $X$, e verificante le condizioni* (2.1) *e* (2.2).

*Il problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = i\,Au \\ u(O) = u_0 \end{cases} \tag{2.8}$$

*con $u(t)$ funzione su $\bar{\mathbb{R}}_+$ a valori in $X$ e $u_0 \in D_{A^{[s]+2+k}}$ ammette una e una sola soluzione $u(t) \in D_{A^k}$.*

DIMOSTRAZIONE. Posto $U = iA$, $U$ è un operatore lineare chiuso in $X$ con $D_U = D_A$ e risulta, come si verifica facilmente:

$$R(\lambda, U) = -iR(-i\lambda, A) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}_+ . \tag{2.9}$$

Dalla (2.2) si ricava:

$$\| R(\lambda, U) \| = \| R(-i\lambda, A) \| \leq c \frac{(1 + |\lambda|)^s}{|\lambda| \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \leq c\, 2^{1/2} \frac{(1 + |\lambda|)^s}{\operatorname{Re} \lambda}$$

da cui

$$\| R(\lambda, U) \| \leq c(1 + |\lambda|)^s \ \forall \lambda \in 1 + \mathbb{C}_+ .$$

L'operatore $U$ verifica allora le ipotesi del Lemma [2.II], da cui segue la tesi.

## 3. Equazione delle onde.

Siano $Y$ e $Z$ due spazi di Banach con norma rispettivamente $|\cdot|_Y$ e $|\cdot|_Z$ tali che $Y$ sia contenuto in $Z$ algebricamente e topologicamente ($|x|_Z \leq \leq |x|_Y \ \forall x \in Y$) e $Y$ sia denso in $Z$.

Se $T$ è un'applicazione lineare e continua di $Z$ in $Z$ (risp. di $Y$ in $Y$, risp. di $Z$ in $Y$) indicheremo con $|T|_Z$ (risp. $|T|_Y$, risp. $|T|_{Z \to Y}$) la norma di $T$.

Sia $A$ un operatore lineare chiuso in $Z$ con dominio $D_A(Z)$ ed in $Y$ con dominio $D_A(Y)$ verificante le seguenti condizioni:

i) $D_A(Z) \subset Y$, $D_A(Z)$ *è denso in* $Y$

ii) *lo spettro di* $A$, $\sigma(A)$, *è lo stesso sia in* $Y$ *che in* $Z$ *e*:

$$\sigma(A) \subset \mathbb{R}_- \tag{3.1}$$

iii) *esiste un numero non negativo* $s$ *tale che* $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ *risulti*:

$$|R(\lambda, A)|_Z \leq c \frac{(1 + |\lambda|)^s}{|\lambda| \cos \theta/2} \tag{3.2}$$

$$|R(\lambda, A)|_Y \leq c \frac{(1 + |\lambda|)^s}{|\lambda| \cos \theta/2} \tag{3.3}$$

$$|R(\lambda, A)|_{Z \to Y} \leq c \frac{(1 + |\lambda|)^s}{|\lambda|^{1/2} \cos \theta/2} \tag{3.4}$$

*dove* $\theta = \arg \lambda$ *la* (3.4) *avendo senso in virtù della* i).

Muniamo infine $D_A(Z)$ della norma:

$$|x|_{D_A(Z)} = |Ax|_Z \quad \forall x \in D_A(Z) \tag{3.5}$$

(la (3.5), in virtù della (3.1), definisce una norma equivalente a quella del grafico di $A$), ed osserviamo che se $\lambda \notin \sigma(A)$, $R(\lambda, A)$ applica $Y$ in $D_A(Y)$ e quindi in $D_A(Z)$. Ha quindi senso l'ulteriore condizione:

iv)

$$|R(\lambda, A)|_{Y \to D_A(Z)} \leq c \frac{(1 + |\lambda|)^s}{|\lambda|^{1/2} \cos \theta/2} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- . \tag{3.6}$$

Indichiamo con $X$ lo spazio di Banach somma diretta di $Y$ e $Z$:

$$X = Y \oplus Z \tag{3.7}$$

con la norma

$$\left\| \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \right\| = |y|_Y + |z|_Z \qquad y \in Y, \quad z \in Z. \tag{3.8}$$

Sia $U$ l'operatore lineare in $X$ così definito:

$$U \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ Ay \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

Il dominio di tale operatore è

$$D_U = D_A(Z) \oplus Y$$

e $D_U$ è denso in $X$.

Nel seguito l'operatore $U$ sarà anche rappresentato con la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ A & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

LEMMA [3.I] *$U$ è chiuso in $X$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{x_n\} = \left\{ \begin{pmatrix} y_n \\ z_n \end{pmatrix} \right\}$ una successione in $D_U$ tale che:

$$x_n = \begin{pmatrix} y_n \\ z_n \end{pmatrix} \to x = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \text{ in } X \tag{3.11}$$

$$Ux_n = \begin{pmatrix} z_n \\ Ay_n \end{pmatrix} \to \bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} \text{ in } X. \tag{3.12}$$

Dalla (3.12) segue che $z_n \to \bar{y}$ in $Y$, per cui $z = \bar{y} \in Y$. Inoltre, per la (3.11), $y_n \to y$ in $Y$, e quindi in $Z$, mentre, per la (3.12) $Ay_n \to \bar{z}$ in $Z$. Poichè $A$ è chiuso, $y \in D_A(Z)$ e $\bar{z} = Ay$; ma allora $x = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in D_U$ e $Ux = \bar{x}$, cosicchè $U$ è chiuso.

LEMMA [3.II]. *Valgono le seguenti relazioni*:

$$D_{U^{2n}} = D_{A^n}(Y) \oplus D_{A^n}(Z) \qquad n = 1,2,\dots \tag{3.13}$$

$$D_{U^{2n+1}} = D_{A^{n+1}}(Z) \oplus D_{A^n}(Y) \qquad n = 0,1,\dots \tag{3.14}$$

$$\sigma(U) \subset \bar{\mathbb{C}}_- \setminus \{0\} \tag{3.15}$$

$$R(\lambda, U)\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda R(\lambda^2, A)\, y + R(\lambda^2, A)\, z \\ AR(\lambda^2, A)\, y + \lambda R(\lambda^2, A) z \end{pmatrix} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{3.16}$$

*ovvero, in forma matriciale*:

$$R(\lambda, U) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ A & \lambda \end{pmatrix} R(\lambda^2, A) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{3.17}$$

$$\| R(\lambda, U) \| \leq c\, \frac{(1 + |\lambda|^2)^s}{|\lambda| \cos\theta} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{3.18}$$

*essendo* $\theta = \arg \lambda$.

DIMOSTRAZIONE. Le (3.13) e (3.14) seguono dalle relazioni relazioni

$$U^{2n} = \begin{pmatrix} A^n & O \\ O & A^n \end{pmatrix}; \; U^{2n+1} = \begin{pmatrix} O & A^n \\ A^{n+1} & O \end{pmatrix}.$$

Sia $\lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \{O\}$; allora $\lambda^2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Poniamo per tali $\lambda$:

$$B(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ A & \lambda \end{pmatrix} R(\lambda^2, A)$$

e sia

$$\begin{pmatrix} \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = B(\lambda)\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

Si ha:

$$\bar{y} = \lambda R(\lambda^2, A)\, y + R(\lambda^2, A)\, z$$

$$\bar{z} = AR(\lambda^2, A)\, y + \lambda R(\lambda^2, A)\, z = \lambda^2 R(\lambda^2, A)\, y - y + \lambda R(\lambda^2, A)\, z$$

da cui

$$\bar{y} \in D_A(Z)$$

$$\bar{z} \in Y$$

e quindi $\begin{pmatrix} \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} \in D_U$. Inoltre, con facili calcoli, si trova

$$(\lambda - U)\begin{pmatrix} \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

ovvero

$$(\lambda - U)\, B(\lambda)\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}. \tag{3.19}$$

Viceversa sia $x = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in D_U$; si ha:

$$(\lambda - U)\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda y - z \\ \lambda z - Ay \end{pmatrix}$$

da cui

$$B(\lambda)(\lambda - U)\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}. \tag{3.20}$$

Dalle (3.19), (3.20) segue allora $B(\lambda) = R(\lambda, U)$.

Sia infine $\lambda \in \mathbb{C}_+$, $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in X$; si ha:

$$\left\| R(\lambda, U)\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \right\| = | \lambda R(\lambda^2, A) y + R(\lambda^2, A) z |_Y + | AR(\lambda^2, A) y - \lambda R(\lambda^2, A) z |_Z \leq$$

$$\leq | \lambda | \, | R(\lambda^2, A) y |_Y + | R(\lambda^2, A) z |_Y + | AR(\lambda^2, A) y |_Z + | \lambda | \, | R(\lambda^2, A) z |_Z$$

e per le (3.2), ..., (3.6):

$$\left\| R(\lambda, U)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| \leq c \frac{(1 + |\lambda|^2)^s}{|\lambda| \cos\theta} \left\| \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \right\|, \text{ da cui la (3.18).}$$

TEOREMA [3.1]. *Se $A$ verifica le condizioni* i), ..., iv), *allora il problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 u}{dt^2} = Au \\ u(0) = u_0 \\ u'(0) = v_0 \end{cases} \tag{3.21}$$

*con $u(t)$ funzione su $\mathbb{R}_+$ ha valori in $X$ e $u_0, v_0$ verificanti le condizioni:*

$$(3.22) \qquad \begin{cases} u_0 \in D_{A^{1/2([2s]+2+k)}}(Y), \quad v_0 \in D_{A^{1/2([2s]+2+k]}}(Z) \\ \text{se } [2s]+k \text{ è pari} \\ u_0 \in D_{A^{1/2([2s]+3+k)}}(Z), \quad v_0 \in D_{A^{1/2([2s]+1+k)}}(Y) \\ \text{se } [2s]+k \text{ è dispari} \end{cases}$$

*ammette una ed una sola soluzione $u(t)$, verificante $\forall\, t > 0$ le condizioni:*

$$(3.23) \qquad \begin{cases} u(t) \in D_{A^{k/2}}(Y), \quad u'(t) \in D_{A^{k/2}}(Z) \ \textit{se } k \textit{ è pari} \\ u(t) \in D_{A^{(k+1)/2}}(Z), \quad u'(t) \in D_{A^{(k-1)/2}}(Y) \ \textit{se } k \textit{ è dispari.} \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Posto:

$$v(t) = u'(t)$$

$$W(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}, \qquad W_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

il problema (3.21) diventa:

$$(3.24) \qquad \begin{cases} \dfrac{dW}{dt} = UW \\ W(O) = W_0 \end{cases}$$

e le condizioni (3.22) si riducono a

$$W_0 \in D_{U^{[2s]+2+k}}$$

l'operatore $U$ soddisfa, in virtù del Lemma [3.II], le condizioni del Lemma [2.II]. Il problema (3.24) ha allora soluzione unica $W(t)$ verificante la condizione

$$W(t) \in D_{U^k}$$

che è equivalente alle (3.23).

## 4. Proprietà spettrali degli operatori ellittici in $L^2$.

Sia $\Omega$ un operatore limitato di $\mathbb{R}^n$, con frontiera $\partial\Omega$ di classe $C^\infty$ e sia $A$ l'operatore differenziale di ordine $2m$:

$$(4.1) \qquad Au(x) = -\sum_{\substack{\varrho \leq m \\ \sigma \leq m}} D^\varrho (a_{\varrho\sigma}(x)\, D^\sigma u(x))$$

con coefficienti $a_{\varrho\sigma}(x)$ appartenenti a $C^\infty(\overline{\Omega})$.

Sia

$$\mathcal{A}(u, v) = - \sum_{\substack{\varrho \le m \\ \sigma \le m}} \int_{\Omega} a_{\varrho\sigma}(x)\, D^{\sigma} u(x)\, \overline{D^{\varrho} v(x)}\, dx \tag{4.2}$$

la forma associata all'operatore $A$; supponiamo che sia:

$$-\mathcal{A}(u, u) \ge \nu \, \| u \|_m^2 \qquad \forall\, u \in C_0^{\infty}(\Omega). \tag{4.3}$$

La (4.3) equivale all'ipotesi che $-A$ sia fortemente ellittico e formalmente autoaggiunto.

Consideriamo il problema di Dirichlet:

$$\begin{cases} \lambda u - Au = f \text{ in } \Omega, \quad f \in L^2 \\ u \in H_0^m(\Omega). \end{cases} \tag{4.4}$$

Tale problema ha soluzione unica per ogni $\lambda$ in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

È noto che $A$ è un operatore lineare chiuso in $L^2$ con dominio $D_A = H_0^m \cap H^{2m}$, e si verifica facilmente che $A$ è un operatore chiuso in $Y = H_0^m$, con dominio

$$D_A(Y) = \{u \in H_0^m : Au \in H_0^m\}. \tag{4.5}$$

LEMMA [4.I] *Sia $u(x)$ la soluzione del problema* (4.4); *posto $\lambda = |\lambda| e^{i\theta} (-\pi < \theta < \pi)$ valgono le seguenti maggiorazioni:*

$$\| u \|_0 \le \frac{1}{|\lambda| \cos \theta/2} \| f \|_0 \tag{4.6}$$

$$\| u \|_{2m} \le \frac{c}{\cos \theta/2} \| f \|_0 \tag{4.7}$$

$$\| u \|_m \le \frac{c}{|\lambda|^{1/2} \cos \theta/2} \| f \|_0 . \tag{4.8}$$

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $v \in H_0^m$

$$e^{-i\theta/2} \lambda (u, v)_0 - e^{-i\theta/2} \mathcal{A}(u, v) = e^{-i\theta/2} (f, v)_0 .$$

Scegliendo $v = u$, prendendo la parte reale dei due membri e tenendo conto della (4.3) si ha:

$$|\lambda| \cos \theta/2 \, \| u \|_0^2 \le \| f \|_0 \, \| u \|_0$$

da cui la (4.6).

Da questa deriva la (4.7), osservando che

$$\| u \|_{2m} \leq c \, \| Au \|_0 \leq c \, \{ | \lambda | \, \| u \|_0 + \| f \|_0 \}.$$

Per dimostrare la (4.8) usiamo la nota diseguaglianza:

$$\| u \|_m \leq c \, \{ \varepsilon \, \| u \|_{2m} + \varepsilon^{-1} \, \| u \|_0 \}. \qquad (\varepsilon > 0) \tag{4.9}$$

Scelto $\varepsilon = | \lambda |^{-1/2}$ la (4.8) segue dalle (4.6) e (4.7).

LEMMA [4.11]. *Nelle ipotesi del Lemma* [4.I], *se* $f \in H_0^m$ *valgono le seguenti maggiorazioni :*

$$\| u \|_m \leq \frac{c}{| \lambda | \cos \theta/2} \, \| f \|_m \tag{4.10}$$

$$\| u \|_{3m} \leq \frac{c}{\cos \theta/2} \, \| f \|_m \tag{4.11}$$

$$\| u \|_{2m} \leq \frac{c}{| \lambda |^{1/2} \cos \theta/2} \, \| f \|_m . \tag{4.12}$$

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo in primo luogo che la funzione $v = Au$ appartiene a $H_0^m$ ed è la soluzione debole [1] del problema di Dirichlet:

$$\begin{cases} \lambda v - Av = - \sum\limits_{|\varrho| \leq m} D^\varrho f_\varrho \\ v \in H_0^m \end{cases} \tag{4.13}$$

con $f_\varrho = \sum\limits_{|\varrho| \leq m} a_{\varrho\sigma} D^\sigma f \in L^2$.

Si ha allora, $\forall \, w \in H_0^m$:

$$e^{-i\theta/2} \lambda \, (v, w)_0 - e^{-i\theta/2} \mathscr{A} \, (v, w) = - e^{-i\theta/2} \sum_{|\varrho| \leq m} (f_\varrho \, , D^\varrho w)_0 \, .$$

Scegliendo $w = v$ e tenendo conto della (4.3):

$$\nu \cos \theta/2 \, \| v \|_m^2 \leq \| v \|_m \sum_{|\varrho| \leq m} \| f_\varrho \|_0 \leq c \, \| v \|_m \, \| f \|_m$$

da cui

$$\| Au \|_m \leq \frac{c}{\cos \theta/2} \, \| f \|_m \, . \tag{4.14}$$

Da questa relazione deriva la (4.11), dato che, per un noto teorema di regolarizzazione:

$$\| u \|_{3m} \leq c \, \| Au \|_m \, .$$

La (4.10) segue dalla (4.14) osservando che

$$\| u \|_m \leq | \lambda |^{-1} \{ \| Au \|_m + \| f \|_m \}$$

e la (4.12) discende dalle altre due, tramite la (4.9).

## 5. Proprietà spettrali degli operatori ellittici in $L^p$.

Ricordiamo alcuni noti risultati :

[5.A] *Teorema di Sobolev.*

*Se* $f \in H^{k,p}(\Omega)$ *allora :*

a$_1$) *se* $pk < n$, $f \in L^{p*}(\Omega)$ *con* $p* = pn/(n - pk)$

a$_2$) *se* $pk \geq n$, $f \in L^q(\Omega)$ $\forall q < \infty$.

*In ogni caso si ha la maggiorazione:*

$$\| f \|_\sigma \leq c \| f \|_{k,p} \tag{5.1}$$

*dove* $\sigma$ *indica, a seconda dei casi, gli spazi* $L^{p*}$ *o* $L^q$.

[5.B] *Proprietà di inclusione.*

*Si ha la seguente inclusione (algebrica e topologica)*

$$L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega) \qquad \forall p, q \quad 1 \leq p \leq q < +\infty$$

[5.C] *Interpolazione.*

*Esiste una costante* $c > 0$ *tale che* $\forall \varepsilon > 0$ *e* $\forall p$ $(1 \leq p < +\infty)$

$$\| f \|_{m,p} \leq c \{ \varepsilon \| f \|_{2m,p} + \varepsilon^{-1} \| f \|_p \} \quad \forall f \in H^{2m,p}. \tag{5.2}$$

[5.D] *Regolarizzazione* ([3]).

*Sia* $u$ *la soluzione del problema di Dirichlet*:

$$\begin{cases} Au = f \\ u \in H_0^m, \end{cases} \tag{5.3}$$

*dove* $A$ *è l'operatore ellittico* (4.1).

*Se $f \in H^{k,p}$ $(2 \leq p < +\infty)$, allora $u \in H^{2m+k,p}$ e si ha la maggiorazione*

$$\| u \|_{2m+k,p} \leq c \| f \|_{k,p} . \tag{5.4}$$

LEMMA [5.I]. *Sia $u$ la soluzione del problema di Dirichlet:*

$$\begin{cases} \lambda u - Au = f \\ u \in H_0^m \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \tag{5.5}$$

*e sia $k$ tale che:*

$$4mk < n \leq 4m(k+1).$$

*Poniamo:*

$$p_h = 2n/(n - 4mh) \qquad h = 0, 1, \dots, k$$

*e sia $p_{k+1}$ un numero arbitrario maggiore di $p_k$.*

*Se $f \in L^{p_h}$ allora $u \in H^{2m,p_h} \cap H_0^m$ e si ha:*

$$\| u \|_{2m,p_h} \leq c \frac{(1 + |\lambda|)^h}{\cos \theta/2} \| f \|_{p_h} \qquad \theta = \arg \lambda . \tag{5.6}$$

DIMOSTRAZIOME. Per $h = 0$ la (5.6) si riduce alla (4.7).

Supponiamo che la (5.6) sia vera per $h$ e dimostriamola per $h+1$. La soluzione $u$ del problema (5.5) è anche soluzione (unica) del problema:

$$\begin{cases} Aw = \lambda u - f \\ w \in H_0^m . \end{cases} \tag{5.7}$$

Se $f \in L^{p_{h+1}}$ allora $\lambda u - f \in L^{p_{h+1}}$. Dalla (5.4) si ha allora:

$$\| u \|_{2m,p_{h+1}} \leq c \{ \| f \|_{p_{h+1}} + |\lambda| \, \| u \|_{p_{h+1}} \} \leq c \{ \| f \|_{p_{h+1}} + |\lambda| \, \| u \|_{2m,p_h} \}$$

$$\leq c \left\{ \| f \|_{p_{h+1}} + |\lambda| \frac{(1 + |\lambda|)^h}{\cos \theta/2} \| f \|_{p_h} \right\} \leq c \frac{(1 + |\lambda|)^{h+1}}{\cos \theta/2} \| f \|_{p_{h+1}} .$$

LEMMA [5.II]. *Nelle ipotesi del Lemma [5.I], se $f \in H_0^{m,p_h}$ $(h = 0, 1, \dots, k+1)$ allora $u \in H^{3m,p_h} \cap H_0^m$ e si ha la maggiorazione:*

$$\| u \|_{3m,p_h} \leq c \frac{(1 + |\lambda|)^h}{\cos \theta/2} \| f \|_{m,p_h} . \tag{5.8}$$

DIMOSTRAZIONE. E' analoga a quella del Lemma [5.I].

I risultati dei Lemmi [5.I] e [5.II] possono essere espressi in termini del risolvente. $A$ è un operatore lineare chiuso in $L^p$ con dominio $D_A(L^p) =$

$= H^{2m,p} \cap H_0^m$ ed in $H_0^{m,p}$ con dominio:

$$D_A(H_0^{m,p}) = \{f \in H_0^{m,p} : Af \in H_0^{m,p}\}.$$

Le maggiorazioni (5.6) e (5.8) prendono allora la forma:

$$\| AR(\lambda, A) \|_{X^{p_h}} \leq c(h) \frac{(1 + |\lambda|)^h}{\cos \theta/2} \qquad h = 0, 1, \dots, k+1 \tag{5.9}$$

dove $X^p$ indica, a seconda dei casi, $L^p$ o $H_0^{m,p}$.

LEMMA [5.III]. *Per ogni* $p: 2 \leq p < \infty$

$$\| AR(\lambda, A) \|_{X^p} \leq \frac{c(1 + |\lambda|)^{\sigma(p)}}{\cos \theta/2} \tag{5.10}$$

*dove*

$$\sigma(p) = \begin{cases} n(p-2)/(4mp) & 2 \leq p \leq p_k \\ (1+\varrho)(1+k)(p-2)/p & p_k < p < \infty \quad (\varrho > 0 \text{ arbitrario}) \end{cases} \tag{5.11}$$

*e c dipende da p e da* $\varrho$.

OSSERVAZIONE. Posto $k + 1 = n/(4m) + \mu \, (0 \leq \mu < 1)$ si ha:

$$\sigma(p) = \begin{cases} n(p-2)/(4mp) & 2 \leq p \leq p_k \\ n(p-2)/(4mp) + (\mu + \varrho')(p-2)/p & p_k < p < \infty, \quad \varrho' = (k+1)\varrho. \end{cases} \tag{5.12}$$

DIMOSTRAZIONE. Per $2 \leq p \leq p_k$ la (5.10) discende dal Teorema di Riesz-Thorin.

Sia $p_k < p < \infty$. Scelto $\varrho > 0$, se $p/(p-2) \leq 1 + \varrho$ la (5.10) deriva dalla (5.9), in cui si scelga $p_{k+1} = p$.

In caso contrario sia $p' > p$ tale che $p'/(p'-2) = 1 + \varrho$. Scelto nella (5.9) $p_{k+1} = p'$, e interpolando tramite il Teorema di Riesz-Thorin tra $X^2$ e $X^{p'}$ si ottiene:

$$\| AR(\lambda, A) \|_{X^p} \leq c \frac{(1 + |\lambda|)^{(k+1)(1+t)}}{\cos \theta/2} \tag{5.13}$$

dove $t$ è tale che

$$1/p = t/2 + (1-t)/p'. \tag{5.14}$$

La tesi segue introducendo nella (5.13) il valore di $t$ dato dalla (5.14).

LEMMA [5.IV]. *Sussiste la seguente maggiorazione:*

$$\| R(\lambda, A) \|_{X^p} \leq \frac{c\,(1 + |\lambda|)^{\sigma(p)}}{|\lambda| \cos \theta/2}. \tag{5.15}$$

DIMOSTRAZIONE. Segue dal Lemma [5.III] e dall'identità

$$\lambda R(\lambda, A) = AR(\lambda, A) + 1.$$

LEMMA [5.V]. *Sia $u(x)$ la soluzione del problema di Dirichlet:*

$$\begin{cases} \lambda u - Au = f & \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \\ u \in H_0^m. \end{cases} \tag{5.16}$$

*Allora:*

$$\| u \|_{m,p} \leq c \frac{(1 + |\lambda|)^{\sigma(p)}}{|\lambda|^{1/2} \cos \theta/2} \| f \|_p \qquad \forall f \in L^p \tag{5.17}$$

$$\| u \|_{2m,p} \leq c \frac{(1 + |\lambda|)^{\sigma(p)}}{|\lambda|^{1/2} \cos \theta/2} \| f \|_{m,p} \qquad \forall f \in H_0^{m,p}. \tag{5.18}$$

DIMOSTRAZIONE. Segue dai Lemmi [5.III] e [5.IV] e dalla (5.2), in cui si scelga $\varepsilon = |\lambda|^{-1/2}$.

## 6. Equazioni di evoluzione in $L^p$.

In questo paragrafo $p$ è un numero reale $\geq 2$.
Sia $k$ un intero tale che $4mk \leq n < 4m(k+1)$, poniamo:

$$\sigma(p) = \begin{cases} n(p-2)/(4mp) & \text{se} \quad p \leq 2n/(n-4mk) \\ (k+1)(1+\varrho)(p-2)/p \ (\varrho > 0 \text{ arbitrario}) & \text{se } p > 2n/(n-4mk). \end{cases} \tag{6.1}$$

I risultati dei paragrafi 2 ... 5 permettono di enunciare i seguenti Teoremi:

TEOREMA [6.1]. (Equazione di Schrödinger).
*Sia $A$ un operatore differenziale su $\Omega$ di ordine $2m$, fortemente ellittico e formalmente autoaggiunto, con coefficienti di classe $C^\infty$.*

*Indichiamo ancora con $A$ la realizzazione di $A$ in $L^p$ sotto le condizioni ai limiti di Dirichlet, con dominio:*

$$D_A = H^{2m,p} \cap H_0^m \text{ (5)}. \tag{6.2}$$

*Il problema misto (nel senso di Hadamard):*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = i\,Au \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{6.3}$$

*con $u_0 \in D_{A^{[\sigma(p)]+3}}$ ammette una e una sola soluzione $u(x,t) \in H^{2m,p} \cap H_0^m$ $\forall\, t \in \mathbb{R}_+$ (6), verificante la maggiorazione:*

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^p(\Omega)} + \| u \|_{H^{2m,p}(\Omega)} \leq c e^t \| u_0 \|_{H^{([\sigma(p)]+3)2m,p}(\Omega)} \tag{6.4}$$

*con $c$ indipendente da $u_0$.*

OSSERVAZIONI.

$a)$ Se $h$ è un intero positivo si ha:

$$H_0^{2hm,p} \subset D_{A^h} \subset H^{2hm,p} \tag{6.5}$$

$b)$ Se $u_0 \in D_{A^{[\sigma(p)]+2+k}}$ allora $u(x,t) \in D_{A^k}$ $\forall\, t \in \mathbb{R}_+$; o, il che è equivalente, $u \in C^k(\mathbb{R}_+; L^p)$, ($k$ intero positivo). Segue allora dal Teorema di Sobolev che se $u_0 \in C^\infty$ allora $u(x,t)$ è $C^\infty$ in $x$ e in $t$.

$c)$ Se $m \geq n/4$ comunque fissato $p$ si può scegliere $\varrho$ in (6.1) in modo tale che sia $[\sigma(p)] = 0$.

Posto ad esempio $n = 3$, $A = \Delta$ si trova che il problema di Cauchy (6.3) è risolubile se $u_0 \in D_{A^3}$ (in particolare se $u \in H_0^{6,p}$) e si ha:

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^p(\Omega)} + \| u \|_{H^{2,p}(\Omega)} \leq c e^t \| u_0 \|_{H^{6,p}(\Omega)}. \tag{6.6}$$

TEOREMA [6.11] (Equazione delle onde).

*Sia $A$ un operatore differenziale su $\Omega$ di ordine $2m$, fortemente ellittico e formalmente autoaggiunto, con coefficienti di classe $C^\infty$.*

(5) Vedi [8], pag. 92.

(6) ovvero, il che è equivalente, $u \in C^1(\mathbb{R}_+; L^p)$.

*Indichiamo ancora con $A$ le due realizzazioni di $A$ rispettivamente $L^p$ e in $H_0^{m,p}$ sotto le condizioni ai limiti di Dirichlet, con domini:*

$$D^A(L^p) = H^{2m,p} \cap H_0^m \tag{6.7}$$

$$D^A(H_0^{m,p}) = \{u \in H_0^{m,p}\,; \quad Au \in H_0^{m,p}\} \tag{6.8}$$

*Il problema misto*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Au \\ u(0) = u_0 \\ u'(0) = v_0 \end{cases} \tag{6.9}$$

*con*

$$\begin{cases} u_0 \in D_{A^{1/2([2\sigma(p)]+3)}}(H_0^{m,p}),\ v_0 \in D_{A^{1/2([2\sigma(p)]+3)}}(L^p) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \textit{se } [2\sigma(p)] \textit{ è dispari} \\ u_0 \in D_{A^{1/2([2\sigma(p)]+4)}}(L^p),\ v_0 \in D_{A^{1/2([2\sigma(p)]+2)}}(H_0^{m,p}) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \textit{se } [2\sigma(p)] \textit{ è pari} \end{cases} \tag{6.10}$$

*ammette una e una sola soluzione $u \in H^{2m,p}(\Omega) \cap H_0^{m,p}(\Omega)$ con $u' \in H_0^{m,p}(\Omega)$ e $u'' \in L^p(\Omega)$ per ogni $t > 0$ e verificante la maggiorazione:*

$$\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\|_{L^p(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{H^{m,p}(\Omega)} + \| u \|_{H^{2m,p}(\Omega)} \tag{6.11}$$

$$\leq c e^t (\| u_0 \|_{H^{m([2\sigma(p)]+4),p}(\Omega)} + \| v_0 \|_{H^{m([2\sigma(p)]+3),p}(\Omega)})$$

OSSERVAZIONI

*a*) Se $h$ è un intero positivo si ha:

$$H_0^{2hm,p} \subset D_{A^h}(L^p) \subset H^{2hm,p} \tag{6.12}$$

$$H_0^{3hm,p} \subset D_{A^h}(H_0^{m,p}) \subset H^{3hm,p} \cap H_0^m. \tag{6.13}$$

*b*) Sia $k$ intero tale che $[2\sigma(p)] + k$ è pari (supponiamo per semplicità che $k$ sia pari).

Se $u_0 \in D_{A^{1/2([2\sigma(p)]+2+k)}}(H_0^{m,p})$, $v_0 \in D_{A^{1/2([2\sigma(p)]+2+k)}}(L^p)$ allora $u(x,t) \in D_{A^{k/2}}(H_0^{m,p})$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \in D_{A^{k/2}}(L^p)\ \forall\ t \in \mathbb{R}_+$; o, il che è equivalente, $u \in C^{k/2}(\mathbb{R}_+ ; H_0^{m,p})$ e $u' \in C^{k/2}(\mathbb{R}_+ ; L^p)$.

Segue allora dal Teorema di Sobolev che se $u_0, v_0 \in C^\infty$ allora $u(x,t)$ è $C^\infty$ in $x$ e in $t$.

*c*) Se $m \geq n/4$ per ogni $p$ fissato si può scegliere $\varrho$ in (6.1) in modo che sia $[2\sigma(p)] = 1$.

Posto ad esempio $n = 3$, $A = \Delta$ si trova che il problema di Cauchy (6.9) è risolubile se $u_0 \in D_2(H_0^{1,p})$ e $v_0 \in D_{A^2}(L^p)$ (in particolare se $u_0 \in H_0^{5,p}$ e $v_0 \in H_0^{4,p}$) e si ha:

$$\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\|_{L^p(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{H^{1,p}(\Omega)} + \| u \|_{H^{2,p}(\Omega)} \leq \tag{6.14}$$

$$\leq c e^t (\| u_0 \|_{H^{5,p}(\Omega)} + \| v_0 \|_{H^{4,p}(\Omega)}).$$

*Università di Pisa*

# BIBLIOGRAFIA


[1] S. AGMON, « *Lectures on elliptic boundary value problems* ». Van Nostrand Math. Studies-Princeton N. J.

[2] S. AGMON, « *On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems* ». Comm. Pure Appl. Math. **15** (1962)-119-147.

[3] S. AGMON-A. DOUGLIS-N. NIRENBERG « *Estimates Near the Boundary for Solutions of Elliptic Partial Differential Equations Satisfying General Boundary Conditions I* ». Comm. Pure Appl. Math. **12** (1959) 623-727.

[4] S. AGMON-N. NIRENBERG, « *Properties of Solutions of ordinary differential equations in Banach spaces* ». Comm. Pure Appl. Math. **16** (1963) 121-239.

[5] F. E. BROWDER, « *On the spectral theory of elliptic differential operators I* ». Math. Annalen **142** (1961) 22-130.

[6] G. DA PRATO, « *Semigruppi Regolarizzabili* ». Ricerche di Matematica vol. XV ( 1966) 224-248.

[7] C. FOIAS, «*Remarques sur les semi-groupes distributions d'operateurs normaux*». Portugaliae Mat. **19** (1960) 227-243.

[8] G. GEYMONAT-P. GRISVARD, « *Problemes aux limites elliptiques dans* $L^p$ ». Cooperativa Libraria Universitaria Pavese (1964).

[9] E. HILLE-R. S. PHILLIPS, « *Functional Analysis and semi groups* ». Colloq. Publ. Amer Math. Soc. **31** (1957).

[10] J. L. LIONS, « *Une Remarque sur les Applications du Thèoreme de Hille-Yosida* ». J. Math. Soc. Japan **9** (1957)-62-70.

[11] J. L. LIONS, « *Les semi-groupes distributions* ». Portugaliae Math. **19** (1960) 141-164.

[12] W. LITTMAN, « *The Wave Operator and* $L^p$ *Norms* » J. Math. and Mech. **12** (1963) 55-68.

[13] J. PEETRE, « *Sur la Théorie des semi-groupes distributions* ». Sem. sur les Equations aux dérivèes partielles, College de France Nov. 1963-Mai 1964 76-98.

[14] K. YOSHINAGA, « *Ultra distributions and semi-groups distributions* ». Bull. Kyushu Inst. Tech. **10** (1963) 1-24.

[15] K. YOSIDA, « *Functional Analysis* » Springer Verlag (1965).